О проблеме равенства слов в свободных квазигруппах многообразий квазигрупп, изотопных группам

М. М. ГЛУХОВ
Академия криптографии Российской Федерации
e-mail: glukhovmm@rambler.ru

УДК 512.572

Ключевые слова: квазигруппа, многообразие, проблема равенства слов.

Аннотация

В работе рассматриваются многообразия квазигрупп, являющихся изотопными замыканиями подходящих многообразий групп. Указываются условия, при которых в многообразиях квазигрупп и соответствующих групп одновременно положительно разрешимы проблемы равенства слов в свободных алгебрах.

Abstract

M. M. Glukhov, On the word problem in the free quasigroups in the varieties of quasigroups isotopic to groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 1, pp. 39—55.

We consider the quasigroup varieties that are isotopic closures of the appropriate group varieties. We give the conditions for the word problem to be positively solvable simultaneously in the free algebras of the varieties of quasigroups and the corresponding groups.

1. Основные понятия и обозначения

При рассмотрении многообразий квазигрупп будут использоваться многообразия и некоторых других алгебр. Поэтому основные понятия и обозначения, связанные с изучением многообразий, будут приведены для алгебр произвольной сигнатуры [9, 13].

Под многообразием алгебр с фиксированной системой операций, называемой сигнатурой, понимают класс всех алгебр этой сигнатуры, замкнутый относительно подалгебр, гомоморфных образов и декартовых произведений алгебр. По известной теореме Биркгофа класс алгебр фиксированной сигнатуры является многообразием тогда и только тогда, когда он состоит из всех алгебр, удовлетворяющих некоторой системе тождеств в той же сигнатуре.

Одно из важнейших достоинств класса алгебр, являющегося многообразием, заключается в возможности задавать каждую его алгебру системой образующих

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 1, с. 39—55.

(порождающих) элементов и определяющих соотношений. Такое задание алгебры называют обычно её копредставлением. Далее мы будем пользоваться этим термином. Для определения понятий тождества, соотношения в алгебре и её копредставления напомним определения понятий слова сигнатуры Ω (короче, Ω-слова) в алфавите A, его длины и ранга. При этом элементы из A будем называть буквами алфавита A или символами.

Пусть сигнатура Ω состоит из конечного числа функциональных символов, не содержащихся в A, с приписанными к ним натуральными числами, называемыми арностями этих символов, и Ω_0 — множество всех 0-арных символов из Ω. Понятия $(d_1, \ldots, d_n)$-слова в алфавите A и его длины определяются индуктивно.

Определение 1.

1. Каждый символ из $A \cup \Omega_0$ есть слово длины 1 и ранга 0 в алфавите A.
2. Если f — n-арный символ из $\Omega \setminus \Omega_0$ и $P_1, \ldots, P_n$ — Ω-слова в алфавите A соответственно длин $d_1, \ldots, d_n$ и рангов $r_1, \ldots, r_n$, то $f(P_1, \ldots, P_n)$ есть Ω-слово длины $d = d_1 + \ldots + d_n$ и ранга $r_1 + \ldots + r_n + 1$ в алфавите A.
3. Других Ω-слов в алфавите A нет.

Длину и ранг слова P обозначим соответственно через $d(P)$ и $r(P)$. Множество всех Ω-слов в алфавите A условимся обозначать через $W(\Omega, A)$. При фиксированной сигнатуре Ω определённые выше Ω-слова будем иногда называть просто словами, а множество всех слов в алфавите A обозначать через $W(A)$.

Если в записи слова $P \in W(A)$ не встречается символов из A, отличных от $a_1, \ldots, a_m$, то слово P записывают также в виде $P(a_1, \ldots, a_m)$.

Определение 2. Тождеством сигнатуры Ω называют пару Ω-слов в некотором фиксированном алфавите, называемом алфавитом переменных. Общее число переменных, участвующих в записи тождества, называют его рангом. Тождество (P, R) будем обозначать также через $P \equiv R$, называя слова P, R соответственно левой и правой частями тождества.

Условимся алфавит переменных обозначать буквой X, а его элементы — буквами x, y, z, u, v, возможно с индексами. Под алгеброй сигнатуры Ω, или Ω-алгеброй, понимают любое множество U с набором операций, обозначенных теми же символами и имеющих те же арности, что и функциональные символы сигнатуры Ω. При этом U называют основным множеством Ω-алгебры, которую обозначают обычно той же буквой U.

Индукцией по рангу слова естественным образом определяется значение $P(a_1, \ldots, a_m)$ слова $P = P(x_1, \ldots, x_m)$ из $W(\Omega, X)$ при подстановке в него вместо переменных $x_1, \ldots, x_m$ соответственно элементов $a_1, \ldots, a_m$ некоторой алгебры U сигнатуры Ω.

Определение 3. Если $r(P) = 0$, то P имеет вид $x_i \in X$ или $e \in \Omega_0$, и тогда $P(a_1, \ldots, a_m)$ считается равным соответственно элементу a_i или элементу, являющемуся значением 0-арной операции e в алгебре U.

Если $r(P) > 0$, то $P = f(P_1, \ldots, P_n)$, и тогда $P(a_1, \ldots, a_m)$ считается равным элементу $f(b_1, \ldots, b_n) \in U$, где $b_1, \ldots, b_n$ — соответственно значения слов

$P_1, \ldots, P_n$ в U при той же замене переменных ($b_1, \ldots, b_n$ определены по предположению индукции).

Тождество $P \equiv R$ сигнатуры Ω считается выполненным в Ω-алгебре U, если слова P, R имеют в U равные значения при любой одинаковой для слов P, R замене переменных элементами из U.

Многообразие всех алгебр сигнатуры Ω, в которых выполняется система тождеств Σ, обозначим через $U(\Omega, \Sigma)$. Зафиксируем произвольную конечную сигнатуру Ω и опишем конструкцию алгебры из $U(\Omega, \Sigma)$, заданной системами образующих элементов M и определяющих соотношений S. При этом под определяющим соотношением понимается произвольная пара (w_1, w_2) слов из $W(M)$, которая будет записываться также в виде равенства $w_1 = w_2$.

Используя тождества из Σ и определяющие соотношения из S, введём на множестве $W(M)$ отношение эквивалентности. Для этого определим сначала понятие элементарного преобразования слов.

Определение 4. Элементарным преобразованием слова $Q \in W(M)$ по тождеству $P \equiv R$ из Σ называется замена в Q некоторого подслова A словом B или подслова B словом A при условии, что A и B получены одной и той же заменой переменных в левой и правой частях тождества $P \equiv R$ произвольными словами из $W(M)$. При этом предполагается, что при получении слов A, B все вхождения одной и той же переменной заменяются одним и тем же словом.

Элементарным преобразованием слова $P \in W(M)$ по определяющему соотношению $w_1 = w_2$ из S называется замена в P некоторого одного вхождения подслова w_1 или w_2 соответственно словом w_2 или w_1.

Слова $P, R \in W(M)$ называются эквивалентными, если одно из них можно получить из другого конечной последовательностью элементарных преобразований по тождествам из Σ и соотношениям из S.

Заметим, что это определение корректно, поскольку, как легко убедиться, введённое отношение является отношением эквивалентности.

Тот факт, что слово R получено из P одним элементарным преобразованием по какому-либо тождеству или определяющему соотношению, будем обозначать $P \to R$, а эквивалентность слов — через $\approx$. Этим отношением всё множество $W(M)$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентных слов. Класс слов, содержащий слово P, обозначим через $[P]$, а множество всех классов — через $V(M)$. Введём на множестве $V(M)$ операции, соответствующие символам из Ω, положив для любого символа f арности $n > 0$

$$f([P_1], \ldots, [P_n]) = [f(P_1, \ldots, P_n)]$$

и поставив в соответствие каждому 0-арному символу e класс $[e]$.

Легко убедиться, что указанное определение операций корректно и множество $V(M)$ с этими операциями является алгеброй из многообразия $U(\Omega, \Sigma)$.

Определение 5. Построенная выше алгебра $V(M)$ называется алгеброй многообразия $U(\Omega, \Sigma)$, заданной множеством образующих M и системой определяющих соотношений S. При фиксированных и известных Ω, Σ она обозначается через $\langle M, S\rangle$. Алгебра $\langle M, S\rangle$ называется конечно порождённой, если конечно множество M, и конечно определённой, если конечны множества M и S.

Из построения алгебры $\langle M, S\rangle$ видно, что в действительности она порождается не множеством M, а множеством классов $\{[m]\colon m \in M\}$.

Заметим, что такой способ задания алгебр является универсальным, поскольку любая алгебра U из $U(\Omega, \Sigma)$ может быть задана множеством всех её элементов и системой всех выполняющихся в ней соотношений вида

$$f(b_1, \ldots, b_n) = b, \tag{1}$$

где $f \in \Omega$, $b, b_1, \ldots, b_n \in U$. В дальнейшем будем называть соотношения вида (1) табличными, а множество всех таких соотношений — диаграммой алгебры U.

Заметим, что во многих конкретных случаях алгебра задаётся небольшим числом образующих и соотношений, и тем самым удаётся всю информацию об алгебре записать в небольшом объёме памяти. Однако следует также иметь в виду, что такое задание алгебры обладает существенным недостатком, связанным со сложностью извлечения из него определённой информации об алгебре. В частности, одной из главных проблем в этом направлении является проблема распознавания равенства её элементов, т. е. эквивалентности слов. Это и есть проблема равенства слов в алгебре или в классе алгебр, в частности в многообразии алгебр. Для многообразия алгебр $U(\Omega, \Sigma)$ она обычно формулируется следующим образом. Найти алгоритм, который для любой конечно определённой алгебры $U = \langle M, S\rangle$ из $U(\Omega, \Sigma)$ и для любых двух слов из $W(M)$ позволял бы решать вопрос об эквивалентности этих слов в алгебре U, или доказать, что такого алгоритма не существует.

Известны многообразия алгебр, в которых эта проблема решается положительно, а также многообразия, в которых она решается отрицательно. В частности, к первым относится многообразие всех квазигрупп, ко вторым — многообразие всех групп.

При изучении алгебр из многообразия важную роль играют свободные алгебры данного многообразия.

Определение 6. Алгебра U называется свободной в многообразии $U(\Omega, \Sigma)$, если она изоморфна алгебре, заданной в виде $\langle M, \varnothing\rangle$. Прообраз множества M при этом изоморфизме называют свободной системой образующих или базисом алгебры U. В частности, базисом алгебры $\langle M, S\rangle$ называют само множество M.

Особая роль свободных алгебр многообразия $U(\Omega, \Sigma)$ объясняется тем, что любая алгебра этого многообразия является гомоморфным образом подходящей свободной алгебры этого многообразия. Отсюда, в частности, следует, что проблема равенства слов в свободных алгебрах многообразия $U(\Omega, \Sigma)$ эквивалентна проблеме распознавания истинности тождеств в алгебрах этого многообразия.

Любая свободная система образующих M алгебры $U \in U(\Omega, \Sigma)$ характеризуется следующим свойством: любое отображение множества M в любую алгебру $V \in U(\Omega, \Sigma)$ однозначно продолжается до гомоморфизма U в V. Это свойство часто используется для проверки того, что заданная алгебра свободна.

При изучении алгебр одного многообразия иногда бывает полезно рассмотреть алгебры некоторого связанного с ним другого многообразия. Именно такой подход использовался в ряде работ при изучении квазигрупп, изотопных группам, о чём подробнее будет сказано ниже. В связи с этим приведём введённое в [17] понятие эквивалентных классов алгебр.

Определение 7. Классы K_1, K_2 алгебр сигнатур Δ_1, Δ_2 соответственно называются эквивалентными, если существует биективное отображение $f\colon K_1 \to K_2$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) для любой алгебры $A \in K_1$ основные множества алгебр A и $f(A)$ совпадают;
2) для любых алгебр $A, B \in K_1$ отображение A в B является гомоморфизмом тогда и только тогда, когда оно является гомоморфизмом алгебры $f(A)$ в $f(B)$.

При этом отображение f называется эквивалентностью между классами K_1 и K_2.

Если f — эквивалентность между многообразиями алгебр K_1, K_2, то имеют место следующие утверждения.

— Подмножество $A_1 \subseteq A$ является подалгеброй алгебры A тогда и только тогда, когда $f(A_1)$ — подалгебра алгебры $f(A)$.
— Подмножество $M \subseteq A$ порождает алгебру A тогда и только тогда, когда M порождает алгебру $f(A)$.
— Отношение эквивалентности на A является конгруэнцией алгебры A тогда и только тогда, когда оно является конгруэнцией алгебры $f(A)$.
— Алгебра $A \in K_1$ является свободной в многообразии K_1 с базисом M тогда и только тогда, когда $f(A)$ свободна в K_2 с тем же базисом M.
— Класс алгебр L из K_1 является подмногообразием в K_1 тогда и только тогда, когда класс $\{f(A)\colon A \in L\}$ является подмногообразием в K_2.

Среди всех эквивалентностей между классами алгебр особо выделяются так называемые рациональные эквивалентности.

Пусть K — класс алгебр сигнатуры Δ и X — алфавит переменных. Тогда по каждому Δ-слову P в алфавите X, содержащему в своей записи ровно n переменных, например $x_1, \ldots, x_n$, можно определить n-арную операцию w_P на каждой алгебре A из K. Значение этой операции на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ равно значению в A слова, полученного из P подстановкой вместо $x_1, \ldots, x_n$ соответственно элементов $a_1, \ldots, a_n$. Так определённую операцию называют производной операцией в сигнатуре Δ, соответствующей Δ-слову P.

Переводом сигнатуры Δ_1 в сигнатуру Δ_2 называется любое отображение $\tau\colon \Delta_1 \to \Delta_2$, при котором каждая операция $h \in \Delta_1$ отображается в некоторую производную операцию той же арности в сигнатуре Δ_2. Если τ — такой перевод, то по любой алгебре B сигнатуры Δ_2 можно определить алгебру $A = T_\tau(B)$ сигнатуры Δ_1 с тем же основным множеством, определив операцию $h \in \Delta_1$ как совпадающую с $\tau(h)$.

Классы алгебр K_1, K_2 сигнатур Δ_1, Δ_2 соответственно называются рационально эквивалентными, если существуют такие переводы сигнатур $\tau\colon \Delta_1 \to \Delta_2$ и $\sigma\colon \Delta_2 \to \Delta_1$ и биективное отображение $f\colon K_1 \to K_2$, что композиции $T_\tau T_\sigma$ и $T_\sigma T_\tau$ являются тождественными отображениями.

Очевидно, что рациональная эквивалентность классов алгебр является эквивалентностью, и потому для рационально эквивалентных классов имеют место приведённые выше утверждения.

2. О многообразиях линейных и алинейных квазигрупп

Класс квазигрупп как алгебр с одной бинарной операцией не замкнут относительно гомоморфных образов [1] и потому не является многообразием. В связи с этим при рассмотрении вопросов, связанных с многообразиями, квазигруппы представляют как алгебры с тремя операциями, добавляя к основной операции ещё две дополнительные операции. Если основная операция является умножением $\cdot$, то остальные две операции называют левым и правым делением и обозначают соответственно через $/$ и $\backslash$. Заметим, что любые две из этих трёх операций однозначно определяются третьей операцией, поскольку справедливы следующие эквивалентности:

$$x\,/\,y = z \Longleftrightarrow z\cdot y = x, \quad x\setminus y = z \Longleftrightarrow x\cdot z = y, \quad x\setminus y = z \Longleftrightarrow y\,/\,z = x.$$

Далее в записях точка как знак умножения будет опускаться, а для уменьшения скобок операция $\cdot$ будет считаться сильнее операций $/$ и $\backslash$.

Отметим ещё, что при утверждении о незамкнутости класса всех квазигрупп относительно гомоморфных образов имелось в виду, что образ гомоморфизма квазигруппы $(Q,\cdot)$ в алгебру с одной бинарной операцией может не быть квазигруппой. Если же известно, что эта алгебра — квазигруппа, то гомоморфный образ квазигруппы $(Q,\cdot)$ будет обязательно квазигруппой. Больше того, в этом случае гомоморфизм относительно операции $\cdot$ будет гомоморфизмом и относительно операций $/$, $\backslash$.

Легко проверить, что все квазигруппы, рассматриваемые как алгебры в сигнатуре $\Omega = \{\cdot, /, \backslash\}$, образуют многообразие. Раньше многообразия алгебр чаще называли примитивными классами, и потому квазигруппы в сигнатуре $\Omega = \{\cdot, /, \backslash\}$ назвали примитивными квазигруппами. Всюду далее в данной главе квазигруппы будут рассматриваться в сигнатуре $\Omega = \{\cdot, /, \backslash\}$. Класс всех квазигрупп в сигнатуре $\Omega = \{\cdot, /, \backslash\}$, удовлетворяющих системе тождеств Σ, обозначим через $Q(\Sigma)$. Так как класс всех квазигрупп задаётся системой тождеств

$$\Sigma_0 = \{xy\,/\,y \equiv x,\ (x\,/\,y)y \equiv x,\ x(x\setminus y) \equiv y,\\ x\setminus xy \equiv y,\ x\,/(y\setminus x) \equiv y,\ (x\,/\,y)\setminus x \equiv y,$$

то далее всегда будем считать, что $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, где Σ_1 — любая (возможно, пустая) система тождеств сигнатуры Ω. Больше того, в том случае, когда система Σ_1 не пустая, будем говорить, что многообразие квазигрупп $Q(\Omega, \Sigma)$ определяется системой тождеств Σ_1.

Конечные квазигруппы как латинские квадраты являются старыми классическими объектами математики. Однако теория квазигрупп как область алгебры является сравнительно молодой. Интенсивно она начала развиваться примерно с середины XX века. К этому времени теория групп была уже достаточно хорошо развитой и её идеи и методы широко использовались при изучении квазигрупп. В частности, многие ставшие затем популярными классы квазигрупп выделялись различными свойствами, характеризующими их близость к группам. Так, например, диассоциативные квазигруппы определяются системой тождеств

$$(xx)y \equiv x(xy), \quad (xy)x \equiv x(yx), \quad (xy)y \equiv x(yy),$$

близких к ассоциативности, квазигруппы со свойством обратимости (или IP-квазигруппы) определяются системой тождеств

$$\alpha(x)(xy) \equiv y, \quad (yx)\beta(x) \equiv y,$$

где α, β — произвольные фиксированные подстановки, обобщающие подстановку $x \mapsto x^{-1}$ в группах, и т. д.

Одним из свойств квазигруппы, характеризующих её близость к группе, является наличие её изотопии на группу. В связи с этим выделяется класс всех квазигрупп, изотопных группам, который мы обозначим через $Q(\Gamma)$. Из него естественно выделяются подклассы квазигрупп, изотопных группам из того или иного фиксированного класса групп. В частности, класс всех квазигрупп, изотопных абелевым группам, обозначим через $Q(A\Gamma)$.

На первых порах развития теории квазигрупп классы $Q(\Gamma)$ и $Q(A\Gamma)$ были теми модулями, по которым изучались квазигруппы. Считалось, что класс квазигрупп почти полностью описан, если удавалось доказать, что его квазигруппы изотопны группам. В противном случаи обычно искались условия, при которых квазигруппы того или иного класса изотопны группам.

При изучении квазигрупп, изотопных группам, естественно возникает вопрос описания класса квазигрупп, изотопных группам из того или иного класса групп K, или, как говорят, изотопного замыкания класса групп K. В частности, интересен случай, когда изотопное замыкание класса групп K является многообразием квазигрупп.

Указанный вопрос для классов квазигрупп $Q(\Gamma)$ и $Q(A\Gamma)$ был решён ещё в 1966 г. В. Д. Белоусовым [2] при описании уравновешенных тождеств в квазигруппах. Им доказано, что квазигруппы классов $Q(\Gamma)$ и $Q(A\Gamma)$, рассматриваемые как алгебры с тремя операциями $\cdot$, $/$, $\backslash$, образуют многообразия, определяемые системами тождеств, полученными путём добавления к системе тождеств Σ_0 соответственно тождеств:

$$x\Big(y \backslash \big((z \,/\, u)v\big)\Big) \equiv \Big(\big(x(y \backslash z)\big) \,/\, u\Big)v \quad \text{и} \quad x \backslash \big(y(u \backslash v)\big) \equiv u \backslash \big(y(x \backslash v)\big).$$

Позднее, в 1985 г. А. А. Гварамия доказал, что изотопное замыкание любого многообразия (квазимногообразия, псевдомногообразия) групп является многообразием (квазимногообразием, псевдомногообразием) квазигрупп (см. [5, 6]). Он также указал способ получения квазигрупповых тождеств из соответствующих групповых тождеств. При этом на каждое тождество необходимо было добавлять две новых переменных буквы.

Ф. Н. Сохацкий [14, 24] получил более общий результат по характеризации квазигрупп тождествами. Он рассмотрел изотопные замыкания так называемых абстрактных классов групп, т. е. классов, которые вместе с любой группой содержат все изоморфные ей группы. Он доказал, что абстрактный класс групп определяется системой формул S узкого исчисления предикатов в групповой сигнатуре тогда и только тогда, когда его изотопное замыкание определяется системой формул Σ_0 и универсальным термальным замыканием системы S. При этом универсальным термальным замыканием формулы Φ в групповой сигнатуре $\{+,-\}$ он назвал формулу $\forall u\ \Psi$, где u — переменная не из Φ, а Ψ получается из Φ заменой подформул вида $x+y$ и $-x$ формулами $(x\,/\,u)\big((u\,/\,u)\setminus y\big)$ и $(u\,/\,u)\big((x\,/\,u)\setminus u\big)$ соответственно. В частности, отсюда следует, что классы квазигрупп $Q(\Gamma)$ и $Q(A\Gamma)$ являются многообразиями, которые задаются системами тождеств, полученными путём добавления к тождествам Σ_0 соответственно тождеств

$$\Big(\big(x(u\setminus y)\big)\,/\,u\Big)z \equiv x\Big(u\setminus\big((y\,/\,u)z\big)\Big) \quad \text{и} \quad (x\,/\,u)\big((u\,/\,u)\setminus y\big) \equiv (y\,/\,u)\big((u\,/\,u)\setminus x\big).$$

Заметим, что каждое из этих тождеств содержит на одну переменную букву меньше, чем в тождествах Белоусова и Гварамия. Однако эти тождества имеют и определённый недостаток: они составлены из более длинных слов, чем тождества Белоусова и Гварамия.

Некоторые классы квазигрупп, изотопных группам, выделяются путём наложения ограничений на используемые изотопии. Примерами могут служить классы линейных и алинейных квазигрупп над группами. Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется линейной (алинейной) над группой $(Q,+)$, если

$$x\cdot y = x\alpha + y\beta + c, \tag{2}$$

где α, β — автоморфизмы (антиавтоморфизмы) группы $(Q,+)$, $c\in Q$. Если в этом определении требование быть автоморфизмом (антиавтоморфизмом) оставить лишь для α или β, то получим определения квазигруппы, линейной (алинейной) соответственно слева или справа над группой $(Q,+)$.

В [21] с использованием эквивалентности многообразий алгебр различной сигнатуры доказано, что классы квазигрупп, линейных, линейных справа и линейных слева, являются многообразиями. Позднее в [4] было доказано, что множество всех примитивных линейных (алинейных) квазигрупп является многообразием, которое выделяется из класса всех квазигрупп тождеством

$$(x\cdot y)\cdot(u\cdot v) \equiv (x\cdot u)\cdot(y\alpha_u\cdot v) \tag{3}$$

или соответственно

$$(x \cdot y) \cdot (u \cdot v) \equiv (v\beta_x \cdot y) \cdot (u \cdot x), \tag{4}$$

где α_u, β_x — подстановки основного множества квазигруппы, определяемые равенствами

$$y\alpha_u = \Bigl(u \setminus \Bigl(\bigl((u \,/\, u) \cdot y\bigr) \cdot u\Bigr)\Bigr) \,/\, (u \setminus u), \quad v\beta_x = \Bigl(\Bigl(x \cdot \bigl((x \,/\, x) \cdot v\bigr)\Bigr) \,/\, x\Bigr) \,/\, (x \setminus x).$$

Линейные квазигруппы, изотопные абелевым группам, названы в [22, 23] T-квазигруппами. К T-квазигруппам относятся, например, медиальные квазигруппы, т. е. квазигруппы, характеризуемые тождеством медиальности

$$(x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v).$$

В них операция задаётся равенством типа (2) с коммутативной операцией $+$ и перестановочными между собой автоморфизмами α, β.

В [23] доказано, что класс T-квазигрупп также является многообразием и, как установлено в [3], характеризуется системой тождеств (3), (4).

Весьма частным классом линейных квазигрупп являются рассматриваемые ранее в [10, 11] лупы с левой единицей e, изотопные абелевым группам с изотопиями вида $(\alpha, \varepsilon, \varepsilon)$, где α — автоморфизм второго порядка группы, а ε — тождественная подстановка. В частности, показано, что этот класс квазигрупп является многообразием и задаётся тождеством антиассоциативности $(xy)z = (zy)x$.

Этот результат легко обобщается на случай, когда α — автоморфизм n-го порядка группы. В этом случае соответствующий класс квазигрупп задаётся тождеством

$$\Bigl(\Bigl(\bigl((xy_1)y_2\bigr)\ldots\Bigr)y_{n-1}\Bigr)z \equiv \Bigl(\Bigl(\bigl((zy_1)y_2\bigr)\ldots\Bigr)y_{n-1}\Bigr)x.$$

Известно (и очевидно), что если квазигруппа изотопна группе G, то она главно изотопна некоторой группе, изоморфной G. А так как многообразие групп замкнуто относительно изоморфизмов групп, то при рассмотрении многообразий квазигрупп, изотопных группам, не теряя общности, можно ограничиться лишь главными изотопиями, т. е. изотопиями вида $(\alpha, \beta, \varepsilon)$. При этом на подстановки α, β можно накладывать самые разнообразные условия. В связи с этим представляет интерес изучение классов квазигрупп, главно изотопных группам из некоторого многообразия групп, при условии, что компоненты α, β изотопий порождают заданную группу подстановок.

3. О свободных квазигруппах в изотопных замыканиях групп

Квазигруппы многообразия $Q(\Omega, \Sigma)$, как и алгебры любого многообразия, можно задавать системами образующих элементов и определяющих соотношений. И так же, как и в общем случае, встаёт алгоритмическая проблема равенства слов. В общем случае известен ряд многообразий квазигрупп, в которых эта проблема решается положительно. В частности к ним относятся так называемые R-многообразия, введённые в [8] и полностью описанные в [7]. Однако нам не известно ни одного многообразия квазигрупп, являющегося изотопным замыканием многообразия групп, в котором бы положительно решалась проблема равенства слов. В связи с этим представляет интерес проблема равенства слов в свободных квазигруппах таких многообразий.

Приведённая выше общая конструкция свободной алгебры показывает, что элементами свободной квазигруппы с базисом M многообразия $Q(\Omega, \Sigma)$ являются классы эквивалентных Ω-слов в алфавите M, причём эквивалентность слов определяется с использованием элементарных преобразований лишь по тождествам из Σ. В связи с этим описанная выше конструкция свободной квазигруппы из $Q(\Omega, \Sigma)$ на множестве классов эквивалентных слов, с одной стороны, является вполне естественной, а с другой — не вполне эффективной, поскольку проблема равенства слов не решена.

Другая конструкция свободной квазигруппы многообразия $Q(\Gamma)$ предложена в [18] и использована для многообразия $Q(A\Gamma)$ в [22]. Она основана на понятии рациональной эквивалентности многообразий алгебр с различными сигнатурами.

В [21] были рассмотрены класс квазигрупп $Q(\Gamma)$ в сигнатуре $\Omega_1 = \{\cdot, /, \backslash, u\}$, где u — символ 0-арной операции, и многообразие U алгебр сигнатуры

$$\Omega_2 = \{+, -, 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta, c\},$$

где α, β, γ, δ — символы унарных операций, а c — символ 0-арной операции, заданное системой групповых тождеств

$$(x+y)+z = x+(y+z), \quad x+0 = x, \quad 0+x = x, \quad x+(-x) = 0, \quad (-x)+x = 0 \tag{5}$$

в сигнатуре $\{+, -, 0\}$ и тождеств

$$x\alpha\gamma = x\gamma\alpha = x, \quad x\beta\delta = x\delta\beta = x, \quad 0\alpha = 0\beta = 0. \tag{6}$$

В качестве переводов $\tau\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ и $\sigma\colon \Omega_2 \to \Omega_1$ были взяты отображения

$$\tau(\cdot)(x, y) = x\alpha + d + y\beta, \quad \tau(/)(x, y) = (x - y\beta - c)\gamma,$$
$$\tau(\backslash)(x, y) = (-c - x\alpha + y)\delta, \quad \tau(u) = 0$$

и

$$\sigma(+)(x, y) = (x \,/\, u)\big((u \,/\, u) \setminus y\big), \quad \sigma(-)(x) = (u/u)\big((x \,/\, u) \setminus u\big),$$
$$\sigma(\alpha)(x) = x(u \setminus u), \quad \sigma(\beta)(x) = (u \,/\, u)x,$$
$$\sigma(\gamma)(x) = x \,/(u \setminus u), \quad \sigma(\delta)(x) = (u \,/\, u) \setminus x,$$
$$\sigma(0) = u, \quad \sigma(c) = uu.$$

Доказано, что классы алгебр $Q(\Gamma)$ и U рационально эквивалентны. Отсюда следует, в частности, что $Q(\Gamma)$ — многообразие квазигрупп. Аналогичным образом доказано, что многообразиями являются классы леволинейных, праволинейных, линейных квазигрупп и T-квазигрупп.

Авторы отмечают, что полученные результаты о рациональной эквивалентности позволяют формулировать многие вопросы о квазигруппах на более привычном, близком к групповому языке алгебр из многообразия U. В частности, отмечается, что на этом пути можно описывать свободные квазигруппы из указанных выше многообразий квазигрупп. Однако реализация этой идеи связана с другой сложной проблемой. О ней говорится в [18], где автор попытался использовать неявно идею эквивалентности многообразий для описания свободных квазигрупп в многообразии квазигрупп, изотопных группам. Им, по существу, в несколько иных терминах была построена свободная алгебра с базисом X в сигнатуре, полученной расширением групповой сигнатуры (5) символами унарных операций α, α^{-1}, β, β^{-1}, на ней определены квазигрупповые операции и в итоге получена свободная квазигруппа из многообразия $Q(A\Gamma)$. Однако эта квазигруппа не является свободной квазигруппой с базисом X, она порождается более обширным множеством слов в алфавите $X \cup \{\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}\}$, являющимся бесконечным даже при конечном X. Выделение же в ней подквазигруппы, порождённой множеством X, является нерешённой проблемой, о чём говорит и сам автор в указанной статье. Сходная с этой ситуация имеет место и при рассмотрении свободных квазигрупп в многообразиях T-квазигрупп [22,23] и линейных квазигрупп [15].

Из всего сказанного следует, что проблема описания свободных квазигрупп в многообразиях квазигрупп, изотопных группам, остаётся открытой.

Покажем, что в некоторых многообразиях квазигрупп, изотопных группам, проблема тождества слов в свободных квазигруппах может быть положительно решена путём объединения указанных двух подходов конструирования свободных квазигрупп. Предварительно докажем следующее утверждение.

Теорема 8. *Если в многообразии групп K в сигнатуре $\Delta = \{+, -, 0\}$, заданном системой тождеств S, положительно решается проблема тождества слов в свободных алгебрах, то то же самое имеет место в многообразии алгебр U сигнатуры $\Delta_1 = \Delta \cup \Delta_0$, где $\Delta_0 = \{\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}\}$, заданном системой тождеств $S_1 = S \cup (6)$. (Здесь и ниже предполагается, что S содержит систему тождеств (5).)*

Доказательство. Пусть $A(M)$ — свободная алгебра многообразия U с базисом M. Её элементы представляются Δ_1-словами в алфавите $M_1 = M \cup (-M)$. Рассмотрим свободную группу в сигнатуре $\{\cdot, {}^{-1}, \varepsilon\}$ с базисом (α, β). Хорошо известно, что каждый её элемент однозначно представляется приведённым словом в алфавите Δ_0, т. е. словом, не содержащим подслов вида $\gamma\gamma^{-1}$, где $\gamma \in \Delta_0$, а $(\alpha^{-1})^{-1}$, $(\beta^{-1})^{-1}$ считаются равными соответственно α, β. Множество всех элементов этой группы, представленных приведёнными словами, обозначим буквой F. Единичный элемент e группы F будем представлять пустым словом.

Определение 9. Назовём Δ_1-слово P в алфавите M_1 несократимым в алгебре $A(M)$, если $P = 0$ или $P \neq 0$ и P удовлетворяет следующим условиям:

все встречающиеся в P Δ_0-слова являются приведёнными; P не содержит 0; ни одно из его подслов вида
$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k \tag{7}$$
нельзя перевести в слово, равное сумме r слагаемых при $r < k$, элементарными преобразованиями по тождествам из S.

Лемма 10. *Существует алгоритм приведения любого Δ_1-слова к эквивалентному ему в алгебре $A(M)$ несократимому слову.*

Доказательство. Приведём описание требуемого алгоритма для любого заданного Δ_1-слова $P \neq 0$.

Шаг 1. Пользуясь соотношениями (5) и тождествами
$$0\gamma = 0, \quad x + 0 = x, \quad 0 + x = x, \tag{8}$$
уберём из слова P все выражения вида $\gamma\gamma^{-1}$ и все нули. Получим слово R.

Шаг 2. Перебираем в R все подслова вида (7) и для каждого из них ищем эквивалентные слова с меньшим числом слагаемых, пользуясь лишь тождествами из S и принимая слова P_i за переменные. Так как для слова (7) в группе по сложению множество слов в алфавите $\{P_1, \ldots, P_k\} \cup \{-P_1, \ldots, -P_k\}$ с числом слагаемых, меньшим k, конечно и в свободных группах многообразия U проблема тождества слов разрешима, то процесс этот конечный и приводит к тому же слову R или к новому слову R_1. В последнем случае в слове R_1 могут появиться подслова вида 0γ и $T\gamma\gamma^{-1}$. В этом случае к слову R_1 применим шаг 1, и т. д. Так как с каждым шагом общая длина слова может только уменьшаться, то процесс этот конечен, и в конце его мы получим несократимое слово, эквивалентное в алгебре $A(M)$ исходному слову P. □

Лемма 11. *Если Δ_1-слова P, R несократимы и эквивалентны в алгебре $A(M)$, то от P к R можно перейти с помощью элементарных преобразований по тождествам из S, т. е. не прибегая к тождествам вида* (6).

Доказательство. Пусть имеется последовательность элементарных преобразований слова P к R
$$P = P_0 \to P_1 \to \ldots \to P_k = R, \tag{9}$$
в которой присутствуют преобразования по тождествам из (6). Докажем лемму индукцией по числу k. Преобразование по любому тождеству из (6) при замене левой части на правую назовём сокращением, а при замене правой части на левую — вставкой.

Так как P и R несократимы, то первое преобразование по тождествам из (6) может быть лишь вставкой, а последнее — лишь сокращением. Следовательно, в цепочке (9) найдётся преобразование $P_i \to P_{i+1}$, являющееся последней вставкой по тождеству из (6), и при этом $i+1 < k$. Пусть это преобразование состоит в замене некоторого подслова B слова P_i словом $B\gamma\gamma^{-1}$. Проследим дальнейшую судьбу появившегося вхождения выражения $\gamma\gamma^{-1}$. Так как R несократимо, то в нём этого вхождения нет. Значит, оно должно исчезнуть при дальнейших преобразованиях, которые по условию являются лишь сокращениями. Очевидно, что исчезновение выражения $\gamma\gamma^{-1}$ может произойти лишь в трёх случаях.

1. Последующие преобразования не затронули рассматриваемого вхождения $\gamma\gamma^{-1}$ до его удаления.
2. Слово B преобразовалось в $B_1\gamma^{-1}$, а затем в слове $B_1\gamma^{-1}\gamma\gamma^{-1}$ сократилось $\gamma^{-1}\gamma$.
3. Слово B было подсловом слова вида $B\gamma_1\dots\gamma_r$, и слово $B\gamma\gamma^{-1}\gamma_1\dots\gamma_r$ преобразовалось в $B\gamma\gamma^{-1}\gamma\dots\delta$, после чего было удалено $\gamma\gamma^{-1}$.

Во всех случаях из цепочки (9) без ущерба для получения слова R можно удалить звено $P_i \to P_{i+1}$ и то звено, в котором удалялось рассматриваемое вхождение $\gamma\gamma^{-1}$ или $\gamma^{-1}\gamma$.

Пусть преобразование $P_i \to P_{i+1}$ состоит в замене 0 на 0γ. Проследим за указанным вхождением подслова 0γ в последующих преобразованиях цепочки (9). Так как R несократимо, то в нём этого вхождения нет. Его исчезновение может произойти лишь в следующих случаях.

1. Последующие преобразования не затронули рассматриваемого вхождения до его удаления по тождеству $0\gamma = 0$.
2. Слово 0γ было подсловом слова вида $0\gamma\gamma_1\dots\gamma_r$, которое входило слагаемым в некоторую сумму T, а T преобразовалась в слово, не содержащее рассматриваемого вхождения $0\gamma\gamma_1\dots\gamma_r$. Тогда все произведённые над T преобразования можно произвести при замене $0\gamma\gamma_1\dots\gamma_r$ на $0\gamma_1\dots\gamma_r$, и следовательно, не было нужды заменять предварительно 0 на 0γ.
3. Слово 0 было подсловом слова вида $0\gamma_1\dots\gamma_r$, и слово $0\gamma\gamma_1\dots\gamma_r$ преобразовалось в $0\gamma\gamma^{-1}\dots\delta$, после чего было удалено $\gamma\gamma^{-1}$.

В случаях 1, 2 из цепочки (9) без ущерба для получения слова R можно удалить звено $P_i \to P_{i+1}$ и то звено, в котором удалялось рассматриваемое вхождение 0γ. В случае 3 подцепочку преобразований

$$0\gamma_1\dots\gamma_r \to 0\gamma\gamma_1\dots\gamma_r \to \dots \to 0\gamma\gamma^{-1}\delta_1\dots\delta_s \to 0\delta_1\dots\delta_s$$

можно заменить цепочкой меньшей длины

$$0\gamma_1\dots\gamma_r \to \dots \to 0\gamma^{-1}\delta_1\dots\delta_s \to 0\delta_1\dots\delta_s.$$

Таким образом, во всех возможных случаях находится более короткая цепочка преобразований P в R. Отсюда по предположению индукции имеем равенство $P = R$. □

Продолжим доказательства теоремы 8. Согласно лемме 10 для решения проблемы тождества слов в алгебре $A(M)$ достаточно ограничиться рассмотрением лишь несократимых слов. По лемме 11 несократимые слова P, R эквивалентны в $A(M)$ тогда и только тогда, когда P можно перевести в R преобразованиями по групповым тождествам из S. Так как в тождества из S не входят α и β, то они применимы лишь к словам вида (7) и осуществляются как в свободной группе многообразия U. Следовательно, из разрешимости проблемы тождества слов в свободных группах из U следует разрешимость аналогичной проблемы в алгебре $A(M)$. Теорема доказана. □

Укажем наглядное представление Δ_1-слов алгебры $A(M)$ и, в частности, эквивалентных несократимых слов. Для этого поставим в соответствие каждому Δ_1-слову P в алфавите M_1 граф Γ_P — дерево с корнем и с отмеченными вершинами — по следующему правилу. Из определения 1 следует, что слово P имеет один из следующих двух видов:

а) $P_1 + P_2 + \ldots + P_k$,

б) $(P_1 + P_2 + \ldots + P_k)\gamma$,

где $\gamma \in F \setminus \{\mathcal{E}\}$, а каждое из слов P_i не является суммой своих подслов и при $k = 1$ совпадает с буквой из M_1. При $k = 1$ искомый граф будет состоять в случае а) из одной вершины, отмеченной буквой P, в случае б) из двух вершин, отмеченных P и $P \setminus \gamma$. При этом корнем считается вершина с меткой P. Пусть $k > 1$. В случае а) построим дерево с корнем, отмеченным буквой P, из которого выходят k рёбер в вершины, отмеченные символами $P_1, P_2, \ldots, P_k$. В случае б) из корня P проведём сначала ребро в вершину, отмеченную $P \setminus \gamma$, и уже из неё проведём k рёбер в вершины, отмеченные символами $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Если слово P_i есть буква из M, то соответствующая ему вершина будет считаться конечной (или входной). В противном случае к вершине P_i пристраиваем дерево с корнем P_i по правилу, описанному выше для слова P, и т. д. Каждую из вершин полученного дерева, в которую входят более одного ребра, назовём особой.

Из определения несократимого слова следует, что преобразования по тождествам из S достаточно применять лишь к словам, являющимся метками особых вершин, и при этом число выходящих из неё рёбер не может оказаться меньше, чем в графе Γ_P. Отсюда видно, что графы эквивалентных несократимых Δ_1-слов алгебры $A(M)$ совпадают с точностью до меток, а метки у соответствующих вершин являются обозначениями слов, эквивалентных относительно преобразований по тождествам из S.

Вернёмся теперь к квазигруппам, изотопным группам из многообразия групп U. Как было отмечено выше, все эти квазигруппы образуют многообразие $Q(\Omega, \Sigma)$, где Σ — термальное замыкание системы тождеств S многообразия групп U. Следуя [18], установим связь между многообразием Q и многообразием U_1 алгебр в сигнатуре $\Delta_1 = \{+, -, 0, \alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}\}$ с системой тождеств $S \cup (6)$. Так как сигнатура содержит 0-арную операцию 0, то для установления эквивалентности многообразий необходимо и Ω расширить путём введения 0-арной операции. В связи с этим пока будем рассматривать многообразие $Q(\Omega_1, \Sigma)$, где $\Omega_1 = \{\cdot, /, \setminus, u\}$, u — символ 0-арной операции. Так как многообразие групп замкнуто относительно изоморфизмов групп, то, не теряя общности, можно считать, что рассматриваемые квазигруппы главно изотопны группам из U. Поэтому, в отличие от [18], мы не будем вводить в сигнатуру дополнительный символ унарной операции c и переводы сигнатур $\tau\colon \Omega_1 \to \Delta_1$ и $\sigma\colon \Delta_1 \to \Omega_1$ определим по следующим формулам:

$$\tau(\cdot)(x,y) = x\alpha + y\beta, \quad \tau(/)(x,y) = (x - y\beta)\alpha^{-1},$$
$$\tau(\backslash)(x,y) = (-x\alpha + y)\beta^{-1}, \quad \tau(u) = 0$$

и

$$\sigma(+)(x,y) = (x \,/\, u)\big((u \,/\, u) \setminus y\big), \quad \sigma(-)(x) = (u \,/\, u)\big((x \,/\, u) \setminus u\big),$$
$$\sigma(\alpha)(x) = x(u \setminus u), \quad \sigma(\beta) = (u \,/\, u)x,$$
$$\sigma(\alpha^{-1})(x) = x \,/(u \setminus u), \quad \sigma(\beta^{-1}) = (u \,/\, u) \setminus x, \quad \sigma(0) = u.$$

Переводы τ и σ индуцируют взаимно-обратные отображения Ω_1-слов в Δ_1-слова и обратно. Для Ω_1-слова P Δ_1-слово $\tau(P)$ получается заменой всех операций из Ω_1 их τ-переводами. Аналогично для Δ_1-слова R определяется Ω_1-слово $\sigma(R)$. Заметим, что согласно упомянутому выше результату Сохацкого система тождеств многообразия квазигрупп, изотопных группам из U, получается добавлением к системе Σ_0 тождеств, полученных из S заменой групповых операций их переводами.

Из [18] следует, что переводы τ и σ индуцируют также биективные и взаимно-обратные отображения T_τ, T_σ алгебр многообразий U_1 и $Q(\Omega_1, \Sigma)$ и указанные многообразия рационально эквивалентны. Следовательно, два Δ_1-слова эквивалентны в свободной алгебре $A(M)$ с базисом M многообразия U_1 тогда и только тогда, когда их переводы эквивалентны в свободной квазигруппе $Q(M_1)$ с базисом $M_1 = M \cup \{u\}$ многообразия $Q(\Omega_1, \Sigma_1)$. Очевидно, что классы слов, образующие элементы свободной квазигруппы многообразия $Q(\Omega, \Sigma)$, являются подклассами некоторых классов квазигруппы $Q(M_1)$. Следовательно, элементы из $Q(M)$ равны тогда и только тогда, когда равны соответствующие элементы в алгебре $A(M)$. Отсюда и из теоремы 8 следует теорема 12.

Теорема 12. *Если в многообразии U групп в сигнатуре $\Delta = \{+, -, 0\}$, заданном системой тождеств S, положительно решается проблема тождества слов в свободных алгебрах, то то же самое имеет место в многообразии $Q(\Omega, \Sigma)$ всех квазигрупп, изотопных группам из U.*

Замечание. Указанная связь между многообразиями алгебр U_1 и квазигрупп $Q(\Omega, \Sigma)$ может использоваться также для распознавания тождеств в многообразиях квазигрупп, изотопных группам. Рассмотрим примеры.

Пример (о тождествах в многообразии квазигрупп, изотопных абелевым группам). Найдя переводы всех Ω-слов длины 3 в алфавите $\{x, y, z\}$, замечаем, что среди них нет слов, эквивалентных в свободной алгебре соответствующего многообразия U_1. Следовательно, в рассматриваемом многообразии квазигрупп не выполняется ни одного тождества вида $P \equiv R$ для слов P, R длины 3. Находя переводы слов длины 4, мы получаем следующие тождества:

1) $x \setminus \big(y(u \setminus v)\big) = u \setminus \big(y(x \setminus v)\big)$,
2) $(x \,/\, y)(u \setminus v) = (v \,/\, y)(u \setminus x)$,
3) $\big((xy) \,/\, u\big)v = \big((xv) \,/\, u\big)y$,

$$4)\quad \big((x\,/\,y)\,/\,u\big)\,/\,v = \big((x\,/\,v)\,/\,u\big)\,/\,y,$$
$$5)\quad x\big(y \setminus (uv)\big) = u\big(y \setminus (xv)\big).$$

Отметим, что тождества 1), 2) были указаны В. Д. Белоусовым [1, 2], тождество 3) доказал и использовал А. Драпаль [18].

Указанный выше подход к изучению относительно свободных квазигрупп может быть использован и для многообразий квазигрупп, изотопных группам с ограничениями на изотопии. Эта идея в применении к линейным слева (справа) и линейным квазигруппам и T-квазигруппам указана в [21—23]. Так, для построения свободных линейных квазигрупп привлекается многообразие алгебр U_2, полученное добавлением к тождествам многообразия U_1 тождеств

$$(x+y)\gamma = x\gamma + y\gamma, \quad \gamma \in \{\alpha, \alpha^{-1}, \beta, \beta^{-1}\}. \tag{10}$$

Можно рассмотреть более общую ситуацию, когда $Q(\Omega, \Sigma)$ есть класс всех квазигрупп, изотопных группам из многообразия U, заданного системой тождеств S, при условии того, что изотопии имеют вид $(\alpha, \beta, \varepsilon)$, где ε — тождественное отображение, а α, β — автоморфизмы соответствующих групп, связанных некоторой фиксированной системой соотношений S в сигнатуре $\{\cdot, {}^{-1}, \varepsilon\}$ (одной и той же для всех групп из U). В этом случае к тождествам многообразия U_1, кроме тождеств (10), следует добавить ещё тождества вида $x\gamma = x\delta$ по всем соотношениям $\gamma = \delta$ из S. В итоге получим многообразие алгебр U_3.

Легко показать, что классы $Q(\Omega, \Sigma)$, U_3 рационально эквивалентны относительно указанных выше переводов τ, σ, и следовательно, класс $Q(\Omega, \Sigma)$ является многообразием квазигрупп. По аналогии с теоремой 12 можно доказать также следующую теорему.

Теорема 13. *Если в многообразии групп U разрешима проблема тождества слов для свободных групп и в группе $\langle \alpha, \beta\colon S\rangle$, заданной образующими α, β и системой соотношений S, разрешима проблема тождества слов, то для свободных квазигрупп многообразия $Q(\Omega, \Sigma)$ разрешима проблема тождества слов.*

Литература

[1] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.

[2] Белоусов В. Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах // Матем. сб. — 1966. — Т. 70 (112), № 1. — С. 55—97.

[3] Белявская Г. Б. T-квазигруппы и центр квазигруппы // Мат. исслед. Вып. III. — Кишинёв: Штиинца, 1989. — С. 24—43.

[4] Белявская Г. Б., Табаров А. Х. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп // Дискрет. матем. — 1992. — Т. 4, № 2. — С. 142—147.

[5] Гварамия А. А. Об изотопии между группами и квазигруппами // IV Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов. — М., 1984. — С. 184—185.

[6] Гварамия А. А. Аксиоматизируемые классы квазигрупп и многосортная алгебра: Дис.. . . докт. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1985.

[7] Глухов М. М. R-многообразия квазигрупп и луп // Вопросы теории квазигрупп и луп. — Кишинёв, 1971. — С. 37—47.

[8] Глухов М. М., Гварамия А. А. Решение основных алгоритмических проблем в некоторых классах квазигрупп с тождествами // Сиб. матем. журн. — 1969. — Т. 10, № 2. — С. 297—317.

[9] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Физматгиз, 1962.

[10] Лемлейн В. Г. О строении антиассоциативных квазилуп // Тезисы кр. науч. сообщений Междунар. конгресса мат., секция 2. — М., 1966. — С. 46.

[11] Лемлейн В. Г. О строении антиассоциативных квазилуп, порождённых конечным числом элементов // Учёные записки кафедры алгебры и теории чисел МГПИ им. В. И. Ленина. — 1971. — Т. 85. — С. 68—79.

[12] Мальцев А. И. Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп // Матем. сб. — 1966. — Т. 69, № 1. — С. 3—12.

[13] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

[14] Сохацкий Ф. М. Ассоциаты и разложения многоместных опреаций: Дис.. . . докт. физ.-мат. наук. — Киев, 2006.

[15] Табаров А. Х. Свободные линейные квазигруппы. — 2007. — Не опубликовано.

[16] Belyavskaya G. B., Tabarov A. H. One-sided quasigroups // Quasigroups Related Systems. — 1994. — Vol. 1, no. 1. — P. 1—7.

[17] Csacany B. On the equivalence of certain classes of algebraic systems // Acta Sci. Math. Szeged. — 1962. — Vol. 23. — P. 46—57.

[18] Drapal A. On multiplication groups of relatively free quasigroups isotopic to Abelian groups // Czech. Math. J. — 2005. — Vol. 55 (130). — P. 61—86.

[19] Evans T. On multiplicative systems defined by generators and relations. I. Normal form theorem // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1951. — Vol. 47. — P. 637—649.

[20] Evans T. The word problem for abstract algebras // J. London Math. Soc. — 1951. — Vol. 28, no. 1. — P. 64—67.

[21] Jezek J., Kepka T. Quasigroups, isotopic to a group // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1975. — Vol. 16, no. 1. — P. 59—76.

[22] Kepka T., Nemec P. T-quasigroups. I // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. — 1971. — Vol. 12, no. 1. — P. 31—39.

[23] Kepka T., Nemec P. T-quasigroups. II // Acta Univ. Carolin. Math. Phys. — 1971. — Vol. 12, no. 2. — P. 39—49.

[24] Sokhatsky F. Description of isotopical closure of group isotopes // Третья междунар. конф. по алгебре. Сб. тезисов. — Красноярск, 1993. — С. 441.