Изоморфизмы и автоморфизмы матричных алгебр над полукольцами

В. Д. ШМАТКОВ
Рязанский государственный радиотехнический университет
e-mail: shmatkov-vadim@yandex.ru

УДК 512.562

Ключевые слова: полукольцо матриц, полукольцо инцидентности, автоморфизм, изоморфизм.

Аннотация

В работе показано, что каждый автоморфизм полукольца матриц над антинегативным коммутативным полукольцом R с единицей есть композиция внутреннего автоморфизма и автоморфизма, индуцированного автоморфизмом полукольца R. Отсюда следует, что каждый автоморфизм полукольца матриц, сохраняющий скаляры, внутренний. Матрица над коммутативным антинегативным полукольцом с единицей обратима тогда и только тогда, когда она является произведением обратимой диагональной матрицы и матрицы, состоящей из идемпотентных элементов, у которой произведение элементов, стоящих в одной строке (столбце) равно 0 и сумма элементов в строке (столбце) равна 1. Как следствие теории, развитой для вычисления автоморфизмов, решена проблема изоморфизма для полуколец инцидентности. Из изоморфизма полуколец инцидентности над коммутативными полукольцами следует изоморфизм квазипорядков, на которых полукольца инцидентности определены.

Abstract

V. D. Shmatkov, Semiring isomorphisms and automorphims of matrix algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 6, pp. 251—260.

The research shows that each matrix semiring isomorphism over an antinegative commutative semiring R with unity is a composition of an inner automorphism and an automorphism inducted by an automorphism of the semiring R. It follows that every automorphism of such a matrix semiring that preserves scalars is inner. A matrix over an antinegative commutative semiring R with unity is invertible if and only if it is a product of an invertible diagonal matrix and a matrix consisting of idempotent elements such that the product of its elements of one row (column) is 0 and their sum is 1. As a consequence of a theory that was developed for automorphism calculation, the problem of incident semiring isomorphism is solved. Isomorphism of the quasiorders defining these semirings also follows from the isomorphism of incidence semirings over commutative semirings.

Фундаментальная и прикладная математика, 2014, том 19, № 6, с. 251—260.

Введение

В данной работе вычислена группа автоморфизмов матричных алгебр над антинегативными полукольцами. Как следствие, получено несколько результатов. Показано, что каждый автоморфизм матричной алгебры, сохраняющий скаляры, над антинегативным полукольцом внутренний. Это усиливает результат работы [3], в которой показано, что n-я степень автоморфизма, сохраняющего скаляры, есть внутренний автоморфизм. Описаны обратимые матрицы над антинегативными полукольцами. Это даёт другое доказательство результата работы [5]. Вопросу, следует ли из изоморфизма колец инцидентности изоморфизм квазипорядков, на которых эти кольца определены, посвящена обширная литература (см. [1, 2, 4]).

В данной работе проблема изоморфизма решается для коммутативных полуколец.

1. Основные определения

Коммутативным полукольцом назовём универсальную алгебру

$$R = (R, \cdot, +, 0), \quad 0 \in R,$$

такую что

1) $(R, +, 0)$ — коммутативный моноид;
2) $(R, \cdot)$ — полугруппа;
3) $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$ для любых $a, b, c \in R$;
4) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ для любого $a \in R$.

Назовём полукольцо коммутативным, если $ab = ba$ для любых $a, b \in R$. Назовём полукольцо полукольцом с единицей, если существует единица $1 \in R$, такая что $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для любого $a \in R$. Антинегативным назовём такое полукольцо R, что если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $a + b \neq 0$.

Примерами антинегативных полуколец являются дистрибутивные решётки, неотрицательные числа, алгебры, в которых операция умножения — это сумма чисел, а операция сложения — минимум чисел.

Для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество матриц размера $n \times n$ — $\mathrm{M}_n(R)$. Если $A \in \mathrm{M}_n(R)$, то $A(i, j) \in R$ для $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$.

По аналогии с линейной алгеброй определим умножение, сложение матриц и умножение матриц на скаляры: для $A, B \in \mathrm{M}_n(R)$, $\alpha \in R$

$$AB(i, j) = \sum_{k=1}^{n} A(i, k)B(k, j), \quad (A + B)(i, j) = A(i, j) + B(i, j),$$
$$(\alpha A)(i, j) = \alpha A(i, j), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Множество матриц $\mathrm{M}_n(R)$ при $n \neq 1$ вместе со сложением и умножением образует некоммутативное полукольцо.

Для полукольца с единицей R определим $E \in \mathrm{M}_n(R)$: $E(i,i) = 1$, $E(i,j) = 0$, если $i \neq j$. Для любого $A \in \mathrm{M}_n(R)$ $AE = EA = A$. Для $i = 1, \ldots, n$ определим $E_i \in \mathrm{M}_n(R)$: $E_i(i,i) = 1$, $E_i(k,m) = 0$ в остальных случаях. Для $i, j = 1, \ldots, n$ определим $E_{i,j} \in \mathrm{M}_n(R)$: $E_{i,j}(i,j) = 1$, $E_{i,j}(k,m) = 0$ в остальных случаях. Ясно, что $E_{i,i} = E_i$. Определим $0 \in \mathrm{M}_n(R)$: $0(i,j) = 0$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$.

2. Некоторые свойства полуколец

Пусть R — коммутативное полукольцо с единицей. Обозначим через R^- множество всех элементов $a \in R$, таких что существует элемент $b \in R$, такой что $a + b = 0$. Легко проверить, что R^- — кольцо и идеал в R. Рассмотрим фактор-полукольцо R/R^-. В этом полукольце для $a, b \in R$ $a \equiv b\,(R^-)$ равносильно существованию $c \in R^-$, такого что $a + c = b$.

Если $1 \in R^-$, то R^- — кольцо с $1 \in R^-$.

Если $1 \notin R^-$, то R/R^- — коммутативное антинегативное полукольцо с единицей.

Пусть $\big(\mathrm{M}_n(R)\big)^-$ — множество таких матриц $A \in \mathrm{M}_n(R)$, что существует матрица $B \in \mathrm{M}_n(R)$, такая что $A + B = 0$.

Рассмотрим фактор-полукольцо $\mathrm{M}_n(R)/\mathrm{M}_n(R^-)$, такое что для $A, B \in \mathrm{M}_n(R)$ $A \equiv B\big(\mathrm{M}_n(R^-)\big)$ равносильно существованию матрицы $C \in \mathrm{M}_n(R^-)$, такой что $A + C = B$.

Через $\cong$ будем обозначать изоморфизм.

Ясно, что $\big(\mathrm{M}_n(R)\big)^- = \mathrm{M}_n(R^-)$ и $\mathrm{M}_n(R/R^-) \cong \mathrm{M}_n(R)/\mathrm{M}_n(R^-)$.

3. Свойства алгебры матриц над антинегативными полукольцами

Пусть R — коммутативное антинегативное полукольцо с единицей.

Центром $\mathrm{M}_n(R)$ назовём множество

$$Z\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \{A \in \mathrm{M}_n(R) \mid AB = BA \text{для любой } B \in \mathrm{M}_n(R)\}.$$

Предложение 3.1. $Z\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \{\alpha E \mid \alpha \in R\}$.

Доказательство. Ясно, что $\alpha E \in Z\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ для любого $\alpha \in R$.

Пусть $A \in \mathrm{M}_n(R)$ и существуют такие i, j, $i \neq j$, что $A(i,j) \neq 0$. Тогда $(E_i A)(i,j) = A(i,j) \neq 0$ и $(AE_i)(i,j) = 0$. Поэтому если $A \in Z\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ и $i \neq j$, то $A(i,j) = 0$.

Если $AE_{i,j} = E_{i,j}A$, то $A(i,i) = (AE_{i,j})(i,j) = (E_{i,j})A(i,j) = A(j,j)$.

Получили, что $Z\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \{\alpha E \mid \alpha \in R\}$. □

Для $A \in \mathrm{M}_n(R)$ определим

$$H(A) = \{B \in \mathrm{M}_n(R) \mid AB \neq 0 \text{ или } BA \neq 0\}.$$

Определим множество диагональных матриц

$$D\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \{A \in \mathrm{M}_n(R) \mid A(i,j) = 0, \text{ если } i \neq j\}.$$

Определим множество идемпотентов

$$\mathrm{Id}\big(\mathrm{M}_n(R)\big) = \{A \in \mathrm{M}_n(R) \mid AA = A\}.$$

Предложение 3.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть* $A \in \mathrm{Id}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ *и из того, что* $H(B) \subseteq H(A)$, *следует, что* $AB = BA$. *Тогда* $A \in D\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$.
2. *Если* $B \in \mathrm{M}_n(R)$ *и* $H(B) \subset H(\alpha E_i)$, *то существует элемент* $\beta \in R$, *такой что* $B = \beta E_i$.

Доказательство.

1. Пусть $A \in \mathrm{Id}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ удовлетворяет условиям предложения. Предположим, что существуют i, j, $i \neq j$, такие что $A(i,j) \neq 0$. Так как $AA = A$, то существует k, такое что $A(i,k)A(k,j) \neq 0$. Тогда $i \neq k$ или $k \neq j$. Пусть для определённости $i \neq k$. Если $(A(i,k)E_{i,k})B \neq 0$, то существует m, такое что $(A(i,k)E_{i,k})B(k,m) \neq 0$ и $A(i,k)B(k,m) \neq 0$. Поэтому, учитывая антинегативность R, имеем $AB(i,m) = A(i,k)B(k,m) + \ldots \neq 0$ и $AB \neq 0$. Аналогично показывается, что если $B(A(i,k)E_{i,k}) \neq 0$, то $BA \neq 0$. Поэтому $H(A(i,k)E_{i,k}) \subseteq H(A)$. Следовательно, $(A(i,k)E_{i,k})A = A(A(i,k)E_{i,k}) \neq 0$. Это возможно только тогда, когда $A(A(i,k)E_{i,k}) = \alpha E_{i,k}$ для некоторого $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Следовательно, $A(i,i)A(i,k) \neq 0$. Аналогично показанному выше имеем $H(A(i,i)E_i) \subseteq H(A)$. Следовательно, $(A(i,i)E_i)A = A(A(i,i)E_i)$, но $(A(i,i)E_i)A(i,k) = A(i,i)A(i,k) \neq 0$, $A(A(i,i)E_i)(i,k) = 0$ — противоречие. Получили, что если $i \neq j$, то $A(i,j) = 0$ и $A \in D\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$.

2. Пусть $H(B) \subseteq H(\alpha E_i)$ и $B(k,m) \neq 0$. Если $i \neq m$, то $BE_m \neq 0$, $(\alpha E_i)E_m = 0$ — противоречие. Аналогично противоречие получается, если $k \neq i$. Поэтому $B(k,m) \neq 0$ только тогда, когда $k = m = i$ и, следовательно, $B = \beta E_i$ для некоторого $\beta \in R$. □

Множество матриц $A \in \mathrm{Id}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, таких что если $H(B) \subseteq H(A)$, то $AB = BA$, обозначим через $\mathrm{Dg}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$. Из пункта 2 предложения 3.2 следует, что для любых $i = 1, \ldots, n$ и $\alpha \in R$, такого что $\alpha\alpha = \alpha$, имеем, что $\alpha E_i \in \mathrm{Dg}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$.

Для $A \in \mathrm{Dg}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ определим множество

$$E(A) = \big\{B \in \mathrm{Dg}\big(\mathrm{M}_n(R)\big) \mid AB = BA = B\big\}.$$

Предложение 3.3.

1. *Если* $A \in \mathrm{Dg}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ *и выполнены условия*
   i) $E(A) = \{\alpha A \mid \alpha \in R,\ \alpha\alpha = \alpha\}$,
   ii) *если* $\alpha \neq 1$, *то* $\alpha A \neq A$,

то для любых $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$, *имеем, что* $A(i,i)A(j,j) = 0$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{n} A(i,i) = 1$.

2. *Для любого* $i = 1, \ldots, n$ *справедливо* $E(E_i) = \{\alpha E_i \mid \alpha \in R,\ \alpha\alpha = \alpha\}$.

Доказательство.

1. Пусть $A \in \mathrm{Dg}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ и $E(A) = \{\alpha A \mid \alpha \in R,\ \alpha\alpha = \alpha\}$. Предположим, что существуют i, j, $i \neq j$, такие что $A(i,i)A(j,j) \neq 0$. Так как $A \in D\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ и $AA = A$, то $A(i,i)A(i,i) = A(i,i)$, $A(j,j)A(j,j) = A(j,j)$. По предложению 3.2 $A(i,i)E_i$, $A(j,j)E_j \in \mathrm{Dg}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$. Следовательно, существуют $\alpha, \beta \in R$, такие что $A(i,i)E_i = \alpha A$, $A(j,j)E_j = \beta A$. Поэтому $\alpha A(i,i) = A(i,i)$, $\alpha A(j,j) = 0$, $\beta A(j,j) = A(j,j)$, $\beta A(i,i) = 0$. С одной стороны, имеем, что

$$\alpha\beta A(i,i)A(j,j) = \big(\alpha A(i,i)\big)\big(\beta A(j,j)\big) = A(i,i)A(j,j) \neq 0,$$

с другой стороны,

$$\alpha\beta A(i,i)A(j,j) = \big(\beta A(i,i)\big)\big(\alpha A(j,j)\big) = 0 -$$

противоречие. Поэтому $A(i,i)A(j,j) = 0$. Пусть

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} A(i,i).$$

Для любого $j = 1, \ldots, n$

$$(\gamma A)(j,j) = \left(\sum_{i=1}^{n} A(i,i)\right) A(j,j) = A(j,j).$$

Следовательно, $\gamma A = A$. По условию предложения $\gamma = 1$.

2. По предложению 3.2 если $\alpha \in R$ и $\alpha\alpha = \alpha$, то $\alpha E_i \in \mathrm{Dg}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$. Если $(E_i B) = (BE_i) = B$, то существует $\alpha \in R$, такое что $B = \alpha E_i$. Для $B \in \mathrm{Id}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ выполняется $\alpha\alpha = \alpha$. Поэтому $E(E_i) = \{\alpha E_i \mid \alpha \in R,\ \alpha\alpha = \alpha\}$. $\square$

Обозначим через $I\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ множество таких матриц $A \in \mathrm{M}_n(R)$, что $A \in D\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, $A \in \mathrm{Id}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, для любых i, j, $i \neq j$, $A(i,i)A(j,j) = 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} A(i,i) = 1$.

Назовём матрицу $A \in \mathrm{M}_n(R)$ обратимой, если существует такая матрица $B \in \mathrm{M}_n(R)$, что $AB = BA = E$. Обратную к A матрицу будем обозначать A^{-1}. Пусть $\mathrm{Int}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ — множество всех обратимых матриц.

Обозначим через $P\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ множество матриц, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $A(i,j)A(i,j) = A(i,j)$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$;

2) $\sum\limits_{j=1}^{n} A(i,j) = 1$ для любого $i = 1, \ldots, n$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n} A(i,j) = 1$ для любого $j = 1, \ldots, n$;

4) для любых $i, j_1, j_2 = 1, \ldots, n$ если $j_1 \neq j_2$, то $A(i,j_1)A(i,j_2) = 0$;

5) для любых $i_1, i_2, j = 1, \ldots, n$ если $i_1 \neq i_2$, то $A(i_1,j)A(i_2,j) = 0$.

Для матрицы $A \in \mathrm{M}_n(R)$ транспонированной назовём такую матрицу $A^{\mathrm{T}} \in \mathrm{M}_n(R)$, что $A^{\mathrm{T}}(i,j) = A(j,i)$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$.

Если $A \in P\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, то

$$AA^{\mathrm{T}}(k,m) = \sum_{i=1}^{n} A(k,i)A^{\mathrm{T}}(i,m) = \sum_{i=1}^{n} A(k,i)A(m,i).$$

Поэтому если $k \neq m$, то $AA^{\mathrm{T}}(k,m) = 0$, а если $k = m$, то $AA^{\mathrm{T}}(k,m) = 1$. Следовательно, $AA^{\mathrm{T}} = E$, и аналогично $A^{\mathrm{T}}A = E$. Поэтому если $A \in P\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, то $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$.

Предложение 3.4. *Если $B \in I\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, то существует такая $A \in P\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, что $ABA^{\mathrm{T}} = E_1$.*

Доказательство. Определим $A \in \mathrm{M}_n(R)$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$ следующим образом: $A(i,j) = B(k,k)$, где k — остаток от деления $j + (i-1)$ на n.

Так как $B(k,k)B(k,k) = B(k,k)$ для всех $k = 1, \ldots, n$, то $A(i,j)A(i,j) = A(i,j)$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. Если k_1 — остаток от деления на $j_1 + (i-1)$, k_2 — остаток от деления на $j_2 + (i-1)$ и $j_1 \neq j_2$, то $k_1 \neq k_2$. Поэтому $A(i,j_1)A(i,j_2) = B(k_1,k_1)B(k_2,k_2) = 0$. Аналогично $A(i_1,j)A(i_2,j) = 0$ при $i_1 \neq i_2$. Ясно, что для $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} A(i,j) = \sum_{k=1}^{n} B(k,k) = 1$$

и для $j = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} A(i,j) = 1.$$

Поэтому $A \in P\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$. Ясно, что

$$A^{\mathrm{T}}E_1A(i,j) = A^{\mathrm{T}}(i,1)A(1,j) = A(1,i)A(1,j) = B(i,i)B(j,j).$$

Если $i \neq j$, то $A^{\mathrm{T}}E_1A(i,j) = 0$. Если $i = j$, то $A^{\mathrm{T}}E_1A(i,j) = B(i,i)$. Поэтому $A^{\mathrm{T}}E_1A = B$ и $E_1 = ABA^{\mathrm{T}}$. □

Предложение 3.5. *Пусть $B_1, \ldots, B_n \in I\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ и если $i \neq j$, то $B_iB_j = B_jB_i = 0$. Тогда существует такая $A \in P\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, что $AB_iA^{\mathrm{T}} = E_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Заметим, что если $A_1, A_2 \in P\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, то $A_1A_2 \in P\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$. Легко убедиться, что

$$\big(A_1A_2(i,j)\big)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} A_1(i,k)A_2(k,j)\right)^2 = (A_1A_2)(i,j).$$

Из тождеств
$$(A_1A_2)(A_1A_2)^{\mathrm{T}} = A_1(A_2A_2^{\mathrm{T}})A_1^{\mathrm{T}} = E$$
следует, что для A_1A_2 выполнены условия 2)—4) определения $P\bigl(\mathrm{M}_n(R)\bigr)$. Если $A \in P\bigl(\mathrm{M}_n(R)\bigr)$ и $B \in I\bigl(\mathrm{M}_n(R)\bigr)$, то
$$ABA^{\mathrm{T}}(i,j) = \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,k)A(j,k).$$
Если $i \neq j$, то $ABA^{\mathrm{T}}(i,j) = 0$. Если $i = j$, то
$$\bigl(ABA^{\mathrm{T}}(i,i)\bigr)^2 = \biggl(\sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,k)\biggr)^2 = \sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,k).$$
Так как
$$\sum_{i=1}^{n}(ABA^{\mathrm{T}})(i,i) = \sum_{i=1}^{n}\biggl(\sum_{k=1}^{n} A(i,k)B(k,k)\biggr) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\biggl(\sum_{i=1}^{n} A(i,k)\biggr)B(k,k) = \sum_{k=1}^{n} B(k,k) = 1,$$
то $ABA^{\mathrm{T}} \in I\bigl(\mathrm{M}_n(R)\bigr)$.

По предложению 3.4 существует $A_1 \in P\bigl(\mathrm{M}_n(R)\bigr)$, такая что $A_1B_1A_1^{\mathrm{T}} = E_1$. Так как
$$(A_1B_1A_1^{\mathrm{T}})(A_1B_2A_1^{\mathrm{T}}) = A_1(B_1B_2)A_1^{\mathrm{T}} = 0,$$
то
$$E_1(A_1B_2A_1^{\mathrm{T}}) = (A_1B_2A_1^{\mathrm{T}})E_1 = 0,$$
т. е. в первой строке и первом столбце матрицы $A_1B_2A_1^{\mathrm{T}}$ стоят нули. Поэтому существует $A_2' \in \mathrm{M}_n(R)$, у которой в первой строке и первом столбце стоят нули и $A_2'(A_1B_2A_1^{\mathrm{T}})A_2'^{\mathrm{T}} = E_2$, $A_2'(A_2')^{\mathrm{T}} = E'$, где $E'(1,1) = 0$, $E'(i,i) = 1$ для $i = 2,\dots,n$, $E'(i,j) = 0$, если $i \neq j$. Тогда $A_2 = E_1 + A_2' \in P\bigl(\mathrm{M}_n(R)\bigr)$ и
$$A_2(A_1B_2A_1^{\mathrm{T}})A_2^{\mathrm{T}} = (E_1 + A_2')(A_1B_2A_1^{\mathrm{T}})(E_1 + (A_2')^{\mathrm{T}}) = A_2'(A_1B_2A_1^{\mathrm{T}})(A_2')^{\mathrm{T}} = E_2,$$
$$A_2(A_1B_1A_1^{\mathrm{T}})A_2^{\mathrm{T}} = A_2E_1A_2^{\mathrm{T}} = (E_1 + A_2')E_1(E_1 + (A_2')^{\mathrm{T}}) = E_1.$$

Действуя аналогично, найдём $A \in P\bigl(\mathrm{M}_n(R)\bigr)$, такую что $A = A_{n-1}\cdots A_2A_1$ и $AB_iA^{\mathrm{T}} = E_i$ для всех $i = 1,\dots,n$. □

4. Автоморфизмы матричных полуколец

Пусть R — полукольцо. Автоморфизмом полукольца $\mathrm{M}_n(R)$ назовём биективное отображение $\varphi\colon \mathrm{M}_n(R) \to \mathrm{M}_n(R)$, такое что $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$ и $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ для любых $A, B \in \mathrm{M}_n(R)$.

С каждой матрицей $A \in \mathrm{Int}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ связан внутренний автоморфизм ψ, такой что $\psi(B) = ABA^{-1}$ для каждого $B \in \mathrm{M}_n(R)$. Обозначим группу всех внутренних автоморфизмов через $\Phi\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$.

С каждым автоморфизмом τ полукольца R связан автоморфизм T полукольца $\mathrm{M}_n(R)$, такой что $(TA)(i,j) = \tau\big(A(i,j)\big)$ для всех $A \in \mathrm{M}_n(R)$, $i,j = 1,\ldots,n$. Обозначим группу таких автоморфизмов $T\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$.

Теорема 4.1. *Пусть R — коммутативное антинегативное полукольцо с единицей. Тогда каждый автоморфизм φ полукольца $\mathrm{M}_n(R)$ имеет вид $\varphi = \psi T$, где $T \in T\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, $\psi \in \Phi\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$.*

Доказательство. Пусть φ — автоморфизм $\mathrm{M}_n(R)$ и $\varphi(E_i) = B_i$ для $i = 1,\ldots,n$. По предложению 3.1

$$\varphi\Big(Z\big(\mathrm{M}_n(R)\big)\Big) = Z\big(\mathrm{M}_n(R)\big).$$

Ясно, что $\varphi(0) = 0$. Так как

$$\varphi\Big(\mathrm{Id}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)\Big) = \mathrm{Id}\big(\mathrm{M}_n(R)\big),$$

то по предложению 3.2

$$\varphi\Big(\mathrm{Dg}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)\Big) = \mathrm{Dg}\big(\mathrm{M}_n(R)\big).$$

Так как $E_i \in I\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, то по предложению 3.3 $B_i \in I\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$.

Если $i \neq j$, то $B_iB_j = B_jB_i = 0$, поэтому по предложению 3.5 существует $A \in P\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, такая что $AB_iA^{\mathrm{T}} = E_i$. Следовательно, существует внутренний автоморфизм $\psi = \psi(A)$, $\psi(A)B = ABA^{\mathrm{T}}$, такой что $\psi\varphi(E_i) = E_i$ для всех $i = 1,\ldots,n$.

Для любых i, j выполняется $E_iE_{i,j}E_j = E_{i,j}$. Поэтому $\psi\varphi(E_{i,j}) = E_i\psi\varphi(E_{i,j})E_j$, следовательно, $\psi\varphi(E_{i,j}) = c_{i,j}E_{i,j}$ для некоторого $c_{i,j} \in R$.

Так как $E_{i,k} \cdot E_{k,j} = E_{i,j}$, то $c_{i,k} \cdot c_{k,j} = c_{i,j}$. В частности, $c_{1,i} \cdot c_{i,j} = c_{1,j}$.

Определим $D \in D\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$: $D(i,i) = c_{1,i}$. С D связан внутренний автоморфизм $\psi(D)A = DAD^{-1}$. Имеем

$$\psi(D)\psi\varphi(E_{i,j}) = \psi(D)(c_{i,j}E_{i,j}) = D(i,i)(c_{i,j}E_{i,j})D(j,j) = c_{1,i}(c_{i,j}E_{i,j})c_{1,j} = E_{i,j}.$$

Определим внутренний автоморфизм $\psi_1 = \psi(D)\psi$. Определим автоморфизм полукольца R следующим образом: $\tau(\alpha) = \beta$ равносильно тому, что $\psi_1\varphi(\alpha E) = \beta E$. С τ связан автоморфизм полукольца $\mathrm{M}_n(R)$: $T(A)(i,j) = \tau\big(A(i,j)\big)$. Тогда

$$T^{-1}\psi_1\varphi(\alpha E_{i,j}) = T^{-1}(\beta E_{i,j}) = \alpha E_{i,j}.$$

Обозначим $I = T^{-1}\psi_1\varphi$. Для любых $A \in \mathrm{M}_n(R)$, $i,j = 1,\ldots,n$ выполняется $E_iAE_j = A(i,j)E_{i,j}$. Следовательно, $I(A)(i,j) = A(i,j)$. Поэтому I — тождественный автоморфизм. Имеем $\varphi = (\psi_1^{-1})T$, где $(\psi_1^{-1}) \in \Phi\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, $T \in T\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$. $\square$

Назовём автоморфизм φ полукольца $\mathrm{M}_n(R)$ сохраняющим скаляры, если $\varphi(\alpha A) = \alpha\varphi(A)$ для любых $\alpha \in R$, $A \in \mathrm{M}_n(R)$.

Следствие 4.1. *Если R — коммутативное антинегативное полукольцо с единицей, то каждый автоморфизм полукольца $\mathrm{M}_n(R)$, сохраняющий скаляры, является внутренним.*

Следствие 4.2. *Пусть R — коммутативное антинегативное полукольцо с единицей. Тогда если $A \in \mathrm{M}_n(R)$ обратима, то $A = DP$, где D обратима и $D \in D\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, $P \in P\mathrm{M}_n(R)$.*

Доказательство. Если $A \in \mathrm{Int}\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$, то определён автоморфизм $\psi(A)(B) = A^{-1}BA$. По предложению 3.5 существует $P \in P\mathrm{M}_n(R)$, такая что $P(AE_iA^{-1})P^{-1} = E_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Обозначим $PA = D$. Тогда $(PA)E_i(PA)^{-1} = E_i$, $DE_iD^{-1} = E_i$, $DE_i = E_iD$. Имеем для $i \neq j$, что $E_iD(i,j) = D(i,j) = DE_i(i,j) = 0$. Поэтому $D \in D\big(\mathrm{M}_n(R)\big)$ и D обратима. $\square$

5. Изоморфизмы полуколец инцидентности

Пусть $N_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$. Определим на множестве N_1 квазипорядок $\leqslant_1$: для некоторых пар (i,j), $i,j \in N_1$, $i \leqslant_1 j$. Отношение $\leqslant_1$ рефлексивно и транзитивно. Пусть R — полукольцо. Рассмотрим множество всех $A \in \mathrm{M}_{n_1}(R)$, таких что если $i \not\leqslant_1 j$, то $A(i,j) = 0$. В частности, $E_{i,j} \neq 0$ равносильно тому, что $i \leqslant_1 j$. Множество таких матриц вместе с операциями сложения и умножения матриц образует полукольцо инцидентности $\mathrm{IR}(N_1, \leqslant_1)$. Отношение $(N_1, \leqslant_1)$ назовём связным, если для любой пары $i, j \in N_1$ существует последовательность $i = x_1, \ldots, x_i, \ldots, j = x_k$, $x_i \in N_1$, такая что для любого $i = 1, \ldots, k-1$ выполнено $x_i \leqslant_1 x_{i+1}$ или $x_{i+1} \leqslant_1 x_i$.

Теорема 5.1. *Пусть R_1, R_2 — коммутативные полукольца с единицей, $(N_1, \leqslant_1)$, $(N_2, \leqslant_2)$ — связные квазипорядки, $I_1 = \mathrm{IR}_1(N_1, \leqslant_1)$, $I_2 = \mathrm{IR}_2(N_2, \leqslant_2)$ — полукольца инцидентности. Если полукольца I_1, I_2 изоморфны, то изоморфны квазипорядки $(N_1, \leqslant_1)$, $(N_2, \leqslant_2)$ и полукольца R_1, R_2.*

Доказательство. Без существенных изменений доказательства и утверждения раздела 3 переносятся на полукольца инцидентности. В частности, $Z(I_1) = \{\alpha E \mid \alpha \in R_1\}$, $Z(I_2) = \{\alpha E \mid \alpha \in R_2\}$. Поэтому полукольца R_1, R_2 изоморфны.

Предположим, что $1 \notin R_1^{-1}$. Тогда кольцо $\mathrm{IR}_1^-(N_1, \leqslant_1)$ изоморфно кольцу $\mathrm{IR}_2^-(N_2, \leqslant_2)$, фактор-полукольцо $\mathrm{IR}(N_1, \leqslant_1)/\mathrm{IR}_1^-(N_1, \leqslant_1)$ изоморфно $\mathrm{IR}_1/R_1^-(N_1, \leqslant_1)$ и полукольцо R_1/R_1^- антинегативно.

Пусть φ — изоморфизм полуколец $\mathrm{IR}_1/R_1^-(N_1, \leqslant_1)$ и $\mathrm{IR}_2/R_2^-(N_2, \leqslant_2)$. Предположим, что $\operatorname{card} N_1 = n_1$, $\operatorname{card} N_2 = n_2$ и $n_1 > n_2$. По аналогии с предположением 3.5 показывается, что существует матрица $A \in P\mathrm{M}_{n_2}(R_2/R_2^-)$,

такая что $A\varphi(E_i)A^{\mathrm{T}} = E'_i$ для $i = 1, \ldots, n_2$, где $E'_i \in \mathrm{M}_{n_2}(R_2/R_2^-)$. Но тогда $A\varphi(E_{n_1})A^{\mathrm{T}}A\varphi(E_i)A^{\mathrm{T}} \neq 0$ для некоторого $i = 1, \ldots, n_2$, что невозможно. Поэтому $n_1 \leqslant n_2$. Аналогично показывается, что $n_2 \leqslant n_1$, и следовательно, $n_1 = n_2$. Поэтому существует $A \in P\mathrm{M}_{n_2}(R_2/R_2^-)$, такая что $A\varphi(E_i)A^{\mathrm{T}} = E'_i$ для $i = 1, \ldots, n_1$.

Для любых $i, j = 1, \ldots, n_1$ выполнено $A\varphi(E_iE_{i,j}E_j)A^{\mathrm{T}} = AE'_iA\varphi(E_{i,j})A^{\mathrm{T}}E'_j$. Поэтому $A\varphi(E_i, j)A^{\mathrm{T}} = \alpha E'_{i,j}$ для некоторого $\alpha \in R_2/R_2^-$. Следовательно, то, что $i \leqslant_1 j$ в $(N_1, \leqslant_1)$, равносильно тому, что $i \leqslant_2 j$ в $(N_2, \leqslant_2)$, $(N_1, \leqslant_1) \cong (N_2, \leqslant_2)$.

Если $1 \in R^-$, то $\mathrm{IR}_1^-(N_1, \leqslant_1) \cong \mathrm{IR}_2^-(N_2, \leqslant_2)$, и R_1^-, R_2^- — коммутативные кольца с единицей. В [1, 4] показано, что и в этом случае $(N_1, \leqslant_1) \cong (N_2, \leqslant_2)$. $\square$

Литература

[1] Шматков В. Д. Изоморфизмы и автоморфизмы колец и алгебр инцидентности: Дисс.... канд. физ.-мат. наук. — М., 1994.

[2] Abrans G., Haefner J., del Río Á. The isomorphism problem for incidence rings // Pacific J. Math. — 1999. — Vol. 187, no. 2. — P. 201—214.

[3] Isaacs I. M. Automorphisms of matrix algebras over commutative rings // Linear Algebra Appl. — 1980. — Vol. 31. — P. 215—231.

[4] Spiegel E., O'Donnell C. Incidence Algebras. — Marcel Dekker, 1997. — (Pure Appl. Math.; Vol. 206).

[5] Tan Y. On invertible matrices over antirings // Linear Algebra Appl. — 2007. — Vol. 423. — P. 428—444.