О решётке подмногообразий сплетения многообразия полурешёток и многообразия полугрупп с нулевым умножением

А. В. ТИЩЕНКО
Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации
e-mail: alextish@bk.ru

УДК 512.532.2

Ключевые слова: многообразие, полугруппа, сплетение многообразий, решётка подмногообразий, полурешётка, полугруппа с нулевым умножением.

Аннотация

Известно, что моноидное сплетение любых двух многообразий, являющихся атомами в решётке всех полугрупповых многообразий, может иметь как конечную, так и бесконечную решётку подмногообразий. Если эта решётка подмногообразий конечна, то она, как правило, имеет самое большее 11 подмногообразий. Это было доказано в статье автора в 2007 году. Исключение составляет моноидное сплетение $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$ многообразия всех полурешёток и многообразия полугрупп с нулевым умножением. Число элементов решётки $L(\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2)$ всех подмногообразий $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$ пока неизвестно. В нашей статье показано, что эта решётка содержит не менее 33 элементов. Кроме того, дана некоторая экспоненциальная оценка сверху числа элементов этой решётки.

Abstract

A. V. Tishchenko, On the lattice of subvarieties of the wreath product the variety of semilattices and the variety of semigroups with zero multiplication, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 6, pp. 191—212.

It is known that the monoid wreath product of any semigroup varieties that are atoms in the lattice of all semigroup varieties mays have a finite as well as an infinite lattice of subvarieties. If this lattice is finite, then as a rule it has at most eleven elements. This was proved in a paper of the author in 2007. The exclusion is the monoid wreath product $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$ of the variety of semilattices and the variety of semigroups with zero multiplication. The number of elements of the lattice $L(\mathbf{Sl}\mathrm{w}\mathbf{N}_2)$ of subvarieties of $\mathbf{Sl}\mathrm{w}\mathbf{N}_2$ is still unknown. In our paper, we show that the lattice $L(\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2)$ contains no less than 33 elements. In addition, we give some exponential upper bound of the cardinality of this lattice.

1. Введение

При переходе от изучения произведения многообразий групп [6] к многообразиям полугрупп возникает несколько различных вариантов определения такого произведения. Один из вариантов произведения предложил А. И. Мальцев в [5]. Этот вариант изучался в ряде работ математиков Екатеринбурга (школа Л. Н. Шеврина) и других авторов (см. [15, 16]). Второй вариант произведения многообразий и псевдомногообразий полугрупп, основанный на порождении всевозможными сплетениями или полупрямыми произведениями, рассматривался в работах школы Дж. Роудза (см. [1, статьи 5—7] и позднее был изложен в книгах С. Эйленберга [17] и Ж. Лаллемана [4, гл. 4—6], а затем изучался рядом зарубежных авторов. Здесь возникли разные варианты определения: общее сплетение, моноидное сплетение и стандартное сплетение. При этом оказалось, что общее сплетение и моноидное сплетение полугрупповых многообразий ассоциативно, а стандартное сплетение не ассоциативно (см. [3, 9, 23]).

Напомним, что упорядоченный моноид полугрупповых многообразий относительно операции моноидного сплетения многообразий изучался в [12]. Как устроено сплетение атомов решётки полугрупповых многообразий систематически было рассмотрено в [13]. Напомним, что многообразие $\mathbf{U}$ полугрупп называется *кроссовым*, если оно обладает следующими тремя свойствами:

1) оно порождается конечной полугруппой;
2) оно конечно базируемо;
3) оно имеет конечную решётку подмногообразий (см., например, [21]).

Атомы решётки всех полугрупповых многообразий давно известны (см., например, [18]). Это многообразие $\mathbf{N}_2$ полугрупп с нулевым умножением, многообразие $\mathbf{L}$ полугрупп левых нулей, многообразие $\mathbf{R}$ полугрупп правых нулей, многообразие $\mathbf{Sl}$ полурешёток и счётное число групповых атомов $\mathbf{A}_p$, порождаемых циклическими группами простого порядка $C(p)$. В четырёх случаях решётка $L(\mathbf{U} \,\mathrm{w}\, \mathbf{V})$ бесконечна, а именно для случаев сплетения атомов $\mathbf{A}_p \,\mathrm{w}\, \mathbf{A}_p$, $\mathbf{Sl} \,\mathrm{w}\, \mathbf{Sl}$, $\mathbf{Sl} \,\mathrm{w}\, \mathbf{R}$, $\mathbf{Sl} \,\mathrm{w}\, \mathbf{A}_p$.

В остальных случаях сплетение $\mathbf{U} \,\mathrm{w}\, \mathbf{V}$ двух атомов $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ решётки полугрупповых многообразий обладает конечной решёткой подмногообразий. При этом мощность этой решётки, как правило, не превосходит 11 (см. [13, теорема 3.1]). Однако в случае сплетения многообразия полурешёток с многообразием полугрупп с нулевым умножением это не так. В [13] доказано, что такая решётка подмногообразий конечна, но точное вычисление этой решётки не так просто, как в случае других сплетений атомов, если такая решётка оказалась конечной. Поэтому можно поставить две взаимно связанные задачи.

Задача 1. Описать решётку подмногообразий $L(\mathbf{Sl} \,\mathrm{w}\, \mathbf{N}_2)$, где $\mathbf{Sl}$ — многообразие всех полурешёток, $\mathbf{N}_2$ — многообразие полугрупп с нулевым умножением.

Задача 2. Дать оценку мощности решётки подмногообразий $L(\mathbf{Sl} \,\mathrm{w}\, \mathbf{N}_2)$.

Ясно, что полное решение задачи 1 полностью снимает задачу 2. Но пока полное решение задачи 1 отсутствует. В то же время решение такой задачи представляется важным.

В дальнейшем многообразие $\mathbf{Sl} \,\mathrm{w}\, \mathbf{N}_2$ для краткости будем обозначать $\mathbf{W}$. В настоящей статье мы продвинемся в решении задач 1 и 2. А именно, будут найдены две подрешётки решётки подмногообразий $L(\mathbf{W})$, одна из них имеет мощность 13, а вторая 20. Отсюда следует, что мощность рассматриваемой решётки не меньше 33. Анализируя доказательство конечности рассматриваемой решётки, можно найти и оценку сверху её мощности. Но это пока даёт лишь экспоненту порядка 2^{128}.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 приводятся предварительные сведения и описывается подход к решению задач 1 и 2. В разделе 3 описывается решётка всех подмногообразий в решётке $L(\mathbf{Sl} \mathrm{w} \mathbf{N}_2)$, которые не содержат многообразия **Sl** полурешёток. Такие подмногообразия образуют подрешётку из 13 элементов. В разделе 4 строится подрешётка из 20 элементов в решётке всех подмногообразий в решётке $L(\mathbf{Sl} \mathrm{w} \mathbf{N}_2)$, которые содержат многообразие **Sl** полурешёток, и даётся оценка сверху её мощности.

Отметим, что результаты работы о наличии двух непересекающихся подрешёток из 13 и 20 элементов были анонсированы в [11].

2. Предварительные сведения

Будем придерживаться обычной терминологии теории полугрупп и теории многообразий (см., например, [2, 14, 15]). Напомним некоторые определения.

Пусть X — счётный бесконечный алфавит, буквы которого мы будем обозначать $x, y, z, t, x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots, z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ и т. д. Если u, v — слова над алфавитом X, то через $u \approx v$ обозначается тождество над алфавитом X; $|u|$ — длина слова u, $c(u)$ — множество букв алфавита, встречающихся в слове u, $h_k(u)$ — начало слова u длины k. Тождество $u \approx v$ называется *гомотипным*, если для него верно равенство $c(u) = c(v)$, и *гетеротипным*, если для него верно неравенство $c(u) \neq c(v)$.

Элемент a полугруппы S называется *периодическим*, если он удовлетворяет равенству $a^{m+n} = a^m$ для некоторых натуральных чисел m, n. При этом если m и n — наименьшие числа с таким свойством, то $m+n$ называется *порядком*, m — *индексом*, n — *периодом* элемента a. Легко убедиться, что моногенная полугруппа $\langle a \rangle$, порождённая элементом a порядка $l = m + n$, содержит l элементов.

Полугруппа называется *равномерно периодической*, если в ней верно некоторое тождество вида
$$x^m = x^{m+n}.$$
Полугруппа S называется *ниль-полугруппой индекса* m, если в ней истинно тождество
$$x^m = 0.$$
Полугруппа S называется *нильпотентной ступени* m, если в ней истинно тождество
$$x_1 x_2 \ldots x_m = 0.$$
Непустое слово w назовём *линейным*, если любая переменная входит в него не более одного раза.

Сплетением полугрупп S и R при помощи правого R-полигона A называется полугруппа $T = S^A \mathrm{w} R$, определённая на декартовом произведении $S^A \times R$, где S^A — множество всех функций из A в S, а умножение задаётся по формуле

$$(f,p)(g,q) = (f^q g, pq), \quad (f^q g)(a) = f(a)g(ap)$$

для любого $a \in A$ [9, 10, 22]. В нашем случае нас интересует прежде всего сплетение полугрупп с точки зрения сплетения многообразий полугрупп. При изучении сплетений многообразий полугрупп была выделена операция моноидного сплетения многообразий [9, 10, 23] как наиболее удачная. При этом моноидное сплетение многообразий полугрупп порождается всевозможными расширенными стандартными сплетениями, в которых пассивная полугруппа принадлежит первому из сплетаемых многообразий, а активная — второму из них [9, 10]. Отметим, что в [23] моноидное сплетение называется просто сплетением многообразий. Сплетение полугрупп $T = S^A \mathrm{w}\, R$ называется *расширенным стандартным сплетением*, если полигон A совпадает с наименьшим моноидом R^1, содержащим полугруппу R. Расширенное стандартное сплетение обозначается $T = S \mathrm{w}_1 R$. Ввиду вышесказанного в статье рассматриваются только расширенные стандартные сплетения.

Напомним, что в [13] были установлены результаты относительно многообразия $\mathbf{W}$, которые здесь будут существенно использоваться. Сформулируем эти результаты.

Лемма 2.1 [13, следствие 2.13]. *Тождество $u \approx v$ принадлежит множеству тождеств $I(\mathbf{W})$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*:

1) $u \approx v$ *— тривиальное тождество или* $|u|, |v| \geqslant 3$;
2) $h_2(u) = h_2(v)$;
3) *замена общего начала $h_2(u)$ на подслово z_1z_2, где $z_1, z_2 \notin c(uv)$, приводит к тождеству $z_1z_2u_1 = z_1z_2v_1$, в котором $c(u_1) = c(v_1)$.*

Лемма 2.2 [13, следствие 2.14]. *Многообразие $\mathbf{W}$ имеет в качестве базиса тождеств следующие два тождества*:

$$z_1z_2y \approx z_1z_2y^2,$$
$$z_1z_2yx \approx z_1z_2xy.$$

Предложение 2.1 [13, предложение 3.8]. *Решётка $L(\mathbf{W})$ конечна.*

В частности, при доказательстве этого предложения в [13] было установлено, что если в подмногообразии U многообразия $\mathbf{W}$ истинно хотя бы одно гетеротипное тождество, то в нём истинно тождество

$$z_1z_2y \approx z_1z_2x.$$

Если же все тождества в $I(\mathbf{U})$ гомотипны, т. е. для любого тождества $u \approx v$ верно равенство $c(u) = c(v)$, то многообразие $\mathbf{U}$ содержит многообразие $\mathbf{Sl}$ всех полурешёток. В этом случае можно считать, что каждое из слов u и v приведено к эквивалентному $\mathbf{W}$-*каноническому слову*, если оно имеет один из следующих видов:

$$z,\quad z^2x_1\ldots x_k,\quad z^3x_1\ldots x_k,\quad z_1z_2x_1\ldots x_k,$$
$$z_1z_2z_1x_1\ldots x_k,\quad z_1z_2^2x_1\ldots x_k,\quad z_1z_2^2z_1x_1\ldots x_k\quad (k\geqslant 0). \tag{2.1}$$

В решении задач 1 и 2 важным является то, содержит рассматриваемое подмногообразие $\mathbf{V}$ многообразия $\mathbf{W}$ многообразие всех полурешёток или не содержит. Как известно, $\mathbf{Sl}\subseteq\mathbf{V}$ эквивалентно тому, что все тождества в $\mathbf{V}$ являются гомотипными. Нетрудно заметить, что

$$L(\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2)=L'\cup L'',$$

где L' — подрешётка всех подмногообразий в $\mathbf{W}$, в которых истинно хотя бы одно гетеротипное тождество, а L'' — подрешётка всех подмногообразий в $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$, которые содержат многообразие полурешёток $\mathbf{Sl}$. В разделе 3 решётка L' описана полностью. В разделе 4 описана некоторая подрешётка L_0 решётки L'' всех подмногообразий в $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$, которые содержат многообразие полурешёток $\mathbf{Sl}$, а также дана оценка мощности решётки L'' сверху.

Многообразие всех полугрупп, в которых истинны все тождества из множества тождеств Σ, в дальнейшем обозначается $\mathrm{var}\,\Sigma$.

3. Подрешётка L' всех подмногообразий многообразия W, не содержащих многообразие полурешёток

Предложение 3.1. *Подрешётка L' всех подмногообразий многообразия $\mathbf{W}$, в которых истинно некоторое гетеротипное тождество, совпадает с решёткой всех подмногообразий многообразия $\mathbf{L}_{2,3}=\mathrm{var}\{z_1z_2x=z_1z_2y\}$. Эта решётка изображена на рис.* 1. *Она содержит* 13 *элементов.*

Отметим, что на рис. 1 использованы следующие дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{L}_{1,3}=\mathrm{var}\{xy_1y_2\approx xz_1z_2\},\\
&\mathbf{N}_3=\mathbf{L}_{1,3}=\mathrm{var}\{y_1y_2y_3\approx z_1z_2z_3\},\\
&\mathbf{L}_{2,2}=\mathrm{var}\{x_1x_2\approx x_1x_2z\},\\
&\mathbf{L}_{1,2}=\mathrm{var}\{xy\approx xz\},\\
&\mathbf{N}_2=\mathbf{L}_{0,2}=\mathrm{var}\{xy\approx zt\},\\
&\mathbf{L}=\mathbf{L}_{1,1}=\mathrm{var}\{xy\approx x\},\\
&\mathbf{N}_{3,2}=\mathrm{var}\{x^2\approx y_1y_2y_3\},\\
&\mathbf{CN}_3=\mathrm{var}\{y_1y_2y_3\approx z_1z_2z_3,\ xy\approx yx\},\\
&\mathbf{CN}_{3,2}=\mathrm{var}\{x^2\approx y_1y_2y_3,\ xy\approx yx\},
\end{aligned}$$

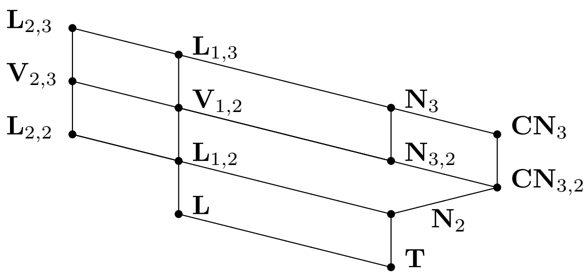

Рис. 1. Подрешётка L' подмногообразий многообразия $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$, не содержащих многообразия полурешёток

$$\mathbf{V}_{2,3} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x^3,\ x_1x_2y \approx x_1x_2z\},$$
$$\mathbf{V}_{1,3} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x^3,\ xy_1y_2 \approx xz_1z_2\}.$$

Замечание 3.1. Обозначения $\mathbf{L}_{j,m}$ $(m \geqslant 1,\ 0 \leqslant j \leqslant m)$ взяты из работы автора [12] и восходят к работе Ю. Г. Кошелева [20] как выбранные для обозначения идемпотентов относительно сплетения многообразий.

Доказательство предложения 3.1. Утверждение доказывается вполне стандартными рассуждениями с обращением к полным описаниям множества всех тождеств $\mathbf{L}_{2,3}$, $\mathbf{L}_{2,2}$, $\mathbf{L}_{1,3}$ и других подмногообразий, указанных на рис. 1. Для примера проведём это рассуждения в случае $\mathbf{L}_{2,3}$. Пусть $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{L}_{2,3}$. Ясно, что $u \approx v \in I(\mathbf{L}_{2,3})$ тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

1) или $u \approx v$ тривиальное, или $|u|, |v| \geqslant 3$;
2) $h_2(u) = h_2(v)$.

Пусть теперь $u \approx v \in I(\mathbf{V}) - I(\mathbf{L}_{2,3})$. Тогда для тождества $u \approx v$ нарушено либо условие 1), либо условие 2).

Пусть нарушено условие 2), но при этом $h_1(u) = h_1(v)$. В таком случае имеем, что тождество вида

$$u \equiv xyu' \approx xyv' \equiv v,$$

в котором y, z — различные переменные, принадлежит множеству $I(\mathbf{V})$. Домножая это тождество справа на какое-либо слово, можно считать, что в рассматриваемом тождестве $|u|, |v| \geqslant 3$. Следовательно, в $\mathbf{V}$ истинна цепочка тождеств

$$xyt \approx xyu' \approx h_3(u) \approx h_3(v) \approx xzv' \approx xzt_1.$$

Таким образом, имеем, что в этом случае $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{L}_{1,3}$.

Пусть $h_1(u) \neq h_1(v)$. Тогда

$$u \equiv xu' \approx yv' \equiv v,$$

где x, y — различные переменные. Полагая $\varphi(x) = x_1x_2$, $\varphi(y) = y_1y_2$ и оставляя остальные переменные неподвижными, получаем в $\mathbf{V}$ истинность тождества $x_1x_2u'' \approx y_1y_2v''$. Следовательно, в $\mathbf{V}$ истинна цепочка тождеств

$$x_1x_2t \approx y_1y_2u'' \approx y_1y_2v'' \approx x_1x_2t_1.$$

Следовательно, в этом случае $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{N}_3$.

Пусть для тождества $u \approx v$ нарушено условие 1). Если при этом $|u| = 1$ и $\mathbf{V} \neq \mathbf{T}$, то в $\mathbf{V}$ истинно тождество $x \approx x^2$. В этом случае имеем

$$xy \approx x^2y \approx x^2z \approx xz.$$

Следовательно, в этом случае $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{L}_{1,2}$. Если при этом $|u| = 2$ и $|v| \geqslant 3$, то $x^2 \approx x^3 \in I(\mathbf{V})$ и $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{V}_{2,3}$. Если $u \equiv xy$, то при $|v| \geqslant 3$ это тождество эквивалентно тождеству $xy \approx xyz$. Таким образом, в этом случае $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{L}_{2,2}$. Если же $|u| = |v| = 2$ и рассматриваемое тождество нетривиально, то при этом заведомо нарушено условие 2) и мы приходим к случаю, уже рассмотренному выше. Неравенство $\mathbf{V}_{2,3} \neq \mathbf{L}_{2,3}$ следует из того, что первое множество тождеств $I(\mathbf{V}_{2,3})$ содержит тождество с левой частью длины 2, а второе множество тождеств таких тождеств не содержит. □

4. Подмногообразия многообразия W, содержащие многообразие полурешёток

Оценим теперь число различных возможных гомотипных тождеств вида $u \approx v$, в которых правая и левая часть являются $\mathbf{W}$-каноническими, т. е. указанными в (2.1), словами. При этом следует понимать, что буквы z, z_1, z_2 в этих словах зарезервированы для букв, которые встречаются в началах длины 2 этих слов.

В дальнейшем без ограничения общности будем предполагать, что для тождества $u \approx v$ верно неравенство

$$|u| \leqslant |v|. \tag{4.1}$$

Рассмотрим различные случаи для тождества $u \approx v$. Введём следующее рабочее определение.

Определение 4.1. Тождества $u \approx v$ и $u_1 \approx v_1$ называются $\mathbf{W}$-*эквивалентными* для многообразия $\mathbf{W}$, если совпадают подмногообразия, определённые в нём этими тождествами.

Определение 4.2. Тождество $u \approx v$ называется $\mathbf{W}$-*каноническим* для подмногообразия $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, если правая и левая его части являются $\mathbf{W}$-каноническими словами.

Таким образом, если $\beta(\mathbf{W})$ — некоторый базис тождеств многообразия $\mathbf{W}$, то для $\mathbf{W}$-эквивалентных тождеств равны подмногообразия $\mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\ u \approx v)$ и $\mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\ u_1 \approx v_1)$.

Рассмотрим подмногообразия в $\mathbf{W}$, задаваемые добавлением к базису $\beta(\mathbf{W})$ одного тождества $u \approx v$, т. е. многообразия вида

$$\mathbf{U} = \mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\ u \approx v). \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. Общий план решения представляется следующим. Сначала описываются все канонические не $\mathbf{W}$-эквивалентные тождества. Затем для нахождения $\mathbf{U}_1 \vee \mathbf{U}_2$ можно использовать известное равенство

$$I(\mathbf{U}_1 \vee \mathbf{U}_2) = I(\mathbf{U}_1) \cap I(\mathbf{U}_2),$$

если известно описание всех тождеств в $I(\mathbf{U}_1)$ и в $I(\mathbf{U}_2)$. Зная такое описание, можно пытаться определить базис многообразия $\mathbf{U}_1 \vee \mathbf{U}_2$. Кроме того, известно, что для пересечения двух многообразий полугрупп верно равенство

$$I(\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2) = I(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{U}_2).$$

В этом случае базис — это простое объединение базисов исходных многообразий, но с возможными упрощениями (см. [15, § 5]). Согласно [13, теорема 1.2] многообразие $\mathbf{W}$ является кроссовым. В частности, такое многообразие наследственно конечно базируемо (см. [19]). Поэтому любое подмногообразие $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ можно получить как конечное пересечение подмногообразий вида (4.2). Таким образом, первая задача здесь — описание всех возможных канонических не $\mathbf{W}$-эквивалентных тождеств.

Введём следующие обозначения для подмногообразий многообразия $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$, содержащих многообразие $\mathbf{Sl}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_1 = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ z^2 \approx z^3\},\\
&\mathbf{V}_2 = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ zx \approx zx^2\},\\
&\mathbf{V}_3 = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ zx \approx zxz\},\\
&\mathbf{W}_0 = \mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{L} = \mathrm{var}\{zx \approx zx^2,\ zyx \approx zxy\},\\
&\mathbf{V} = \mathbf{Sl} \vee \mathbf{L} \vee \mathbf{N}_2 = \mathrm{var}\{zx \approx z^2x,\ zyx \approx zxy\},\\
&\mathbf{P}' = \mathrm{var}\,P' = \mathrm{var}\{zx \approx zx^2,\ y^2x \approx x^2y\},\\
&\mathbf{W}_1 = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ zyx \approx zxy\},\\
&\mathbf{W}_2 = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ zyx \approx zxy,\ yxz \approx xyz\},\\
&\mathbf{W}_3 = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ yx \approx xy\},\\
&\mathbf{V}' = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ z^2y \approx z^3y\},\\
&\mathbf{U}_0 = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ y^2x \approx x^2y\},\\
&\mathbf{W}_{11} = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ zyx \approx zxy,\ z^2 \approx z^3\},\\
&\mathbf{W}_{21} = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ zyx \approx zxy,\ yxz \approx xyz,\ z^2 \approx z^3\},\\
&\mathbf{W}_{31} = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ yx \approx xy,\ z^2 \approx z^3\},\\
&\mathbf{U}_1 = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ zyx \approx zxy,\ y^2x \approx x^2y\},\\
&\mathbf{U}_{11} = \mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ zyx \approx zxy,\ y^2x \approx x^2y,\ z^2 \approx z^3\}.
\end{aligned}$$

Добавляя к перечисленным подмногообразиям ещё три, а именно

$$\mathbf{Sl} = \mathrm{var}\{z \approx z^2,\ yx \approx xy\},$$
$$\mathbf{Sl} \vee \mathbf{L} = \mathrm{var}\{z \approx z^2,\ zyx \approx zxy\},$$
$$\mathbf{Sl} \vee \mathbf{N}_2 = \mathrm{var}\{zy \approx z^2 y,\ yx \approx xy\},$$

получаем подрешётку L_0 из 20 подмногообразий. Покажем теперь, что это множество подмногообразий действительно является подрешёткой.

Основной целью оставшейся части настоящего раздела является доказательство следующего предложения.

Предложение 4.1. *Решётка $L(\mathbf{W})$ содержит 20-элементную подрешётку $L_0 \subseteq L''$ подмногообразий, задаваемых только гомотипными тождествами* (*рис.* 2). *В частности, подрешётка L_0 содержит все подмногообразия, задаваемые в $\mathbf{Sl} \mathrm{w} \mathbf{N}_2$ перестановочными тождествами и гомотипными тождествами, в которых одна из частей есть слово длины, не большей 2.*

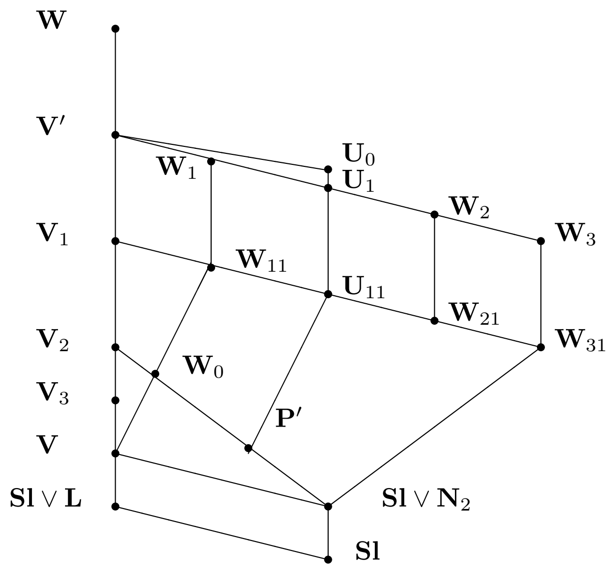

Рис. 2. Подрешётка $L_0 \subseteq L''$ подмногообразий многообразия $\mathbf{Sl} \mathrm{w} \mathbf{N}_2$, содержащих многообразие полурешёток

Для доказательства предложения 4.1 предварительно докажем ряд лемм.

Лемма 4.1. *Если в тождестве $u \approx v$ $|u| = 1$, то многообразие $\mathbf{U}$ вида* (4.2) *содержится в многообразии $\mathbf{Sl} \vee \mathbf{L}$.*

Доказательство. При $|v| = 1$ утверждение очевидно. Пусть $|v| \geqslant 1$. Тогда гомотипное тождество имеет вид $z \approx z^2$ или $z \approx z^3$. В любом случае отсюда следует истинность тождества $z \approx z^2$. Тогда в нём истинно также тождество $zyx \approx zxy$. Лемма доказана. □

Лемма 4.2. *Если в тождестве* $u \approx v$ $u = z^2$, *то многообразие* $\mathbf{U}$ *вида* (4.2) *содержится в многообразии* $\mathbf{V}_1$.

Доказательство. Из неравенства (4.1) и гомотипности тождества $u \approx v$ следует, что $|v| = 2$ или $|v| = 3$. В первом случае тождество $u \approx v$ является тривиальным, во втором случае приходим к случаю $z^2 \approx z^3$. □

Лемма 4.3. *Если в подмногообразии* $\mathbf{U}$ *вида* (4.2) *истинно гомотипное тождество вида*

$$yx \approx v,$$

в котором $h_1(v) = x$ *и* $|v| \geqslant 2$, *то в* $\mathbf{U}$ *истинно тождество коммутативности*

$$yx \approx xy,$$

т. е. оно содержится в многообразии $\mathbf{W}_3$.

Доказательство. Из неравенства (4.1) и гомотипности тождества $z^2 \approx z^3$ следует, что $c(v) = \{x, y\}$, $h_1(v) = x$. Тогда слово v совпадает с одним из следующих слов: 1) xy, 2) xy^2, 3) xyx, 4) $(xy)^2$, 5) x^2y, 6) x^3y. Покажем, что во всех случаях в $\mathbf{U}$ истинно тождество коммутативности. В самом деле, 1) — это тождество коммутативности.

Докажем, что случай 3) сводится к 4). Из

$$yx \approx xyx$$

следует, что $xyx \approx yxyx$. Значит, $yx \approx yxyx$. После переименования переменных имеем, что

$$yx \approx (xy)^2.$$

Покажем, что из 4) следует 1). Из того, что $yx \approx (xy)^2$, вытекает, что в $\mathbf{U}$ истинно тождество $x^2 \approx x^4$. С учётом тождества (2.2) получаем, что в $\mathbf{U}$ истинно тождество $x^2 \approx x^3$. Теперь имеем

$$yx \approx (xy)^2 \approx (yx)^4 \approx (yx)^3 \approx (yx)^2 \approx xy.$$

Докажем, что 5) сводится к 3). Из

$$yx \approx x^2y$$

следует, что в $\mathbf{U}$ истинно тождество $x^2 \approx x^3$, а также истинна цепочка тождеств

$$yx \approx x^2y \approx x^3y = x(x^2y) \approx xyx.$$

Покажем, что 2) сводится к 1). Из

$$yx \approx xy^2$$

следует, что

$$yx \approx xy^2 \approx y^2x^2 \approx x^2y^4 \approx x^2y^2 \approx xy.$$

Покажем, что случай 6) сводится к 3). Из

$$yx \approx x^3y$$

следует, что истинна цепочка тождеств

$$yx \approx x^3y \approx x^4y \approx x(yx).$$

Следовательно, верно тождество $yx \approx xy$. Лемма доказана. □

Пусть теперь в подмногообразии $\mathbf{U}$ вида (4.2) истинно нетривиальное гомотипное тождество вида

$$yx \approx yv_1.$$

Тогда правая часть этого тождества совпадает с одним из следующих слов: yx^2, yxy, y^2x, y^3x, yx^2y.

Лемма 4.4.

1. *Тождества* $yx \approx yx^2y$ *и*

$$yx \approx yxy \tag{4.3}$$

$\mathbf{W}$*-эквивалентны.*

2. *Тождества* $yx \approx y^3x$ *и*

$$yx \approx y^2x \tag{4.4}$$

$\mathbf{W}$*-эквивалентны. При этом подмногообразие* $\mathrm{var}\{\beta(\mathbf{W}),\ yx \approx y^2x\}$ *совпадает с многообразием*

$$\mathbf{V} = \mathbf{Sl} \vee \mathbf{L} \vee \mathbf{N}_2 = \mathrm{var}\{zx \approx z^2x,\ zyx \approx zxy\}.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из (4.3) следует, что

$$yx \approx yxy \approx yxyx \approx yx^2y.$$

Обратно,

$$yx \approx yx^2y \approx yxy^2x \approx yxy.$$

Докажем второе утверждение. Очевидно, что

$$yx \approx y^3x \approx y^4x \approx y^2x.$$

По аналогичным соображениям верна обратная импликация. Базис многообразия

$$\mathbf{V} = \mathbf{Sl} \vee \mathbf{L} \vee \mathbf{N}_2 = \mathrm{var}\{zx \approx z^2x,\ zyx \approx zxy\}.$$

хорошо известен и легко вычисляется. В [18] к этим тождествам добавлено тождество $zx \approx zx^2$, но, как легко убедиться, оно является следствием двух указанных тождеств. Пусть теперь в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинно тождество (4.4). Тогда в нём истинно также тождество

$$zyx \approx z^2yx \approx z^2xy \approx zxy.$$

Следовательно, $\mathbf{U}$ содержится в многообразии $\mathbf{V}$. Обратное включение очевидно. $\square$

Замечание 4.2. Для дальнейшего удобно считать, что буквы z, z_1, z_2, z_3, z_4, t в $\mathbf{W}$-канонических словах (2.1) зарезервированы для букв, которые встречаются в началах длины 2 этих слов. Кроме того, в тождестве $u \approx v$ не обязательно, что все четыре буквы z_i различны и что все они присутствуют в тождестве. Таким образом, фактически в тождестве $u \approx v$ может быть от одной до четырёх переменных z_i. Кроме того, линейные множители в левой части (4.1) присутствуют только в том случае, если они есть во множестве $c\big(h_2(v)\big) - c\big(h_2(u)\big)$. Аналогичное замечание верно и для множителей z_i в правой части $u \approx v$.

Лемма 4.5. *Если в гомотипном тождестве*

$$u \equiv u_1 y u' x \approx v_1 y v' x \equiv v \tag{4.5}$$

верны неравенства $|u_1|, |v_1| \geqslant 2$, *а* x *линейно входит и в* u, *и в* v, *то тождество* (4.5) $\mathbf{W}$*-эквивалентно более короткому тождеству, полученному из* (4.5) *вычёркиванием буквы* x, *т. е. тождеству*

$$\tilde{u} \equiv u_1 y u' \approx v_1 y v' \equiv \tilde{v}. \tag{4.6}$$

Доказательство. В самом деле, пусть переменная y имеет вхождения в правую и в левую части тождества (4.5): $u \equiv u_1 y u' x$, $v \equiv v_1 y v' x$, причём длины слов u_1 и v_1 не меньше 2. Полагая $\varphi(x) = y$ в тождестве $u \approx v$, получим, что в $\mathbf{V}$ истинна цепочка тождеств

$$u_1 y u' = u_1 y^2 u' = u_1 y u' y = v_1 y v' y = v_1 y^2 v' = v_1 y v'.$$

Таким образом, в $\mathbf{V}$ истинно тождество вида (4.6). Обратно, из (4.6) очевидным образом следует (4.5). $\square$

Следствие 4.1. *Любое гомотипное тождество в подмногообразии* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ *является* $\mathbf{W}$*-эквивалентным гомотипному тождеству, в котором содержится не более одной переменной* $x \notin \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$. *Таким образом, любое* $\mathbf{W}$*-каноническое тождество зависит либо от* $\{z_1, z_2, z_3, z_4, x\}$, *либо от меньшего числа переменных.*

Для доказательства леммы об оценке сверху числа возможных не $\mathbf{W}$-эквивалентных тождеств удобно ввести следующие обозначения для тождества $u \approx v$: A_1 — множество первых двух букв слова u, причём $A_1 \subseteq \{z_1, z_2\}$, A_2 — множество первых двух букв слова v, причём $A_2 \subseteq \{z_3, z_4\}$. Считаем, что $z_1 \neq z_2$, $z_3 \neq z_4$. Однако среди букв z_1, z_2, z_3, z_4 могут быть и одинаковые. Положим $A = A_1 \cap A_2$.

Основная наша задача сейчас — дать некоторые оценки мощности решётки L'' снизу и сверху. Такие оценки будут получены в данном разделе. Напомним, что ранее в леммах 4.1—4.4 было полностью перечислено множество всевозможных не $\mathbf{W}$-эквивалентных гомотипных тождеств вида $u \approx v$, для которых верно неравенство $|u| \leqslant 2$. В следующей лемме мы получим оценки числа таких не $\mathbf{W}$-эквивалентных гомотипных тождеств вида $u \approx v$, удовлетворяющих условию $|v| \geqslant |u| \geqslant 3$.

Лемма 4.6. *Возможное число не* $\mathbf{W}$*-эквивалентных гомотипных тождеств вида* $u \approx v$*, удовлетворяющих неравенствам*

$$|v| \geqslant |u| \geqslant 3, \tag{4.7}$$

не превосходит 142.

Доказательство. Для доказательства рассмотрим семь различных случаев, связанных с множествами A, A_1, A_2. Через D_u далее обозначается множество возможных начал максимальной длины слова u, которые являются словами, зависящими только от переменных, входящих в начало $h_2(u)$ длины 2. Отметим прежде всего, что при подсчётах в каждом случае числа возможных не $\mathbf{W}$-эквивалентных гомотипных тождеств используется лемма 4.5 и следствие из неё. Этот факт не будет каждый раз оговариваться отдельно.

Случай 1. $|A| = 2$. Это означает, что $A_1 = A_2 = \{z_1, z_2\}$. Согласно следствию 4.1 либо

$$c(u) = c(v) = \{z_1, z_2\},$$

либо

$$c(u) = c(v) = \{z_1, z_2, x\}.$$

При этом

$$D_u = \{z_1z_2,\ z_1z_2z_1,\ z_1z_2^2,\ z_1z_2^2z_1,\ z_2z_1,\ z_2z_1z_2,\ z_2z_1^2,\ z_2z_1^2z_2\}.$$

Если $c(u) = \{z_1, z_2\}$, то число таких тождеств 15. Если $c(u) = \{z_1, z_2, x\}$, то с учётом следствия 4.1 число таких тождеств равно $C_8^2 - 2 \cdot C_4^2 = 16$. Всего различных возможных не $\mathbf{W}$-эквивалентных гомотипных тождеств в случае 1 равно 31. Из них перестановочное тождество одно:

$$z_1z_2x \approx z_2z_1x. \tag{4.8}$$

Случай 2. $|A| = 1$, $A_1 = A_2 = \{z_1\}$. В этом случае имеем

$$c(u) = c(v) = \{z_1, x\}.$$

Возможно только одно такое тождество:

$$z_1^2x \approx z_1^3x. \tag{4.9}$$

Случай 3. $|A| = 1$, $A_1 = \{z_1\}$, $A_2 = \{z_1, z_3\}$. В этом случае либо

$$c(u) = c(v) = \{z_1, z_2\},$$

либо

$$c(u) = c(v) = \{z_1, z_2, x\}.$$

При этом

$$D_{3u} = \{z_1^2,\, z_1^3\} \cdot z_3,$$
$$D_{3v} = \{z_1z_3,\, z_1z_3z_1,\, z_1z_3^2,\, z_1z_3^2z_1;\, z_3z_1,\, z_3z_1z_3,\, z_3z_1^2,\, z_3z_1^2z_3\}.$$

Всего таких тождеств $12 + 8 = 20$. Перестановочных среди них нет.

Случай 4. $|A| = 1$, $A_1 = \{z_1, z_2\}$, $A_2 = \{z_1, z_3\}$. При этом

$$D_{4u} = \{z_1z_2,\, z_1z_2z_1,\, z_1z_2^2,\, z_1z_2^2z_1;\, z_2z_1,\, z_2z_1z_2,\, z_2z_1^2,\, z_2z_1^2z_2\},$$
$$D_{4v} = \{z_1z_3,\, z_1z_3z_1,\, z_1z_3^2,\, z_1z_3^2z_1;\, z_3z_1,\, z_3z_1z_3,\, z_3z_1^2,\, z_3z_1^2z_3\}.$$

В этом случае либо

$$c(u) = c(v) = \{z_1, z_2, z_3\},$$

либо

$$c(u) = c(v) = \{z_1, z_2, z_3, x\}.$$

Следует учесть, что случаи, когда $h_2(u) = z_1z_2$ и $h_2(v) = z_3z_1$, а также $h_2(u) = z_2z_1$ и $h_2(v) = z_1z_3$, одинаковы. При этом тождество одного подслучая совпадает с тождеством другого после простого переименования переменных. Например, тождество $z_2z_1z_3 \approx z_1z_3z_1z_2$ совпадает фактически с тождеством $z_3z_1z_2 \approx z_1z_2z_1z_3$ после применения стандартного отображения алфавита $\varphi(z_1) = z_1$, $\varphi(z_2) = z_3$, $\varphi(z_3) = z_2$.

С учётом сказанного возможно существование $48+4+2+4+2+1+1 = 62$ таких не $\mathbf{W}$-эквивалентных тождеств. Из них перестановочными тождествами являются следующие:

$$z_1z_2z_3 \approx z_1z_3z_2, \tag{4.10}$$
$$z_1z_2z_3 \approx z_3z_1z_2, \tag{4.11}$$
$$z_2z_1z_3 \approx z_1z_3z_2, \tag{4.12}$$
$$z_2z_1z_3 \approx z_3z_1z_2, \tag{4.13}$$
$$z_1z_2z_3x \approx z_1z_3z_2x, \tag{4.14}$$
$$z_1z_2z_3x \approx z_3z_1z_2x, \tag{4.15}$$
$$z_2z_1z_3x \approx z_1z_3z_2x, \tag{4.16}$$
$$z_2z_1z_3x \approx z_3z_1z_2x. \tag{4.17}$$

Легко убедиться, что тождество (4.12) совпадает с (4.11) с точностью до переименования переменных. То же самое верно и для тождеств (4.16) и (4.15). Следовательно, всего в случае 4 возможны 60 не $\mathbf{W}$-эквивалентных гомотипных тождеств. Из них 6 перестановочных.

Случай 5. $|A| = \varnothing$, $A_1 = \{z_1, z_2\}$, $A_2 = \{z_3, z_4\}$. При этом

$$D_{5u} = \{z_1z_2,\, z_1z_2z_1,\, z_1z_2^2,\, z_1z_2^2z_1;\, z_2z_1,\, z_2z_1z_2,\, z_2z_1^2,\, z_2z_1^2z_2\},$$
$$D_{5v} = \{z_3z_4,\, z_3z_4z_3,\, z_3z_4^2,\, z_3z_4^2z_3;\, z_4z_3,\, z_4z_3z_4,\, z_4z_3^2,\, z_4z_3^2z_4\}.$$

В этом случае положение переменных z_1 и z_2, а также z_3 и z_4 симметрично. Поэтому здесь можно считать, что $h_2(u) = z_1z_2$ и $h_2(v) = z_3z_4$. Следовательно, предполагаем, что

$$D_{5u}z_3z_4 = \{z_1z_2z_3z_4,\ z_1z_2z_1z_3z_4,\ z_1z_2^2z_3z_4,\ z_1z_2^2z_1z_3z_4\},$$
$$D_{5v}z_1z_2 = \{z_3z_4z_1z_2,\ z_3z_4z_3z_1z_2,\ z_3z_4^2z_1z_2,\ z_3z_4^2z_3z_1z_2\}.$$

Как и в других случаях, либо

$$c(u) = c(v) = \{z_1, z_2, z_3, z_4\},$$

либо

$$c(u) = c(v) = \{z_1, z_2, z_3, z_4, x\}.$$

Всего таких тождеств $16 + 1 = 17$. При этом перестановочных два:

$$z_1z_2z_3z_4 \approx z_3z_4z_1z_2, \tag{4.18}$$
$$z_1z_2z_3z_4x \approx z_3z_4z_1z_2x. \tag{4.19}$$

Случай 6. $|A| = \varnothing$, $A_1 = \{z_1\}$, $A_2 = \{z_3, z_4\}$. При этом

$$D_{6u}z_3z_4 = \{z_1^2z_3z_4,\ z_1^3z_3z_4\},$$
$$D_{6v}z_1 = \{z_3z_4z_1,\ z_3z_4z_3z_1,\ z_3z_4^2z_1,\ z_3z_4^2z_3z_1\}.$$

В этом случае положение переменных z_3 и z_4 симметрично. Поэтому можно считать, что $h_2(v) = z_3z_4$. В этом случае имеем $8 + 1 = 9$ тождеств.

Случай 7. $|A| = \varnothing$, $A_1 = \{z_1\}$, $A_2 = \{z_3\}$. При этом

$$D_{7u}z_3 = \{z_1^2z_3,\ z_1^3z_3\},$$
$$D_{7v}z_1 = \{z_3^2z_1,\ z_3^3z_1\}.$$

В этом случае имеем следующие тождества:

$$z_1^2z_3 \approx z_3^2z_1, \quad z_1^3z_3 \approx z_3^2z_1, \quad z_1^2z_3 \approx z_3^3z_1, \quad z_1^3z_3 \approx z_3^3z_1,$$

а также

$$z_1^2z_3x \approx z_3^2z_1x, \quad z_1^3z_3x \approx z_3^2z_1x, \quad z_1^2z_3x \approx z_3^3z_1x, \quad z_1^3z_3x \approx z_3^3z_1x.$$

Замечая, что в этом списке второе и третье, а также шестое и седьмое тождества одинаковы с точностью до обозначений переменных, приходим к следующим четырём тождествам этого случая:

$$x^2y \approx y^2x, \tag{4.20}$$
$$x^3y \approx y^2x, \tag{4.21}$$
$$x^3y \approx y^3x, \tag{4.22}$$
$$x^2yx_1 \approx y^2xx_1. \tag{4.23}$$

Таким образом, всего тождеств типа, указанного в лемме 4.6, имеется $31 + 1 + 20 + 60 + 17 + 9 + 4 = 142$. □

Лемма 4.7. *Справедливы строгие включения многообразий*

$$\mathbf{V} \subset \mathbf{V}_3 \subset \mathbf{V}_2 \subset \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{W}, \quad \mathbf{V} \subset \mathbf{W}_0 \subset \mathbf{V}_2, \quad \mathbf{P}' \subset \mathbf{W}_0,$$

причём

$$\mathbf{W}_0 \cap \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}.$$

Доказательство. Пусть в подмногообразии $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ истинно тождество (4.4). Тогда в $\mathbf{U}$ истинна также цепочка тождеств

$$zx \approx z^2x \approx z^3x \approx z^2xz \approx zxz.$$

Обратно, из тождества $zx \approx zxz$ и тождеств базиса $\beta(\mathbf{W})$ тождество $zx \approx z^2x$ не выводится, так как все исходные тождества обладают свойством $h_2(u) = h_2(v)$, а тождество $zx \approx z^2x$ этим свойством не обладает. Следовательно, $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}_3$.

Из тождества (4.3) легко следует тождество

$$zx \approx zx^2. \tag{4.24}$$

В самом деле,

$$zx \approx zxzx \approx zx^2z \approx zx^2.$$

С другой стороны, заметим, что тождества базиса многообразия $\mathbf{V}_2$ обладают свойством, что если буква z стоит только на первом месте в слове u, то в любом слове, соединённом цепочкой вывода со словом u, буква z будет иметь только одно вхождение и стоять только на первом месте. Таким свойством не обладает тождество (4.3). Следовательно, $\mathbf{V}_3 \subset \mathbf{V}_2$. Очевидно, что $\mathbf{V}_2 \subset \mathbf{V}_1$. Нетрудно проверить, что $\mathbf{W}_0 \cap \mathbf{V}_3 = \mathbf{V}$. В самом деле, из тождеств (4.24), (4.21) и (4.3) легко следует, что $zx \approx zxz \approx z^2x$ истинно в $\mathbf{W}_0 \cap \mathbf{V}_3$, что и означает совпадение пересечения этих многообразий с $\mathbf{V}$. Наконец, решётка $\mathbf{W}_0 = \mathbf{Sl} \,\mathrm{w}\, \mathbf{L}$ вычислена в [13, предложение 3.6]. □

Замечание 4.3. Нетрудно заметить, что

$$\mathbf{W}_{11} = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{W}_{21} = \mathbf{W}_2 \cap \mathbf{V}_1, \quad \mathbf{W}_{31} = \mathbf{W}_3 \cap \mathbf{V}_1.$$

Кроме того, эти многообразия могут быть заданы своими базисами тождеств:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{11} &= \mathrm{var}\{z_1z_2x \approx z_1z_2x^2,\ zyx \approx zxy,\ z^2 \approx z^3\},\\
\mathbf{W}_{21} &= \mathrm{var}\{z_1z_2x \approx z_1z_2x^2,\ zyx \approx zxy,\ yxz \approx xyz,\ z^2 \approx z^3\},\\
\mathbf{W}_{31} &= \mathrm{var}\{z_1z_2x \approx z_1z_2x^2,\ yx \approx xy,\ z^2 \approx z^3\}.
\end{aligned}$$

Замечание 4.4. Из определений видно, что верны следующие строгие включения:

$$\mathbf{W}_{31} \subset \mathbf{W}_3 \subset \mathbf{W}_2 \subset \mathbf{W}_1 \subset \mathbf{V}' \subset \mathbf{W}, \quad \mathbf{Sl} \vee \mathbf{N}_2 \subset \mathbf{W}_{31} \subset \mathbf{W}_{21} \subset \mathbf{W}_{11} \subset \mathbf{V}_1.$$

Лемма 4.8. *Тождества* (4.10), (4.14) *и*

$$zxy \approx zy^2x \tag{4.25}$$

$\mathbf{W}$*-эквивалентны. Каждое из них определяет в* $\mathbf{W}$ *подмногообразие* $\mathbf{W}_1$.

Доказательство. Пусть в подмногообразии $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ истинно тождество (4.14). Тогда в $\mathbf{U}$ истинна также цепочка тождеств

$$zxy \approx zxy^2 \approx zyxy \approx zy^2x,$$

т. е. в $\mathbf{U}$ истинно также тождество (4.25). Применяя (4.25) к самому себе, получаем истинность в $\mathbf{U}$ цепочки тождеств

$$zxy \approx zy^2x \approx zx^2y^2 \approx zx^2y \approx zyx,$$

т. е. в $\mathbf{U}$ верно тождество (4.10). Импликация (4.10) $\Longrightarrow$ (4.14) очевидна. □

Замечание 4.5. Если в некотором подмногообразии $\mathbf{U}$ многообразия $\mathbf{W}$ верно тождество (4.8), то в нём также верно тождество (4.10).

Доказательство. Пусть в подмногообразии $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ истинно тождество (4.8). Тогда в $\mathbf{U}$ истинна также цепочка тождеств

$$zyx \approx yzx \approx yzx^2 \approx yxzx \approx xyzx \approx zxyx \approx zx^2y.$$

Таким образом, в $\mathbf{U}$ верно тождество, полученное из (4.25) переименованием переменных. По лемме 4.8 в $\mathbf{U}$ верно также тождество (4.10). □

Замечание 4.6. Замечание 4.5 позволяет указать более короткий базис тождеств многообразия $\mathbf{W}_2$, а именно

$$\mathbf{W}_2 = \mathrm{var}\{z_1z_2x \approx z_1z_2x^2, yxz \approx xyz\}.$$

Лемма 4.9. *Справедливы следующие строгие включения многообразий*:

$$\mathbf{W}_3 \subset \mathbf{W}_2 \subset \mathbf{W}_1 \subset \mathbf{V}' \subset \mathbf{W}.$$

Доказательство. Указанные включения как нестрогие очевидны. Для установления строгости включений следует просто проанализировать какие-то инвариантные свойства тождеств указанных базисов, которые сохраняются при выводимости тождеств из тождеств базисов. Перечислим такие свойства.

1. $\mathbf{W}_3 \subset \mathbf{W}_2$ так как множество тождеств $I(\mathbf{W}_3)$ содержит нетривиальное тождество $yx \approx xy$, в котором $|u| = |v| = 2$, а $I(\mathbf{W}_2)$ такого тождества не содержит.
2. $\mathbf{W}_2 \subset \mathbf{W}_1$, так как множество тождеств $I(\mathbf{W}_2)$ содержит нетривиальное тождество $yxz \approx xyz$, в котором $h_1(u) \neq h_1(v)$, а $I(\mathbf{W}_1)$ такого тождества не содержит.
3. $\mathbf{W}_1 \subset \mathbf{V}'$, так как множество тождеств $I(\mathbf{W}_1)$ содержит нетривиальное тождество $zyx \approx zxy$, в котором $h_2(u) \neq h_2(v)$, а $I(\mathbf{V}')$ такого тождества не содержит.
4. $\mathbf{V}' \subset \mathbf{W}$, так как множество тождеств $I(\mathbf{V}')$ содержит нетривиальное тождество $z^2y \approx z^3y$, которое ложно в многообразии $\mathbf{W}$. В последнем легко убедиться, если в моноидном сплетении $T = U_2 \,\mathrm{w}\, N = F(N^1, U_2) \times N$ положить $\varphi(z) = (f, a)$, $\varphi(y) = (g, a)$, где $U_2 = \{0, 1\}$ — двухэлементная полурешётка, $N = \{0, a \mid a^2 = 0\}$ — двухэлементная полугруппа с нулевым умножением. При этом считаем, что g — тождественно единичная функция, $f(1) = f(a) = 1$ и $f(0) = 0$. □

Лемма 4.10. *Тождества* (4.8), (4.11), (4.13), (4.15), (4.17), (4.18), (4.19), *а также*

$$xyz \approx yx^2z, \tag{4.26}$$

$$xyz \approx zyxz \tag{4.27}$$

$\mathbf{W}$*-эквивалентны. Каждое из них определяет в* $\mathbf{W}$ *подмногообразие* $\mathbf{W}_2$.

Доказательство. Импликации (4.11) $\Longrightarrow$ (4.15), (4.13) $\Longrightarrow$ (4.17), (4.18) $\Longrightarrow$ (4.19) очевидны.

Докажем импликацию (4.11) $\Longrightarrow$ (4.18). Пусть $\mathbf{U}$ — подмногообразие $\mathbf{W}$. Используя дважды (4.11), получаем цепочку тождеств в $\mathbf{U}$:

$$z_1z_2z_3z_4 \approx z_3z_1z_2z_4 \approx z_3z_4z_1z_2.$$

Докажем импликацию (4.19) $\Longrightarrow$ (4.8). Пусть в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинно тождество (4.19). Тогда в нём верна также цепочка тождеств

$$yxz \approx yxz^3 \approx z^2yxz \approx z^2xyz \approx xyz^2z \approx xyz.$$

Следовательно, в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинно тождество (4.8).

Докажем импликацию (4.8) $\Longrightarrow$ (4.13). Пусть в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинно тождество (4.8). Тогда в нём верна также цепочка тождеств

$$xyz \approx xyz^2 \approx xzyz \approx xzy^2z \approx xy^2z^2 \approx xy^2z.$$

Следовательно, в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинно тождество

$$xyz \approx xy^2z \tag{4.28}$$

С учётом (4.28) имеем, что в подмногообразии $\mathbf{U}$ верна также цепочка тождеств

$$xyz \approx xy^2z \approx y^2xz \approx y^2zx \approx zy^2x \approx zyx,$$

т. е. истинно (4.13).

Докажем импликацию (4.13) $\Longrightarrow$ (4.26). Пусть в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинно тождество (4.13). Тогда в нём истинна также цепочка тождеств

$$xyz \approx xyz^2 \approx z^2yx \approx z^2xy \approx z^2x^2y \approx yx^2z^2 \approx yx^2z,$$

т. е. истинно тождество (4.26).

Докажем импликацию (4.26) $\Longrightarrow$ (4.13). Из (4.26) следует, что в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинна также цепочка тождеств

$$xyz \approx yx^2z \approx yx^2z^2 \approx yxz^2x \approx yxz^3x \approx yxz^2xz \approx yzx^2z \approx yz^2x^2 \approx zyx^2 \approx zyx.$$

Докажем импликацию (4.26) $\Longrightarrow$ (4.11). С использованием тождества (4.13), полученного в предыдущем абзаце, выводим, что в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинна цепочка тождеств

$$xyz \approx yx^2z \approx yx^2z^2 \approx z^2x^2y \approx xz^2y \approx zxy.$$

Докажем импликацию (4.15) $\Longrightarrow$ (4.11). Пусть в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинно тождество (4.15). Переобозначая переменные, запишем тождество (4.15) в виде

$$xyzt \approx zxyt. \tag{4.29}$$

Полагая в (4.29) $\varphi(t) = z$, получаем тождество

$$xyz \approx zxyz, \tag{4.30}$$

истинное в $\mathbf{U}$. Кроме того, в $\mathbf{U}$ истинна цепочка тождеств

$$zxy \approx zxyy \approx xyzy \approx xy^2z,$$

т. е. тождество

$$zxy \approx xy^2z \tag{4.31}$$

Отсюда следует истинность в $\mathbf{U}$ цепочки тождеств

$$zxy \approx xy^2z \approx y^2z^2x \approx z^2x^2y^2 \approx z^2xy \approx zxzy \approx zxyz \approx xyz.$$

Следовательно, в $\mathbf{U}$ истинно тождество (4.11).

Докажем импликацию (4.17) $\Longrightarrow$ (4.27). Пусть в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинно тождество (4.17). Полагая в (4.17) $\varphi(z_2) = x$, $\varphi(z_1) = y$, $\varphi(z_3) = z$, $\varphi(x) = z$, получаем, что в $\mathbf{U}$ истинно тождество (4.27).

Докажем импликацию (4.27) $\Longrightarrow$ (4.13). Из истинности в подмногообразии $\mathbf{U}$ тождества (4.27) следует, что в нём верна также цепочка тождеств

$$xyz \approx zyxz \approx xyzxz \approx xyzx \approx zyx.$$

Таким образом, истинно тождество (4.13). Как отмечалось в замечании 4.6, истинность в подмногообразии $\mathbf{U}$ тождества (4.8) означает совпадение $\mathbf{U}$ с многообразием $\mathbf{W}_2$. □

Лемма 4.11. *Тождества* (4.8), (4.30),

$$xyz \approx z^2xy, \tag{4.32}$$

$$xyz \approx z^3xy, \tag{4.33}$$

$$xyx \approx yx^2 \tag{4.34}$$

$\mathbf{W}$*-эквивалентны. Каждое из них определяет в* $\mathbf{W}$ *подмногообразие* $\mathbf{W}_2$.

Доказательство. Импликации (4.8) $\Longrightarrow$ (4.34) очевидна.

Докажем импликацию (4.34) $\Longrightarrow$ (4.30). Пусть (4.34) истинно в подмногообразии $\mathbf{U}$ многообразия $\mathbf{W}$. Тогда, полагая в (4.34) $\varphi(y) = yz$, $\varphi(x) = x$, получаем, что в $\mathbf{U}$ истинна цепочка тождеств

$$xyzx \approx yzx^2 \approx yzx,$$

т. е. тождество (4.30).

Докажем импликацию (4.30) $\Longrightarrow$ (4.33). Пусть (4.30) истинно в подмногообразии $\mathbf{U}$ многообразия $\mathbf{W}$. Тогда в $\mathbf{U}$ истинна цепочка тождеств

$$xyz \approx zxyz \approx z^2xyz \approx z^3xy,$$

т. е. истинно тождество (4.33).

Докажем импликацию (4.33) $\Longrightarrow$ (4.8). Пусть (4.33) истинно в подмногообразии $\mathbf{U}$ многообразия $\mathbf{W}$. Тогда в $\mathbf{U}$ истинна цепочка тождеств

$$xyz \approx z^3xy \approx z^3yx \approx yxz.$$

Докажем импликацию (4.8) $\Longrightarrow$ (4.32). Пусть $\mathbf{U}$ — подмногообразие $\mathbf{W}$. Согласно замечанию 4.5 в $\mathbf{U}$ истинно также тождество (4.10). Тогда в $\mathbf{U}$ истинна цепочка тождеств

$$z^2xy \approx xz^2y \approx xyz^2 \approx xyz,$$

т. е. верно тождество (4.32).

Докажем импликацию (4.32) $\Longrightarrow$ (4.33). В самом деле, если (4.32) истинно в подмногообразии $\mathbf{U}$ многообразия $\mathbf{W}$, то в $\mathbf{U}$ истинна цепочка тождеств

$$xyz \approx xyz^2 \approx z^2xyz \approx z^3xy. \qquad \square$$

Лемма 4.12. *Тождества* (4.20) *и* (4.21) $\mathbf{W}$*-эквивалентны. Каждое из них определяет в* $\mathbf{W}$ *подмногообразие* $\mathbf{U}_0$*, которое задаётся тождествами* (2.2), (2.2) *и* (4.20) *и содержит многообразие* $\mathbf{P}'$*. Кроме того, многообразие* $\mathbf{V}'$*, задаваемое тождествами* (2.2), (2.2) *и* (4.9)*, содержит многообразие* $\mathbf{U}_0$.

Доказательство. Докажем $\mathbf{W}$-эквивалентность тождеств (4.20) и (4.21). В самом деле, если (4.20) истинно в подмногообразии $\mathbf{U}$ многообразия $\mathbf{W}$, то в $\mathbf{U}$ истинна цепочка тождеств

$$x^2y \approx x^2y^2 \approx y^2xy \approx y^3x,$$

т. е. истинно тождество (4.21). Обратно, пусть в подмногообразии $\mathbf{U}$ многообразия $\mathbf{W}$ истинно тождество (4.21). Тогда в нём истинна цепочка тождеств

$$x^2y \approx y^3x \approx y^2xy \approx x^3y^2 \approx x^3y.$$

Отсюда следует, что в подмногообразии $\mathbf{U}$ истинно также тождество $x^2y \approx y^3x \approx y^2x$, т. е. (4.20). Остальные утверждения леммы следуют из уже сказанного или очевидны. $\square$

Лемма 4.13. *Определённые выше подмногообразия удовлетворяют следующим соотношениям*:

$$\mathbf{U}_0 \subset \mathbf{V}', \quad \mathbf{V}_1 \subset \mathbf{V}', \quad \mathbf{W}_1 \subset \mathbf{V}',$$
$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{U}_0 = \mathrm{var}\{z_1z_2x \approx z_1z_2x^2,\ zyx \approx zxy,\ x^2y \approx y^2x\},$$
$$\mathbf{U}_{11} = \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{U}_0 = \mathrm{var}\{z_1z_2x \approx z_1z_2x^2,\ zyx \approx zxy,\ x^2y \approx y^2x,\ z^2 \approx z^3\},$$
$$\mathbf{P}' = \mathbf{V}_2 \cap \mathbf{U}_0.$$

Доказательство. Указанные в лемме строгие включения легко вытекают из сказанного выше. Базис пересечения многообразий, как уже отмечалось в замечании 4.1, состоит из объединения базисов этих многообразий. Остаётся только проверить, что эти базисы упрощаются до базисов, указанных для пересечений многообразий. $\square$

Доказательство предложения 4.1. Бóльшая часть из указанных на рис. 2 включений и пересечений была установлена или отмечена в леммах 4.7, 4.12 и 4.13, а также в замечании 4.3.

Остаётся проверить, что верны строгие включения $\mathbf{Sl} \vee \mathbf{N}_2 \subset \mathbf{P}'$, $\mathbf{W}_0 \subset \mathbf{W}_{11}$, $\mathbf{W}_{21} \subset \mathbf{U}_{11} \subset \mathbf{W}_{11}$. Все эти строгие включения легко следуют из определения базисов тождеств указанных подмногообразий. Убедимся, например, что верно включение $\mathbf{W}_{21} \subset \mathbf{U}_{11}$. Достаточно доказать, что тождество $x^2y \approx y^2x$ истинно в $\mathbf{W}_{21}$. В самом деле, $x^2y \approx x^2y^2 \approx xy^2x \approx y^2x^2 \approx y^2x$. С другой стороны, если $u \approx v \in I(\mathbf{U}_{11})$ и первая буква y слова u входит в u линейно, то первая буква слова v совпадает с y и тоже входит в v линейно. Это свойство множества $I(\mathbf{U}_{11})$ тождеств ложно в $I(\mathbf{W}_{21})$. Следовательно, включение $\mathbf{W}_{21} \subset U_{11}$ строгое. □

Следствие 4.2. *Решётка $L(\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2)$ всех подмногообразий многообразия $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$ содержит подмножество $L' \cup L_0$, т. е. содержит не менее* 33 *элементов. В частности, решёточный интервал $\mathcal{I}(\mathbf{Sl}, \mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2)$ содержит не менее* 18 *элементов.*

Доказательство непосредственно следует из предложений 3.1 и 4.1. □

5. Заключительные замечания

В разделах 3 и 4 установлено, что решётка $L(\mathbf{W})$ содержит подмножество $L' \cup L_0$ из 33 элементов. С другой стороны, нетрудно отметить, что подмногообразиями $L(\mathbf{U})$ с условием, что все тождества из $I(\mathbf{U})$ обладают свойством (4.7), являются всего 6 подмногообразий из L_0, а именно $\mathbf{W}$, $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{V}'$, $\mathbf{U}_0$, $\mathbf{U}_1$. В остальных 14 подмногообразиях имеется хотя бы одно тождество, удовлетворяющее условию $|u| \leqslant 2$. При этом подмногообразиями вида (4.2), т.е. задаваемыми одним тождеством внутри $\mathbf{W}$, являются $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{V}'$, $\mathbf{U}_0$, а также $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}'$, and $\mathbf{W}_3$. Отметим, что путь оценки мощности подрешётки $L'' \subseteq L(\mathbf{W})$ сверху через описание множества всех не $\mathbf{W}$-эквивалентных подмногообразий в замечании 4.1, по-видимому, не является эффективным, так как такое число в лемме 4.6 оценивается как 142 для тождеств со свойством (4.7). За счёт лемм 4.8, 4.10—4.12 это число уменьшается до $142 - 15 = 127$. Тогда оценка числа подмногообразий есть множество всевозможных подмножеств таких тождеств, т. е. 2^{127}. В действительности их гораздо меньше, причём различные подмножества тождеств могут задавать одно и то же многообразие. Из общих соображений можно предположить, что мощность решётки $L(\mathbf{W})$ невелика и эту решётку можно описать полностью.

Литература

[1] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп / Под ред. М. Арбиба. — М.: Статистика, 1975.

[2] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. — М.: Мир, 1972.

[3] Кошелев Ю. Г. Ассоциативность умножения многообразий полугрупп // Междунар. конф. по алгебре, посв. памяти А. И. Мальцева. Тезисы докл. по теории моделей и алгебр. систем. — Новосибирск, 1989. — С. 63.

[4] Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения / Под ред. Л. Н. Шеврина. — М.: Мир, 1985.

[5] Мальцев А. И. Об умножении классов алгебраических систем // Сиб. матем. журн. — 1967. — Т. 8, № 2. — С. 346—365.

[6] Нейман Х. Многообразия групп. — М.: Мир, 1969.

[7] Сапир М. В. Существенно бесконечно базируемые конечные полугруппы // Матем. сб. — 1987. — Т. 133, № 2. — С. 154—166.

[8] Сапир М. В., Суханов Е. В. О многообразиях периодических полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1981. — № 4. — С. 48—55.

[9] Тищенко А. В. О различных определениях сплетения полугрупповых многообразий // Фундамент. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 233—249.

[10] Тищенко А. В. Сплетения многообразий и полуархимедовы многообразия полугрупп // Труды ММО. — 1996. — Т. 57, № 2. — С. 218—238.

[11] Тищенко А. В. Сплетение атомов решётки полугрупповых многообразий // УМН. — 1998. — Т. 53, № 4. — С. 219—220.

[12] Тищенко А. В. Упорядоченный моноид полугрупповых многообразий относительно сплетения // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, № 1. — С. 283—305.

[13] Тищенко А. В. Сплетение атомов решётки полугрупповых многообразий // Труды ММО. — 2007. — Т. 68. — С. 107—132.

[14] Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В. Решётки многообразий полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2009. — № 3. — С. 3—36.

[15] Шеврин Л. Н., Волков М. В. Тождества полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1985. — № 11. — С. 3—47.

[16] Шеврин Л. Н., Суханов Е. В. Структурные аспекты теории многообразий полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1989. — № 6. — С. 3—39.

[17] Eilenberg S. Automata, Languages and Machines. Vol. B. — New York: Academic Press, 1976.

[18] Evans T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. — 1971. — Vol. 2. — P. 1—43.

[19] Jackson M. Finite semigroups whose varieties have uncountably many subvarieties // J. Algebra. — 2000. — Vol. 228. — P. 512—535.

[20] Koševel Ju. G. Varieties preserved under wreath products // Semigroup Forum. — 1976. — Vol. 12. — P. 95—107.

[21] Sapir M. V. On Cross semigroup varieties and related questions // Semigroup Forum. — 1991. — Vol. 42. — P. 345—364.

[22] Skornjakov L. A. Regularity of the wreath product of monoids // Semigroup Forum. — 1979. — Vol. 18, no. 1. — P. 83—86.

[23] Tilson B. Categories as algebra: an essential ingredient in the theory of monoids // J. Pure Appl. Algebra. — 1987. — Vol. 48, no. 1-2. — P. 83—198.