Конструкции специальных радикалов алгебр

А. Ю. ГОЛУБКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: golubkov@hotmail.com

УДК 512.552.12+512.552.34

Ключевые слова: специальный радикал, первичный радикал, слабо разрешимый радикал, локально конечный в смысле Ширшова радикал.

Аннотация

Работа посвящена обсуждению некоторых схем построения радикалов, подобных специальным, обобщающих конструкции основных специальных радикалов алгебр, близких к ассоциативным.

Abstract

A. Yu. Golubkov, Constructions of special radicals of algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 1, pp. 57—133.

This paper is devoted to the discussion of some schemes of construction of radicals similar to special radicals, which generalize constructions of the basic special radicals of the algebras close to associative ones.

1. Введение

Введённое В. А. Андрунакиевичем [1] понятие специального радикала как радикала в смысле Куроша—Амицура, такого что класс полупростых относительно этого радикала алгебр составляют подпрямые произведения полупростых относительно него первичных алгебр, играет весьма заметную роль как в теории радикалов, так и в её конкретных приложениях в структурной теории различных классов алгебр. В связи с этим вполне естественно возникает вопрос об описании возможных схем построения специальных радикалов, которые имеют приемлемые конструктивные характеризации радикальных классов. В данной работе мы приведём ряд подобных схем, основанных на хорошо известных определениях первичного, невырожденного, слабо разрешимого и локально конечного в смысле Ширшова радикалов.

1.1. Предварительные сведения

Всюду далее через F обозначается произвольное ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Предполагается, что все обсуждаемые модули над

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 1, с. 57—133.
© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

кольцом F являются левыми и унитарными. Как обычно, под алгеброй над кольцом F понимается левый унитарный F-модуль с операцией умножения, перестановочной с умножением на элементы кольца F, а под классом алгебр над кольцом F — множество алгебр над F, содержащее в обязательном порядке нулевую алгебру и все изоморфные копии каждой из входящих в него алгебр. В этой и последующих частях статьи роль основного класса алгебр, за исключением ряда отдельно оговариваемых случаев, выполняет произвольный замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов класс алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F. Для любых алгебры R и её подмножества A подалгебра и идеал алгебры R, порождённые элементами множества A, будут обозначаться через $\langle A\rangle$ и $(A)_R$ соответственно.

Начнём с необходимых нам понятий и конструкций теории радикалов Куроша—Амицура, основной объём которых содержится в любом стандартном руководстве по теории радикалов, в частности в [2]. Отображение $\mathcal{T}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ класса $\mathfrak{M}$ в себя, ставящее в соответствие каждой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ один из её идеалов $\mathcal{T}(R)$, называется *радикалом в смысле Куроша—Амицура*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathcal{T}(R)$ — наибольший из всех идеалов I алгебры R, таких что $I = \mathcal{T}(I)$;
2) $\mathcal{T}\bigl(R/\mathcal{T}(R)\bigr) = \{0\}$;
3) $\varphi\bigl(\mathcal{T}(R)\bigr) \subseteq \mathcal{T}\bigl(\varphi(R)\bigr)$ для любого гомоморфизма $\varphi\colon R \to R'$ алгебры R в алгебру R' (здесь не предполагается, что алгебра R' над кольцом F обязательно принадлежит классу $\mathfrak{M}$).

Идеал $\mathcal{T}(R)$ называется *$\mathcal{T}$-радикалом* алгебры R. Алгебра R из класса $\mathfrak{M}$ называется *$\mathcal{T}$-радикальной* (*радикальной относительно радикала $\mathcal{T}$*), если она совпадает со своим $\mathcal{T}$-радикалом, $R = \mathcal{T}(R)$, и *$\mathcal{T}$-полупростой* (*полупростой относительно радикала $\mathcal{T}$*), если её $\mathcal{T}$-радикал равен нулю, $\mathcal{T}(R) = \{0\}$. Радикальные и полупростые относительно радикала $\mathcal{T}$ алгебры формируют подклассы класса $\mathfrak{M}$, которые мы будем обозначать через $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}}$ и $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}}$, $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}} = \{R \in \mathfrak{M} \mid R = \mathcal{T}(R)\}$ и $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}} = \bigl\{R \in \mathfrak{M} \mid \mathcal{T}(R) = \{0\}\bigr\}$. Радикал $\mathcal{T}$ может быть описан в терминах $\mathcal{T}$-радикальных и $\mathcal{T}$-полупростых алгебр следующим образом: $\mathcal{T}$-радикал $\mathcal{T}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ является наибольшим среди $\mathcal{T}$-радикальных идеалов этой алгебры и наименьшим из её идеалов, фактор-алгебры по которым $\mathcal{T}$-полупросты,

$$\mathcal{T}(R) = \sum_{I \lhd R,\ I \in \mathfrak{R}_{\mathcal{T}}} I = \bigcap_{J \lhd R,\ R/J \in \mathfrak{S}_{\mathcal{T}}} J.$$

Напомним, что любая возрастающая цепочка подалгебр $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ алгебры R над кольцом F (элементы этой цепочки не обязательно попарно различны)

$$R_0 = \{0\} \subseteq R_1 \subseteq \ldots \subseteq R_\alpha = R,$$

индексированная трансфинитами некоторого отрезка $[0, \alpha+1)$ и такая, что

1) R_η — идеал $R_{\eta+1}$ для всех трансфинитов η, $\eta < \alpha$,
2) $R_\sigma = \bigcup\limits_{\gamma<\sigma} R_\gamma$ для каждого предельного трансфинита σ, $\sigma \leqslant \alpha$,

называется *возрастающим нормальным рядом* или просто *нормальным рядом*. Фактор-алгебры $R_{\eta+1}/R_\eta$, $\eta < \alpha$, называют *факторами нормального ряда* $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$. Элемент R_ν нормального ряда $\{R_\beta \mid \beta \leqslant \alpha\}$ называется *достижимым по ряду*, если существует конечная система трансфинитов $\{\nu_1, \ldots, \nu_n\}$, $\nu \leqslant \nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n \leqslant \alpha$, такая что цепочка

$$R_0 = \{0\} \subseteq R_\nu \subseteq R_{\nu_1} \subseteq \ldots \subseteq R_{\nu_n} \subseteq R_\alpha = R$$

образует нормальный ряд алгебры R. Элементы нормальных рядов (конечных нормальных рядов) алгебр называют также их *восходящими или субинвариантными подалгебрами* (*достижимыми подалгебрами или субидеалами*).

Для любого подкласса $\mathfrak{X}$ основного класса $\mathfrak{M}$ обозначим через $I\mathfrak{X}$ класс алгебр из $\mathfrak{M}$, обладающих идеальными рядами (нормальными рядами, состоящими из их идеалов) с факторами из $\mathfrak{X}$, через $R\mathfrak{X}$ — класс алгебр из $\mathfrak{M}$, содержащих нормальные ряды с достижимыми по ряду элементами и факторами из $\mathfrak{X}$, через $A\mathfrak{X}$ — класс алгебр из $\mathfrak{M}$, имеющих нормальные ряды с факторами из $\mathfrak{X}$ (при этом не предполагается, что все элементы таких рядов содержатся в $\mathfrak{M}$), через $\mathfrak{X}^{(1)}$ — класс алгебр из $\mathfrak{M}$, ненулевые гомоморфные образы которых содержат ненулевые идеалы из $\mathfrak{X}$, и через ${}^{(1)}\mathfrak{X}$ — класс алгебр из $\mathfrak{M}$, ненулевые идеалы которых имеют ненулевые гомоморфные образы в $\mathfrak{X}$. Нетрудно показать, что расширения $R\mathfrak{X}$ и $A\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{X}$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathfrak{X} \subseteq I\mathfrak{X} \subseteq R\mathfrak{X} = R(R\mathfrak{X}) \subseteq A\mathfrak{X} = R(A\mathfrak{X}) = A(A\mathfrak{X}).$$

Классы $\mathfrak{X}^{(1)}$ и ${}^{(1)}\mathfrak{X}$ не содержат, вообще говоря, класс $\mathfrak{X}$. В то же время если класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия идеалов (гомоморфных образов), то он входит в класс ${}^{(1)}\mathfrak{X}$ (класс $\mathfrak{X}^{(1)}$, совпадающий в этом случае с классом $I\mathfrak{X}$).

Для всякого радикала в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$, определённого на классе $\mathfrak{M}$, класс $\mathcal{T}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_\mathcal{T}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов и равен своим расширениями $R\mathfrak{R}_\mathcal{T}$ и $\mathfrak{R}_\mathcal{T}^{(1)} = I\mathfrak{R}_\mathcal{T}$ в классе $\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{R}_\mathcal{T} = R\mathfrak{R}_\mathcal{T} = \mathfrak{R}_\mathcal{T}^{(1)},$$

а класс $\mathcal{T}$-полупростых алгебр $\mathfrak{S}_\mathcal{T}$ совпадает с классом ${}^{(1)}\mathfrak{S}_\mathcal{T}$,

$$\mathfrak{S}_\mathcal{T} = {}^{(1)}\mathfrak{S}_\mathcal{T}.$$

Подкласс $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{M}$ называется *радикальным* (*полупростым*), если он совпадает с классом $\mathcal{T}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_\mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$-полупростых алгебр $\mathfrak{S}_\mathcal{T}$) для некоторого радикала в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ на классе $\mathfrak{M}$. Радикал в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ на классе $\mathfrak{M}$, такой что класс $\mathcal{T}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_\mathcal{T}$ (класс $\mathcal{T}$-полупростых алгебр $\mathfrak{S}_\mathcal{T}$) является наименьшим среди всех радикальных (полупростых) подклассов класса $\mathfrak{M}$, содержащих его подкласс $\mathfrak{X}$, принято называть *нижним* (*верхним*) *радикалом*, определяемым на классе $\mathfrak{M}$ его подклассом $\mathfrak{X}$, и обозначать через $\mathcal{T}_\mathfrak{X}$ (через $\mathcal{T}^\mathfrak{X}$). В частности, если $\mathfrak{X}$ — радикальный (полупростой) подкласс класса $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{X} = \mathfrak{R}_{\mathcal{T}_\mathfrak{X}}$ (соответственно $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_{\mathcal{T}^\mathfrak{X}}$). Стоит отметить, что, в отличие от нижнего радикала $\mathcal{T}_\mathfrak{X}$, который

существует для каждого подкласса $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{M}$, верхний радикал $\mathcal{T}^{\mathfrak{X}}$ определён далеко не для всех $\mathfrak{X}$.

Хорошо известно, что для любого замкнутого относительно взятия гомоморфных образов подкласса $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{M}$ наименьший из содержащих его радикальных подклассов класса $\mathfrak{M}$ совпадает с классом $R\mathfrak{X}$, а значит, в данной ситуации $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{T}_{R\mathfrak{X}}$ и $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}} = R\mathfrak{X}$. Поэтому класс $\mathfrak{X}$ является радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$, если и только если он замкнут относительно взятия гомоморфных образов и равен своему расширению $R\mathfrak{X}$ в классе $\mathfrak{M}$. В качестве следствия мы сразу получаем, что расширение $A\mathfrak{X}$ любого замкнутого относительно взятия гомоморфных образов подкласса $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{M}$ также является радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$. Используя стандартные сведения о цепях Куроша, несложно показать, что подкласс $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда является радикальным (полупростым), когда он совпадает с определённым на его основе классом $\mathfrak{X}^{(1)}$ (классом ${}^{(1)}\mathfrak{X}$). В случае если подкласс $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{M}$ входит в его подкласс ${}^{(1)}\mathfrak{X}$, последний является наименьшим из всех содержащих класс $\mathfrak{X}$ полупростых подклассов класса $\mathfrak{M}$, и потому $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}^{\mathfrak{X}}} = {}^{(1)}\mathfrak{X}$.

Обсудим в нескольких словах понятие локального класса, с которым нам предстоит сталкиваться в дальнейшем. Для каждого подкласса $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{M}$ мы будем называть *локально* $\mathfrak{X}$*-алгебрами* алгебры из класса $\mathfrak{M}$, такие что все их принадлежащие классу $\mathfrak{M}$ конечно порождённые подалгебры содержатся в классе $\mathfrak{X}$. Образованный ими подкласс класса $\mathfrak{M}$ мы будем обозначать через $L\mathfrak{X}$. По своему определению класс локально $\mathfrak{X}$-алгебр $L\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия подалгебр из класса $\mathfrak{M}$ и совпадает с классом локально $L\mathfrak{X}$-алгебр, $L\mathfrak{X} = L(L\mathfrak{X})$. Понятно также, что класс $L\mathfrak{X}$ содержит класс $\mathfrak{X}$, если и только если класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия конечно порождённых подалгебр из класса $\mathfrak{M}$. В ряде источников алгебра R из класса $\mathfrak{M}$ называется локальной $\mathfrak{X}$-алгеброй, если каждое конечное подмножество алгебры R входит в некоторую её подалгебру, принадлежащую классу $\mathfrak{X}$. Класс $L'\mathfrak{X}$ локально $\mathfrak{X}$-алгебр в таком смысле равен классу $L'(L'\mathfrak{X})$ и включает в себя класс $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \subseteq L'\mathfrak{X} = L'(L'\mathfrak{X})$. В случае если класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия конечно порождённых подалгебр, класс $L'\mathfrak{X}$ содержит также класс $L\mathfrak{X}$ и совпадает с ним тогда и только тогда, когда класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия конечно порождённых подалгебр. В дальнейшем мы будем иметь дело, как правило, с равными классами $L\mathfrak{X}$ и $L'\mathfrak{X}$ и под классом локально $\mathfrak{X}$-алгебр будем всегда понимать класс $L\mathfrak{X}$.

Следует напомнить, что замкнутость подкласса $\mathfrak{Y}$ класса $\mathfrak{M}$ относительно взятия расширений подразумевает включение в класс $\mathfrak{Y}$ всех алгебр из класса $\mathfrak{M}$, содержащих идеалы из $\mathfrak{Y}$, фактор-алгебры по которым принадлежат $\mathfrak{Y}$. Иначе говоря, такой класс $\mathfrak{Y}$ содержит все алгебры из класса $\mathfrak{M}$, обладающие конечными нормальными рядами подалгебр с факторами из $\mathfrak{Y}$. Замкнутость относительно взятия расширений класса локально $\mathfrak{X}$-алгебр $L\mathfrak{X}$, отвечающего подклассу $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{M}$, равносильна совпадению класса $L\mathfrak{X}$ с его расширением $R(L\mathfrak{X})$ в классе $\mathfrak{M}$. Если класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия субинвариантных подалгебр, то замкнутость эквивалентна также равенству класса $L\mathfrak{X}$ его расширению $A(L\mathfrak{X})$ в классе $\mathfrak{M}$. Следовательно, в ситуации, когда основ-

ной класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия конечно порождённых подалгебр, а его подкласс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, класс $L\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов и является радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия расширений.

Приведём теперь ряд сведений об одном важном для нас типе отображений класса $\mathfrak{M}$, построенных по аналогии с известной бэровской конструкцией первичного радикала. Пусть $\Delta\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ — отображение класса $\mathfrak{M}$ в себя, которое ставит в соответствие каждой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ один из её идеалов $\Delta(R)$ и согласовано с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ в том смысле, что для всякого гомоморфизма $\varphi\colon R \to R'$ алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ в алгебру R' над основным кольцом F, не обязательно принадлежащую $\mathfrak{M}$, выполнено включение

$$\varphi\bigl(\Delta(R)\bigr) \subseteq \Delta\bigl(\varphi(R)\bigr)$$

(т. е. отображение Δ удовлетворяет третьему условию из определения радикала в смысле Куроша—Амицура). Для каждого трансфинита α определим отображение $\Delta_\alpha\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ класса $\mathfrak{M}$, значение которого $\Delta_\alpha(R)$ на любой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ является её идеалом, построенным согласно следующему индуктивному правилу: $\Delta_0(R) = \{0\}$ и далее если идеалы $\{\Delta_\beta(R) \mid \beta < \alpha\}$ уже найдены при некотором $\alpha > 0$, то идеал $\Delta_\alpha(R)$ полагается равным их объединению в случае предельного трансфинита α,

$$\Delta_\alpha(R) = \bigcup_{\beta<\alpha} \Delta_\beta(R),$$

и прообразу в алгебре R идеала $\Delta\bigl(R/\Delta_{\alpha-1}(R)\bigr)$ её фактор-алгебры $R/\Delta_{\alpha-1}(R)$ по идеалу $\Delta_{\alpha-1}(R)$ в случае непредельного α. Идеалы $\{\Delta_\alpha(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$ алгебры R формируют неубывающую цепочку, в которой каждый идеал $\Delta_\alpha(R)$ или строго содержится в идеале $\Delta_{\alpha+1}(R)$, или равен ему и всем идеалам $\Delta_\eta(R)$, $\eta \geqslant \alpha$. Поэтому существует трансфинит τ, мощность которого не превосходит мощности множества R, такой что идеал $\Delta_\tau(R)$ равен идеалу $\Delta_\sigma(R)$ для всякого $\sigma > \tau$ и, следовательно, совпадает с объединением всех элементов цепочки $\{\Delta_\alpha(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$, которое мы обозначим через $\hat{\Delta}(R)$,

$$\hat{\Delta}(R) = \Delta_\tau(R) = \bigcup_{\alpha\geqslant 0} \Delta_\alpha(R).$$

Нашей следующей целью является исследование ряда наиболее существенных свойств отображения $\hat{\Delta}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ класса $\mathfrak{M}$, ставящего в соответствие каждой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ её идеал $\hat{\Delta}(R)$, которые оно наследует от исходного отображения Δ.

Замечание 1.1. Отображение $\hat{\Delta}$ согласовано с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ и ставит в соответствие любой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ идеал $\hat{\Delta}(R)$ этой алгебры, который является наименьшим среди всех её идеалов I, таких что фактор-алгебра R/I имеет нулевой идеал $\Delta(R/I) = \{0\}$.

Доказательство. Докажем при помощи трансфинитной индукции, что отображение Δ_α согласовано с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ для любого трансфинита α. При $\alpha = 0$ это выполняется очевидным образом, поскольку отображение Δ_0 ставит в соответствие алгебрам из класса $\mathfrak{M}$ их нулевые идеалы. Согласованное с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ отображение Δ перестановочно с их изоморфизмами в том смысле, что $\psi\bigl(\Delta(R)\bigr) = \Delta\bigl(\psi(R)\bigr)$ для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её изоморфизма ψ. Последнее относится в том числе и к изоморфизмам алгебр из класса $\mathfrak{M}$ с их фактор-алгебрами по нулевым идеалам. Поэтому отображение Δ_1 совпадает с отображением Δ, $\Delta_1 = \Delta$, и согласовано с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$. Располагая таким основанием индукции, мы можем предположить, что все отображения Δ_γ, $0 \leqslant \gamma < \beta$, согласованы с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ для некоторого трансфинита $\beta > 1$. Рассмотрим произвольные алгебру R из класса $\mathfrak{M}$ и гомоморфизм $\varphi\colon R \to R'$ алгебр R и R', где алгебра R' над кольцом F может, вообще говоря, не принадлежать классу $\mathfrak{M}$. Так как класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, вместе с алгеброй R он содержит её образ $\varphi(R)$ при действии гомоморфизма φ, что позволяет применять к нему отображения Δ_α, $\alpha \geqslant 0$. В случае предельного трансфинита β идеалы $\Delta_\beta(R)$ и $\Delta_\beta\bigl(\varphi(R)\bigr)$ алгебр R и $\varphi(R)$ совпадают с объединениями цепочек их идеалов $\{\Delta_\gamma(R) \mid 0 \leqslant \gamma < \beta\}$ и $\bigl\{\Delta_\gamma\bigl(\varphi(R)\bigr) \mid 0 \leqslant \gamma < \beta\bigr\}$,

$$\Delta_\beta(R) = \bigcup_{\gamma<\beta} \Delta_\gamma(R), \quad \Delta_\beta\bigl(\varphi(R)\bigr) = \bigcup_{\gamma<\beta} \Delta_\gamma\bigl(\varphi(R)\bigr).$$

Поскольку по предположению индукции элементы этих цепочек связаны включениями

$$\varphi\bigl(\Delta_\gamma(R)\bigr) \subseteq \Delta_\gamma\bigl(\varphi(R)\bigr) \quad (0 \leqslant \gamma < \beta),$$

мы немедленно получаем, что

$$\varphi\bigl(\Delta_\beta(R)\bigr) = \varphi\biggl(\bigcup_{\gamma<\beta} \Delta_\gamma(R)\biggr) = \bigcup_{\gamma<\beta} \varphi\bigl(\Delta_\gamma(R)\bigr) \subseteq \bigcup_{\gamma<\beta} \Delta_\gamma\bigl(\varphi(R)\bigr) = \Delta_\beta\bigl(\varphi(R)\bigr).$$

Предположим теперь, что β является непредельным трансфинитом, представленным в виде $\beta = \sigma + 1$ для подходящего σ, $0 \leqslant \sigma < \beta$. Тогда идеалы $\Delta_\beta(R)$ и $\Delta_\beta\bigl(\varphi(R)\bigr)$ алгебр R и $\varphi(R)$ равны прообразам в этих алгебрах идеалов $\Delta\bigl(R/\Delta_\sigma(R)\bigr)$ и $\Delta\Bigl(\varphi(R)/\Delta_\sigma\bigl(\varphi(R)\bigr)\Bigr)$ их фактор-алгебр $R/\Delta_\sigma(R)$ и $\varphi(R)/\Delta_\sigma\bigl(\varphi(R)\bigr)$ по идеалам $\Delta_\sigma(R)$ и $\Delta_\sigma\bigl(\varphi(R)\bigr)$,

$$\Delta_\beta(R) = \varphi^{-1}_{\Delta_\sigma(R)}\Bigl(\Delta\bigl(R/\Delta_\sigma(R)\bigr)\Bigr) = \\ = \bigl\{a \in R \mid \varphi_{\Delta_\sigma(R)}(a) = a + \Delta_\sigma(R) \in \Delta\bigl(R/\Delta_\sigma(R)\bigr)\bigr\}$$

и

$$\Delta_\beta\big(\varphi(R)\big) = \varphi^{-1}_{\Delta_\sigma(\varphi(R))}\Big(\Delta\Big(\varphi(R)/\Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big)\Big)\Big) =$$
$$= \Big\{b \in \varphi(R) \mid \varphi_{\Delta_\sigma(\varphi(R))}(b) = b + \Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big) \in \Delta\Big(\varphi(R)/\Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big)\Big)\Big\},$$

где $\varphi_{\Delta_\sigma(R)}$ и $\varphi_{\Delta_\sigma(\varphi(R))}$ — канонические эпиморфизмы алгебр R и $\varphi(R)$ на алгебры $R/\Delta_\sigma(R)$ и $\varphi(R)/\Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big)$,

$$\varphi_{\Delta_\sigma(R)}\colon a \mapsto a + \Delta_\sigma(R), \quad \varphi_{\Delta_\sigma(\varphi(R))}\colon b \mapsto b + \Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big)$$

для всех $a \in R$ и $b \in \varphi(R)$. Включение $\varphi\big(\Delta_\sigma(R)\big) \subseteq \Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big)$, выполнение которого следует из предположения индукции, позволяет корректным образом определить эпиморфизм ψ алгебры $R/\Delta_\sigma(R)$ на алгебру $\varphi(R)/\Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big)$, действующий по правилу

$$\psi\colon \varphi_{\Delta_\sigma(R)}(r) = r + \Delta_\sigma(R) \mapsto \varphi_{\Delta_\sigma(\varphi(R))}\big(\varphi(r)\big) = \varphi(r) + \Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big) \quad (r \in R).$$

Эпиморфизм ψ связан с гомоморфизмами φ, $\varphi_{\Delta_\sigma(R)}$ и $\varphi_{\Delta_\sigma(\varphi(R))}$ при помощи равенства $\psi\varphi_{\Delta_\sigma(R)} = \varphi_{\Delta_\sigma(\varphi(R))}\varphi$. Используя согласованность отображения Δ с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ применительно к алгебре $R/\Delta_\sigma(R)$ и её эпиморфизму ψ, мы сразу получаем отсюда, что

$$\psi\big(\Delta(R/\Delta_\sigma(R)\big) = \psi\big(\Delta_\beta(R)/\Delta_\sigma(R)\big) =$$
$$= \Big(\varphi\big(\Delta_\beta(R)\big) + \Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big)\Big)/\Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big) \subseteq$$
$$\subseteq \Delta\Big(\psi\big(R/\Delta_\sigma(R)\big)\Big) = \Delta\Big(\varphi(R)/\Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big)\Big) = \Delta_\beta\big(\varphi(R)\big)/\Delta_\sigma\big(\varphi(R)\big)$$

и, как следствие, $\varphi\big(\Delta_\beta(R)\big) \subseteq \Delta_\beta\big(\varphi(R)\big)$. Таким образом, отображение Δ_β согласовано с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$. Шаг индукции доказан полностью.

Установленная нами согласованность отображений $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \geqslant 0\}$ с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ и определение отображения $\hat{\Delta}$ гарантируют выполнение для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её гомоморфизма φ соотношений

$$\varphi\big(\hat{\Delta}(R)\big) = \varphi\Big(\bigcup_{\alpha\geqslant 0}\Delta_\alpha(R)\Big) = \bigcup_{\alpha\geqslant 0}\varphi\big(\Delta_\alpha(R)\big) \subseteq \hat{\Delta}\big(\varphi(R)\big) = \bigcup_{\alpha\geqslant 0}\Delta_\alpha\big(\varphi(R)\big),$$

из которых следует согласованность отображения $\hat{\Delta}$ с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$. Кроме того, в случае если образ $\varphi(R)$ алгебры R при действии гомоморфизма φ имеет нулевой идеал

$$\Delta\big(\varphi(R)\big) = \Delta_1\big(\varphi(R)\big) = \Delta_0\big(\varphi(R)\big) = \{0\},$$

нулевыми являются также все идеалы $\big\{\Delta_\alpha\big(\varphi(R)\big) \mid \alpha \geqslant 0\big\}$ алгебры $\varphi(R)$ и их объединение $\hat{\Delta}\big(\varphi(R)\big)$, а значит, идеал $\hat{\Delta}(R)$ алгебры R входит в ядро Ker_φ такого гомоморфизма φ. Последнее справедливо, в частности, для всякого эпиморфизма $\varphi_I\colon R \to R/I$ алгебры R на её фактор-алгебру R/I по идеалу $I = \mathrm{Ker}\,\varphi_I$,

такому что $\Delta(R/I) = \{0\}$. Поскольку идеал $\hat{\Delta}(R)$ является наибольшим элементом цепочки идеалов $\{\Delta_\alpha(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$ и $\hat{\Delta}(R) = \Delta_\tau(R) = \Delta_\nu(R)$ для некоторого трансфинита τ и всех трансфинитов $\nu > \tau$ (см. выше), должно выполняться равенство $\Delta\bigl(R/\hat{\Delta}(R)\bigr) = \Delta_{\tau+1}(R)/\Delta_\tau(R) = \{0\}$. Следовательно, идеал алгебры R

$$\hat{\Delta}(R) = \bigcap_{I \lhd R,\ \Delta(R/I)=\{0\}} I$$

является наименьшим из её идеалов I, для которых $\Delta(R/I) = \{0\}$. $\square$

Будем говорить, что отображение Δ является *непрерывным по включению*, если идеал $\Delta(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ входит в идеал $\Delta(I)$ каждого содержащего его идеала I этой алгебры.

Замечание 1.2. Отображение $\hat{\Delta}$, определённое на основе непрерывного по включению отображения Δ, непрерывно по включению и, как следствие, идемпотентно, $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}^2$.

Доказательство. Аналогично предыдущему доказательству мы будем использовать индукцию и докажем с её помощью непрерывность по включению отображения Δ_α для каждого трансфинита α. Основание индукции выполнено, поскольку отображения Δ_0 и $\Delta_1 = \Delta$ заведомо являются непрерывными по включению. Предполагая уже установленной непрерывность по включению всех отображений Δ_α, $0 \leqslant \alpha < \mu$ для некоторого трансфинита $\mu > 1$, покажем наличие этого свойства у отображения Δ_μ.

Пусть I — идеал алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, содержащий её идеал $\Delta_\mu(R)$ и вместе с ним все идеалы $\Delta_\eta(R)$, $0 \leqslant \eta < \mu$. По предположению индукции каждый идеал $\Delta_\eta(R)$, $0 \leqslant \eta < \mu$, алгебры R входит в идеал $\Delta_\eta(I)$ её идеала I, $\Delta_\eta(R) \subseteq \Delta_\eta(I)$. В случае если трансфинит μ является предельным, идеалы $\Delta_\mu(R)$ и $\Delta_\mu(I)$ алгебры R и идеала I равны объединениям цепочек их идеалов $\{\Delta_\eta(R) \mid 0 \leqslant \eta < \mu\}$ и $\{\Delta_\eta(I) \mid 0 \leqslant \eta < \mu\}$, что влечёт за собой включение

$$\Delta_\mu(R) = \bigcup_{\eta<\mu} \Delta_\eta(R) \subseteq \Delta_\mu(I) = \bigcup_{\eta<\mu} \Delta_\eta(I).$$

Непредельный трансфинит μ представим в виде $\mu = \nu + 1$ для подходящего однозначно определённого трансфинита ν, $0 \leqslant \nu < \mu$. В этом случае идеалы $\Delta_\mu(R)$ и $\Delta_\mu(I)$ алгебры R и идеала I совпадают с прообразами в R и I идеалов $\Delta\bigl(R/\Delta_\nu(R)\bigr)$ и $\Delta\bigl(I/\Delta_\nu(I)\bigr)$ их фактор-алгебр $R/\Delta_\nu(R)$ и $I/\Delta_\nu(I)$ по идеалам $\Delta_\nu(R)$ и $\Delta_\nu(I)$,

$$\Delta\bigl(R/\Delta_\nu(R)\bigr) = \Delta_\mu(R)/\Delta_\nu(R), \quad \Delta\bigl(I/\Delta_\nu(I)\bigr) = \Delta_\mu(I)/\Delta_\nu(I).$$

Так как идеалы $\Delta_\mu(R)$ и $\Delta_\nu(R)$ алгебры R входят в её идеал I, $\Delta_\nu(R) \subseteq \Delta_\mu(R) \subseteq I$, идеал $\Delta\bigl(R/\Delta_\nu(R)\bigr) = \Delta_\mu(R)/\Delta_\nu(R)$ алгебры $R/\Delta_\nu(R)$ содержится в её идеале $I/\Delta_\nu(R)$. Более того, непрерывность по включению отображения Δ гарантирует нам также, что

$$\Delta\bigl(R/\Delta_\nu(R)\bigr) = \Delta\Bigl(\Delta\bigl(R/\Delta_\nu(R)\bigr)\Bigr) \subseteq \Delta\bigl(I/\Delta_\nu(R)\bigr).$$

Используя включения $\Delta_\nu(R) \subseteq \Delta_\nu(I) \subseteq I$ (см. выше), мы можем корректным образом определить эпиморфизм $\psi\colon I/\Delta_\nu(R) \to I/\Delta_\nu(I)$ алгебры $I/\Delta_\nu(R)$ на алгебру $I/\Delta_\nu(I)$, который действует по правилу

$$\psi\colon a + \Delta_\nu(R) \mapsto a + \Delta_\nu(I) \quad (a \in I).$$

Поскольку отображение Δ согласовано с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$, имеет место включение

$$\psi\Big(\Delta\big(I/\Delta_\nu(R)\big)\Big) \subseteq \Delta\Big(\psi\big(I/\Delta_\nu(R)\big)\Big) = \Delta\big(I/\Delta_\nu(I)\big),$$

и следовательно,

$$\begin{aligned}
&\psi\Big(\Delta\big(R/\Delta_\nu(R)\big)\Big) = \psi\big(\Delta_\mu(R)/\Delta_\nu(R)\big) \subseteq \\
&\quad \subseteq \psi\Big(\Delta\big(I/\Delta_\nu(R)\big)\Big) \subseteq \Delta\big(I/\Delta_\nu(I)\big) = \Delta_\mu(I)/\Delta_\nu(I), \\
&\Delta_\mu(R)/\Delta_\nu(R) \subseteq \psi^{-1}\big(\Delta_\mu(I)/\Delta_\nu(I)\big) = \\
&\quad = \{b \in I/\Delta_\nu(R) \mid \psi(b) \in \Delta_\mu(I)/\Delta_\nu(I)\} = \Delta_\mu(I)/\Delta_\nu(R), \quad \Delta_\mu(R) \subseteq \Delta_\mu(I).
\end{aligned}$$

Таким образом, вне зависимости от того является ли трансфинит μ предельным или непредельным включение $\Delta_\mu(R) \subseteq \Delta_\mu(I)$ выполняется для произвольных алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её идеала I, такого что $\Delta_\mu(R) \subseteq I$. Поэтому отображение Δ_μ непрерывно по включению. Шаг индукции доказан полностью.

В качестве следствия из доказанной непрерывности по включению отображений $\{\Delta_\alpha \mid \alpha \geqslant 0\}$ мы сразу получаем, что для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и идеала I этой алгебры, содержащего наибольший элемент $\hat{\Delta}(R)$ цепочки её идеалов $\{\Delta_\alpha(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$, выполняются не только включения $\Delta_\alpha(R) \subseteq \Delta_\alpha(I)$, $\alpha \geqslant 0$, но и включение

$$\hat{\Delta}(R) = \bigcup_{\alpha \geqslant 0} \Delta_\alpha(R) \subseteq \hat{\Delta}(I) = \bigcup_{\alpha \geqslant 0} \Delta_\alpha(I).$$

Значит, отображение $\hat{\Delta}$ также является непрерывным по включению. □

Замечание 1.3. Отображение $\hat{\Delta}$ является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, если и только если оно идемпотентно, $\hat{\Delta} = \hat{\Delta}^2$, и идеал $\hat{\Delta}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ содержит все её идеалы I, совпадающие со своими идеалами $\hat{\Delta}(I)$. Более того, радикал $\hat{\Delta}$ (если он определён) равен верхнему радикалу $\mathcal{T}^{\mathfrak{M}_\Delta}$, определяемому на классе $\mathfrak{M}$ его подклассом $\mathfrak{M}_\Delta$, и в случае если исходное отображение Δ идемпотентно, совпадает также с нижним радикалом $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}^\Delta}$, определяемым на $\mathfrak{M}$ его подклассом $\mathfrak{M}^\Delta$, где $\mathfrak{M}_\Delta = \big\{R \in \mathfrak{M} \mid \Delta(R) = \{0\}\big\}$ и $\mathfrak{M}^\Delta = \{R \in \mathfrak{M} \mid \Delta(R) = R\}$.

Доказательство. Согласно замечанию 1.1 отображение $\hat{\Delta}$ согласовано с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ и его значение $\hat{\Delta}(R)$ на любой алгебре R из $\mathfrak{M}$ совпадает с наименьшим из всех тех её идеалов J, для которых $\Delta(R/J) = \{0\}$ или, что равносильно, $\hat{\Delta}(R/J) = \{0\}$. Поэтому отображение $\hat{\Delta}$

удовлетворяет второму и третьему условиям определения радикала в смысле Куроша—Амицура и выполнение для него первого условия данного определения, означающее идемпотентность $\hat{\Delta}$ и включение в идеал $\hat{\Delta}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ каждого из её идеалов I, равных своему идеалу $\hat{\Delta}(I)$, является необходимым и достаточным условием того, что $\hat{\Delta}$ определяет радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$.

Предположим теперь, что отображение $\hat{\Delta}$ определяет радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$. Тогда радикал $\hat{\Delta}$ может быть описан стандартным образом как нижний и верхний радикал, определяемый на классе $\mathfrak{M}$ его подклассами $\hat{\Delta}$-радикальных и $\hat{\Delta}$-полупростых алгебр $\mathfrak{R}_{\hat{\Delta}}$ и $\mathfrak{S}_{\hat{\Delta}}$,

$$\hat{\Delta} = \mathcal{T}_{\mathfrak{R}_{\hat{\Delta}}} = \mathcal{T}^{\mathfrak{S}_{\hat{\Delta}}},$$

где $\mathfrak{R}_{\hat{\Delta}} = \{R \in \mathfrak{M} \mid \hat{\Delta}(R) = R\}$ и $\mathfrak{S}_{\hat{\Delta}} = \mathfrak{M}_{\Delta} = \big\{R \in \mathfrak{M} \mid \hat{\Delta}(R) = \{0\}\big\}$.

Поскольку идеал ($\hat{\Delta}$-радикал) $\hat{\Delta}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ совпадает с её идеалом $\Delta_\tau(R)$ для подходящего трансфинита $\tau \geqslant 0$, класс $\hat{\Delta}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\hat{\Delta}}$ может быть представлен в виде объединения неубывающей с ростом трансфинитных индексов цепочки его подклассов $\{\mathfrak{M}^{\Delta_\alpha} = \{R \in \mathfrak{M} \mid \Delta_\alpha(R) = R\} \mid \alpha \geqslant 0\}$,

$$\mathfrak{R}_{\hat{\Delta}} = \{R \in \mathfrak{M} \mid \exists\, \alpha \geqslant 0,\ \Delta_\alpha(R) = R\} = \bigcup_{\alpha \geqslant 0} \mathfrak{M}^{\Delta_\alpha}.$$

При этом каждая алгебра R из класса $\mathfrak{M}^{\Delta_\alpha}$, $\alpha \geqslant 0$, обладает возрастающим идеальным рядом $\{\Delta_\beta(R) \mid \beta \leqslant \alpha\}$ с факторами $\Delta_{\eta+1}(R)/\Delta_\eta(R) = \Delta\big(R/\Delta_\eta(R)\big)$, $0 \leqslant \eta < \alpha$. Отсюда следует, что в ситуации, когда отображение Δ является идемпотентным, класс $\hat{\Delta}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\hat{\Delta}}$ входит в расширение $I\mathfrak{M}^{\Delta}$ своего подкласса $\mathfrak{M}^{\Delta} = \mathfrak{M}^{\Delta_1}$, которое составляют алгебры из класса $\mathfrak{M}$, обладающие идеальными рядами с факторами из класса $\mathfrak{M}^{\Delta}$. В то же время каждый радикальный подкласс класса $\mathfrak{M}$, содержащий его замкнутый относительно взятия гомоморфных образов подкласс $\mathfrak{M}^{\Delta}$, включает в себя не только расширение $I\mathfrak{M}^{\Delta}$ этого подкласса, но и его радикальное расширение $R\mathfrak{M}^{\Delta}$ (см. выше). Таким образом, для идемпотентного отображения Δ класс $\mathfrak{R}_{\hat{\Delta}}$ совпадает с расширениями $I\mathfrak{M}^{\Delta}$ и $R\mathfrak{M}^{\Delta}$ в классе $\mathfrak{M}$ своего подкласса $\mathfrak{M}^{\Delta}$, $\mathfrak{R}_{\hat{\Delta}} = I\mathfrak{M}^{\Delta} = R\mathfrak{M}^{\Delta}$, и является наименьшим из содержащих класс $\mathfrak{M}^{\Delta}$ радикальных подклассов класса $\mathfrak{M}$. Поэтому в данном случае радикал $\hat{\Delta}$ равен нижнему радикалу $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}^{\Delta}}$, определяемому на классе $\mathfrak{M}$ его подклассом $\mathfrak{M}^{\Delta}$, $\hat{\Delta} = \mathcal{T}_{\mathfrak{M}^{\Delta}}$. $\square$

Следствие 1.4. *Отображение $\hat{\Delta}$ определяет радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, имеющий замкнутый относительно взятия идеалов класс $\hat{\Delta}$-полупростых алгебр $\mathfrak{S}_{\hat{\Delta}} = \mathfrak{M}_{\Delta}$, если и только если отображение $\hat{\Delta}$ идемпотентно и согласовано с включениями идеалов алгебр из класса $\mathfrak{M}$ в том смысле, что идеал $\hat{\Delta}(R)$ любой алгебры R из $\mathfrak{M}$ содержит идеал $\hat{\Delta}(I)$ каждого её идеала I.*

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — замкнутый относительно взятия гомоморфных образов подкласс класса $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ — отображение класса $\mathfrak{M}$ в себя, ставящее в соответствие каждой алгебре R из этого класса сумму $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}}(R)$ всех её идеалов, принадлежащих классу $\mathfrak{X}$. Понятно, что отображение $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}}$ согласовано с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ и непрерывно по включению. Поэтому согласованными с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ и непрерывными по включению являются также отображения $\{\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}_\alpha} \mid \alpha \geqslant 0\}$ и $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$, построенные на основе отображения $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}}$ (см. замечания 1.1 и 1.2). Так как класс $\mathfrak{M}_{\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}}}$, который формируют алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ с нулевым идеалом $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}}(R) = \widehat{\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}}}(R) = \{0\}$, совпадает с классом $\mathfrak{X}^{-1}$, образованным алгебрами из класса $\mathfrak{M}$, не содержащими ненулевых идеалов из класса $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}}} = \mathfrak{X}^{-1}$, идеал $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ является наименьшим из всех её идеалов, фактор-алгебры по которым принадлежат классу $\mathfrak{X}^{-1}$ (см. замечание 1.1),

$$\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(R) = \bigcap_{J \lhd R,\ R/J \in \mathfrak{X}^{-1}} J.$$

Отсюда следует, что идеал $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(R)$ алгебры R входит в её радикал $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(R)$, где $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ — нижний радикал, определяемый на классе $\mathfrak{M}$ его подклассом $\mathfrak{X}$. Для этого достаточно напомнить, что класс $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}}$ совпадает с расширением $R\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{X}$ в классе $\mathfrak{M}$, а класс $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$-полупростых алгебр $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}}$ равен классу $(R\mathfrak{X})^{-1}$, состоящему из алгебр из класса $\mathfrak{M}$, не содержащих ненулевых идеалов из класса $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}} = R\mathfrak{X}$. Включение $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(R) \subseteq \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(R)$ можно установить и по-другому. Поскольку отображение $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$ непрерывно по включению, оно идемпотентно, и потому идеал $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(R)$ алгебры R входит в класс $\mathfrak{M}^{\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}}$, который составляют алгебры A из класса $\mathfrak{M}$, равные своим идеалам $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(A)$, $A = \widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(A)$. Из отмеченного выше следует, что класс $\mathfrak{M}^{\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}}$ формируют алгебры из класса $\mathfrak{M}$, ненулевые фактор-алгебры которых не принадлежат классу $\mathfrak{X}^{-1}$. Другими словами, он совпадает с классом $\mathfrak{X}^{(1)}$, состоящим из алгебр из класса $\mathfrak{M}$, ненулевые гомоморфные образы которых содержат ненулевые идеалы из класса $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{M}^{\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}} = \mathfrak{X}^{(1)}$. Так как класс $\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, класс $\mathfrak{X}^{(1)}$ равен также расширению $I\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{X}$, которое, напомним, состоит из всех алгебр из класса $\mathfrak{M}$, обладающих по меньшей мере одним идеальным рядом с факторами из $\mathfrak{X}$. Остаётся заметить, что класс $I\mathfrak{X}$ входит в радикальное расширение $R\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{X}$, которое формируют алгебры из класса $\mathfrak{M}$, содержащие нормальные ряды подалгебр с достижимыми по ряду элементами и факторами из $\mathfrak{X}$,

$$\mathfrak{M}^{\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}} = \mathfrak{X}^{(1)} = I\mathfrak{X} \subseteq R\mathfrak{X}.$$

Следовательно, идеал $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ является $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$-радикальным идеалом этой алгебры и содержится в её радикале $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}(R)$.

Так как класс $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}} = R\mathfrak{X}$ является наименьшим из всех радикальных подклассов класса $\mathfrak{M}$, содержащих класс $\mathfrak{X}$, совпадение

между ним и его подклассом $\mathfrak{M}^{\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}} = \mathfrak{X}^{(1)} = I\mathfrak{X}$ является необходимым и достаточным условием радикальности этого подкласса. В свою очередь равенство $\mathfrak{X}^{(1)} = R\mathfrak{X}$ влечёт за собой совпадение отображений $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}^{(1)}}$ и $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Rad}_{R\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}^{(1)}} = \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$.

Согласно замечанию 1.3 отображение $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$ является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, если и только если идеал $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ содержит каждый из её идеалов I, совпадающих со своим идеалом $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(I)$. Последнее равносильно тому, что идеал $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(R)$ равен сумме $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}^{(1)}}(R)$ всех идеалов алгебры R, принадлежащих классу $\mathfrak{M}^{\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}} = \mathfrak{X}^{(1)}$, а значит, является наибольшим среди её идеалов с данным свойством. Поэтому одно из необходимых и достаточных условий того, что отображение $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$ является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, может быть сформулировано как условие равенства между ним и отображением $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}^{(1)}}$. В ситуации, когда отображение $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$ является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, классы $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$-радикальных и $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$-полупростых алгебр $\mathfrak{R}_{\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}}$ и $\mathfrak{S}_{\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}}$ совпадают с классами $\mathfrak{M}^{\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}} = \mathfrak{X}^{(1)}$ и $\mathfrak{M}_{\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}}} = \mathfrak{X}^{-1}$ соответственно (см. выше). При этом класс $\mathfrak{R}_{\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}} = \mathfrak{X}^{(1)}$ равен также классу $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$-радикальных алгебр $R\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}^{(1)} = R\mathfrak{X}$, и радикалы $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$ и $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ определяют один радикал $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}^{(1)}} = \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ на классе $\mathfrak{M}$.

Понятно, что полупростота подкласса $\mathfrak{X}^{-1}$ класса $\mathfrak{M}$ эквивалентна существованию верхнего радикала $\mathcal{T}^{\mathfrak{X}^{-1}}$, определяемого на классе $\mathfrak{M}$ его подклассом $\mathfrak{X}^{-1}$, для которого класс $\mathcal{T}^{\mathfrak{X}^{-1}}$-полупростых алгебр $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}^{\mathfrak{X}^{-1}}}$ совпадает с классом $\mathfrak{X}^{-1}$, $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}^{\mathfrak{X}^{-1}}} = \mathfrak{X}^{-1}$. Вместе с тем в этом случае радикал $\mathcal{T}^{\mathfrak{X}^{-1}}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ должен быть равен наименьшему из идеалов алгебры R, фактор-алгебры по которым принадлежат классу $\mathfrak{X}^{-1}$, и, следовательно, совпадает с её идеалом $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(R)$, $\mathcal{T}^{\mathfrak{X}^{-1}}(R) = \widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}(R)$. Поэтому класс $\mathfrak{X}^{-1}$ тогда и только тогда является полупростым подклассом класса $\mathfrak{M}$, когда отображение $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$ определяет радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, что означает к тому же совпадение на $\mathfrak{M}$ радикалов $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$, $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ и $\mathcal{T}^{\mathfrak{X}^{-1}}$.

Согласно сказанному ранее класс $\mathfrak{X}^{-1}$ является полупростым подклассом класса $\mathfrak{M}$, если и только если он совпадает с классом ${}^{(1)}(\mathfrak{X}^{-1})$, состоящим из всех алгебр из класса $\mathfrak{M}$, ненулевые идеалы которых имеют ненулевые гомоморфные образы в классе $\mathfrak{X}^{-1}$, или, что то же самое, с классом $(\mathfrak{X}^{(1)})^{-1} = \left({}^{-1}(\mathfrak{X}^{-1})\right)^{-1} = {}^{(1)}(\mathfrak{X}^{-1})$, который составляют алгебры из класса $\mathfrak{M}$, не содержащие ненулевых идеалов из класса $\mathfrak{X}^{(1)}$, где подкласс ${}^{-1}\mathfrak{Y}$ класса $\mathfrak{M}$ определяется для любого из его подклассов $\mathfrak{Y}$ как класс, образованный алгебрами из $\mathfrak{M}$, не имеющими ненулевых гомоморфных образов в классе $\mathfrak{Y}$.

Если класс $\mathfrak{X}^{-1}$ является замкнутым относительно взятия идеалов, то ненулевые идеалы алгебр из этого класса не содержат ненулевых идеалов из класса $\mathfrak{X}$ и потому не принадлежат его расширению $\mathfrak{X}^{(1)} = I\mathfrak{X}$. Таким образом, замкнутый относительно взятия идеалов класс $\mathfrak{X}^{-1}$ входит в свой под-

класс $(\mathfrak{X}^{(1)})^{-1}$ и, как следствие, составляет с ним один полупростой подкласс $\mathfrak{X}^{-1} = (\mathfrak{X}^{(1)})^{-1}$ класса $\mathfrak{M}$, причём определяемый им на классе $\mathfrak{M}$ верхний радикал $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{T}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{T}^{\mathfrak{X}^{-1}}$ является согласованным с включениями идеалов алгебр из класса $\mathfrak{M}$ отображением этого класса (см. следствие 1.4).

Следует подчеркнуть, что радикальность подкласса $\mathfrak{X}^{(1)}$ класса $\mathfrak{M}$, равносильная его совпадению с классом $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$-радикальных алгебр $R\mathfrak{X}$, ещё не гарантирует радикальности в смысле Куроша—Амицура отображения $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$ класса $\mathfrak{M}$, поскольку сама по себе она не предполагает автоматического выполнения равенства между классом $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$-полупростых алгебр $(\mathfrak{X}^{(1)})^{-1} = {}^{(1)}(\mathfrak{X}^{-1}) = (R\mathfrak{X})^{-1}$ и содержащим его классом $\mathfrak{X}^{-1}$.

Полученные выводы можно сформулировать в виде отдельного утверждения.

Замечание 1.5. Следующие условия эквивалентны:

1) отображение $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$ — радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$;
2) отображение $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$ совпадает с радикалом $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$, $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}} = \mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$;
3) отображение $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$ равно отображению $\mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}^{(1)}}$, $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}} = \mathfrak{Rad}_{\mathfrak{X}^{(1)}}$;
4) класс $\mathfrak{X}^{-1}$ является полупростым или, что равносильно, $\mathfrak{X}^{-1} = {}^{(1)}(\mathfrak{X}^{-1}) = (\mathfrak{X}^{(1)})^{-1}$.

В частности, все эти условия выполняются, если класс $\mathfrak{X}^{-1}$ замкнут относительно взятия идеалов, т. е. когда любая алгебра из класса $\mathfrak{M}$, не имеющая ненулевых идеалов из класса $\mathfrak{X}$, не содержит ненулевых достижимых подалгебр из $\mathfrak{X}$.

Сделанные наблюдения позволят нам в дальнейшем не тратить время на обсуждение условий радикальности в смысле Куроша—Амицура отображений $\widehat{\mathfrak{Rad}}_{\mathfrak{X}}$, отвечающих замкнутым относительно взятия гомоморфных образов подклассам $\mathfrak{X}$ основного класса $\mathfrak{M}$, с которыми нам предстоит встретиться во второй части статьи.

2. Радикалы и системы отображений

Пусть G — непустая система отображений, такая что каждое отображение g из этой системы ставит в соответствие произвольным алгебре R из основного класса $\mathfrak{M}$ и её идеалу I некоторое подмножество $g(R, I)$ идеала I. Мы будем предполагать дополнительно, что отображение g перестановочно с гомоморфизмами алгебры R в том смысле, что $\varphi\big(g(R, I)\big) = g\big(\varphi(R), \varphi(I)\big)$ для любых гомоморфизма $\varphi\colon R \to R'$ алгебр R и R' и идеала I алгебры R (R' — алгебра над кольцом F, не обязательно из класса $\mathfrak{M}$).

Обсудим для начала вариант понятия первичного радикала, определённый на основе системы G. Назовём алгебру R из класса $\mathfrak{M}$ *G-полупервичной*, если она не содержит ненулевых идеалов I, таких что $g(R, I) = \{0\}$ для как минимум одного отображения g из системы G (идеалы с данным свойством мы будем называть *G-тривиальными*), и *G-первичной*, если она G-полупервична и любые

два её ненулевых идеала имеют ненулевое пересечение. Идеал P алгебры R, фактор-алгебра по которому R/P является G-полупервичной (G-первичной) алгеброй, мы будем также называть *G-полупервичным* (*G-первичным*). Множество всех G-первичных идеалов алгебры R (её *G-первичный спектр*) мы будем обозначать через $\mathrm{Spec}_G(R)$. Определим *G-первичный радикал* $\mathrm{Rad}_G(R)$ алгебры R как пересечение всех её G-первичных идеалов,

$$\mathrm{Rad}_G(R) = \bigcap_{P \in \mathrm{Spec}_G(R)} P.$$

Поскольку отображения из системы G перестановочны с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$, отображение B_G класса $\mathfrak{M}$ в себя, ставящее в соответствие каждой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ сумму $B_G(R)$ всех её G-тривиальных идеалов, согласовано с гомоморфизмами алгебр из $\mathfrak{M}$. В соответствии со сказанным ранее мы можем определить отображения $\{B_{G\alpha} \mid \alpha \geqslant 0\}$ и $\hat{B}_G$ класса $\mathfrak{M}$ в себя, такие что их значения на любой алгебре R из $\mathfrak{M}$ формируют в ней возрастающий идеальный ряд $\{B_{G\alpha}(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$, объединение элементов которого совпадает с идеалом $\hat{B}_G(R)$ этой алгебры (термин идеальный ряд вполне оправдан, так как мы можем дополнить рассматриваемую цепочку идеалов алгебры R до такого ряда, присоединив к ней несобственный идеал R). Мы будем называть этот идеальный ряд *бэровской G-цепочкой* идеалов алгебры R. Понятно, что бэровская G-цепочка $\{B_{G\alpha}(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$ стабилизируется на некотором шаге τ (во всяком случае это верно для трансфинита τ мощности, равной мощности множества R) и, следовательно,

$$\hat{B}_G(R) = B_{G\tau}(R) = \bigcup_{\alpha \geqslant 0} B_{G\alpha}(R).$$

По замечанию 1.1 отображения $\{B_{G\alpha} \mid \alpha \geqslant 0\}$ и $\hat{B}_G$, построенные на основе отображения $B_G = B_{G1}$, наследуют его согласованность с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$. При этом отображение $\hat{B}_G$ ставит в соответствие каждой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ её идеал $\hat{B}_G(R)$, являющийся наименьшим из всех идеалов I алгебры R, таких что фактор-алгебра R/I имеет нулевой идеал $B_G(R/I) = \{0\}$ или, что то же самое, является G-полупервичной. Иначе говоря, идеал $\hat{B}_G(R)$ является наименьшим среди всех G-полупервичных идеалов алгебры R.

Назовём алгебру R из класса $\mathfrak{M}$, которая является своим G-тривиальным идеалом (последнее означает, что $g(R,R) = \{0\}$ для некоторого отображения g из системы G), *G-тривиальной*. Класс G-тривиальных алгебр мы будем обозначать через $\mathfrak{A}_G$. Так как отображения из системы G перестановочны с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$, класс $\mathfrak{A}_G$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов, и мы можем ввести нижние радикалы $RG = \mathcal{T}_{\mathfrak{A}_G} = \mathcal{T}_{R\mathfrak{A}_G}$ и $RG^* = \mathcal{T}_{A\mathfrak{A}_G}$, определяемые на классе $\mathfrak{M}$ радикальными расширениями в нём $R\mathfrak{A}_G$ и $A\mathfrak{A}_G$ его подкласса $\mathfrak{A}_G$.

Каждое отображение g из системы G определяет отображение

$$\bar{g}\colon R \mapsto g(R,R) \quad (R \in \mathfrak{M}),$$

которое, как и отображение g, перестановочно с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$, так как

$$\varphi\bigl(\bar{g}(R)\bigr) = \varphi\bigl(g(R,R)\bigr) = g\bigl(\varphi(R),\varphi(R)\bigr) = \bar{g}\bigl(\varphi(R)\bigr)$$

для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её гомоморфизма φ. Отображение $\bar{g}$ может рассматриваться и как отображение $\bar{g}'$, ставящее в соответствие произвольным алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ и её идеалу I подмножество $\bar{g}'(R,I) = \bar{g}(I)$. В случае если отображение g не зависит от первого аргумента (т. е. для всякой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ её подмножество $g(R',R)$ одинаково для всех алгебр R' из $\mathfrak{M}$, содержащих алгебру R в качестве идеала), оно очевидным образом совпадает с отображением $\bar{g}'$.

Понятно, что всё сказанное ранее о системе G применимо и к системе $\bar{G}$, состоящей из всех отображений $\bar{g}'$, $g \in G$, не зависящих от первого аргумента. В частности, можно определить отображения $\mathrm{Rad}_{\bar{G}}$ и $\hat{B}_{\bar{G}}$ и радикалы $R\bar{G}$ и $R\bar{G}^*$, правда, последние совпадают с уже определёнными радикалами RG и RG^* из-за равенства классов G-тривиальных и $\bar{G}$-тривиальных алгебр $\mathfrak{A}_G$ и $\mathfrak{A}_{\bar{G}}$. Отметим также, что для любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ наименьший $\bar{G}$-полупервичный идеал $\hat{B}_{\bar{G}}(R)$ алгебры R содержится в её радикалах $RG(R) = R\bar{G}(R)$ и $RG^*(R) = R\bar{G}^*(R)$, а точнее, $\hat{B}_{\bar{G}}(R) \subseteq RG(R) \subseteq RG^*(R)$.

Подчеркнём, что отображения $\{B_{G_\alpha} \mid \alpha \geqslant 0\}$ и $\hat{B}_G$, определённые для системы отображений $G = \bar{G}$, элементы которой не зависят от первого аргумента, непрерывны по включению согласно замечанию 1.2.

Если отображение $\hat{B}_G$ определяет радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$ (в ситуации, когда оно равно отображению $\hat{B}_{\bar{G}}$, это равносильно его совпадению с радикалом RG), мы будем называть $\hat{B}_G$ *радикалом Бэра, соответствующим системе* G, или просто G*-бэровским радикалом*.

Любой радикал в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ на классе $\mathfrak{M}$, такой что класс $\mathcal{T}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}}$ содержит все G-тривиальные алгебры, $\mathfrak{A}_G \subseteq \mathfrak{R}_{\mathcal{T}}$, мы будем называть G*-наднильпотентным* или кратко G*-ниль-радикалом*. В частности, радикалы RG и RG^* являются G-ниль-радикалами. Более того, радикал RG — наименьший из всех G-ниль-радикалов в том смысле, что класс RG-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{RG} = R\mathfrak{A}_G$ является наименьшим среди всех радикальных подклассов класса $\mathfrak{M}$, соответствующих G-ниль-радикалам.

Назовём радикал в смысле Куроша—Амицура $\mathcal{T}$ на классе $\mathfrak{M}$ G*-специальным*, если радикал $\mathcal{T}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ равен пересечению всех её G-первичных идеалов, фактор-алгебры по которым $\mathcal{T}$-полупросты. Каждый G-специальный радикал является, очевидно, G-ниль-радикалом, поскольку G-тривиальные алгебры не имеют ненулевых G-полупервичных гомоморфных образов (G-полупервичные гомоморфные образы таких алгебр G-тривиальны, а значит, могут быть только нулевыми). В случае если отображения $\mathrm{Rad}_{\bar{G}}$ и $\hat{B}_{\bar{G}}$ совпадают между собой и определяют радикал в смысле Куроша—Амицура на классе $\mathfrak{M}$, наименьший G-ниль-радикал (или *нижний* G*-ниль-радикал*) $\mathrm{Rad}_{\bar{G}} = \hat{B}_{\bar{G}} = RG$ является также $\bar{G}$-специальным радикалом.

Введём частичный порядок $\leqslant$ на множестве G по следующему правилу: $g \leqslant g'$, $g, g' \in G$, если и только если включение

$$g^{(\mathrm{id})}(R,(r)_R) = \big(g(R,(r)_R)\big)_R \subseteq g'^{(\mathrm{id})}(R,(r)_R) = \big(g(R,(r)_R)\big)_R$$

выполняется для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её элемента r.

Пусть $G' = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов системы G, упорядоченная в том смысле, что она не возрастает относительно частичного порядка $\leqslant$ с ростом k, $g_k \geqslant g_{k+1}$ при всех $k \geqslant 1$ (т. е. для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её элемента r идеалы $\big\{g_k^{(\mathrm{id})}(R,(r)_R)\big\}_{k=1}^{\infty}$ алгебры R образуют невозрастающую цепочку). Простейшим примером такой упорядоченной последовательности может служить *g-последовательность* $\{g_k = g\}_{k=1}^{\infty}$, все элементы которой равны одному элементу g системы G. Назовём *G'-цепочкой* любую последовательность элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, каждый элемент r_{j+1}, $j \geqslant 0$, которой принадлежит значению $g_{j+1}(R,(r_j)_R)$ отображения g_{j+1} на алгебре R и её идеале $(r_j)_R$, порождённом элементом r_j. Поскольку $g(R,\{0\}) = \{0\}$ для всех отображений g из системы G, равенство нулю какого-то элемента r_k G'-цепочки $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ влечёт за собой совпадение с нулём всех следующих за ним элементов r_i, $i > k$, а значит, эта цепочка стабилизируется нулём на некотором шаге, меньшем или равном k. Понятно также, что всякий гомоморфизм $\varphi\colon R \to R'$ алгебр R и R' отображает G'-цепочки элементов алгебры R в некоторые G'-цепочки элементов её гомоморфного образа $\varphi(R)$ при действии φ. Более того, каждая G'-цепочка элементов $\{r'_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры $\varphi(R)$ является образом в $\varphi(R)$ подходящей G'-цепочки элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R. Действительно, в качестве элемента r_0 можно взять произвольный прообраз элемента r'_0 в алгебре R, $r'_0 = \varphi(r_0)$. Допустим, что элементы $r_0, \ldots, r_k$ алгебры R, удовлетворяющие условиям построения G'-цепочки и равенствам $\varphi(r_i) = r'_i$, $i = 0, \ldots, k$, уже найдены для некоторого $k \geqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned} r'_{k+1} \in g_{k+1}\big(\varphi(R),(r'_k)_{\varphi(R)}\big) &= g_{k+1}\big(\varphi(R),\big(\varphi(r_k)\big)_{\varphi(R)}\big) = \\ &= g_{k+1}\Big(\varphi(R),\varphi\big((r_k)_R\big)\Big) = \varphi\Big(g_{k+1}\big(R,(r_k)_R\big)\Big) \end{aligned}$$

и, как следствие, в качестве r_{k+1} можно взять любой $r_{k+1} \in g_{k+1}\big(R,(r_k)\big)_R)$, для которого $\varphi(r_{k+1}) = r'_{k+1}$. Таким образом, необходимая G'-цепочка элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$, такая что $\varphi(r_i) = r'_i$, $i \geqslant 0$, всегда может быть построена.

Назовём элемент r алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ *строго G'-разрешимым*, если каждая G'-цепочка элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ этой алгебры, в которой $r_0 = r$, содержит нуль или, что то же самое, стабилизируется нулём на некотором шаге. Элементы алгебры R, которые являются строго G'-разрешимыми для любой упорядоченной последовательности элементов G' системы G, мы будем называть *сильно G-разрешимыми*.

Из наших предыдущих наблюдений следует, что любой гомоморфизм алгебры R отображает её строго G'-разрешимые (сильно G-разрешимые) элементы в некоторые строго G'-разрешимые (сильно G-разрешимые) элементы гомоморфного образа R при действии этого гомоморфизма.

Если система G содержит элемент g, такой что $g(R,(r)_R) \supseteq g'(R,(r)_R)$ для любых элемента g' системы G, алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её элемента r, то сильно G-разрешимые элементы можно определить также как строго G'-разрешимые элементы для g-последовательности G' или же как сильно $\{g\}$-разрешимые элементы.

Необходимо отметить, что замена исходной системы G на систему отображений $G^{(\mathrm{sub})} = \{g^{(\mathrm{sub})} \mid g \in G\}$ или $G^{(\mathrm{id})} = \{g^{(\mathrm{id})} \mid g \in G\}$, где

$$g^{(\mathrm{sub})}\colon R \mapsto \langle g(R,I)\rangle, \quad g^{(\mathrm{id})}\colon R \mapsto \big(g(R,I)\big)_R \quad (g \in G,\ R \in \mathfrak{M},\ I \lhd R),$$

не изменит понятия G-полупервичных и G-первичных алгебр и идеалов, но приведёт к изменениям определений G'-цепочки, строго G'-разрешимого и сильно G-разрешимого элементов. Понятно, что строго ${G'}^{(\mathrm{id})}$-разрешимые элементы являются строго ${G'}^{(\mathrm{sub})}$-разрешимыми, а строго ${G'}^{(\mathrm{sub})}$-разрешимые элементы — строго G'-разрешимыми, где ${G'}^{(\mathrm{sub})} = \{g_k^{(\mathrm{sub})}\}_{k=1}^{\infty}$ и ${G'}^{(\mathrm{id})} = \{g_k^{(\mathrm{id})}\}_{k=1}^{\infty}$ — упорядоченные последовательности элементов систем $G^{(\mathrm{sub})}$ и $G^{(\mathrm{id})}$, отвечающие последовательности $G' = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$. То же самое справедливо для сильно G-разрешимых, $G^{(\mathrm{sub})}$-разрешимых и $G^{(\mathrm{id})}$-разрешимых элементов. Отметим, что сильно $G^{(\mathrm{id})}$-разрешимые элементы могут быть определены как элементы, являющиеся сильно $\{g^{(\mathrm{id})}\}$-разрешимыми для любого элемента g системы G.

Теорема 2.1. *Предположим, что $g^{(\mathrm{id})}(A,(a)_A) \subseteq g^{(\mathrm{id})}(A,I)$ для произвольных алгебры A из класса $\mathfrak{M}$, её идеала I, его элемента a и отображения g из системы G. Тогда G'-первичный радикал $\mathrm{Rad}_{G'}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ совпадает с наименьшим G'-полупервичным идеалом $\hat{B}_{G'}(R)$ алгебры R и множествами всех её строго G'-разрешимых, ${G'}^{(\mathrm{sub})}$-разрешимых и ${G'}^{(\mathrm{id})}$-разрешимых элементов для каждой упорядоченной последовательности элементов $G' = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ системы G. Поэтому множества всех сильно G-разрешимых, $G^{(\mathrm{sub})}$-разрешимых и $G^{(\mathrm{id})}$-разрешимых элементов алгебры R равны друг другу и пересечениям всех её идеалов $\mathrm{Rad}_{G'}(R) = \hat{B}_{G'}(R)$, $G' \in \mathcal{S}_G$, и всех её идеалов $\mathrm{Rad}_{\{g\}}(R) = \hat{B}_{\{g\}}(R)$, $g \in G$, где $\mathcal{S}_G$ — множество всех упорядоченных последовательностей элементов системы G. Если для всякой алгебры A из класса $\mathfrak{M}$ каждое непустое подмножество системы G вида $G(A,a) = \{g \in G \mid g(A,(a)_A) \neq \{0\}\}$, $a \in A$, содержит наибольший элемент относительно частичного порядка $\leqslant$, то перечисленные множества элементов алгебры R совпадают также с множествами всех её сильно $\{u_G\}$-разрешимых, $\{u_G^{(\mathrm{sub})}\}$-разрешимых и $\{u_G^{(\mathrm{id})}\}$-разрешимых элементов и равны её $\{u_G\}$-первичному радикалу $\mathrm{Rad}_{\{u_G\}}(R)$ и наименьшему $\{u_G\}$-полупервичному идеалу $\hat{B}_{\{u_G\}}(R)$, где отображение u_G действует по правилу*

$$u_G\colon (A,I) \mapsto \bigcup_{g \in G} g(A,I) \quad (A \in \mathfrak{M},\ I \lhd A).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную упорядоченную последовательность G', $G' = \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_G$. Говоря в дальнейшем о G'-тривиальных, G'-по-

лупервичных и G'-первичных алгебрах и идеалах применительно к последовательности G', мы будем иметь в виду соответствующие понятия, определённые для G' как для системы отображений. В первую очередь заметим, что G'-полупервичные алгебры не содержат ненулевых строго G'-разрешимых элементов. Действительно, каждый ненулевой элемент r такой алгебры R порождает ненулевой идеал $(r)_R$, не являющийся G'-тривиальным, и, как следствие, $g_k\big(R,(r)_R\big) \neq \{0\}$ для всех $k \geqslant 1$. Поэтому, полагая $r_0 = r$, мы можем выбрать ненулевой элемент r_1 из множества $g_1(R,(r_0)_R)$, затем подобрать ненулевой элемент r_2 из множества $g_2(R,(r_1)_R)$ и т. д. Продолжая это построение, мы получим в результате бесконечную G'-цепочку ненулевых элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ с начальным элементом $r_0 = r$. Таким образом, G'-полупервичные алгебры не имеют ненулевых строго G'-разрешимых элементов и, следовательно, ненулевых строго $G'^{(\mathrm{sub})}$-разрешимых и $G'^{(\mathrm{id})}$-разрешимых элементов.

Так как всякий гомоморфизм алгебры из класса $\mathfrak{M}$ отображает её строго G'-разрешимые элементы в некоторые строго G'-разрешимые элементы гомоморфного образа этой алгебры при действии данного гомоморфизма, наименьший G'-полупервичный идеал $\hat{B}_{G'}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ включает в себя множество всех строго G'-разрешимых элементов алгебры R и вместе с ним множества всех её строго $G'^{(\mathrm{sub})}$-разрешимых и $G'^{(\mathrm{id})}$-разрешимых элементов. Отметим также, что идеал $\hat{B}_{G'}(R)$ равен пересечению всех G'-полупервичных идеалов алгебры R и входит в её G'-первичный радикал $\mathrm{Rad}_{G'}(R)$, $\hat{B}_{G'}(R) \subseteq \mathrm{Rad}_{G'}(R)$.

Покажем теперь, что любой элемент r алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, не являющийся её строго $G'^{(\mathrm{id})}$-разрешимым элементом, не принадлежит по меньшей мере одному из G'-первичных идеалов этой алгебры. Поскольку элемент r не является строго $G'^{(\mathrm{id})}$-разрешимым, алгебра R содержит бесконечную $G'^{(\mathrm{id})}$-цепочку ненулевых элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$, в которой $r_0 = r$ и $r_{j+1} \in g_{j+1}^{(\mathrm{id})}(R,(r_j)_R)$ при любом $j \geqslant 0$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех идеалов алгебры R, имеющих пустые пересечения с цепочкой $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$. Множество $\mathcal{M}$ содержит нулевой идеал $\{0\}$, а значит, не пусто. Кроме того, частично упорядоченное по включению множество $\mathcal{M}$ индуктивно, так как оно включает в себя объединение

$$I = \bigcup_{a \in A} I_a$$

любого своего упорядоченного подмножества $\{I_a \mid a \in A\}$. Для этого достаточно заметить, что в противном случае должно выполняться включение $r_i \in I$ при некотором $i \geqslant 0$ и, как следствие, включение $r_i \in I_a$ для подходящего $a \in A$, но $I_a \in \mathcal{M}$ и $I_a \cap \{r_i\}_{i=0}^{\infty} = \varnothing$?! Индуктивное множество $\mathcal{M}$ обладает согласно лемме Цорна по крайней мере одним максимальным элементом. Выберем любой из таких элементов и обозначим его через P. Предположим, что идеал P алгебры R не является G'-полупервичным, т. е. в алгебре R имеется строго содержащий идеал P идеал J, образ которого J/P в фактор-алгебре R/P является её ненулевым G'-тривиальным идеалом, $g_k(R/P, J/P) = \{0\}$ для

некоторого $k \geqslant 1$. В соответствии с выбором идеала P идеал J включает в себя как минимум один элемент r_j, $j \geqslant 0$, и вместе с ним все элементы r_i, $i \geqslant j$ ($r_{l+1} \in g_{l+1}^{(\mathrm{id})}(R, (r_l)_R) \subseteq (r_l)_R$, $l \geqslant 0$). Перестановочность отображений из системы G с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ позволяет записать

$$g_k(R/P, J/P) = g_k\big(\varphi_P(R), \varphi_P(J)\big) = \varphi_P\big(g_k(R, J)\big) = \{0\}, \quad g_k(R, J) \subseteq P,$$

где $\varphi_P \colon R \to R/P$ — канонический эпиморфизм алгебры R на её фактор-алгебру R/P по идеалу P. Используя наложенные на систему G условия, мы получаем также, что

$$r_{j'+1} \in g_{j'+1}^{(\mathrm{id})}(R, (r_{j'})_R) \subseteq g_k^{(\mathrm{id})}(R, (r_{j'})_R) \subseteq g_k^{(\mathrm{id})}(R, J) \subseteq P \quad (j' \geqslant \max\{k-1, j\}).$$

Это противоречит условию $P \in \mathcal{M}$, $P \cap \{r_i\}_{i=0}^{\infty} = \varnothing$. Значит, идеал P является G'-полупервичным. Более того, он также G'-первичен. Действительно, если верно обратное и идеал P равен пересечению $J_1 \cap J_2$ некоторых строго содержащих его идеалов J_1 и J_2 алгебры R, то по выбору идеала P каждый из этих идеалов J_s, $s = 1, 2$, включает в себя элемент r_{j_s} для подходящего $j_s \geqslant 0$ и потому все элементы r_{j_s+i}, $i \geqslant 0$. Отсюда следует, что $r_{j''} \in P = J_1 \cap J_2$ для любого $j'' \geqslant \max\{j_1, j_2\}$, но $P \cap \{r_i\}_{i=0}^{\infty} = \varnothing$?! Таким образом, найденный нами идеал P обладает всеми необходимыми свойствами: он является G'-первичным и не содержит элемента $r_0 = r$.

Сказанное означает, что G'-первичный радикал $\mathrm{Rad}_{G'}(R)$ и наименьший G'-полупервичный идеал $\hat{B}_{G'}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ не только содержат множества всех её строго G'-разрешимых, ${G'}^{(\mathrm{sub})}$-разрешимых и ${G'}^{(\mathrm{id})}$-разрешимых элементов, но и сами входят в эти множества, а потому совпадают с ними. Следовательно, множества всех сильно G-разрешимых, $G^{(\mathrm{sub})}$-разрешимых и $G^{(\mathrm{id})}$-разрешимых элементов алгебры R равны друг с другу и пересечению всех её идеалов $\mathrm{Rad}_{G'}(R) = \hat{B}_{G'}(R)$, $G' \in \mathcal{S}_G$. Более того, так как множество всех сильно $G^{(\mathrm{id})}$-разрешимых элементов алгебры R является пересечением множеств всех её сильно $\{g^{(\mathrm{id})}\}$-разрешимых элементов, где g пробегает все элементы системы G (см. выше), оно и совпадающие с ним множества всех сильно G-разрешимых и $G^{(\mathrm{sub})}$-разрешимых элементов алгебры R равны также пересечению всех идеалов $\mathrm{Rad}_{\{g\}}(R) = \hat{B}_{\{g\}}(R)$, $g \in G$, этой алгебры.

Поскольку каждое отображение из системы G перестановочно с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$, отображение u_G также обладает этим свойством и для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, её идеала I и элемента r из I

$$u_G^{(\mathrm{id})}(R, (r)_R) = \Bigg(\bigcup_{g \in G} g(R, (r)_R)\Bigg)_R = \sum_{g \in R} g^{(\mathrm{id})}(R, (r)_R) \subseteq$$
$$\subseteq \sum_{g \in R} g^{(\mathrm{id})}(R, I) = \Bigg(\bigcup_{g \in G} g(R, I)\Bigg)_R = u_G^{(\mathrm{id})}(R, I).$$

Поэтому по доказанному $\{u_G\}$-первичный радикал $\mathrm{Rad}_{\{u_G\}}(R)$ произвольной алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ совпадает с её наименьшим $\{u_G\}$-полупервичным идеалом $\hat{B}_{\{u_G\}}(R)$ и множествами всех сильно $\{u_G\}$-разрешимых, $\{u_G^{(\mathrm{sub})}\}$-разрешимых и $\{u_G^{(\mathrm{id})}\}$-разрешимых элементов. Так как G'-полупервичные алгебры $\{u_G\}$-полупервичны для каждой упорядоченной последовательности $G' \in \mathcal{S}_G$ (последнее справедливо также для любой непустой подсистемы G' системы G), идеал $\mathrm{Rad}_{\{u_G\}}(R) = \hat{B}_{\{u_G\}}(R)$ алгебры R содержится в описанном выше пересечении всех её идеалов $\mathrm{Rad}_{G'}(R) = \hat{B}_{G'}(R)$, $G' \in \mathcal{S}_G$.

Пусть теперь для любой алгебры A из класса $\mathfrak{M}$ каждое непустое подмножество

$$G(A,a) = \bigl\{g \in G \mid g(A,(a)_A) \neq \{0\}\bigr\}, \quad a \in A,$$

содержит наибольший элемент относительно частичного порядка $\leqslant$. Покажем, что в этом случае для любых $\{u_G\}$-полупервичной алгебры R и её ненулевого элемента r можно построить бесконечную G'-цепочку ненулевых элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R с начальным элементом $r_0 = r$ для подходящей упорядоченной последовательности $G' \in \mathcal{S}_G$. Поскольку идеал $(r_0)_R$ алгебры R, порождённый её ненулевым элементом r_0, не является $\{u_G\}$-тривиальным, множество $G(R,r_0)$ не пусто и содержит наибольший элемент g_1 относительно частичного порядка $\leqslant$. По тем же причинам имеется элемент $0 \neq r_1 \in g_1(R,(r_0)_R)$, множество $G(R,r_1)$ не является пустым и обладает наибольшим элементом g_2 относительно частичного порядка $\leqslant$ и т. д. Продолжая данный процесс, мы получим бесконечную последовательность ненулевых элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R, где $r_{i+1} \in g_{i+1}(R,(r_i)_R)$ и g_{i+1} является наибольшим элементом множества $G(R,r_i)$ для всех $i \geqslant 0$. В то же время $r_{i+1} \in g_{i+1}(R,(r_i)_R) \subseteq (r_i)_R$ и $\{0\} \neq g_{i+2}(R,(r_{i+1})_R) \subseteq g_{i+2}(R,(r_i)_R)$ при любом $i \geqslant 0$ и, как следствие, отображение g_{i+2} принадлежит множеству $G(R,r_i)$ и $g_{i+2} \leqslant g_{i+1}$. Это означает также, что последовательность элементов $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ системы G упорядоченна, $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_G$, а последовательность ненулевых элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R является G'-цепочкой для $G' = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Поэтому в рассматриваемой ситуации $\{u_G\}$-полупервичные алгебры не содержат ненулевых сильно G-разрешимых элементов и, как следствие, ненулевых сильно $G^{(\mathrm{sub})}$-разрешимых и $G^{(\mathrm{id})}$-разрешимых элементов. Поскольку всякий гомоморфизм алгебры из класса $\mathfrak{M}$ отображает её сильно G-разрешимые, $G^{(\mathrm{sub})}$-разрешимые и $G^{(\mathrm{id})}$-разрешимые элементы в некоторые сильно G-разрешимые, $G^{(\mathrm{sub})}$-разрешимые и $G^{(\mathrm{id})}$-разрешимые элементы гомоморфного образа этой алгебры при его действии, мы получаем, что идеал $\mathrm{Rad}_{\{u_G\}}(R) = \hat{B}_{\{u_G\}}(R)$ любой алгебры R из $\mathfrak{M}$ не только является подмножеством равных между собой множеств всех её сильно G-разрешимых, $G^{(\mathrm{sub})}$-разрешимых и $G^{(\mathrm{id})}$-разрешимых элементов (см. выше), но и включает в себя данные множества, а значит, совпадает с ними. $\square$

Если отображения из системы G не зависят от первого аргумента и, значит, $g = \bar{g}'$ для всех $g \in G$ (см. выше), то вместо условия, наложенного на G в тео-

реме 2.1, можно использовать немного более грубое условие согласованности с включениями идеалов алгебр из класса $\mathfrak{M}$ для системы $G^{(\mathrm{id})}$, предполагающее выполнение включений

$$\big(g(A,I)\big)_A = \big(g(I,I)\big)_A = \big(\bar{g}(I)\big)_A \subseteq \big(g(A,A)\big)_A = \big(\bar{g}(A)\big)_A \qquad (g \in G,\ A \in \mathfrak{M},\ I \lhd A).$$

Действительно, достаточно заметить, что это условие позволяет вывести включение $r_{j'+1} \in P$ для всех $j' \geqslant \max\{k-1, j\}$ из доказательства теоремы 2.1 следующим образом:

$$r_{j'+1} \in \Big(\bar{g}_{j'+1}\big((r_{j'})_R\big)\Big)_R = \Big(\Big(\bar{g}_{j'+1}\big((r_{j'})_R\big)\Big)_J\Big)_R \subseteq$$
$$\subseteq \Big(\big(\bar{g}_{j'+1}(J)\big)_J\Big)_R = \big(\bar{g}_{j'+1}(J)\big)_R \subseteq \big(\bar{g}_k(J)\big)_R \subseteq P.$$

В случае если $\mathfrak{M} = \mathfrak{U}$ — универсальный класс всех алгебр над кольцом F и G — одноэлементная система, состоящая из отображения ${}_2g$, которое ставит в соответствие любым алгебре R над F и её идеалу I его квадрат ${}_2g(R,I) = I^2$, определения G-полупервичных и G-первичных алгебр и идеалов трансформируются в стандартные определения полупервичных и первичных алгебр и идеалов. Более того, понятия G-первичного радикала Rad_G и сильно G-разрешимого элемента (или, что то же самое, строго G'-разрешимого элемента для ${}_2g$-последовательности G', $\mathcal{S}_G = \{G'\}$) переходят в традиционные понятия первичного радикала Rad и строго разрешимого элемента, а теорема 2.1 в этих терминах принимает вид хорошо известного поэлементного описания первичного радикала (см. [6, предложение 4 на с. 192, теорема 6 на с. 193]). Поскольку при этом класс G-тривиальных алгебр $\mathfrak{A}_G$ равен классу алгебр с нулевым умножением $\mathfrak{A}$ над кольцом F, радикалы RG и RG^* совпадают с нижним ниль-радикалом $RN = \mathcal{T}_{\mathfrak{A}} = \mathcal{T}_{R\mathfrak{A}}$ и радикалом $RN^* = \mathcal{T}_{A\mathfrak{A}}$, понятия G-наднильпотентного и G-специального радикалов соответствуют привычным понятиям наднильпотентного и специального радикалов (в данной ситуации речь идёт об универсальном классе $\mathfrak{U}$, но эти понятия могут быть естественным образом сужены и на любой его замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов подкласс $\mathfrak{M}$).

Замечание 2.2. Если система G содержит отображение g, такое что $g(R,I) \subseteq I^2$ для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её идеала I, то G-первичные и G-полупервичные идеалы алгебр из $\mathfrak{M}$ являются их первичными и полупервичными идеалами соответственно.

Доказательство. Действительно, в этом случае для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её G-полупервичного идеала I существование идеала J алгебры R, связанного с I включениями $J^2 \subseteq I \subseteq J$, влечёт за собой включения $g(R,J) \subseteq J^2 \subseteq I$ и вместе с ними равенства $g(R/I, J/I) = \{0\}$ и $I = J$. Следовательно, G-полупервичные идеалы алгебры R являются её полупервичными

идеалами. Для завершения доказательства достаточно заметить, что G-первичные идеалы алгебр из класса $\mathfrak{M}$ являются их полупервичными и потому первичными идеалами (напомним, что первичные алгебры могут быть определены как полупервичные алгебры, в которых любые два ненулевых идеала имеют ненулевое пересечение). $\square$

Отдельный интерес представляет ситуация, когда имеется по меньшей мере одно перестановочное с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ отображение g, ставящее в соответствие каждой алгебре R из $\mathfrak{M}$ подмножество $g(R)$ её квадрата R^2, такое что для всякой алгебры R' из $\mathfrak{M}$, содержащей алгебру R в качестве идеала, идеал $\big(g(R)\big)_{R'}$ алгебры R', порождённый элементами $g(R)$, входит в R^2, $\big(g(R)\big)_{R'} \subseteq R^2$. В этом случае для любого ненулевого разрешимого идеала I алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ можно построить строго возрастающую цепочку идеалов $\{I_i \mid i = 0, \ldots, s\}$ алгебры R, где $I_s = I$, $I_{s-i} = \big(g(I_{s-i+1})\big)_R$, $i = 1, \ldots, s$, и $I_0 = \{0\}$ для некоторого $s \geqslant 1$, не превышающего ступень разрешимости идеала I, так как $I_{s-i} \subseteq I_{s-i+1}^2 \subseteq I^{(i)}$, $i = 1, \ldots, s$. Поэтому для такого отображения g и одноэлементной системы $G = \{g'\}$, где $g'(R, I) = g(I)$ для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её идеала I, ненулевые разрешимые идеалы алгебр из $\mathfrak{M}$ содержат ненулевые G-тривиальные идеалы и, как следствие, G-полупервичные алгебры не имеют ненулевых разрешимых идеалов. Более того, если для каждой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ существует $n = n(R) \geqslant 1$, при котором $R^{(n)} \subseteq \big(g(R)\big)_R \subseteq R^2$, то G-тривиальные алгебры являются разрешимыми, и потому G-полупервичные алгебры могут быть определены как алгебры из $\mathfrak{M}$, в которых нет ненулевых разрешимых идеалов. Отсюда также следует, что наименьший G-полупервичный идеал $\hat{B}_G(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ является наименьшим среди её идеалов, фактор-алгебры по которым не содержат ненулевых разрешимых идеалов.

Сказанное здесь имеет непосредственное отношение к тем классам $\mathfrak{M}$, в которых квадраты идеалов принадлежащих им алгебр являются их идеалами. Используя в этом случае в качестве отображения g отображение $\overline{{}_2g}$ (см. выше), мы сразу получаем, что первичный радикал $\mathrm{Rad}(R) = \mathrm{Rad}_G(R) = \hat{B}_G(R)$, $G = \{{}_2g\}$, произвольной алгебры R из такого класса $\mathfrak{M}$ является наименьшим из идеалов этой алгебры, в фактор-алгебрах по которым нет ненулевых разрешимых идеалов (он совпадает также с наименьшим из её идеалов, фактор-алгебры по которым не имеют ненулевых нильпотентных идеалов). Последнее справедливо, в частности, для ассоциативных, альтернативных (см. [6, предложение 1 на с. 140]) и лиевских алгебр над кольцом F. В то же время мы не можем утверждать, что это верно для линейных йордановых алгебр над кольцом F, поскольку квадраты идеалов этих алгебр не обязаны быть их идеалами. Тем не менее третьи степени идеалов линейных йордановых алгебр над кольцом F с $1/2$ являются их идеалами и условия разрешимости (квадратичной разрешимости) и кубической разрешимости для таких алгебр являются равносильными (см. [6, леммы 3 и 4 на с. 109]). Следовательно, линейные йордановы алгеб-

ры над кольцом F с $1/2$, не имеющие ненулевых идеалов с нулевыми третьими степенями, не содержат ненулевых разрешимых идеалов. Поэтому, заменив отображение ${}_2g$ отображением ${}_3g$, ставящим в соответствие любым алгебре и её идеалу третью степень этого идеала, мы можем определить *кубически первичный радикал* $\mathrm{Rad}_3 = \mathrm{Rad}_G = \hat{B}_G$ для одноэлементной системы $G = \{{}_3g\}$, значение которого на любой линейной йордановой алгебре J над кольцом F с $1/2$ совпадает с наименьшим из её идеалов, фактор-алгебры по которым не имеют ненулевых разрешимых идеалов (и наименьшим среди идеалов алгебры J, в фактор-алгебрах по которым нет ненулевых нильпотентных идеалов). Стоит отметить, что линейная йорданова алгебра J над кольцом F является *кубически первичной* (G-первичной относительно системы $G = \{{}_3g\}$), если и только если для любых двух ненулевых идеалов A и B алгебры J её подмножество (идеал в случае $1/2 \in F$) $(AB)B + A(B^2)$ отлично от нуля. Кроме того, согласно [11] любая специальная йорданова алгебра J над кольцом F с $1/2$ имеет равные первичный и кубически первичный радикалы $\mathrm{Rad}(J) = \mathrm{Rad}_3(J)$.

По аналогии с первичным и кубически первичным радикалами можно построить *k-первичный радикал* Rad_k и *(m)-первичный радикал* $\mathrm{Rad}_{(m)}$ для всех $k \geqslant 2$ и $m \geqslant 1$, используя одноэлементные системы $\{{}_kg\}$ и $\{{}_{(m)}g\}$, где отображения ${}_kg$ и ${}_{(m)}g$ ставят в соответствие любым алгебре R над кольцом F и её идеалу I его k-ю степень ${}_kg(R, I) = I^k$ и m-й коммутант ${}_{(m)}g(R, I) = I^{(m)}$. Эти первичные радикалы подпадают под описание из теоремы 2.1, и их значения на произвольной алгебре R над кольцом F формируют неубывающие цепочки идеалов алгебры R, начинающиеся с её первичного радикала,

$$\mathrm{Rad}(R) = \mathrm{Rad}_2(R) \subseteq \mathrm{Rad}_3(R) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Rad}_k(R) \subseteq \ldots,$$
$$\mathrm{Rad}(R) = \mathrm{Rad}_{(1)}(R) \subseteq \mathrm{Rad}_{(2)}(R) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{Rad}_{(m)}(R) \subseteq \ldots,$$

причём $\mathrm{Rad}_{2^m}(R) \subseteq \mathrm{Rad}_{(m)}(R)$, $m \geqslant 1$, что следует из включений $A^{(m)} \subseteq A^{2^m}$, $m \geqslant 1$, выполняющихся во всякой алгебре A. Сходным образом можно было бы использовать любые другие варианты степенных отображений (включая отображения, ставящие в соответствие алгебрам над кольцом F и их идеалам левонормированные или правонормированные степени этих идеалов, и т. п.) или отображения, которые ставят в соответствие алгебрам над кольцом F и их идеалам множества значений на этих идеалах элементов некоторых фиксированных подмножеств свободной счётно порождённой неассоциативной алгебры $F\langle X\rangle$ над F. Весьма интересные варианты подобных конструкций могут быть получены на основе дополнительных операций умножения. К примеру, мы можем превратить любую алгебру R над кольцом F в алгебру $R^{(\circ)}$ с новой операцией умножения $\circ \in \{[\,,\,], \cdot, \circ_+\}$, где $[a, b] = ab - ba$, $a \circ b = 1/2(ab + ba)$ (в случае $1/2 \in F$) и $a \circ_+ b = ab + ba$ для всех $a, b \in R$, и рассмотреть вместо отображений ${}_kg$ и ${}_{(m)}g$ в предыдущем рассуждении отображения ${}_kg^{(\circ)}$ и ${}_{(m)}g^{(\circ)}$, которые ставят в соответствие алгебре R и её идеалу I его k-ю степень ${}_kg^{(\circ)}(R, I) = {}_kg\big(R^{(\circ)}, I^{(\circ)}\big) = \big(I^{(\circ)}\big)^k$ и m-й коммутант ${}_{(m)}g^{(\circ)}(R, I) = {}_{(m)}g\big(R^{(\circ)}, I^{(\circ)}\big) = \big(I^{(\circ)}\big)^{(m)}$ как алгебры $I^{(\circ)}$.

В любом случае мы можем утверждать, что теорема 2.1 предоставляет достаточно широкий ассортимент возможностей для построения отображений, подобных первичному радикалу. Можно предложить также ещё одну модернизацию этого утверждения.

Пусть H — непустая система отображений, такая что каждое отображение h из системы H ставит в соответствие любым алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ и её элементу r некоторое подмножество $h(R,r)$ идеала $(r)_R$ алгебры R, порождённого r. Как и прежде, мы будем предполагать, что отображение h перестановочно с гомоморфизмами алгебры R, т. е. $\varphi\bigl(h(R,r)\bigr) = h\bigl(\varphi(R),\varphi(r)\bigr)$ для произвольных гомоморфизма $\varphi\colon R \to R'$ алгебр R и R' и элемента r из R (алгебра R' над кольцом F не обязательно принадлежит классу $\mathfrak{M}$). Для каждого отображения h из системы H определим также отображение

$$\tilde{h}(R,I) = \bigcup_{r\in I} h(R,r) \quad (R \in \mathfrak{M},\ I \lhd R)$$

и обозначим через $\tilde{H}$ систему, состоящую из всех отображений $\tilde{h}$, $h \in H$. Отображения из системы $\tilde{H}$ перестановочны с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$, и следовательно, для этой системы применима принятая нами ранее терминология.

Назовём элемент r алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ *абсолютным делителем нуля относительно системы* H или просто *абсолютным* H*-делителем нуля*, если $h(R,r) = \{0\}$ для некоторого отображения h из системы H. Будем называть алгебры из класса $\mathfrak{M}$, не содержащие ненулевых абсолютных H-делителей нуля, H*-невырожденными алгебрами* и H-невырожденные алгебры, в которых любые два ненулевых идеала имеют ненулевое пересечение, — *сильно* H*-первичными алгебрами*. Идеал P алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, фактор-алгебра R/P по которому является H-невырожденной (сильно H-первичной), мы будем называть её H*-невырожденным* (*сильно* H*-первичным*) *идеалом*.

Перестановочность отображений из системы H с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ гарантирует согласованность с ними отображения M_H этого класса в себя, ставящего в соответствие каждой алгебре R из $\mathfrak{M}$ её идеал $M_H(R)$, порождённый всеми абсолютными H-делителями нуля данной алгебры. Следовательно, в силу замечания 1.1 отображения $\{M_{H\alpha} \mid \alpha \geqslant 0\}$ и $\hat{M}_H$ класса $\mathfrak{M}$ в себя, построенные на основе его согласованного с гомоморфизмами алгебр из $\mathfrak{M}$ отображения $M_H = M_{H1}$, также обладают этим свойством. Отображение $\hat{M}_H$ ставит в соответствие каждой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ объединение неубывающей цепочки её идеалов $\{M_{H\alpha}(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$, стабилизирующейся на некотором шаге σ,

$$\hat{M}_H(R) = M_{H\sigma}(R) = \bigcup_{\alpha\geqslant 0} M_{H\alpha}(R),$$

которое совпадает с наименьшим из H-невырожденных идеалов алгебры R. Мы будем называть отображение $\hat{M}_H$ класса $\mathfrak{M}$ *сильно* H*-вырожденным радикалом*.

Определим частичный порядок $\leqslant$ на множестве H по следующему правилу: $h \leqslant h'$, $h, h' \in H$, если и только если $h(R,r) \subseteq h'(R,r)$ для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её элемента r.

Пусть $H' = \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов системы H, упорядоченная в том смысле, что $h_k \geqslant h_{k+1}$ при всех $k \geqslant 1$. Любую последовательность элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, каждый элемент r_{j+1}, $j \geqslant 0$, которой принадлежит множеству $h_{j+1}(R, r_j)$, мы будем называть *H'-энгелевой цепочкой*. Если H'-энгелева цепочка $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ содержит нулевой элемент $r_k = 0$ для некоторого $k \geqslant 0$, то все следующие за ним элементы этой цепочки равны нулю, $r_i = 0$, $i > k$, так как $h(R,0) \subseteq (0)_R = \{0\}$ для каждого отображения h из системы H, и потому она стабилизируется нулём на шаге, меньшем или равном k. Ясно также, что всякий гомоморфизм $\varphi\colon R \to R'$ алгебр R и R' отображает H'-энгелевы цепочки элементов алгебры R в некоторые H'-энгелевы цепочки элементов её гомоморфного образа $\varphi(R)$ при действии φ. Кроме того, каждая H'-энгелева цепочка элементов $\{r'_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры $\varphi(R)$ совпадает с образом в $\varphi(R)$ подходящей H'-энгелевой цепочки $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R. Действительно, в качестве элемента r_0 можно взять произвольный прообраз элемента r'_0 в алгебре R, $r'_0 = \varphi(r_0)$. Если элементы $r_0, \ldots, r_k$ алгебры R, удовлетворяющие условиям построения H'-энгелевой цепочки и равенствам $\varphi(r_i) = r'_i$, $i = 0, \ldots, k$, уже найдены для некоторого $k \geqslant 0$, то

$$r'_{k+1} \in h_{k+1}(\varphi(R), r'_k) = h_{k+1}\big(\varphi(R), \varphi(r_k)\big) = \varphi\big(h_{k+1}(R, r_k)\big),$$

и потому в качестве r_{k+1} можно взять любой элемент $r_{k+1} \in h_{k+1}(R, r_k)$, для которого $\varphi(r_{k+1}) = r'_{k+1}$. Значит, требуемая H'-энгелева цепочка элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$, такая что $\varphi(r_i) = r'_i$, $i \geqslant 0$, может быть построена.

Назовём элемент r алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ *строго H'-энгелевым элементом*, если каждая H'-энгелева цепочка её элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ с $r_0 = r$ стабилизируется нулём на некотором шаге. Элементы алгебры R, являющиеся строго H'-энгелевыми для любой упорядоченной последовательности элементов H' системы H, мы будем называть *сильно H-энгелевыми*. Сильно H-энгелевы элементы можно определить также как элементы, которые являются сильно $\{h\}$-энгелевыми для каждого элемента h системы H (строго H'-энгелевыми для всех h-последовательностей $H' = \{h_k = h\}_{k=1}^{\infty}$, $h \in H$). Более того, в случае если частично упорядоченное множество $(H, \leqslant)$ содержит наибольший элемент h, сильно H-энгелевы элементы могут быть определены и как сильно $\{h\}$-энгелевы элементы.

Согласно отмеченному ранее любой гомоморфизм алгебры из класса $\mathfrak{M}$ отображает её строго H'-энгелевы (сильно H-энгелевы) элементы в некоторые строго H'-энгелевы (сильно H-энгелевы) элементы гомоморфного образа этой алгебры при действии данного гомоморфизма.

Стоит отметить и то, что переход от исходной системы H к системе отображений $H^{(\mathrm{sub})} = \big\{h^{(\mathrm{sub})} \mid h \in H\big\}$ или $H^{(\mathrm{id})} = \big\{h^{(\mathrm{id})} \mid h \in H\big\}$, где

$$h^{(\mathrm{sub})}\colon (R,r) \mapsto \langle h(R,r)\rangle, \quad h^{(\mathrm{id})}\colon (R,r) \mapsto \big(h(R,r)\big)_R \quad (h \in H,\ R \in \mathfrak{M},\ r \in R),$$

не внесёт изменений в понятия абсолютного H-делителя нуля, H-невырожденных и сильно H-первичных алгебр и идеалов, но изменит определения H'-энгелевой цепочки, строго H'-энгелева и сильно H-энгелева элементов. При этом, как нетрудно заметить, строго $H'^{(\mathrm{id})}$-энгелевы элементы строго $H'^{(\mathrm{sub})}$-энгелевы, а строго $H'^{(\mathrm{sub})}$-энгелевы элементы — строго H'-энгелевы, где $H'^{(\mathrm{sub})} = \{h_k^{(\mathrm{sub})}\}_{k=1}^{\infty}$ и $H'^{(\mathrm{id})} = \{h_k^{(\mathrm{id})}\}_{k=1}^{\infty}$ — упорядоченные последовательности элементов систем $H^{(\mathrm{sub})}$ и $H^{(\mathrm{id})}$, соответствующие последовательности $H' = \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$. Аналогичный вывод верен также для сильно H-энгелевых, $H^{(\mathrm{sub})}$-энгелевых и $H^{(\mathrm{id})}$-энгелевых элементов.

Теорема 2.3. *Пусть $H' = \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ — упорядоченная последовательность элементов системы H, такая что для любых алгебры A из класса $\mathfrak{M}$ и её абсолютного H'-делителя нуля a элементы порождённого им идеала $(a)_A$ этой алгебры являются её строго H'-энгелевыми элементами. Тогда сильно H'-вырожденный радикал $\hat{M}_{H'}(R)$ произвольной алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ равен пересечению всех сильно H'-первичных идеалов алгебры R и множеству всех её строго H'-энгелевых элементов. Более того, если отображение $\hat{M}_{H'}$ идемпотентно, $\hat{M}_{H'}^2 = \hat{M}_{H'}$ (в частности, это имеет место в ситуации, когда каждое отображение h_k, $k \geqslant 1$, из системы H' слабо согласовано с включениями идеалов алгебр из класса $\mathfrak{M}$ в том смысле, что $h_k(I, a) \subseteq h_k(A, a)$ для любых алгебры A из класса $\mathfrak{M}$, её идеала I и его элемента a), и класс H'-невырожденных алгебр замкнут относительно взятия идеалов, то $\hat{M}_{H'}$ является $\tilde{H}'$-специальным радикалом на классе $\mathfrak{M}$. Следовательно, в случае если для любых алгебры A из класса $\mathfrak{M}$ и её абсолютного H-делителя нуля a элементы идеала $(a)_A$ являются сильно H-энгелевыми элементами алгебры A, сильно H-вырожденный радикал $\hat{M}_H(R)$ произвольной алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ равен пересечениям всех сильно H-первичных идеалов, всех сильно H'-вырожденных радикалов $\hat{M}_{H'}(R)$, $H' \in \mathcal{S}_H$, где $\mathcal{S}_H$ — множество всех упорядоченных последовательностей элементов системы H, и всех сильно $\{h\}$-вырожденных радикалов $\hat{M}_{\{h\}}(R)$, $h \in H$, алгебры R и совпадает с множеством всех её сильно H-энгелевых элементов. Если в дополнение к этому отображение $\hat{M}_H$ идемпотентно, $\hat{M}_H^2 = \hat{M}_H$, и класс H-невырожденных алгебр замкнут относительно взятия идеалов, то $\hat{M}_H$ является $\tilde{H}$-специальным радикалом на классе $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Говоря здесь об абсолютных H'-делителях нуля, H'-невырожденных, сильно H'-первичных алгебрах и идеалах и сильно H'-вырожденном радикале применительно к последовательности H', мы имеем в виду соответствующие понятия, определённые для H' как для системы отображений.

Прежде всего необходимо отметить, что H'-невырожденные алгебры не содержат ненулевых строго H'-энгелевых элементов. Действительно, для каждого ненулевого элемента r такой алгебры R любое из её подмножеств $h_k(R, r)$, $k \geqslant 1$, включает в себя по меньшей мере один ненулевой элемент. Поэтому можно положить $r_0 = r$ и выбрать произвольные $0 \neq r_1 \in h_1(R, r_0)$, $0 \neq r_2 \in h_2(R, r_1)$ и т. д. Продолжая этот процесс, мы получим в результа-

те бесконечную H'-энгелеву цепочку ненулевых элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R. Следовательно, H'-невырожденные алгебры не имеют ненулевых строго H'-энгелевых элементов.

Поскольку всякий гомоморфизм алгебры из класса $\mathfrak{M}$ отображает её строго H'-энгелевы элементы в некоторые строго H'-энгелевы элементы гомоморфного образа этой алгебры при его действии, из сделанного нами наблюдения следует, что наименьший H'-невырожденный идеал $\hat{M}_{H'}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ содержит множество всех её строго H'-энгелевых элементов. Понятно также, что идеал $\hat{M}_{H'}(R)$ равен пересечению всех H'-невырожденных идеалов алгебры R и входит в пересечение всех её сильно H'-первичных идеалов.

Теперь необходимо показать, что любой элемент r алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, не являющийся её строго H'-энгелевым элементом, не содержится в по меньшей мере одном из сильно H'-первичных идеалов алгебры R. Выбор элемента r подразумевает наличие в алгебре R бесконечной H'-энгелевой цепочки ненулевых элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$ с начальным элементом $r_0 = r$. Обозначим через $\mathcal{N}$ множество всех идеалов алгебры R, имеющих пустые пересечения с цепочкой $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$. Включение в множество $\mathcal{N}$ нулевого идеала $\{0\}$ делает его непустым. Частично упорядоченное по включению множество $\mathcal{N}$ содержит также объединение $I = \bigcup\limits_{a\in A} I_a$ любого своего упорядоченного подмножества $\{I_a \mid a \in A\}$ и потому является индуктивным. Последнее следует из того, что в противном случае идеал I должен содержать какой-то элемент r_i, $i \geqslant 0$, а значит, r_i входит в некоторый идеал I_a, $a \in A$, но $I_a \in \mathcal{N}$ и $I_a \cap \{r_i\}_{i=0}^{\infty} = \varnothing$?! Обозначим через P один из максимальных элементов индуктивного множества $\mathcal{N}$, существование которого нам гарантирует лемма Цорна. Допустим, что идеал P алгебры R не является H'-невырожденным, т. е. фактор-алгебра R/P обладает ненулевым абсолютным H'-делителем нуля $a + P$ для некоторого элемента $a \in R \setminus P$. Поскольку идеал $J = P + (a)_R$ алгебры R строго содержит её идеал P, в него входит как минимум один элемент r_j, $j \geqslant 0$, и вместе с ним все элементы r_i, $i \geqslant j$ ($r_{l+1} \in h_{l+1}(R, r_l) \subseteq (r_l)_R$, $l \geqslant 0$). Элементы $\{a_l = r_{j+l}\}_{l=0}^{\infty}$ связаны между собой соотношениями

$$a_{l+1} = r_{j+l+1} \in h_{j+l+1}(R, r_{j+l}) \subseteq h_{l+1}(R, r_{j+l}) = h_{l+1}(R, a_l) \quad (l \geqslant 0)$$

и потому составляют H'-энгелеву цепочку. Образы $\{a_i + P\}_{i=0}^{\infty}$ элементов этой цепочки в фактор-алгебре R/P формируют H'-энгелеву цепочку последней, входящую в её идеал $(a + P)_{R/P} = J/P$, который порождает абсолютный H'-делитель нуля $a+P$. Так как по условию элементы идеала $(a+P)_{R/P}$ являются строго H'-энгелевыми элементами алгебры R/P, H'-энгелева цепочка $\{a_i + P\}_{i=0}^{\infty}$ должна стабилизироваться нулём на каком-то шаге $k \geqslant 0$, а значит, $a_i + P = P$, $a_i = r_{j+i} \in P$ при всех $i \geqslant k$, что по выбору идеала P невозможно, $P \in \mathcal{N}$ и $P \cap \{r_i\}_{i=0}^{\infty} = \varnothing$. Отсюда следует, что идеал P является H'-невырожденным. Более того, он также сильно H'-первичен. Действительно, если бы имелось представление идеала P в виде пересечения $P = J_1 \cap J_2$ строго содержащих его идеалов J_1 и J_2 алгебры R, то по выбору P каждый идеал J_s, $s = 1, 2$, включал

бы в себя элемент r_{j_s} для подходящего $j_s \geqslant 0$ и, более того, все элементы r_{j_s+i}, $i \geqslant 0$. Это в свою очередь влечёт за собой включение $r_{j'} \in P = J_1 \cap J_2$ для любого $j' \geqslant \max\{j_1, j_2\}$, которое противоречит условию $P \cap \{r_i\}_{i=0}^{\infty} = \varnothing$. Таким образом, существование сильно H'-первичного идеала алгебры R, не содержащего её элемент $r_0 = r$, установлено.

Из сказанного следует, что пересечение всех сильно H'-первичных идеалов любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ не только содержит идеал $\hat{M}_{H'}(R)$ алгебры R и вместе с ним множество всех её строго H'-энгелевых элементов, но и входит в данное множество, а потому совпадает с ним.

Если отображения из системы H' слабо согласованы с включениями идеалов алгебр из класса $\mathfrak{M}$, то для произвольных алгебры R из $\mathfrak{M}$ и идеала I этой алгебры H'-энгелевы цепочки элементов идеала I являются H'-энгелевыми цепочками алгебры R и, как следствие, строго H'-энгелевы элементы алгебры R, входящие в идеал I, являются его строго H'-энгелевыми элементами. Поэтому в данном случае отображение $\hat{M}_{H'}$ класса $\mathfrak{M}$ в себя идемпотентно, $\hat{M}_{H'} = \hat{M}_{H'}^2$.

В силу замечания 1.3 в ситуации, когда отображение $\hat{M}_{H'}$ является идемпотентным, необходимым и достаточным условием того, что это согласованное с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ отображение определяет радикал в смысле Куроша—Амицура на $\mathfrak{M}$, служит включение в идеал $\hat{M}_{H'}(R)$ любой алгебры R из $\mathfrak{M}$ всех её идеалов I, равных своим идеалам $\hat{M}_{H'}(I)$. Последнее заведомо выполняется в случае, если класс H'-невырожденных алгебр замкнут относительно взятия идеалов, так как тогда каждый идеал I алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, такой что $I = \hat{M}_{H'}(I)$, должен иметь нулевой образ в её H'-невырожденной фактор-алгебре $R/\hat{M}_{H'}(R)$ по идеалу $\hat{M}_{H'}(R)$,

$$\begin{aligned}&\big(I + \hat{M}_{H'}(R)\big)/\hat{M}_{H'}(R) = \\ &\qquad = \hat{M}_{H'}\Big(\big(I + \hat{M}_{H'}(R)\big)/\hat{M}_{H'}(R)\Big) = \hat{M}_{H'}\big(R/\hat{M}_{H'}(R)\big) = \{0\},\end{aligned}$$

а значит, входит в $\hat{M}_{H'}(R)$, $I \subseteq \hat{M}_{H'}(R)$. Более того, в этом случае H'-невырожденные алгебры не содержат ненулевых $\tilde{H}'$-тривиальных идеалов и потому $\tilde{H}'$-полупервичны, что в свою очередь влечёт за собой $\tilde{H}'$-специальность радикала $\hat{M}_{H'}$.

Предположим теперь, что для любых алгебры A из класса $\mathfrak{M}$ и её абсолютного H-делителя нуля a элементы порождённого им идеала $(a)_A$ алгебры A являются её сильно H-энгелевыми элементами, т. е. они строго H'-энгелевы для всех последовательностей $H' \in \mathcal{S}_H$ или, что равносильно, сильно $\{h\}$-энгелевы для каждого элемента $h \in H$. Тогда по доказанному множество всех сильно H-энгелевых элементов произвольной алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ совпадает с пересечениями множеств всех строго H'-энгелевых элементов $\hat{M}_{H'}(R)$, $H' \in \mathcal{S}_H$, и всех сильно $\{h\}$-энгелевых элементов $\hat{M}_{\{h\}}(R)$, $h \in H$, этой алгебры. Как уже отмечалось в начале доказательства, H-невырожденные алгебры не содержат ненулевых строго H'-энгелевых элементов для любой последовательности

$H' \in \mathcal{S}_H$, и следовательно, множество всех сильно H-энгелевых элементов алгебры R входит в её сильно H-вырожденный радикал $\hat{M}_H(R)$ и вместе с ним в пересечение всех её сильно H-первичных идеалов (здесь мы пользуемся тем, что всякий гомоморфизм алгебры из класса $\mathfrak{M}$ отображает её сильно H-энгелевы элементы в некоторые сильно H-энгелевы элементы гомоморфного образа этой алгебры при его действии). Согласно отмеченному ранее каждый элемент алгебры R, не являющийся строго H'-энгелевым для по меньшей мере одной последовательности $H' \in \mathcal{S}_H$, не принадлежит некоторому её сильно H-первичному идеалу. Следовательно, пересечение всех сильно H-первичных идеалов алгебры R совпадает с её сильно H-вырожденным радикалом $\hat{M}_H(R)$ и множеством всех её сильно H-энгелевых элементов.

Обоснование радикальных свойств отображения $\hat{M}_H$ в случае, когда оно является идемпотентным и класс H-невырожденных алгебр замкнут относительно взятия идеалов, повторяет соответствующее рассуждение для отображения $\hat{M}_{H'}$. $\square$

По понятным причинам сказанное заметно упрощается для любых одноэлементной системы $H = \{h\}$ и системы H, содержащей наибольший элемент относительно частичного порядка $\leqslant$. В частности, применительно к линейным йордановым алгебрам над кольцом F с $1/2$ и отображению h_U, ставящему в соответствие линейной йордановой алгебре J над F и её элементу x подмножество

$$h_U(J,x) = U_x J = \{x, J, x\} = \{U_x z = 2x \cdot (x \cdot z) - x^2 \cdot z \mid z \in J\},$$

и к определённым над любым кольцом F правоальтернативным и лиевским алгебрам и отображениям h_U (в силу известной общности йордановой и правоальтернативной ситуаций мы используем для них одинаковые обозначения) и h_S, ставящим в соответствие правоальтернативной алгебре R над F и её элементу x подмножество

$$h_U(R,x) = U_x R = \{U_x r = (xr)x \mid r \in R\},$$

где U_x — оператор квадратичного умножения на элемент x, и алгебре Ли L над F и её элементу x подмножество

$$h_S(L,x) = \Big\{ \big[x,[x,a]\big],\ \Big[x,\big[b,[x,c]\big]\Big] \mid a,b,c \in L \Big\},$$

понятия абсолютного H-делителя нуля, H-невырожденных и сильно H-первичных алгебр и идеалов и сильно H-вырожденного радикала представляют собой привычные для линейных йордановых, правоальтернативных и лиевских алгебр понятия абсолютного делителя нуля и оболочки тонкого сэндвича, невырожденных и сильно первичных алгебр и идеалов, радикала Маккриммона Mc (в правоальтернативных алгебрах он называется также радикалом Слинько—Маккриммона) и радикала Кострикина K соответственно.

Теорема 2.3 содержит в себе известную схему получения поэлементного описания радикала Маккриммона Mc на классах линейных йордановых и правоальтернативных алгебр и доказательства его специальности на этих классах. Сходным образом в рамках теорем 2 и 3 из [15] описывается и радикал Маккриммона Mc квадратичных йордановых алгебр над любым кольцом и устанавливается его специальность (для соответствующих аналогов понятий радикала и специального радикала, используемых в квадратичных йордановых алгебрах, которые не являются алгебрами в обычном смысле). Поэтому линейные йордановы варианты данных выводов могут рассматриваться в качестве их спецификации на случай основного кольца с $1/2$ (см. также более общие результаты Е. И. Зельманова для йордановых систем в [7]), а их правоальтернативные аналоги могут быть выведены с помощью естественного соответствия между невырожденными радикалами квадратичных йордановых и правоальтернативных алгебр (см. теорему 5 и её применение к радикалам Маккриммона в [16]).

Кроме того, теорема 2.3 включает в себя также подход к получению поэлементной характеризации радикала Кострикина K алгебр Ли над полем нулевой характеристики и обоснованию его специальности на данном классе, реализованный в [13]. Заметим, что при этом приходится оперировать с некоторой упорядоченной последовательностью отображений $H = \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, в отличие от йордановых и правоальтернативных алгебр, в которых можно ограничиться использованием одноэлементной системы $H = \{h_U\}$.

Нашей следующей целью является исследование ряда схем построения специальных и подобных специальным локальных радикалов. Пусть S — такое абстрактное свойство непустых подмножеств алгебр из основного замкнутого относительно взятия идеалов и гомоморфных образов класса $\mathfrak{M}$, что для произвольной алгебры R из класса $\mathfrak{M}$

1) состоящее из нуля подмножество (нулевое подмножество) $\{0\}$ алгебры R является её S-подмножеством (подмножеством со свойством S) и каждая ненулевая конечно порождённая подалгебра алгебры R содержит по меньшей мере одно её ненулевое S-подмножество;
2) всякий гомоморфизм φ алгебры R отображает множество $M_S(R)$ всех S-подмножеств этой алгебры в множество $M_S\big(\varphi(R)\big)$ всех S-подмножеств её гомоморфного образа $\varphi(R)$ при его действии, $\varphi\big(M_S(R)\big) = \{\varphi(A) \mid A \in M_S(R)\}$; более того, данное свойство наследуется всеми конечно порождёнными подалгебрами алгебры R в том смысле, что для каждой такой подалгебры B
$$\varphi\big(M_S(B)\big) = \big\{\varphi(A) \mid A \in M_S(B) = \{A \in M_S(R) \mid A \subseteq B\}\big\} = \\ = M_S\big(\varphi(B)\big) = \big\{A' \in M_S\big(\varphi(R)\big) \mid A' \subseteq \varphi(B)\big\};$$
3) S-подмножества идеалов алгебры R являются её S-подмножествами;
4) каждое S-подмножество алгебры R является S-подмножеством идеала алгебры R, порождённого элементами этого S-подмножества, а значит, является также S-подмножеством всех содержащих его идеалов алгебры R.

Пусть G_S — непустая система отображений, каждый элемент которой g ставит в соответствие любым алгебре R из $\mathfrak{M}$ и её S-подмножеству A некоторое подмножество $g(R,A)$ алгебры R, причём $g(R,\{0\})=\{0\}$ и предполагается, что отображение g перестановочно с гомоморфизмами алгебры R, т. е. $\varphi\bigl(g(R,A')\bigr) = g\bigl(\varphi(R),\varphi(A')\bigr)$ для произвольных гомоморфизма $\varphi\colon R\to R'$ алгебр R и R' и S-подмножества A' алгебры R (алгебра R' над кольцом F может не принадлежать $\mathfrak{M}$). Стоит отметить, что условие $g(R,\{0\})=\{0\}$ равносильно включению $g(R,A)\subseteq (A)_R$ для всех S-подмножеств A алгебры R, поскольку

$$\varphi_{(A)_R}\bigl(g(R,A)\bigr) = g\bigl(\varphi_{(A)_R}(R),\varphi_{(A)_R}(A)\bigr) = g(\varphi_{(A)_R}(R),\{0\}) = \{0\},$$

где $\varphi_{(A)_R}\colon R\to R/(A)_R$ — канонический эпиморфизм алгебры R на её фактор-алгебру $R/(A)_R$ по идеалу $(A)_R$. На основе системы G_S можно определить также систему перестановочных с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ отображений $\tilde{G}_S=\{\tilde{g}\mid g\in G_S\}$, каждое из которых действует на любых алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ и её идеале I по правилу

$$\tilde{g}(R,I) = \bigcup_{A\in M_S(I)} g(R,A).$$

По аналогии с предыдущим снабдим множество G_S отношением частичного порядка $\leqslant$, полагая $g\leqslant g'$, $g,g'\in G$, если и только если $g(R,A)\subseteq g'(R,A)$ для произвольных алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её S-подмножества A.

Пусть $G'_S=\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность элементов системы G_S, упорядоченная в том смысле, что $g_k\geqslant g_{k+1}$ для всех $k\geqslant 1$. Любую последовательность S-подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, в которой каждое S-подмножество A_{j+1}, $j\geqslant 0$, входит в подалгебру $\langle B_{j+1}\rangle$, порождённую элементами некоторого конечного подмножества B_{j+1} множества $g_{j+1}(R,A_j)$, мы будем называть *G'_S-цепочкой*. Если какой-то элемент A_k, $k\geqslant 0$, такой G'_S-цепочки содержит один единственный нулевой элемент 0, то все её элементы A_i, $i>k$, состоят из одного нулевого элемента 0 и, как следствие, эта цепочка стабилизируется нулевым подмножеством $\{0\}$ на некотором шаге, меньшем или равном k (напомним, что $g(R,\{0\})=\{0\}$ для всех отображений g из системы G_S). Понятно, что всякий гомоморфизм $\varphi\colon R\to R'$ алгебр R и R' отображает G'_S-цепочки подмножеств алгебры R в некоторые G'_S-цепочки подмножеств её гомоморфного образа $\varphi(R)$ при действии φ. С другой стороны, для каждой G'_S-цепочки подмножеств $\{A'_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры $\varphi(R)$ обязательно найдётся G'_S-цепочка подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R, такая что $\varphi(A_i)=A'_i$ при всех $i\geqslant 0$. Действительно, в соответствии со вторым из наложенных на свойство S условий любое S-подмножество алгебры $\varphi(R)$ совпадает с образом в ней одного из S-подмножеств алгебры R, $\varphi\bigl(M_S(R)\bigr)=M_S\bigl(\varphi(R)\bigr)$. В частности, $A'_0=\varphi(A_0)$ для подходящего $A_0\in M_S(R)$. Предположим, что для некоторого $k\geqslant 0$ подмножества $A_0,\dots,A_k\in M_S(R)$, удовлетворяющие условиям построения G'_S-цепочки и равенствам $\varphi(A_i)=A'_i$, $i=0,\dots,k$, уже найдены. Поскольку S-подмножество A'_{k+1} содержится в подалгебре $\langle B'_{k+1}\rangle$ алгебры $\varphi(R)$, порождённой элементами некоторого конечного подмножества B'_{k+1} множества

$g_{k+1}(\varphi(R), A'_k) = g_{k+1}\big(\varphi(R), \varphi(A_k)\big) = \varphi\big(g_{k+1}(R, A_k)\big)$, можно выделить в множестве $g_{k+1}(R, A_k)$ конечное подмножество B_{k+1}, образы элементов которого при действии гомоморфизма φ составляют множество B'_{k+1}, $\varphi(B_{k+1}) = B'_{k+1}$, а затем, вновь воспользовавшись вторым условием из определения свойства S, подобрать S-подмножество $A_{k+1} \in M_S(\langle B_{k+1}\rangle)$ из условия

$$\varphi(A_{k+1}) = A'_{k+1} \in M_S\big(\varphi(\langle B_{k+1}\rangle)\big) = M_S(\langle \varphi(B_{k+1})\rangle) = M_S(\langle B'_{k+1}\rangle).$$

Таким образом, искомая G'_S-цепочка S-подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R, такая что $\varphi(A_i) = A'_i$ при всех $i \geqslant 0$, всегда может быть построена.

Назовём алгебру R из класса $\mathfrak{M}$ *локально G'_S-разрешимой*, если каждая G'_S-цепочка подмножеств этой алгебры стабилизируется нулевым подмножеством на некотором шаге. Алгебры из класса $\mathfrak{M}$, являющиеся локально G'_S-разрешимыми для каждой упорядоченной последовательности элементов G'_S системы G_S, мы будем называть *локально сильно G_S-разрешимыми*. Нетрудно заметить, что алгебра R из класса $\mathfrak{M}$ является локально сильно G_S-разрешимой в том и только в том случае, если она локально G'_S-разрешима для всех стационарных последовательностей элементов G'_S системы G_S или, что равносильно, локально сильно $\{g\}$-разрешима для всех элементов g системы G_S. Классы локально G'_S-разрешимых и локально сильно G_S-разрешимых алгебр мы будем обозначать через $\mathfrak{M}_{LG'_S}$ и $\mathfrak{M}_{LG_S}$ соответственно.

Подчеркнём, что мы не рассматриваем варианты построения G'_S-цепочки $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$, в которых выбор множества B_{j+1} осуществляется в рамках подалгебры $\langle g_{j+1}(R, A_j)\rangle$ или идеала $\big(g_{j+1}(R, A_j)\big)_R$, поскольку последнее эквивалентно замене системы G_S системой отображений $G_S^{(\mathrm{sub})} = \big\{g^{(\mathrm{sub})} \mid g \in G\big\}$ или $G_S^{(\mathrm{id})} = \big\{g^{(\mathrm{id})} \mid g \in G\big\}$, где

$$g^{(\mathrm{sub})}\colon (R, A) \mapsto \langle g(R, A)\rangle, \quad g^{(\mathrm{id})}\colon (R, A) \mapsto \big(g(R, A)\big)_R \quad \big(R \in \mathfrak{M},\ A \in M_S(R)\big).$$

По отмеченному ранее каждый класс локально G'_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{LG'_S}$ является замкнутым относительно взятия гомоморфных образов. Обсуждение радикальных свойств этих классов мы начнём со следующего утверждения.

Теорема 2.4. *Предположим, что $g(R, A) \subseteq g(I, A)$ для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, её идеала I, его S-подмножества A и отображения g из системы G_S. Тогда класс локально G'_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{LG'_S}$ является радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$ для каждой упорядоченной последовательности элементов G'_S системы G_S, и потому пересечение $\mathfrak{M}_{LG_S}$ всех таких радикальных подклассов класса $\mathfrak{M}$ также является его радикальным подклассом. Если, помимо этого, класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия субинвариантных подалгебр и для произвольных алгебры R из $\mathfrak{M}$ и её S-подмножества A последнее является S-подмножеством любой из содержащих его субинвариантных подалгебр B алгебры R, причём $g(R, A) \subseteq g(B, A)$ для всех отображений g из системы G_S, то радикальные подклассы $\mathfrak{M}_{LG'_S}$, $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$ и $\mathfrak{M}_{LG_S}$ класса $\mathfrak{M}$ совпадают*

со своими расширениями $A\mathfrak{M}_{LG'_S}$ *и* $A\mathfrak{M}_{LG_S}$ *в* $\mathfrak{M}$, *где* $\mathcal{S}_{G_S}$ — *множество всех упорядоченных последовательностей элементов системы* G_S.

Доказательство. Зафиксируем произвольную упорядоченную последовательность G'_S, $G'_S = \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_{G_S}$. Покажем для начала, что любая алгебра R из класса $\mathfrak{M}$, содержащая локально G'_S-разрешимый идеал I, фактор-алгебра по которому R/I локально G'_S-разрешима, является локально G'_S-разрешимой. Для этого требуется установить наличие нулевого подмножества в каждой G'_S-цепочке подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R. Связывающий алгебры R и R/I естественный эпиморфизм $\varphi_I\colon R \to R/I$ отображает G'_S-цепочку подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R в G'_S-цепочку подмножеств $\{\varphi_I(A_i)\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R/I. Локальная G'_S-разрешимость алгебры R/I гарантирует стабилизацию G'_S-цепочки подмножеств $\{\varphi_I(A_i) = (A_i + I)/I\}_{i=0}^{\infty}$ нулевым подмножеством на некотором шаге $k \geqslant 0$, а значит, $A_i \subseteq I$ при всех $i \geqslant k$. Согласно четвёртому из наложенных на свойство S условий S-подмножества $\{A_i\}_{i=k}^{\infty}$ алгебры R, входящие в её идеал I, являются его S-подмножествами. По определению G'_S-цепочки каждое S-подмножество A_{i+1}, $i \geqslant 0$, содержится в подалгебре $\langle B_{i+1}\rangle$ для некоторого конечного подмножества B_{i+1} множества $g_{i+1}(R, A_i)$. Кроме того, по условию

$$g_{i+1}(R, A_i) \subseteq g_{i+1}(I, A_i) \subseteq g_{i-k+1}(I, A_i)$$

для любого $i \geqslant k$. Поэтому подмножества $\{A'_i = A_{k+i}\}_{i=0}^{\infty}$ составляют G'_S-цепочку подмножеств локально G'_S-разрешимого идеала I, и следовательно, существует $m \geqslant 0$, для которого $A'_m = A_{k+m} = \{0\}$. Таким образом, алгебра R локально G'_S-разрешима. Полученный нами вывод означает, что класс локально G'_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{LG'_S}$ является замкнутым относительно взятия расширений.

Покажем теперь, что множество локально G'_S-разрешимых идеалов любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ содержит объединение $J = \bigcup\limits_{a\in M} J_a$ каждого из своих упорядоченных по включению подмножеств $\{J_a \mid a \in M\}$. Иначе говоря, нам следует доказать, что всякая G'_S-цепочка подмножеств $\{C_i\}_{i=0}^{\infty}$ идеала J стабилизируется нулевым подмножеством на некотором шаге. Подмножество C_1 входит в некоторую конечно порождённую подалгебру подалгебры $\langle g_1(J, C_0)\rangle$ и потому содержится в идеале J_a для по меньшей мере одного $a \in M$. Применяя аргументы из нашего предыдущего рассуждения, мы можем сделать вывод, что подмножества $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ формируют G'_S-цепочку подмножеств идеала J_a. Локальная G'_S-разрешимость идеала J_a гарантирует также существование индекса $n \geqslant 1$, для которого $C_n = \{0\}$. Поэтому идеал J является локально G'_S-разрешимым.

Из сделанных выводов и отмеченной ранее замкнутости класса $\mathfrak{M}_{LG'_S}$ относительно взятия гомоморфных образов немедленно следует, что класс $\mathfrak{M}_{LG'_S} = I\mathfrak{M}_{LG'_S} = \mathfrak{M}^{(1)}_{LG'_S}$ является радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$. Кроме того, радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$ является также любое пересечение его радикальных подклассов, включая класс $\mathfrak{M}_{LG_S} = \bigcap\limits_{G'_S\in\mathcal{S}_{G_S}} \mathfrak{M}_{LG'_S}$.

Если в дополнение к основному условию класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия субинвариантных подалгебр и во всякой алгебре R из $\mathfrak{M}$ каждое её S-подмножество A является S-подмножеством любой из содержащих его субинвариантных подалгебр B алгебры R, а при этом $g(R,A) \subseteq g(B,A)$ для всех отображений g из системы G_S, то, рассуждая аналогичным образом, можно показать, что алгебры из $\mathfrak{M}$, представимые в виде объединений своих упорядоченных по включению систем локально G'_S-разрешимых субинвариантных подалгебр, являются локально G'_S-разрешимыми. Поэтому в данном случае класс $\mathfrak{M}_{LG'_S}$ совпадает со своим расширением $A\mathfrak{M}_{LG'_S}$ в классе $\mathfrak{M}$ для каждой упорядоченной последовательности $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$ и, как следствие, класс $\mathfrak{M}_{LG_S}$ также равен своему расширению $A\mathfrak{M}_{LG_S}$ в $\mathfrak{M}$. $\square$

В ситуации, когда класс локально G'_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{LG'_S}$, соответствующий упорядоченной последовательности $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$ (класс локально сильно G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{LG_S}$), является радикальным, мы будем называть нижний радикал, определяемый им на классе $\mathfrak{M}$, *локально G'_S-разрешимым радикалом* (*локально сильно G_S-разрешимым радикалом*) и будем обозначать его через LG'_S (LG_S). Для этих радикалов мы докажем следующую версию теоремы Бабича [3].

Теорема 2.5. *Пусть каждое отображение g из системы G_S не зависит от первого аргумента в том смысле, что $g(B,A) = g(I,A)$ для произвольных алгебры B из класса $\mathfrak{M}$, её идеала I и его S-подмножества A. Тогда локально G'_S-разрешимый радикал LG'_S является $\tilde{G}'_S$-специальным для всех упорядоченных последовательностей $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$, а локально сильно G_S-разрешимый радикал LG_S — $\{\tilde{u}_{G_S}\}$-специальным, где через $\tilde{u}_{G_S}$ обозначено отображение, действующее по правилу*

$$\tilde{u}_{G_S} \colon (B,I) \mapsto \bigcup_{A \in M_S(I)} \bigcup_{g \in G_S} g(B,A) \quad (B \in \mathfrak{M},\ I \lhd B).$$

Более того, в этом случае радикал $LG_S(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ совпадает с пересечением всех её радикалов $LG'_S(R)$, $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$, $LG_S(R) = \bigcap\limits_{G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}} LG'_S(R)$.

Доказательство. Независимость от первого аргумента отображений из системы G_S влечёт за собой выполнение условия теоремы 2.4 и независимость от первого аргумента отображений из системы $\tilde{G}_S$ и отображения $\tilde{u}_{G_S}$. Кроме того, в данной ситуации для произвольных упорядоченной последовательности $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$ и алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ не только любая G'_S-цепочка подмножеств алгебры R является G'_S-цепочкой каждого содержащего её элементы идеала алгебры R, но и G'_S-цепочки подмножеств идеалов алгебры R являются её G'_S-цепочками. Отметим также, что, в случае если элемент A_l, $l \geqslant 0$, G'_S-цепочки подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R входит в её идеал I, элементы $\{A_i\}_{i=l}^{\infty}$ этой G'_S-цепочки формируют G'_S-цепочку подмножеств идеала I (см. доказательство теоремы 2.4). Из этих наблюдений сразу следует замкнутость классов $\mathfrak{M}_{LG'_S}$,

$G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$, и их пересечения $\mathfrak{M}_{LG_S}$ относительно взятия идеалов и совпадение локально сильно G_S-разрешимого радикала $LG_S(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ с пересечением всех её локально G'_S-разрешимых радикалов $LG'_S(R)$, $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$.

Поскольку отображения из системы $\tilde{G}_S$ не зависят от первого аргумента, всякий $\tilde{G}_S$-тривиальный идеал I алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ является $\tilde{G}_S$-тривиальной алгеброй. Вместе с тем такой идеал I локально G'_S-разрешим для каждой упорядоченной последовательности $G'_S = \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_{G_S}$, содержащей по меньшей мере один элемент g_k, $k \geqslant 1$, для которого $\tilde{g_k}(R, I) = \tilde{g_k}(I, I) = \{0\}$ или, что то же самое, $g_k(R, A) = g_k(I, A) = \{0\}$ для всех S-подмножеств A идеала I, так как последнее гарантирует стабилизацию нулевым подмножеством любой G'_S-цепочки подмножеств идеала I на некотором шаге, меньшем или равном k. Поэтому LG'_S-полупростые алгебры являются $\tilde{G'}_S$-полупервичными (или $\overline{\tilde{G'}_S}$-полупервичными, что в данном случае эквивалентно) для каждой упорядоченной последовательности $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$ (используемые здесь и ниже понятия $\tilde{G'}_S$-полупервичных алгебры и идеала определяются для системы отображений $\tilde{G'}_S = \{\tilde{g} \mid g \in G'_S\}$).

Покажем теперь, что всякий элемент r алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, не принадлежащий её локально G'_S-разрешимому радикалу $LG'_S(R)$ для некоторой упорядоченной последовательности $G'_S = \{g_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{S}_{G_S}$, не входит в по меньшей мере один из $\tilde{G'}_S$-первичных идеалов алгебры R, фактор-алгебры по которым LG'_S-полупросты. Идеал $(r)_R$ алгебры R, порождённый таким элементом r, не является локально G'_S-разрешимым, и потому существует как минимум одна бесконечная G'_S-цепочка ненулевых подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ идеала $(r)_R$. Согласно определению G'_S-цепочки каждое S-подмножество A_{j+1}, $j \geqslant 0$, идеала $(r)_R$ (алгебры R) содержится в его подалгебре $\langle B_{j+1} \rangle$, порождённой элементами некоторого конечного подмножества B_{j+1} множества $g_{j+1}\big((r)_R, A_j\big)$, причём

$$B_{j+1} \subseteq g_{j+1}\big((r)_R, A_j\big) = g_{j+1}(R, A_j) \subseteq (A_j)_{(r)_R} \subseteq (A_j)_R.$$

Обозначим через $\mathcal{K}$ множество всех идеалов алгебры R, не содержащих целиком ни одно из подмножеств A_i, $i \geqslant 0$. Множество $\mathcal{K}$ заведомо не пусто, поскольку включает в себя нулевой идеал $\{0\}$. Объединение $I = \bigcup\limits_{b \in B} I_b$ любой упорядоченной по включению системы идеалов $\{I_b \mid b \in B\}$ из множества $\mathcal{K}$ также принадлежит $\mathcal{K}$. Действительно, в противном случае идеал I содержит какое-то подмножество A_i, $i \geqslant 0$, и вместе с ним все подмножества $g_{j+1}\big((r)_R, A_j\big)$, B_{j+1}, $\langle B_{j+1} \rangle$ и A_{j+1}, $j \geqslant i$, откуда сразу следует, что конечно порождённая подалгебра $\langle B_{i+1} \rangle$ и её подмножество A_{i+1} входят в идеал I_b для подходящего $b \in B$. Последнее невозможно, так как $I_b \in \mathcal{K}$, $I_b \cap A_i \neq A_i$ при всех $i \geqslant 0$. Поэтому частично упорядоченное по включению множество $\mathcal{K}$ индуктивно. Обозначим через P один из максимальных элементов множества $\mathcal{K}$, существующих в нём согласно лемме Цорна. По выбору идеала P любой строго содержащий его идеал J алгебры R должен содержать какое-то подмножество A_j, $j \geqslant 0$, и, как следствие, все подмножества A_i, $i \geqslant j$, формирующие G'_S-цепочку подмножеств

$\{A_i\}_{i=j}^{\infty}$ идеала J (см. выше). Образы $\{(A_i+P)/P\}_{i=j}^{\infty}$ элементов G'_S-цепочки подмножеств $\{A_i\}_{i=j}^{\infty}$ идеала J в его фактор-алгебре J/P составляют G'_S-цепочку подмножеств последней. При этом G'_S-цепочка $\{(A_i+P)/P\}_{i=j}^{\infty}$ не содержит нулевых подмножеств, поскольку равенство любого из её элементов $(A_{j'}+P)/P$, $j' \geqslant j$, нулевому подмножеству равносильно включению $A_{j'} \subseteq P$ и тем самым противоречит условию $P \in \mathcal{K}$. Это означает, в частности, что алгебра J/P не является локально G'_S-разрешимой. Таким образом, в фактор-алгебре R/P алгебры R по её идеалу P нет ненулевых локально G'_S-разрешимых идеалов, т. е. она является LG'_S-полупростой алгеброй. Если бы идеал P был бы равен пересечению двух строго содержащих его идеалов J_1 и J_2 алгебры R, то по предыдущему в каждый идеал J_s, $s=1,2$, входили бы подмножества A_i, $i \geqslant j_s$, для подходящего $j_s \geqslant 0$, а в идеал $P = J_1 \cap J_1$ — подмножества A_j, $j \geqslant \max\{j_1, j_2\}$, что по выбору $P \in \mathcal{K}$ не может иметь места. Значит, идеал P является также $\tilde{G'}_S$-первичным. Остаётся заметить, что, как и всякий идеал из множества $\mathcal{K}$, он не содержит элемент r.

Прямым следствием сделанных наблюдений является то, что для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и упорядоченной последовательности $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$ пересечение всех $\tilde{G'}_S$-первичных идеалов алгебры R, фактор-алгебры по которым LG'_S-полупросты, не только очевидным образом включает в себя её локально G'_S-разрешимый радикал $LG'_S(R)$, но также содержится в радикале $LG'_S(R)$, а значит, совпадает с ним. Поэтому радикал LG'_S является $\tilde{G'}_S$-специальным.

Поскольку LG'_S-полупростые алгебры LG_S-полупросты и $\{\tilde{u}_{G_S}\}$-полупервичны для любой упорядоченной последовательности $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$, локально сильно G_S-разрешимый радикал LG_S, значение которого на каждой алгебре из класса $\mathfrak{M}$ равно по предыдущему пересечению всех её $\tilde{G'}_S$-первичных идеалов с LG'_S-полупростыми факторами по всем $G'_S \in \mathcal{S}_{G_S}$, является $\{\tilde{u}_{G_S}\}$-специальным. $\square$

Полученные нами выводы имеют весьма широкую область применения уже хотя бы потому, что существует довольно много свойств подмножеств алгебр над кольцом F, которые удовлетворяют условиям, наложенным на свойство S. В частности, такими свойствами являются свойства «быть подмножеством», «быть конечным подмножеством», «быть подалгеброй», «быть конечно порождённой подалгеброй», «быть F-подмодулем», «быть конечно порождённым F-подмодулем», «быть конечным подмножеством, состоящим из не более чем k элементов», «быть подалгеброй, порождённой не более чем k элементами», «быть F-подмодулем, порождённым не более чем k элементами», для фиксированного $k \geqslant 1$.

Остановимся на нескольких важных для нас в дальнейшем свойствах локально G'_S-разрешимых алгебр. В двух следующих утверждениях (впрочем, с незначительной поправкой в терминах это касается также всех оставшихся утверждений этой части, кроме последнего) мы будем предполагать дополнительно, что для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, её S-подмножества A и отображения g из системы G_S подмножество $g(R,A)$ является S-подмножеством

алгебры R (S-подмножеством идеала $(A)_R$ алгебры R, порождённого элементами множества A). Будем говорить, что система G_S является *замкнутой*, если для произвольных алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, её S-подмножества A и отображений g и g' из системы G_S существует отображение g'' из этой системы, для которого $g''(R,A) \subseteq g'\big(R, g(R,A)\big)$.

Назовём алгебру R из класса $\mathfrak{M}$ *алгеброй Щукина относительно системы* G_S или кратко G_S*-щукинской алгеброй*, если для любых конечно порождённой подалгебры C алгебры R, S-подмножества A алгебры R, входящего в подалгебру C, и отображения g из системы G_S можно подобрать подалгебру C' алгебры R, порождённую конечным набором элементов множества $g(R,A)$, и конечную подсистему $\{g_1,\ldots,g_k\}$ системы G_S, такие что последний элемент A_k цепочки S-подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^k$ алгебры R, в которой $A_0 = g(R,A)$, $A_i = g_i(R,A_{i-1})$, $i = 1,\ldots,k$, содержится в подалгебре C', $A_k \subseteq C' \subseteq \langle A_0\rangle$.

Теорема 2.6. *Пусть $G'_S = \{g_k\}_{k=1}^\infty$ — упорядоченная последовательность элементов системы G_S, каждый элемент которой g_k, $k \geqslant 1$, согласован с включениями S-подмножеств алгебр из класса $\mathfrak{M}$ в том смысле, что $g_k(B,A) \subseteq g_k(B,A')$ для любых алгебры B из этого класса и её S-подмножеств A и A', связанных между собой включением $A \subseteq A'$. Тогда всякая локально G'_S-разрешимая G'_S-щукинская алгебра R из класса $\mathfrak{M}$ удовлетворяет следующему G'_S-условию: для любого S-подмножества A алгебры R, входящего в некоторую её конечно порождённую подалгебру, имеется конечный набор индексов $\{k_1,\ldots,k_m\}$, такой что последний элемент A_m цепочки S-подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^m$ алгебры R, в которой $A_0 = A$, $A_i = g_{k_i}(R,A_{i-1})$, $i = 1,\ldots,m$, равен нулевому подмножеству, $A_m = \{0\}$.*

Если дополнительно $A' \subseteq g_k(B,A) \subseteq A$ для произвольных $k \geqslant 1$, алгебры B из класса $\mathfrak{M}$ и S-подмножеств A и A' алгебры B, каждое из которых содержится в некоторой её конечно порождённой подалгебре, причём A' — в подалгебре, порождённой элементами некоторого конечного подмножества множества $g_k(B,A)$, то все алгебры из класса $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие G'_S-условию, являются локально G'_S-разрешимыми. Следовательно, в данном случае локальная G'_S-разрешимость G'_S-щукинской алгебры равносильна выполнению на ней G'_S-условия.

Доказательство. В первую очередь покажем, что всякая локально G'_S-разрешимая G'_S-щукинская алгебра (последний термин относится к системе отображений G'_S) R удовлетворяет G'_S-условию. Выделим в алгебре R произвольные конечно порождённую подалгебру C и входящее в неё S-подмножество A алгебры R и построим последовательности конечно порождённых подалгебр $\{C_i\}_{i=0}^\infty$ и S-подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^\infty$ алгебры R и конечных наборов натуральных индексов $\big\{\{k_{i+1j}\}_{j=1}^{n_{i+1}}\big\}_{i=0}^\infty$, используя определение G'_S-щукинской алгебры и следующее индуктивное правило: $C_0 = C$, $A_0 = A$ и далее если подалгебра C_i, S-подмножество A_i и при $i > 0$ конечные наборы $\big\{\{k_{st}\}_{t=1}^{n_s}\big\}_{s=1}^i$ уже найдены для некоторого $i \geqslant 0$, то сперва выбираются подалгебра C_{i+1}, порождённая конечным числом элементов множества $g_{i+1}(R,A_i)$, и конечный набор индексов $\{k_{i+1j}\}_{j=1}^{n_{i+1}}$,

$n_{i+1} \geqslant 1$, такие что подалгебра C_{i+1} содержит последний элемент $B_{i+1n_{i+1}}$ цепочки S-подмножеств $\{B_{i+1j}\}_{j=0}^{n_{i+1}}$ алгебры R, в которой $B_{i+10} = g_{i+1}(R, A_i)$ и $B_{i+1j} = g_{k_{i+1j}}(R, B_{i+1j-1})$, $j = 1, \ldots, n_{i+1}$, а затем находится любое S-подмножество A_{i+1} алгебры R из условия $B_{i+1n_{i+1}} \subseteq A_{i+1} \subseteq C_{i+1}$ (в частности, A_{i+1} и $B_{i+1n_{i+1}}$ могут совпадать). Заметим, что S-подмножества $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R формируют G'_S-цепочку, которая должна стабилизироваться нулевым подмножеством на некотором шаге $q \geqslant 0$, так как алгебра R локально G'_S-разрешима. Кроме того, полагая $A'_0 = A$ и $A'_i = B'_{in_i}$, где $B'_{i0} = g_i(R, A'_{i-1})$, $B'_{ij} = g_{k_{ij}}(R, B'_{ij-1})$, $j = 1, \ldots, n_i$, для всех $i \geqslant 1$, можно доказать по индукции, что $A'_i \subseteq A_i$ при любом $i \geqslant 0$. Равенство $A'_0 = A_0 = A$ служит основанием индукции. Если предположить, что включение $A'_i \subseteq A_i$ уже установлено для некоторого $i \geqslant 0$, то вследствие согласованности отображений из системы G'_S с включениями S-подмножеств алгебр из класса $\mathfrak{M}$ будут выполняться соотношения

$$B'_{i+10} = g_{i+1}(R, A'_i) \subseteq B_{i+10} = g_{i+1}(R, A_i)$$

и последовательно получаемые для $j = 1, \ldots, n_{i+1}$ соотношения

$$B'_{i+1j} = g_{k_{i+1j}}(R, B'_{i+1j-1}) \subseteq B_{i+1j} = g_{k_{i+1j}}(R, B_{i+1j-1}).$$

Согласно последнему из них $A'_{i+1} = B'_{i+1n_{i+1}} \subseteq B_{i+1n_{i+1}} \subseteq A_{i+1}$. Шаг индукции доказан полностью. Теперь мы можем взять $l_0 = 0$,

$$l_s = s + \sum_{i=1}^{s} n_i \quad (s = 1, \ldots, q),$$

$m_{l_t+1} = t + 1$, $m_{l_t+1+j} = k_{t+1j}$, $j = 1, \ldots, n_{t+1}$, $t = 0, \ldots, q-1$, и выделить в алгебре R цепочку её S-подмножеств $\{A''_i\}_{i=0}^{l_q}$ с $A''_0 = A$ и $A''_i = g_{m_i}(R, A''_{i-1})$, $i = 1, \ldots, l_q$, которая в силу сказанного ранее заканчивается нулевым подмножеством $A''_{l_q} = A'_q = A_q = \{0\}$. Справедливость полученного вывода для любых конечно порождённой подалгебры C и входящего в неё S-подмножества A алгебры R означает, что алгебра R удовлетворяет G'_S-условию.

Для завершения доказательства остаётся установить локальную G'_S-разрешимость любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, на которой, помимо G'_S-условия, выполняется следующее условие: каждое S-подмножество A алгебры R, входящее в некоторую её конечно порождённую подалгебру, содержит S-подмножество $g_k(R, A)$, которое в свою очередь включает в себя все S-подмножества A' алгебры R, содержащиеся в её подалгебрах, порождённых конечными наборами элементов множества $g_k(R, A)$, при всех $k \geqslant 1$, $A \supseteq g_k(R, A) \supseteq A'$. Для этого требуется показать, что всякая G'_S-цепочка подмножеств $\{E_i\}_{i=0}^{\infty}$ такой алгебры R стабилизируется нулевым подмножеством на каком-то шаге. Согласно определению G'_S-цепочки подмножества $\{E_i\}_{i=0}^{\infty}$ являются S-подмножествами алгебры R, причём каждое множество E_{i+1}, $i \geqslant 0$, содержится в некоторой подалгебре алгебры R, порождённой конечным числом элементов множества $g_{i+1}(R, E_i)$. Поэтому в силу наложенных на алгебру R условий

$E_{i+1} \subseteq g_{i+1}(R, E_i) \subseteq E_i$ при всех $i \geqslant 1$. Выделим в алгебре R цепочку S-подмножеств $\{E'_i\}_{i=0}^{\infty}$ и для любого $k \geqslant 2$ цепочку S-подмножеств $\{E(k)_i\}_{i=0}^{\infty}$, полагая $E'_0 = E(k)_0 = E_1$ и далее $E'_i = g_{i+1}(R, E'_{i-1})$, $E(k)_i = g_k(R, E(k)_{i-1})$ для $i \geqslant 1$. Несложно доказать по индукции, что $E_{j+1} \subseteq E'_j$ при всех $j \geqslant 0$. Основанием индукции служит равенство $E_1 = E'_0$, а доказательство её шага в предположении, что включение $E_j \subseteq E'_{j-1}$ выполняется для некоторого $j \geqslant 1$, состоит в применении условия согласованности с включениями S-подмножеств алгебр из класса $\mathfrak{M}$ отображений из последовательности G'_S для получения включений

$$E_{j+1} \subseteq g_{j+1}(R, E_j) \subseteq E'_j = g_{j+1}(R, E'_{j-1}).$$

При помощи индукции можно доказать также, что $E'_i \subseteq E'_{i-1}$ при всех $i \geqslant 1$. Основанием индукции является отмеченное ранее включение $E'_1 = g_2(R, E'_0) = g_2(R, E_1) \subseteq E'_0 = E_1$. Для доказательства шага индукции достаточно заметить, что в силу упорядоченности последовательности G'_S и согласованности её элементов с включениями S-подмножеств алгебр из класса $\mathfrak{M}$ выполнение любого из включений $E'_i \subseteq E'_{i-1}$, $i \geqslant 1$, влечёт за собой включения

$$E'_{i+1} = g_{i+2}(R, E'_i) \subseteq g_{i+2}(R, E'_{i-1}) \subseteq E'_i = g_{i+1}(R, E'_{i-1}).$$

Вновь воспользовавшись согласованностью отображений из системы G'_S с включениями S-подмножеств алгебр из класса $\mathfrak{M}$, мы получаем отсюда, что при любом $k \geqslant 2$

$$E'_{k-1} = g_k(R, E'_{k-2}) \subseteq g_k(R, E'_0) = g_k(R, E_1) = E(k)_1.$$

Более того, из свойств системы G'_S, уже неоднократно использованных нами ранее, следует, что для каждого $k \geqslant 2$ вместе со всяким включением $E'_{k+i-1} \subseteq E(k)_{i+1}$, $i \geqslant 0$, выполняются включения

$$E'_{k+i} = g_{k+i+1}(R, E'_{k+i-1}) \subseteq g_k(R, E'_{k+i-1}) \subseteq g_k(R, E(k)_{i+1}) = E(k)_{i+2}.$$

Это позволяет без труда доказать по индукции, что $E'_{k+i-1} \subseteq E(k)_{i+1}$ при всех $i \geqslant 0$ и $k \geqslant 2$. Так как алгебра R удовлетворяет G'_S-условию, можно подобрать конечный набор индексов $\{k_1, \ldots, k_s\}$, $s \geqslant 1$, такой что последний элемент $\tilde{E}_s$ цепочки S-подмножеств $\{\tilde{E}_i\}_{i=0}^{s}$ алгебры R, в которой $\tilde{E}_0 = E_1$ и $\tilde{E}_i = g_{k_i}(R, \tilde{E}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, s$, является нулевым подмножеством, $\tilde{E}_s = \{0\}$. Если заменить этот набор индексов любым набором индексов $\{k'_1, \ldots, k'_s\}$ с условием $k'_i \geqslant k_i$, $i = 1, \ldots, s$, и определить с его помощью S-подмножества $\tilde{E}'_0 = \tilde{E}_0 = E_1$, $\tilde{E}'_i = g_{k'_i}(R, \tilde{E}'_{i-1})$, $i = 1, \ldots, s$, алгебры R, то, используя свойства системы G'_S (см. выше), можно последовательно для $i = 1, \ldots, s$ получить включения

$$\tilde{E}'_i = g_{k'_i}(R, \tilde{E}'_{i-1}) \subseteq g_{k'_i}(R, \tilde{E}_{i-1}) \subseteq \tilde{E}_i = g_{k_i}(R, \tilde{E}_{i-1}),$$

в соответствии с которыми последний элемент цепочки $\{\tilde{E}'_i\}_{i=0}^{s}$ также равен нулевому подмножеству, $\tilde{E}'_s = \{0\}$. Отсюда следует, в частности, что для

$\hat{k} = \max\{k_1, \ldots, k_s, 2\}$ цепочка S-подмножеств $\{E(\hat{k})_i\}_{i=0}^{\infty}$ стабилизируется нулевым подмножеством во всяком случае на шаге s, а значит, $E_{\hat{k}+s-1} = E'_{\hat{k}+s-2} = E(\hat{k})_s = \{0\}$ (см. выше). Таким образом, G'_S-цепочка $\{E_i\}_{i=0}^{\infty}$ стабилизируется нулевым подмножеством на некотором шаге, не превышающем $\hat{k}+s-1$. Поэтому алгебра R является локально G'_S-разрешимой. □

Если в условиях теоремы 2.6 последовательность $G'_S = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута как система отображений, то G'_S-условие может быть заменено следующим условием: для любого S-подмножества A алгебры R, входящего в некоторую её конечно порождённую подалгебру, существует индекс $k \geqslant 1$, при котором $g_k(R, A) = \{0\}$. Чтобы убедиться в этом, следует лишь показать, что алгебра R, удовлетворяющая G'_S-условию, обладает указанным свойством. Действительно, выполнение G'_S-условия на алгебре R позволяет подобрать конечный набор индексов $\{k_1, \ldots, k_m\}$, $m \geqslant 1$, таким образом, что цепочка S-подмножеств $\{A_i\}_{i=0}^{m}$ алгебры R с $A_0 = A$ и $A_i = g_{k_i}(R, A_{i-1})$, $i = 1, \ldots, m$, заканчивается нулевым подмножеством $A_m = \{0\}$. При этом можно считать, что $m \geqslant 2$ (случай $m = 1$ не представляет интереса, $g_{k_1}(R, A) = A_1 = \{0\}$). Так как система G'_S замкнута, можно найти индексы $n_1, \ldots, n_{m-1}$, для которых $g_{n_1}(R, A_0) \subseteq A_2 = g_{k_2}\bigl(R, g_{k_1}(R, A_0)\bigr)$ и $g_{n_j}(R, A_0) \subseteq g_{k_{j+1}}\bigl(R, g_{n_{j-1}}(R, A_0)\bigr)$, $j = 2, \ldots, m-1$ (при $m > 2$). Используя индукцию и согласованность отображений из системы G'_S с включениями S-подмножеств алгебр из класса $\mathfrak{M}$, несложно доказать, что $g_{n_i}(R, A_0) \subseteq A_{i+1}$ при всех $i = 1, \ldots, m-1$. Остаётся заметить, что $g_{n_{m-1}}(R, A) = g_{n_{m-1}}(R, A_0) = A_m = \{0\}$.

Для свойства $S = (\mathrm{sub})$ мы будем использовать в дальнейшем следующую несколько более удобную в данном конкретном случае версию понятия G_S-щукинской алгебры. Назовём алгебру R из класса $\mathfrak{M}$ *$G_{(\mathrm{sub})}$-щукинской алгеброй*, если для любых конечно порождённой подалгебры C алгебры R и отображения g из системы $G_{(\mathrm{sub})}$ существуют конечная подсистема $\{g_1, \ldots, g_k\}$ системы $G_{(\mathrm{sub})}$ и конечно порождённая подалгебра C' подалгебры $g(R, C)$ алгебры R, такие что последний элемент C_k цепочки подалгебр $\{C_i\}_{i=0}^{k}$ алгебры R, в которой $C_0 = g(R, C)$, $C_i = g_i(R, C_{i-1})$, $i = 1, \ldots, k$, содержится в подалгебре C', $C_k \subseteq C' \subseteq C_0$. Пользуясь этим определением, мы можем сформулировать следующий вариант теоремы 2.6, который без труда выводится из её доказательства (достаточно положить $A_i = C_i$, $i \geqslant 0$, в его первой части).

Следствие 2.7. *Пусть $G'_{(\mathrm{sub})} = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — упорядоченная последовательность элементов системы $G_{(\mathrm{sub})}$, каждый компонент которой g_k, $k \geqslant 1$, согласован с включениями подалгебр алгебр из класса $\mathfrak{M}$ ($g_k(B, A) \subseteq g_k(B, A')$ для любых алгебры B из класса $\mathfrak{M}$ и её подалгебр A и A', связанных включением $A \subseteq A'$). Тогда всякая локально $G'_{(\mathrm{sub})}$-разрешимая $G'_{(\mathrm{sub})}$-щукинская алгебра R из класса $\mathfrak{M}$ удовлетворяет $G'_{(\mathrm{sub})}$-условию, т. е. для каждой конечно порождённой подалгебры A алгебры R существует конечный набор индексов $\{k_1, \ldots, k_m\}$, такой что цепочка подалгебр $\{A_i\}_{i=0}^{m}$ алгебры R, в которой $A_0 = A$, $A_i = g_{k_i}(R, A_{i-1})$, $i = 1, \ldots, m$, заканчивается нулевой подалгеброй*

$A_m = \{0\}$. Если, помимо этого, $g_k(B, A) \subseteq A$ для произвольных алгебры B из класса $\mathfrak{M}$, подалгебры A алгебры B, входящей в некоторую её конечно порождённую подалгебру, и $k \geqslant 1$, то все алгебры из класса $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие $G'_{(\mathrm{sub})}$-условию, являются локально $G'_{(\mathrm{sub})}$-разрешимыми. Следовательно, в данном случае для $G'_{(\mathrm{sub})}$-щукинских алгебр условие локальной $G'_{(\mathrm{sub})}$-разрешимости равносильно $G'_{(\mathrm{sub})}$-условию.

Отметим, что в ситуации, когда все элементы упорядоченной последовательности G'_S согласованы с включениями S-подмножеств алгебр из класса $\mathfrak{M}$ и не зависят от первого аргумента, класс G'_S-щукинских алгебр является замкнутым не только относительно взятия гомоморфных образов (последнее имеет место без этих требований), но и относительно взятия идеалов, что позволяет рассматривать основное утверждение теоремы 2.6 в качестве дополнительного описания локально G'_S-разрешимого радикала LG'_S на данном классе (см. теорему 2.5).

Во всех приведённых выше утверждениях специфика рассматриваемых радикальных или родственных им конструкций заставляет нас использовать условие перестановочности с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$. Для нашего следующего определения это ограничение не столь существенно и может быть немного ослаблено за счёт перехода к системе G_S более общего вида. С этого момента и вплоть до конца раздела мы будем иметь дело с системой $G_S = \{G_S(R) \mid R \in \mathfrak{M}\}$, которая состоит из непустых множеств отображений $G_S(R)$, отвечающих алгебрам R из класса $\mathfrak{M}$, причём, как и ранее, для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, её S-подмножества A и отображения g из множества $G_S(R)$ значение $g(R, A)$ отображения g на паре (R, A) является подмножеством идеала $(A)_R$ алгебры R, порождённого элементами множества A. Кроме того, дополнительно предполагается, что для всякого гомоморфизма $\varphi\colon R \to R'$ алгебр R и R' (алгебра R' над кольцом F может не принадлежать основному классу $\mathfrak{M}$), в случае если $g(R, A) = \{0\}$ для некоторого отображения g из множества $G_S(R)$, $g'\bigl(\varphi(R), \varphi(A)\bigr) = \{0\}$ для хотя бы одного отображения g' из множества $G_S\bigl(\varphi(R)\bigr)$, а в случае если $q\bigl(\varphi(R), \varphi(A)\bigr) = \{0\}$ для некоторого отображения q из множества $G_S\bigl(\varphi(R)\bigr)$, $\varphi\bigl(q'(R, A)\bigr) = \{0\}$ для как минимум одного отображения q' из множества $G_S(R)$. Заметим, что это требование заведомо выполняется в ситуации, когда для любых отображений g из множества $G_S(R)$ и q из множества $G_S\bigl(\varphi(R)\bigr)$ имеются отображения g' из множества $G_S\bigl(\varphi(R)\bigr)$ и q' из множества $G_S(R)$, для которых $g'\bigl(\varphi(R), \varphi(A)\bigr) = \varphi\bigl(g(R, A)\bigr)$ и $q\bigl(\varphi(R), \varphi(A)\bigr) = \varphi\bigl(q'(R, A)\bigr)$.

Как и ранее, для системы G_S, такой что для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, её S-подмножества A и отображения g из множества $G_S(R)$ множество $g(R, A)$ является S-подмножеством алгебры R, можно определить условие замкнутости. Система G_S с указанным свойством будет называться *замкнутой*, если для произвольных алгебры B из класса $\mathfrak{M}$, её S-подмножества C и отображений g и g' из множества $G_S(B)$ можно выбрать отображение g'' из этого множества, для которого $g''(B, C) \subseteq g'\bigl(B, g(B, C)\bigr)$.

Назовём алгебру R из класса $\mathfrak{M}$ *слабо G_S-разрешимой*, если для каждого её S-подмножества A найдётся отображение g из множества $G_S(R)$, такое что $g(R,A)=\{0\}$. Класс слабо G_S-разрешимых алгебр мы будем обозначать через $\mathfrak{M}_{WG_S}$. Из условий, наложенных на систему G_S, сразу следует замкнутость класса $\mathfrak{M}_{WG_S}$ относительно взятия гомоморфных образов. Обсудим теперь радикальные свойства этого класса.

Теорема 2.8. *Пусть G_S — замкнутая система отображений, такая что для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её S-подмножества A*

1) *если I — идеал алгебры R, содержащий множество A, то для каждого отображения g из множества $G_S(I)$ можно подобрать отображение g' из множества $G_S(R)$, для которого $g'(R,A)\subseteq g(I,A)$,*
2) *множество $q(R,A)$ входит в некоторый конечно порождённый идеал алгебры R для по меньшей мере одного отображения q из множества $G_S(R)$.*

Тогда класс слабо G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{WG_S}$ является радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$. Если, помимо этого, класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия субинвариантных подалгебр и для произвольных алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её S-подмножества A

3) *если B — субинвариантная подалгебра алгебры R, содержащая множество A, то A является S-подмножеством алгебры B и для всякого отображения g из множества $G_S(B)$ найдётся отображение g' из множества $G_S(R)$, для которого $g'(R,A)\subseteq g(B,A)$,*
4) *множество $q(R,A)$ содержится в некоторой конечно порождённой подалгебре алгебры R для как минимум одного отображения q из множества $G_S(R)$,*

то класс $\mathfrak{M}_{WG_S}$ совпадает также со своим расширением $A\mathfrak{M}_{WG_S}$ в классе $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Воспользуемся схемой доказательства теоремы 2.4. Установим для начала замкнутость класса слабо G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{WG_S}$ относительно взятия расширений. Для этого следует доказать слабую G_S-разрешимость любой алгебра R из класса $\mathfrak{M}$, содержащей слабо G_S-разрешимый идеал I, фактор-алгебра R/I по которому слабо G_S-разрешима. Рассмотрим произвольное S-подмножество A такой алгебры R. Поскольку связывающий алгебру R с её слабо G_S-разрешимой фактор-алгеброй R/I естественный эпиморфизм $\varphi_I\colon R\to R/I$ отображает S-подмножество A алгебры R в S-подмножество $\varphi_I(A)=(A+I)/I$ алгебры $\varphi_I(R)=R/I$, можно выбрать отображение q из множества $G_S(R/I)$, для которого $q\big(\varphi_I(R),\varphi_I(A)\big)=q(R/I,(A+I)/I)=\{0\}$, и, как следствие, $\varphi_I\big(g(R,A)\big)=\{0\}$, $g(R,A)\subseteq I$ для подходящего отображения g из множества $G_S(R)$ (см. свойства системы G_S из её определения). Так как S-подмножество $g(R,A)$ алгебры R входит в её слабо G_S-разрешимый идеал I в качестве S-подмножества, найдётся отображение g' из множества $G_S(I)$, такое что $g'\big(I,g(R,A)\big)=\{0\}$. Поэтому в силу первого условия теоремы $g''\big(R,g(R,A)\big)=\{0\}$ для некоторого отображения g'' из множества $G_S(R)$.

Замкнутость системы G_S позволяет также подобрать отображение g''' из множества $G_S(R)$, для которого $g'''(R,A) = g''\big(R, g(R,A)\big) = \{0\}$. Справедливость полученного вывода для каждого S-подмножества A алгебры R означает, что алгебра R является слабо G_S-разрешимой. Таким образом, класс слабо G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{WG_S}$ замкнут относительно взятия расширений.

Покажем теперь, что множество слабо G_S-разрешимых идеалов любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ включает в себя объединение $J = \bigcup\limits_{a\in A} J_a$ своих упорядоченных по включению подмножеств $\{J_a \mid a \in M\}$. Согласно второму условию теоремы для всякого S-подмножества A алгебры J имеется отображение p из множества $G_S(J)$, такое что S-подмножество $p(J,A)$ алгебры J содержится в некотором её конечно порождённом идеале J', который в свою очередь входит в идеал J_a для подходящего $a \in M$. Пользуясь тем, что S-подмножество $p(J,A)$ алгебры J является S-подмножеством её слабо G_S-разрешимого идеала J_a, мы можем выбрать отображение p' из множества $G_S(J_a)$, для которого $p'\big(J_a, p(J,A)\big) = \{0\}$. Значит, по первому условию теоремы $p''\big(J, p(J,A)\big) = \{0\}$ для как минимум одного отображения g'' из множества $G_S(J)$. Из замкнутости системы G_S также следует, что $p'''(J,A) = p''\big(J, p(J,A)\big) = \{0\}$ для некоторого отображения p''' из множества $G_S(J)$. Поскольку сказанное справедливо для любого S-подмножества A алгебры J, последняя является слабо G_S-разрешимой.

В качестве следствия из сделанных наблюдений и отмеченной ранее замкнутости класса слабо G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{WG_S}$ относительно взятия гомоморфных образов мы немедленно получаем, что класс $\mathfrak{M}_{WG_S} = I\mathfrak{M}_{WG_S} = \mathfrak{M}^{(1)}_{WG_S}$ является радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$.

Для доказательства второго утверждения теоремы достаточно лишь установить при помощи рассуждений, аналогичных использованным ранее, то, что при выполнении дополнительных третьего и четвёртого условий теоремы алгебры из класса $\mathfrak{M}$, представимые в виде объединений упорядоченных по включению систем своих слабо G_S-разрешимых субинвариантных подалгебр, являются слабо G_S-разрешимыми. □

В случае если класс слабо G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{WG_S}$ является радикальным, мы будем называть нижний радикал, определяемый им на классе $\mathfrak{M}$, *слабо G_S-разрешимым радикалом* и будем обозначать этот радикал через WG_S.

В двух следующих утверждениях мы будем использовать ряд вспомогательных понятий, связанных с рассматриваемой системой отображений $G_S = \{G_S(R) \mid R \in \mathfrak{M}\}$. Для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и отображения g из множества $G_S(R)$ обозначим через $\tilde{g}$ отображение, ставящее в соответствие каждому идеалу I алгебры R (или паре (R,I)) его подмножество

$$\tilde{g}(R,I) = \bigcup_{A\in M_S(I)} g(R,A),$$

а затем положим $\tilde{G}_S(R) = \{\tilde{g} \mid g \in G_S(R)\}$ и $\tilde{G}_S = \{\tilde{G}_S(R) \mid R \in \mathfrak{M}\}$. Назовём идеал I алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ *$\tilde{G}_S$-тривиальным*, если $\tilde{g}(R, I) = \{0\}$ для как минимум одного отображения $\tilde{g}$ из множества $\tilde{G}_S(R)$. Это позволяет нам пользоваться в дальнейшем понятиями $\tilde{G}_S$-полупервичных и $\tilde{G}_S$-первичных алгебр и идеалов и $\tilde{G}_S$-специального радикала, которые определяются в полном соответствии с описанной ранее схемой с той лишь разницей, что в рассматриваемой ситуации отображения из системы $\tilde{G}_S$ не являются, вообще говоря, перестановочными с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$.

Теорема 2.9. *Пусть G_S — замкнутая система отображений, такая что для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её S-подмножества A*

1) *если I — идеал алгебры R, содержащий множество A, q — отображение из множества $G_S(I)$ и g — отображение из множества $G_S(R)$, то $q'(R, A) \subseteq q(I, A)$ и $g'(I, A) \subseteq g(R, A)$ для подходящих отображений q' из множества $G_S(R)$ и g' из множества $G_S(I)$;*
2) *идеал $g^{(\mathrm{id})}(R, A) = \big(g(R, A)\big)_R$ алгебры R конечно порождён для каждого отображения g из множества $G_S(R)$;*
3) *$g\big(R, g'(R, A)\big) \cup g'\big(R, g(R, A)\big) \subseteq g^{(\mathrm{id})}(R, A) \cap g'^{(\mathrm{id})}(R, A)$ для всех отображений g и g' из множества $G_S(R)$.*

Тогда слабо G_S-разрешимый радикал WG_S является $\tilde{G}_S$-специальным.

Доказательство. Из первых двух условий и теоремы 2.9 следует радикальность класса слабо G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{WG_S}$, а также его замкнутость относительно взятия идеалов. Чтобы установить $\tilde{G}_S$-специальность слабо G_S-разрешимого радикала WG_S, необходимо лишь показать, что любой элемент r алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, не лежащий в её слабо G_S-разрешимом радикале $WG_S(R)$, не входит в по меньшей мере один из $\tilde{G}_S$-первичных идеалов этой алгебры, фактор-алгебры по которым WG_S-полупросты. Так как идеал $I = (r)_R$ алгебры R, порождённый таким элементом r, не является слабо G_S-разрешимым, он содержит S-подмножество A, удовлетворяющее следующему условию: $g(I, A) \neq \{0\}$ для всех отображений g из множества $G_S(I)$ или, что равносильно, $q(R, A) \neq \{0\}$ для всех отображений q из множества $G_S(R)$ (здесь используется первое условие теоремы и тот факт, что S-подмножество A идеала I является также S-подмножеством алгебры R). Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех идеалов алгебры R, которые не включают в себя целиком ни одно из её S-подмножеств $q(R, A)$, $q \in G_S(R)$. Множество $\mathfrak{L}$ содержит во всяком случае нулевой идеал $\{0\}$ и потому не является пустым. При этом элемент r не принадлежит ни одному из идеалов из множества $\mathcal{L}$, поскольку в порождённый им идеал I входят все подмножества $q(R, A)$, $q \in G_S(R)$ ($q(R, A) \subseteq (A)_R \subseteq I$). Объединение $J = \bigcup\limits_{b \in B} J_b$ любого упорядоченного по включению подмножества $\{J_b \mid b \in B\}$ множества $\mathcal{L}$ также является элементом $\mathcal{L}$. Действительно, если справедливо обратное, то найдётся отображение q из множества $G_S(R)$, такое что идеал J содержит подмножество $q(R, A)$ вместе с порождённым его элементами идеалом $q^{(\mathrm{id})}(R, A) = \big(q(R, A)\big)_R$ алгебры R. По второму условию теоремы

идеал $q^{(\mathrm{id})}(R,A)$ конечно порождён, и, как следствие, он и его подмножество $q(R,A)$ содержатся в идеале J_b для подходящего $b \in B$, но в то же время $J_b \in \mathcal{L}$ и $J_b \cap p(R,A) \neq p(R,A)$ для всех $p \in G_S(R)$?! Поэтому частично упорядоченное по включению множество $\mathcal{L}$ индуктивно и согласно лемме Цорна обладает как минимум одним максимальным элементом. Выберем любой из таких элементов и обозначим его через P. Допустим, что фактор-алгебра R/P алгебры R по идеалу P имеет ненулевой слабо G_S-разрешимый радикал $WG_S(R/P)$. Обозначим через K его прообраз в алгебре R при действии естественного эпиморфизма $\varphi_P\colon R \to R/P$. Идеал K алгебры R строго содержит её идеал P, а потому $q(R,A) \subseteq K$ для некоторого отображения q из множества $G_S(R)$. Эпиморфизм φ_P отображает S-подмножество $q(R,A)$ алгебры R в S-подмножество $\varphi_P\bigl(q(R,A)\bigr) = (q(R,A)+P)/P$ алгебры $\varphi_P(R) = R/P$, являющееся к тому же S-подмножеством её слабо G_S-разрешимого радикала $\varphi_P(K) = WG_S(R/P)$. Значит, мы можем подобрать отображение p' из множества $G_S\bigl(\varphi_P(K)\bigr)$, такое что $p'\Bigl(\varphi_P(K), \varphi_P\bigl(q(R,A)\bigr)\Bigr) = \{0\}$, и вместе с ним отображение p'' из множества $G_S(K)$, для которого $\varphi_P\Bigl(p''\bigl(K, q(R,A)\bigr)\Bigr) = \{0\}$, $p''\bigl(K, q(R,A)\bigr) \subseteq P$. Первое условие теоремы и замкнутость системы G_S гарантируют выполнение включений $q'\bigl(R, q(R,A)\bigr) \subseteq p''\bigl(K, q(R,A)\bigr)$ и $q''(R,A) \subseteq q'\bigl(R, q(R,A)\bigr)$ для подходящих отображений q' и q'' из множества $G_S(R)$, в соответствии с которыми

$$q''(R,A) \subseteq q'\bigl(R, q(R,A)\bigr) \subseteq p''\bigl(K, q(R,A)\bigr) \subseteq P.$$

Это противоречит тому, что $P \in \mathcal{L}$, $P \cap p(R,A) \neq p(R,A)$ для всех $p \in G_S(R)$. Таким образом, алгебра R/P является WG_S-полупростой и потому $\tilde{G}_S$-полупервичной (по определению $\tilde{G}_S$-тривиальные идеалы слабо G_S-разрешимы). Предположим теперь, что идеал P не является $\tilde{G}_S$-первичным, а значит, равен пересечению $J_1 \cap J_2$ каких-то двух строго содержащих его идеалов J_1 и J_2 алгебры R. По выбору идеала P каждый идеал J_s, $s = 1,2$, включает в себя подмножество $q_s(R,A)$ для некоторого отображения q_s из множества $G_S(R)$. В силу третьего условия теоремы отсюда сразу следуют включения

$$q_1\bigl(R, q_2(R,A)\bigr) \subseteq q_1^{(\mathrm{id})}(R,A) \cap q_2^{(\mathrm{id})}(R,A) \subseteq J_1 \cap J_2 = P.$$

Замкнутость системы G_S позволяет также выбрать в множестве $G_S(R)$ отображение q_3, для которого $q_3(R,A) \subseteq q_1\bigl(R, q_2(R,A)\bigr)$. Поэтому $q_3(R,A) \subseteq P$, что вновь приводит нас к противоречию с условием $P \cap p(R,A) \neq p(R,A)$ для всех $p \in G_S(R)$. Следовательно, идеал P является $\tilde{G}_S$-первичным. Кроме того, по построению идеал P не содержит элемент r и фактор-алгебра R/P алгебры R по нему является WG_S-полупростой.

Сказанное означает, что пересечение всех $\tilde{G}_S$-первичных идеалов любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, фактор-алгебры по которым WG_S-полупросты, не только включает в себя её слабо G_S-разрешимый радикал $WG_S(R)$, но также содержится в радикале $WG_S(R)$ и совпадает с ним. Поэтому радикал WG_S является $\tilde{G}_S$-специальным. $\square$

Завершая основной объём построений, мы приведём версию теоремы Шестакова (см. [5, теорема 7]), которая показывает, что в действительности последняя значительно ближе к обобщаемой в её рамках теореме Бабича, чем это может показаться на первый взгляд. Сразу оговоримся, что в данном утверждении не предполагается, что для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, её S-подмножества A и отображения g из множества $G_S(R)$ подмножество $g(R, A)$ является S-подмножеством алгебры R.

Теорема 2.10. *Предположим, что система отображений G_S удовлетворяет первым двум условиям предыдущей теоремы, класс слабо G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{WG_S}$ является радикальным и для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ и её S-подмножества A*

1) *подалгебра $\langle A\rangle$ алгебры R принадлежит классу $\mathfrak{M}$;*
2) *A является S-подмножеством подалгебры $\langle A\rangle$ и каждое S-подмножество этой подалгебры является S-подмножеством алгебры R;*
3) *подалгебра $\langle A\rangle$ является слабо G_S-разрешимой, если и только если $g(R, A) = \{0\}$ для по меньшей мере одного отображения g из множества $G_S(R)$;*
4) *если $\varphi\colon R \to R'$ — гомоморфизм алгебр R и R', g — такое отображение из множества $G_S(R)$, что $\varphi\big(g(R, A)\big) = \{0\}$, то $g'\big(\varphi(R), \varphi(A)\big) = \{0\}$ для некоторого отображения g' из множества $G_S\big(\varphi(R)\big)$.*

Тогда слабо G_S-разрешимый радикал WG_S является $\tilde{G}_S$-специальным.

Доказательство. Для начала следует обсудить значение условий теоремы. Согласно первому из них в рассматриваемой ситуации основной класс $\mathfrak{M}$ является замкнутым не только относительно взятия идеалов и гомоморфных образов, но и относительно взятия подалгебр, порождённых элементами S-подмножеств принадлежащих ему алгебр. Из первого условия теоремы 2.9 и третьего условия данной теоремы следует, что радикальный класс слабо G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{WG_S}$ из класса $\mathfrak{M}$ в дополнение к обычным свойствам радикальных классов замкнут относительно взятия идеалов, а также относительно взятия подалгебр, порождённых элементами S-подмножеств входящих в него алгебр. Более того, для любых алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, её S-подмножества A и слабо G_S-разрешимого идеала T идеал $T' = \langle A\rangle \cap T$ подалгебры $\langle A\rangle$, порождённой элементами множества A, является слабо G_S-разрешимым. Действительно, каждое S-подмножество A' идеала T' является S-подмножеством подалгебры $\langle A\rangle$ и по второму условию теоремы S-подмножеством алгебры R и её идеала T. Используя слабую G_S-разрешимость идеала T и первое условие теоремы 2.9, можно подобрать отображения g из множества $G_S(I)$ и q из множества $G_S(R)$, такие что $g(I, A') = q(R, A') = \{0\}$. В соответствии с третьим условием теоремы это означает, что подалгебра $\langle A'\rangle$, которую порождают элементы множества A', является слабо G_S-разрешимой, и, как следствие, $p(T', A') = \{0\}$ для некоторого отображения p из множества $G_S(T')$. Ввиду того что сказанное относится

к любому S-подмножеству A' идеала T' алгебры $\langle A\rangle$, этот идеал является слабо G_S-разрешимым.

Как и ранее в теореме 2.9, для доказательства специальности слабо G_S-разрешимого радикала WG_S нам необходимо установить только то, что каждый элемент r алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, не принадлежащий её слабо G_S-разрешимому радикалу $WG_S(R)$, не содержится в как минимум одном из $\tilde{G}_S$-первичных идеалов этой алгебры, фактор-алгебры по которым WG_S-полупросты. Повторяя рассуждения из начала доказательства теоремы 2.9, которые используют лишь её первые два условия, мы можем выбрать S-подмножество A порождённого элементом r идеала $I = (r)_R$ алгебры R, такое что $q(R, A) \neq \{0\}$ для всех отображений q из множества $G_S(R)$, и показать индуктивность непустого частично упорядоченного по включению множества $\mathcal{L}$ всех идеалов алгебры R, не содержащих целиком ни одно из её подмножеств $q(R, A)$, $q \in G_S(R)$, а тем самым и наличие в множестве $\mathcal{L}$ максимальных элементов. Обозначим один из таких элементов через P. Так как $q(R, A) \subseteq (A)_R \subseteq I$ для каждого отображения q из множества $G_S(R)$, элемент r не входит ни в один из идеалов из множества $\mathcal{L}$ и, в частности, в идеал P. Отметим также, что множество $\mathcal{L}$ составляют те и только те идеалы J алгебры R, для которых образ $\varphi_J(\langle A\rangle) = (\langle A\rangle + J)/J$ подалгебры $\langle A\rangle$ алгебры R, порождённой элементами множества A, при действии естественного эпиморфизма $\varphi_J\colon R \to R/J$ алгебры R на её фактор-алгебру R/J не является слабо G_S-разрешимой подалгеброй алгебры $\varphi_J(R) = R/J$. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что подалгебру $\varphi_J(\langle A\rangle)$ порождают элементы S-подмножества $\varphi_J(A) = (A + J)/J$ алгебры R/J, в которое эпиморфизм φ_J отображает S-подмножество A алгебры R, а потому согласно третьему условию теоремы она является слабо G_S-разрешимой в том и только в том случае, если $p\bigl(\varphi_J(R), \varphi_J(A)\bigr) = p(R/J, (A + J)/J) = \{0\}$ для некоторого отображения p из множества $G_S(R/J)$. В соответствии с определением системы G_S и четвёртым условием теоремы последнее равносильно тому, что $p'(R, A) \subseteq \operatorname{Ker}\varphi_J = J$ для подходящего отображения p' из множества $G_S(R)$.

Нашей следующей целью станет обоснование WG_S-полупростоты и $\tilde{G}_S$-первичности фактор-алгебры R/P алгебры R по её идеалу P, выбранному ранее. Естественный эпиморфизм $\varphi_P\colon R \to R/P$ алгебр R и R/P отображает подалгебру $\langle A\rangle$ алгебры R в подалгебру $\varphi_P(\langle A\rangle) = (\langle A\rangle + P)/P$ алгебры R/P, порождённую элементами её S-подмножества $\varphi_P(A) = (A + P)/P$ (см. выше). Из наблюдений, сделанных в начале доказательства, следует, что пересечение $(\langle A\rangle + P)/P \cap WG_S(R/P)$ подалгебры $(\langle A\rangle + P)/P$ и слабо G_S-разрешимого радикала $WG_S(R/P)$ алгебры R/P является слабо G_S-разрешимым идеалом этой подалгебры. Полагая $K = \varphi_P^{-1}\bigl(WG_S(R/P)\bigr)$, мы можем представить данное пересечение в виде

$$\bigl((\langle A\rangle + P)/P\bigr) \cap WG_S(R/P) = \bigl((\langle A\rangle + P) \cap K\bigr)/P = \\ = (\langle A\rangle \cap K + P)/P \cong (\langle A\rangle \cap K)/(\langle A\rangle \cap P).$$

Предположим, что радикал $WG_S(R/P)$ алгебры R/P отличен от нуля, а значит, его прообраз K в алгебре R строго содержит её идеал P. Тогда по выбору идеала P идеал K не принадлежит множеству $\mathcal{L}$, и, как следствие, образом подалгебры $\langle A\rangle$ алгебры R в её фактор-алгебре R/K при действии естественного эпиморфизма $\varphi_K\colon R \to R/K$ является слабо G_S-разрешимая подалгебра $\varphi_K(\langle A\rangle) = (\langle A\rangle + K)/K$. В силу сказанного ранее это означает, что алгебра $\langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap P)$ является расширением своего слабо G_S-разрешимого идеала $(\langle A\rangle \cap K)/(\langle A\rangle \cap P)$ при помощи слабо G_S-разрешимой алгебры

$$\big(\langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap P)\big)/\big((\langle A\rangle \cap K)/(\langle A\rangle \cap P)\big) \cong \langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap K) \cong (\langle A\rangle + K)/K.$$

Поскольку класс слабо G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{WG_S}$, будучи радикальным, замкнут относительно взятия расширений, алгебра $\langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap P)$ и все изоморфные ей алгебры принадлежат этому классу. С другой стороны, алгебра $(\langle A\rangle + P)/P \cong \langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap P)$ не является слабо G_S-разрешимой ввиду того, что идеал P был выбран среди элементов множества $\mathcal{L}$?! Поэтому алгебра R/P является WG_S-полупростой и $\tilde{G}_S$-полупервичной. Допустим, что идеал P совпадает с пересечением двух строго содержащих его идеалов J_1 и J_2 алгебры R, $P = J_1 \cap J_2$. По выбору идеала P ни один из идеалов J_s, $s = 1, 2$, не является элементом множества $\mathcal{L}$, что гарантирует слабую G_S-разрешимость алгебры $(\langle A\rangle + J_s)/J_s$ и изоморфной ей алгебры $\langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap J_s)$. При этом алгебра $\langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap J_s)$ изоморфна фактор-алгебре алгебры $\langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap P)$ по её идеалу $(\langle A\rangle \cap J_s)/(\langle A\rangle \cap P)$, который изоморфен идеалу $(\langle A\rangle \cap J_s + J_{s'})/J_{s'}$ алгебры $(\langle A\rangle + J_{s'})/J_{s'}$, где $\{s, s'\} = \{1, 2\}$,

$$\langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap J_s) \cong \big(\langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap P)\big)/\big((\langle A\rangle \cap J_s)/(\langle A\rangle \cap P)\big),$$
$$(\langle A\rangle \cap J_s)(\langle A\rangle \cap P) \cong (\langle A\rangle \cap J_s + J_{s'})/J_{s'}.$$

Используя отмеченную нами ранее замкнутость класса слабо G_S-разрешимых алгебр $\mathfrak{M}_{WG_S}$ относительно взятия идеалов и расширений, мы получаем отсюда, что алгебра $\langle A\rangle/(\langle A\rangle \cap P) \cong (\langle A\rangle + P)/P$ является слабо G_S-разрешимой, и тем самым приходим к противоречию с включением идеала P в множество $\mathcal{L}$. Таким образом, идеал P является $\tilde{G}_S$-первичным. По построению он является также примером не содержащего элемент r идеала алгебры R, фактор-алгебра по которому $\tilde{G}_S$-первична и WG_S-полупроста. $\square$

Теоремы 2.8—2.10 применимы и в более привычной ситуации, когда в роли G_S выступает система отображений, перестановочных с гомоморфизмами алгебр из класса $\mathfrak{M}$ в принятом ранее смысле, и для каждой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ множество $G_S(R)$ определяется как множество ограничений отображений из системы G_S на множество пар $\{(R, A) \mid A \in M_S(R)\}$. Заметим, что в таком случае независимость отображений из системы G_S от первого аргумента в смысле теоремы 2.5 автоматически влечёт за собой выполнение первого условия теоремы 2.9.

Для того чтобы наполнить сказанное о локально и слабо G_S-разрешимых радикалах конкретным содержанием, мы приведём ряд наиболее значимых с на-

шей точки зрения примеров применения полученных выводов, детальному рассмотрению которых будет целиком посвящена следующая заключительная часть статьи.

3. Радикалы и системы многочленов

Основные локальные радикалы алгебр (локально конечный, локально нильпотентный или в большей степени общности локально конечный в смысле Ширшова над идеалом основного кольца и локально разрешимый радикалы) представляют собой варианты конструкции слабо G_S-разрешимого радикала по крайней мере в тех случаях, когда они определяют радикалы в смысле Куроша—Амицура на соответствующих классах алгебр. В частности, классы локально нильпотентных и локально разрешимых алгебр $L\mathfrak{R}$ и $L\mathfrak{S}$ над кольцом F можно определить как классы слабо G_S-разрешимых алгебр для свойства $S = (\mathrm{fgs})$ «быть конечно порождённой подалгеброй» и систем отображений $\mathrm{Nil}_{(\mathrm{fgs})} = \{{}_kg\}_{k=1}^{\infty}$ и $\mathrm{Sol}_{(\mathrm{fgs})} = \{{}_{(m)}g\}_{m=0}^{\infty}$, где отображения ${}_kg$ и ${}_{(m)}g$ ставят в соответствие любым алгебре R над F и её конечно порождённой подалгебре A k-ю степень ${}_kg(R,A) = A^k$ и m-й коммутант ${}_{(m)}g(R,A) = A^{(m)}$ подалгебры A при всех $k \geqslant 1$ и $m \geqslant 0$. В данном случае роль основного класса $\mathfrak{M}$ исполняет универсальный класс всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F, и мы имеем дело с упрощённой версией определения слабо G_S-разрешимой алгебры применительно к системам перестановочных с гомоморфизмами алгебр над F отображений $\mathrm{Nil}_{(\mathrm{fgs})}$ и $\mathrm{Sol}_{(\mathrm{fgs})}$ (см. заключительное наблюдение предыдущей части). Классы $L\mathfrak{R} = \mathfrak{U}_{W\,\mathrm{Nil}_{(\mathrm{fgs})}}$ и $L\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_{W\,\mathrm{Sol}_{(\mathrm{fgs})}}$ могут быть включены также в следующую конструкцию.

Пусть $F\langle X\rangle$ — свободная счётно порождённая неассоциативная алгебра над кольцом F с множеством свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ — семейство её непустых подмножеств, S — абстрактное свойство подмножеств алгебр над кольцом F, удовлетворяющее условиям 1)—4) (см. выше), и $\mathcal{P}_S = \{p_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ — система отображений, в которой каждое отображение p_a, $a \in \mathcal{A}$, ставит в соответствие любым алгебре R над F и её S-подмножеству A множество $p_a(R,A)$ всех значений неассоциативных многочленов из множества $\mathcal{P}_a$ на элементах множества A или, что то же самое, множество образов элементов множества $\mathcal{P}_a$ при действии всех гомоморфизмов алгебры $F\langle X\rangle$ в алгебру R, продолжающих отображения множества X в множество A,

$$p_a(R,A) = \mathcal{P}_a(A) = \{f(a_1,\ldots,a_n) \mid f = f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathcal{P}_a,\ a_1,\ldots,a_n \in A\}.$$

Поскольку отображения из системы $\mathcal{P}_S$ перестановочны с гомоморфизмами алгебр над кольцом F, ничто не мешает определить понятие слабо $\mathcal{P}_S$-разрешимой алгебры по описанной ранее схеме, для чего систему $\mathcal{P}_S$ следует отождествить с известной долей условности с системой множеств $\{\mathcal{P}_S(R) \mid R \in \mathfrak{U}\}$, в которой каждой алгебре R над F соответствует множество $\mathcal{P}_S(R)$, состоящее из ограничений отображений из системы $\mathcal{P}_S$ на множество пар $\{(R,A) \mid A \in M_S(R)\}$. Имеются различные варианты реализации классов локально нильпотентных

и локально разрешимых алгебр $L\mathfrak{R}$ и $L\mathfrak{S}$ над кольцом F как классов слабо $\mathcal{P}_S$-разрешимых алгебр $\mathfrak{U}_{W\mathcal{P}_S}$ для подходящих свойств S и семейств подмножеств $\mathcal{P}$ алгебры $F\langle X\rangle$. К примеру, можно снова взять в качестве S свойство (fgs) «быть конечно порождённой подалгеброй» и использовать в качестве $\mathcal{P}$ семейства подмножеств $\mathcal{N} = \{\mathcal{N}_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_k\}_{k\geqslant 0}$, где $\mathcal{N}_n$ — множество одночленов $x_1 \cdots x_n$ со всеми возможными расстановками скобок, $n \geqslant 1$, и $\mathcal{S}_k$ — множество, которое состоит из одного элемента — *k-го многочлена разрешимости* g_k, $k \geqslant 0$. Последний определяется согласно индуктивному правилу: $g_0 = x_1$ и далее

$$g_i(x_1, \ldots, x_{2^i}) = g_{i-1}(x_1, \ldots, x_{2^{i-1}})g_{i-1}(x_{2^{i-1}+1}, \ldots, x_{2^i}) \quad (i \geqslant 1).$$

Тогда классы $L\mathfrak{R}$ и $L\mathfrak{S}$ могут быть определены как классы слабо $\mathcal{N}_{(\mathrm{fgs})}$-разрешимых и слабо $\mathcal{S}_{(\mathrm{fgs})}$-разрешимых алгебр, $L\mathfrak{R} = \mathfrak{U}_{W\mathcal{N}_{(\mathrm{fgs})}}$ и $L\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_{W\mathcal{S}_{(\mathrm{fgs})}}$. Если заменить $\mathcal{N}$ и $\mathcal{S}$ семействами подмножеств $\tilde{\mathcal{N}} = \{\tilde{\mathcal{N}}_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\tilde{\mathcal{S}} = \{\tilde{\mathcal{S}}_k\}_{k\geqslant 0}$, где $\tilde{\mathcal{N}}_n$ и $\tilde{\mathcal{S}}_k$ — подмодули F-модуля $F\langle X\rangle$, первый из которых состоит из всех однородных многочленов степени n, а второй порождается всеми одночленами вида $g_k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{2^k}})$, $j_1, \ldots, j_{2^k} \geqslant 1$, $k \geqslant 0$, то вместо систем отображений $\mathcal{N}_{(\mathrm{fgs})}$ и $\mathcal{S}_{(\mathrm{fgs})}$ мы получим уже знакомые системы отображений $\mathrm{Nil}_{(\mathrm{fgs})} = \tilde{\mathcal{N}}_{(\mathrm{fgs})}$ и $\mathrm{Sol}_{(\mathrm{fgs})} = \tilde{\mathcal{S}}_{(\mathrm{fgs})}$. Поэтому описанная здесь конструкция включает в себя и приведённое ранее описание классов $L\mathfrak{R}$ и $L\mathfrak{S}$ вида $L\mathfrak{R} = \mathfrak{U}_{W\,\mathrm{Nil}_{(\mathrm{fgs})}}$ и $L\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_{W\,\mathrm{Sol}_{(\mathrm{fgs})}}$.

Заметим, что для всякого семейства $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ непустых подмножеств полилинейных многочленов из алгебры $F\langle X\rangle$ класс слабо $\mathcal{P}_{(\mathrm{fgs})}$-разрешимых алгебр $\mathfrak{U}_{W\mathcal{P}_{(\mathrm{fgs})}}$ совпадает с классом слабо $\mathcal{P}'_{(\mathrm{fs})}$-разрешимых алгебр $\mathfrak{U}_{W\mathcal{P}'_{(\mathrm{fs})}}$, определённым для свойства (fs) «быть конечным подмножеством» и семейства подмножеств $\mathcal{P}' = \{\mathcal{P}'_a \mid a \in \mathcal{A}\}$, в котором каждое множество $\mathcal{P}'_a$, $a \in \mathcal{A}$, составляют все возможные значения многочленов из множества $\mathcal{P}_a$ на элементах свободного группоида $\langle X\rangle$, порождённого элементами множества X (образы элементов множества $\mathcal{P}_a$ при действии эндоморфизмов алгебры $F\langle X\rangle$, продолжающих отображения множества X в множество $\langle X\rangle$),

$$\mathcal{P}'_a = \mathcal{P}_a(\langle X\rangle) = \{f(u_1, \ldots, u_n) \mid f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}_a,\ u_1, \ldots, u_n \in \langle X\rangle\}.$$

Действительно, в данном случае для любых алгебры R над кольцом F, её конечного подмножества A и индекса $a \in \mathcal{A}$ элементы множеств $p'_a(R, A)$ и $p_a(R, \langle A\rangle)$ порождают в F-модуле R один подмодуль $Fp'_a(R, A) = Fp_a(R, \langle A\rangle)$ и потому равенства $p'_a(R, A) = \{0\}$ и $p_a(R, \langle A\rangle) = \{0\}$ выполняются или не выполняются одновременно. Следовательно, мы можем представить классы $L\mathfrak{R}$ и $L\mathfrak{S}$ также в виде $L\mathfrak{R} = \mathfrak{U}_{W\mathcal{N}'_{(\mathrm{fs})}}$ и $L\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_{W\mathcal{S}'_{(\mathrm{fs})}}$.

Нашей следующей целью является описание реализаций классов локально конечных алгебр в качестве классов слабо G_S-разрешимых алгебр. Для начала стоит напомнить понятие конечной алгебры и привести его расширенные версии. Алгебры над кольцом F, конечно порождённые как F-модули, называются *конечными над кольцом* F. Конечные алгебры над полем традиционно

называют конечномерными алгебрами над этим полем. Конечная алгебра R над кольцом F называется *конечной в смысле Ширшова над идеалом* I кольца F, если её фактор-алгебра R/IR по идеалу IR, порождённому всеми элементами hr, $h \in I$, $r \in R$, $IR = \{h_1r_1 + \ldots + h_kr_k \mid k \geqslant 1,\ h_1, \ldots, h_k \in I,\ r_1, \ldots, r_k \in R\}$, нильпотентна. Заметим, что в данном случае $R = Fa_1 + \ldots + Fa_n$ для некоторых $n \geqslant 1$, $a_1, \ldots, a_n \in R$, и потому $IR = Ia_1 + \ldots + Ia_n$. Будем говорить, что конечная алгебра R над кольцом F *конечна над идеалом* I кольца F, если её фактор-алгебра R/IR по идеалу IR разрешима. Согласно определению условия конечности и конечности в смысле Ширшова над несобственным идеалом $I = F$ кольца F совпадают между собой и условием конечности над F, а условие конечности (конечности в смысле Ширшова) над нулевым идеалом $I = \{0\}$ сводится к двум условиям: конечности над F и разрешимости (нильпотентности). Классы конечных алгебр над кольцом F, конечных и конечных в смысле Ширшова над идеалом I этого кольца мы будем обозначать символами $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$ и $\mathfrak{R}\mathfrak{F}_I$ соответственно. При этом $\mathfrak{F} = \mathfrak{R}\mathfrak{F}_F = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_F$, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S} = \mathfrak{S}\mathfrak{F}_{\{0\}}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{R} = \mathfrak{R}\mathfrak{F}_{\{0\}}$, где $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{R}$ — классы разрешимых и нильпотентных алгебр над кольцом F.

Следующее ключевое наблюдение является в действительности составной частью доказательства теоремы Шестакова ([5], теорема 7), хотя и не было выделено в нём в виде отдельного утверждения.

Лемма 3.1. *Пусть R — алгебра над кольцом F, порождённая элементами конечного множества B. Для каждого $k \geqslant 1$ обозначим через A_k множество всех произведений элементов множества B длины, меньшей или равной k. Тогда алгебра R конечна над кольцом F, если и только если существует номер $n \geqslant 1$, такой что её F-подмодули FA_n и FA_{2n}, порождённые элементами множеств A_n и A_{2n}, совпадают. Более того, в этом случае F-модуль R равен своему F-подмодулю FA_n, $R = FA_n$.*

Доказательство. Определим множества $\{B_k\}_{k\geqslant 1}$, полагая $B_1 = B$ и далее

$$B_i = \bigcup_{j=1}^{i-1} B_jB_{i-j} \quad (i \geqslant 2),$$

где $B_pB_q = \{bb' \mid b \in B_p,\ b' \in B_q\}$, $p, q \geqslant 1$. Нетрудно заметить, что каждое множество B_k, $k \geqslant 1$, состоит из всех возможных произведений элементов множества B длины k, и следовательно, любое множество A_k, $k \geqslant 1$, представляет собой объединение множеств $B_1, \ldots, B_k$, $A_k = B_1 \cup \ldots \cup B_k$. Понятно также, что алгебра R совпадает с суммой своих F-подмодулей, порождённых элементами множеств B_k, $k \geqslant 1$, $R = \sum\limits_{k\geqslant 1} FB_k$. Если алгебра R конечна над кольцом F, то F-модуль R порождается некоторой конечной системой элементов, которая входит в его подмодуль $FA_m = FB_1 + \ldots + FB_m$, порождённый элементами конечного множества $A_m = B_1 \cup \ldots \cup B_m$, для подходящего $m \geqslant 1$, а значит, имеет место равенство $R = FA_m = FA_{m'}$ при всех $m' > m$.

Предположим теперь, что существует $n \geqslant 1$, при котором в алгебре R выполняется равенство $FA_n = FA_{2n}$, равносильное включению $A_{2n} \subseteq FA_n$. Используя индукцию по p, покажем, что в этом случае $B_p \subseteq FA_n$ для всех $p \geqslant 1$. Данное включение заведомо выполнено при $p = 1, \ldots, 2n$, поскольку $A_n = B_1 \cup \ldots \cup B_n$ и $A_{2n} = B_1 \cup \ldots \cup B_{2n} \subseteq FA_n$. Если предположить, что оно уже установлено при $p = 1, \ldots, q$ для некоторого $q \geqslant 2n$, то при $p = q + 1$

$$B_{q+1} \subseteq FB_{q+1} = \sum_{i=1}^{q} FB_i B_{q+1-i} \subseteq$$
$$\subseteq FA_n A_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} FB_i B_j \subseteq \sum_{k=2}^{2n} FB_k \subseteq FA_{2n} = FA_n.$$

Шаг индукции доказан полностью. Следовательно, $B_p \subseteq FA_n$ для любого $p \geqslant 1$ и

$$R = \sum_{k \geqslant 1} FB_k = FA_n.$$

Таким образом, в рассматриваемой ситуации алгебра R порождается как F-модуль элементами конечного множества A_n и потому конечна над кольцом F. $\square$

Принято говорить, что алгебра R над кольцом F удовлетворяет полиномиальному тождеству $f = 0$, определяемому многочленом $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ из свободной алгебры $F\langle X \rangle$ над F (см. выше), если $f(r_1, \ldots, r_n) = 0$ для всех $r_1, \ldots, r_n \in R$, т. е. многочлен f принадлежит ядру любого гомоморфизма $F\langle X \rangle \to R$ алгебр $F\langle X \rangle$ и R. Вместе с тем под полиномиальными тождествами алгебр из конкретного многообразия алгебр $\mathfrak{H}$ над кольцом F обычно понимают тождества, определяемые элементами свободной счётно порождённой алгебры $F_{\mathfrak{H}}\langle X \rangle$ из многообразия $\mathfrak{H}$. При этом тождество $g = 0$, которое отвечает элементу g алгебры $F_{\mathfrak{H}}\langle X \rangle$, интерпретируется как тождество, определяемое любым из его прообразов в алгебре $F\langle X \rangle$ при действии эпиморфизма $F\langle X \rangle \to F_{\mathfrak{H}}\langle X \rangle$, продолжающего отождествление $x_k \mapsto x_k$, $x_k \in X$.

Следствие 3.2. *Пусть R — алгебра над кольцом F, порождённая элементами конечного множества B, I — идеал кольца F и $\mathcal{P}$ — непустое множество полилинейных многочленов из алгебры $F\langle X \rangle$. Тогда алгебра R конечна над кольцом F и её фактор-алгебра R/IR по идеалу IR удовлетворяет всем тождествам $f = 0$, $f \in \mathcal{P}$, в том и только в том случае, если существует номер $m \geqslant 1$, такой что F-подмодули FA_m и FA_{2m} алгебры R, порождённые элементами множеств A_m и A_{2m}, равны друг другу и множество*

$$\mathcal{P}(A_m) = \{f(a_1, \ldots, a_n) \mid f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P},\ a_1, \ldots, a_n \in A_m\}$$

значений элементов множества $\mathcal{P}$ на элементах множества A_m содержится в идеале IR, где, как и в лемме 3.1, множество A_k состоит из всех произведений элементов множества B длины, не больше чем k, $k \geqslant 1$.

Доказательство. Необходимым и достаточным условием конечности алгебры R над кольцом F является согласно лемме 3.1 совпадение её F-подмодулей

FA_m и FA_{2m} для некоторого $m \geqslant 1$, которое в свою очередь эквивалентно равенству $R = FA_m$.

Остаётся заметить, что конечная алгебра $R = FA_m$ над кольцом F тогда и только тогда удовлетворяет всем тождествам $f = 0$, $f \in \mathcal{P}$, по модулю своего идеала IR (т. е. эти тождества выполняются на её фактор-алгебре R/IR), когда имеет место включение $F\mathcal{P}(R) = F\mathcal{P}(A_m) \subseteq IR$, равносильное включению $\mathcal{P}(A_m) \subseteq IR$, где $\mathcal{P}(R)$ — множество значений элементов множества $\mathcal{P}$ на элементах множества R, $F\mathcal{P}(R)$ — порождённый его элементами F-подмодуль, совпадающий с F-подмодулем $F\mathcal{P}(A_m)$, порождённым элементами множества $\mathcal{P}(A_m)$, вследствие полилинейности многочленов из $\mathcal{P}$. $\square$

Хорошо известно, что класс $\mathfrak{RF}_I$ конечных алгебр в смысле Ширшова над идеалом I кольца F замкнут относительно взятия конечно порождённых подалгебр и конечно порождённых идеалов (см. [5, леммы 1 и 2; 6, леммы 7 и 8 на с. 131]). Покажем, что теми же свойствами обладает класс $\mathfrak{SF}_I$ конечных алгебр над идеалом I кольца F.

Лемма 3.3. *Если алгебра R над кольцом F конечна над некоторым идеалом I кольца F, то все конечно порождённые подалгебры и конечно порождённые идеалы алгебры R конечны над идеалом I.*

Доказательство. Приводимые ниже рассуждения существенным образом используют идеи [5]. Предполагается, что алгебра R над кольцом F является конечной над его идеалом I, а значит, она конечно порождена как F-модуль, $R = Fr_1 + \ldots + Fr_n$ для некоторых $n \geqslant 1$, $r_1, \ldots, r_n \in R$, и разрешима по модулю своего идеала IR, $R^{(m)} \subseteq IR = Ir_1 + \ldots + Ir_n$ для подходящего $m \geqslant 0$. Обозначим через T подалгебру алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(R)$ F-модуля R, состоящую из всех тех эндоморфизмов ψ этого модуля, которые отображают его в подмодуль IR, $\psi(R) \subseteq IR$. Для каждого такого эндоморфизма ψ можно подобрать элементы $\{h_{ij}^{\psi}\}_{i,j=1}^{n}$ из идеала I, позволяющие записать

$$\psi(r_i) = \sum_{j=1}^{n} h_{ji}^{\psi} r_j \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Согласно теореме Гамильтона—Кэли матрица $M_\psi = (h_{ji}^{\psi}) \in \mathrm{M}_n(I)$ аннулируется своим характеристическим многочленом

$$\chi_\psi = \chi_\psi(x) = x^n + \chi_{\psi,n-1}x^{n-1} + \ldots + \chi_{\psi,0} \in F[x],$$

и этот же многочлен χ_ψ аннулирует эндоморфизм ψ в алгебре $\mathrm{End}_F(R)$. Так как коэффициенты $\chi_{\psi,n-1}, \ldots, \chi_{\psi,0}$ многочлена χ_ψ принадлежат идеалу I, отсюда следует, что эндоморфизм ψ порождает в алгебре $\mathrm{End}_F(R)$ конечную над кольцом F подалгебру $\langle\psi\rangle$, которая является нильпотентной по модулю своего идеала $I\langle\psi\rangle$ и имеет индекс нильпотентности не выше $n+1$ по его модулю (оценку индекса нильпотентности можно понизить до n, добавив к подалгебре $\langle\psi\rangle$ тождественный эндоморфизм F-модуля R). Поэтому любая подалгебра S алгебры T удовлетворяет условию $\varphi^{n+1} \in I\langle\varphi\rangle \subseteq IS$ для всех $\varphi \in S$, т. е. она

является ниль-алгеброй ограниченного индекса $n+1$ по модулю своего идеала IS или, что то же самое, её фактор-алгебра S/IS удовлетворяет ассоциативному тождеству $x^{n+1}=0$. По теореме Левицкого—Амицура (см., например, [2, теорема 3 на с. 86; 14, следствие 1.6.26 на с. 46 и теорема 1.6.36 на с. 48]) последнее гарантирует локальную нильпотентность алгебры S/IS.

Рассмотрим произвольную конечно порождённую подалгебру A алгебры R. Как и алгебра R, её подалгебра A конечна над кольцом F ввиду того, что класс конечных алгебр $\mathfrak{F}$ над кольцом F замкнут относительно взятия конечно порождённых подалгебр (см. [5, лемма 1; 6, лемма 7 на с. 131]). Кроме того, мы располагаем включением $B=A^{(m)}\subseteq R^{(m)}\subseteq IR$. Так как конечные алгебры над кольцом F имеют конечные над ним степени и коммутанты, участвующая в этом включении подалгебра B конечна над кольцом F. В алгебре умножений $M(R)$ алгебры R, которая, напомним, представляет собой подалгебру алгебры $\mathrm{End}_F(R)$, порождённую всеми операторами левого и правого умножения на элементы алгебры R, подалгебре B отвечает порождённая операторами левого и правого умножения на её элементы подалгебра $M^R(B)$. Конечность алгебры R и её подалгебры B над кольцом F позволять выбрать конечные семейства порождающих алгебры $M(R)$ и её подалгебры $M^R(B)$ среди операторов левого и правого умножения на элементы любых конечных систем порождающих F-модулей R и B соответственно. Поскольку по построению конечно порождённая алгебра $M^R(B)$ является подалгеброй определённой нами ранее алгебры T (точнее, $M^R(B)\subseteq M^R(IR)\subseteq T$), она нильпотентна по модулю своего идеала $IM^R(B)$, а значит, $M^R(B)^k\subseteq IM^R(B)$ для некоторого $k\geqslant 1$. Отсюда сразу следует, что

$$FM^R(B)^k(B)\subseteq IM^R(B)(B)=I\bigl(FM^R(B)(B)\bigr)\subseteq IB,$$

где $M^R(B)(B)$ и $M^R(B)^k(B)$ — множества образов элементов алгебры B при действии элементов алгебры $M^R(B)$ и её k-й степени $M^R(B)^k$, $FM^R(B)(B)$ и $FM^R(B)^k(B)$ — порождённые элементами этих множеств F-подмодули алгебры B, которые совпадают с порождёнными их элементами подгруппами аддитивной группы данной алгебры и являются, как нетрудно заметить, её идеалами. Множества $M^R(B)(B)$ и $M^R(B)^k(B)$ могут быть определены и как множества образов элементов алгебры B при действии элементов её алгебры умножений $M(B)$ и k-й степени $M(B)^k$ алгебры $M(B)$, а потому $FM^R(B)(B)=$ $=FM(B)(B)=B^2$ и $FM^R(B)^k(B)=FM(B)^k(B)$.

По теореме Прочези—Смолла (см., например, [14, предложение 1.3.1 на с. 14]) алгебра эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(M)$ любого n-порождённого F-модуля M является гомоморфным образом некоторой подалгебры алгебры матриц $\mathrm{M}_n(F)$. Конечность алгебры $\mathrm{M}_n(F)$ над кольцом F и уже отмеченная ранее локальная конечность над кольцом F конечных алгебр над ним гарантируют локальную конечность над F алгебры $\mathrm{End}_F(M)$. Поэтому рассматриваемые нами подалгебры $M(R)$ и $M^R(B)$ алгебры $\mathrm{End}_F(R)$ являются не только конечно порождёнными, но и конечными над кольцом F.

Для любой алгебры C над кольцом F определим её нормализованные степени $C^{|l|}$, $l \geqslant 1$, по следующему индуктивному правилу: $C^{|1|} = C$ и далее $C^{|i+1|} = C^{|i|}C + CC^{|i|}$ для всех $i \geqslant 1$, где $C^{|i|}C$ и $CC^{|i|}$ — F-подмодули алгебры C, порождённые всеми элементами $c'c$ и cc', $c \in C$, $c' \in C^{|i|}$. Как и обычные степени, нормализованные степени алгебры C являются её идеалами и формируют невозрастающую с ростом их показателей цепочку. Кроме того, для каждого $i \geqslant 1$ выполняется очевидное включение $FM(C)(C^{|i|}) \supseteq C^{|i+1|}$ и вместе с ним включение $FM(C)^i(C) \supseteq C^{|i+1|}$, где $M(C)(C^{|i|})$ и $M(C)^i(C)$ — множества образов элементов i-й нормализованной степени $C^{|i|}$ алгебры C и элементов алгебры C при действии элементов её алгебры умножений $M(C)$ и i-й степени $M(C)^i$ последней, $FM(C)(C^{|i|})$ и $FM(C)^i(C)$ — F-подмодули и также идеалы алгебры C, порождённые элементами множеств $M(C)(C^{|i|})$ и $M(C)^i(C)$. Используя индукцию по j, можно показать, что обычные и нормализованные степени алгебры C связаны между собой включениями $C^{2^j} \subseteq C^{|j+1|} \subseteq C^{j+1}$ для всех $j \geqslant 0$. Основание индукции при $j = 0$ заведомо выполнено. Если эти включения уже установлены для некоторого $p \geqslant 0$, то для доказательства шага индукции достаточно заметить, что

$$C^{2^{p+1}} = \sum_{i=1}^{2^{p+1}-1} C^i C^{2^{p+1}-i} = \sum_{i=1}^{2^p} (C^i C^{2^{p+1}-i} + C^{2^{p+1}-i} C^i) \subseteq$$
$$\subseteq CC^{2^p} + C^{2^p}C \subseteq CC^{|p+1|} + C^{|p+1|}C = C^{|p+2|} \subseteq CC^{p+1} + C^{p+1}C \subseteq C^{p+2}.$$

Применяя эти наблюдения к алгебре B, мы получаем, что

$$B^{(k)} \subseteq B^{2^k} \subseteq B^{|k+1|} \subseteq FM(B)^k(B) \subseteq IB,$$

и следовательно,

$$A^{(m+k)} = (A^{(m)})^{(k)} = B^{(k)} \subseteq IA^{(m)} = IB \subseteq IA.$$

Таким образом, мы показали, что любая конечно порождённая подалгебра A алгебры R конечна над идеалом I кольца F. Остаётся заметить, что конечно порождённые идеалы алгебры R конечны над кольцом F (см. [5, лемма 1]), а значит, как и все её конечно порождённые подалгебры, они являются конечными и над идеалом I. □

Согласно сделанным наблюдениям классы $\mathfrak{RF}_I$ и $\mathfrak{SF}_I$ содержатся в классах локально $\mathfrak{RF}_I$-алгебр $L\mathfrak{RF}_I$ и локально $\mathfrak{SF}_I$-алгебр $L\mathfrak{SF}_I$ для любого идеала I основного кольца F. Нашей следующей целью является описание классов $L\mathfrak{RF}_I$ и $L\mathfrak{SF}_I$ в терминах слабо G_S-разрешимых классов, что позволит применить к ним теорему 2.10.

Пусть, как и прежде, $F\langle X\rangle$ — свободная неассоциативная алгебра над кольцом F со счётным множеством свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. Для любых $k, n, m \geqslant 1$, $l \geqslant 0$ и идеала I кольца F мы будем использовать следующие обозначения: B_{mn} — множество произведений элементов $x_1, \ldots, x_n$ длины m, $A_{mn} = B_{1n} \cup \ldots \cup B_{mn}$, $A'_{mn} = B_{m+1\,n} \cup \ldots \cup B_{2m\,n}$, $\mathcal{N}_{kmn} = \mathcal{N}_k(A_{mn})$ —

множество произведений элементов множества A_{mn} длины k, $\mathcal{S}_{lmn} = \mathcal{S}_l(A_{mn}) = g_l(A_{mn})$ — множество значений l-го многочлена разрешимости g_l на элементах множества A_{mn}, J_{mn} — множество отображений множества A'_{mn} в F-подмодуль FA_{mn} алгебры $F\langle X\rangle$, порождённый элементами множества A_{mn}, $N_{kmn}(I)$ и $S_{lmn}(I)$ — множества отображений множеств $\mathcal{N}_{kmn}$ и $\mathcal{S}_{lmn}$ в F-подмодуль (I-подмодуль) IA_{mn} алгебры $F\langle X\rangle$, состоящий из конечных I-линейных комбинаций элементов множества A_{mn}, и для всех $\alpha \in J_{mn}$, $\beta \in N_{kmn}(I)$ и $\gamma \in S_{lmn}(I)$

$$\mathcal{F}_\alpha = \{u + \alpha(u) \mid u \in A'_{mn}\}, \quad \mathcal{N}_\beta = \{v + \beta(v) \mid v \in \mathcal{N}_{kmn}\},$$
$$\mathcal{S}_\gamma = \{w + \gamma(w) \mid w \in \mathcal{S}_{lmn}\}.$$

Для произвольных алгебры R над кольцом F и её непустого конечного конечного подмножества A, $|A| = n \geqslant 1$, мы зафиксируем любой гомоморфизм $\pi_{R,A}\colon F\langle X\rangle \to R$ алгебр $F\langle X\rangle$ и R, отображающий подмножество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ множества X на множество A, $A = \pi_{R,A}(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \{\pi_{R,A}(x_1), \ldots, \pi_{R,A}(x_n)\}$, и переводит остальные элементы X в нуль, $\pi_{R,A}(x_s) = 0$ при всех $s > n$, и определим систему подмножеств

$$\mathcal{F}(R, A) = \{\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha) \mid \alpha \in J_{mn},\ m \geqslant 1\}$$

и для всякого идеала I кольца F системы подмножеств

$$\mathcal{NF}_I(R, A) = \{\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta) \mid \alpha \in J_{mn},\ \beta \in N_{kmn}(I),\ m, k \geqslant 1\},$$
$$\mathcal{SF}_I(R, A) = \{\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma) \mid \alpha \in J_{mn},\ \gamma \in S_{lmn}(I),\ m \geqslant 1,\ l \geqslant 0\}.$$

Понятно, что системы $\mathcal{F}(R, A)$, $\mathcal{NF}_I(R, A)$ и $\mathcal{SF}_I(R, A)$ не зависят от гомоморфизма $\pi_{R,A}$, участвующего в их определении, поскольку замена $\pi_{R,A}$ равносильна применению ко всем множествам $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta$ и $\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma$ некоторого эндоморфизма алгебры $F\langle X\rangle$, переставляющего местами первые n порождающих $x_1, \ldots, x_n$.

Для $\mathcal{X} = \mathcal{F}, \mathcal{NF}_I, \mathcal{SF}_I$ выделим множество $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})}(R)$ всех возможных отображений g, ставящих в соответствие каждому непустому конечному подмножеству A выбранной алгебры R или в нашей прежней терминологии каждой паре (R, A), $A \in M_{(\mathrm{fs})}(R)$, подмножество $g(R, A)$ из системы $\mathcal{X}(R, A)$, и обозначим через $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})}$ систему множеств $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})}(R)$, где R пробегает все алгебры над кольцом F, $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})} = \{\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})}(R) \mid R \in \mathfrak{U}\}$.

По построению для любых алгебры R над кольцом F и её конечного подмножества A, $|A| = n \geqslant 1$, каждое подмножество $\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha)$, $\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta)$ и $\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma)$, $\alpha \in J_{mn}$, $\beta \in N_{kmn}(I)$, $\gamma \in S_{lmn}(I)$, $m, k \geqslant 1$, $l \geqslant 0$, представляет собой множество значений в R неассоциативных многочленов от элементов $x_1, \ldots, x_n$, формирующих соответствующее множество $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta$ и $\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma$, в результате подстановки вместо $x_1, \ldots, x_n$ элементов $\pi_{R,A}(x_1), \ldots, \pi_{R,A}(x_n)$, составляющих подмножество A. Кроме того, согласно лемме 3.1, её следствию 3.2 и определению множеств $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta$ и $\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma$ подалгебра $\langle A\rangle$ алгебры R, порождённая элементами подмножества A, конечна над кольцом F,

конечна в смысле Ширшова над идеалом I кольца F или (и) конечна над этим идеалом, если и только если $\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha) = \{0\}$, $\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta) = \{0\}$ или (и) $\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma) = \{0\}$ для некоторых $\alpha \in J_{mn}$, $\beta \in N_{kmn}(I)$, $\gamma \in S_{lmn}(I)$, $k, m \geqslant 1$, $l \geqslant 0$.

Рассмотрим произвольный гомоморфизм $\varphi\colon R \to R'$ алгебр R и R' над кольцом F, конечное подмножество A алгебры R, $|A| = n \geqslant 1$, и образ $A' = \varphi(A)$ подмножества A при действии гомоморфизма φ, $1 \leqslant |A'| = n' \leqslant n$. Обозначим через τ эндоморфизм алгебры $F\langle X\rangle$, действующий на её свободных порождающих по следующему правилу: $\tau(x_i) = 0$ при всех $i > n$ и $\tau(x_i) = x_j$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$, где $\varphi\bigl(\pi_{R,A}(x_i)\bigr) = \pi_{\varphi(R),A'}(x_j)$, $1 \leqslant j \leqslant n'$. Эндоморфизм τ отображает любое подмножество B_{mn}, $m \geqslant 1$, алгебры $F\langle X\rangle$ на её подмножество $\tau(B_{mn}) = B_{mn'}$, и, как следствие, при всех $k, m \geqslant 1$ и $l \geqslant 0$

$$\tau(A_{mn}) = A_{mn'}, \quad \tau(A'_{mn}) = A'_{mn'}, \quad \tau(\mathcal{N}_{kmn}) = \mathcal{N}_{kmn'}, \quad \tau(\mathcal{S}_{lmn}) = \mathcal{S}_{lmn'}.$$

Помимо этого, по определению эндоморфизма τ

$$\pi_{\varphi(R),A'}\bigl(\tau(f)\bigr) = \varphi\bigl(\pi_{R,A}(f)\bigr) \quad (f \in F\langle X\rangle).$$

Для каждого $m \geqslant 1$ и любого элемента u' множества $B_{mn'}$ выберем и зафиксируем один из прообразов u' в множестве B_{mn} при действии эндоморфизма τ и обозначим этот прообраз через $\sigma(u')$. Поскольку алгебра $F\langle X\rangle$ является свободным F-модулем с базой из элементов свободного группоида $\langle X\rangle$, мы можем корректным образом продолжить отображение σ по F-линейности до мономорфизма F-модулей $\sum\limits_{m\geqslant 1} FB_{mn'}$ и $\sum\limits_{m\geqslant 1} FB_{mn}$, который мы будем обозначать также через σ. Теперь для любых $k, m \geqslant 1$, $l \geqslant 0$, идеала I кольца F и отображений $\alpha' \in J_{mn'}$, $\beta' \in N_{kmn'}(I)$ и $\gamma' \in S_{lmn'}(I)$ мы определим отображения $\alpha'' \in J_{mn}$, $\beta'' \in N_{kmn}(I)$ и $\gamma'' \in S_{lmn}(I)$, полагая для всех $u \in A'_{mn}$, $v \in \mathcal{N}_{kmn}$ и $w \in \mathcal{S}_{lmn}$

$$\alpha''(u) = \sigma\Bigl(\alpha'\bigl(\tau(u)\bigr)\Bigr), \quad \beta''(v) = \sigma\Bigl(\beta'\bigl(\tau(v)\bigr)\Bigr), \quad \gamma''(w) = \sigma\Bigl(\gamma'\bigl(\tau(w)\bigr)\Bigr).$$

Тогда с учётом сказанного ранее

$$\begin{aligned}
&\tau(\mathcal{F}_{\alpha''}) = \tau(\{u + \alpha''(u) \mid u \in A'_{mn}\}) = \bigl\{\tau(u) + \alpha'\bigl(\tau(u)\bigr) \mid u \in A'_{mn}\bigr\} = \\
&\quad = \{u' + \alpha'(u') \mid u' \in A'_{mn'}\} = \mathcal{F}_{\alpha'}, \quad \pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{F}_{\alpha'}) = \varphi\bigl(\pi_{R,A}(\mathcal{F}_{\alpha''})\bigr), \\
&\tau(\mathcal{N}_{\beta''}) = \tau(\{v + \beta''(v) \mid u \in \mathcal{N}_{kmn}\}) = \bigl\{\tau(v) + \beta'\bigl(\tau(v)\bigr) \mid v \in \mathcal{N}_{kmn}\bigr\} = \\
&\quad = \{v' + \beta'(v') \mid v' \in \mathcal{N}_{kmn'}\} = \mathcal{N}_{\beta'}, \quad \pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{N}_{\beta'}) = \varphi\bigl(\pi_{R,A}(\mathcal{N}_{\beta''})\bigr), \\
&\tau(\mathcal{S}_{\gamma''}) = \tau(\{w + \gamma''(w) \mid w \in \mathcal{S}_{lmn}\}) = \bigl\{\tau(w) + \gamma'\bigl(\tau(w)\bigr) \mid w \in \mathcal{S}_{lmn}\bigr\} = \\
&\quad = \{w' + \gamma'(w') \mid w' \in \mathcal{S}_{lmn'}\} = \mathcal{S}_{\gamma'}, \quad \pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{S}_{\gamma'}) = \varphi\bigl(\pi_{R,A}(\mathcal{S}_{\gamma''})\bigr),
\end{aligned}$$

и следовательно,

$$\begin{aligned}
\pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{F}_{\alpha'} \cup \mathcal{N}_{\beta'}) &= \varphi\bigl(\pi_{R,A}(\mathcal{F}_{\alpha''} \cup \mathcal{N}_{\beta''})\bigr), \\
\pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{F}_{\alpha'} \cup \mathcal{S}_{\gamma'}) &= \varphi\bigl(\pi_{R,A}(\mathcal{F}_{\alpha''} \cup \mathcal{S}_{\gamma''})\bigr).
\end{aligned}$$

В то же время на основе произвольных отображений $\alpha \in J_{mn}$, $\beta \in N_{kmn}(I)$ и $\gamma \in S_{lmn}(I)$ можно определить отображения $\hat{\alpha} \in J_{mn'}$, $\hat{\beta} \in N_{kmn'}(I)$ и $\hat{\gamma} \in S_{lmn'}(I)$, действующие на всех $u' \in A'_{mn'}$, $v' \in \mathcal{N}_{kmn'}$ и $w' \in \mathcal{S}_{lmn'}$ следующим образом:

$$\hat{\alpha}(u') = \tau\Big(\alpha\big(\sigma(u')\big)\Big), \quad \hat{\beta}(v') = \tau\Big(\beta\big(\sigma(v')\big)\Big), \quad \hat{\gamma}(w') = \tau\Big(\gamma\big(\sigma(w')\big)\Big).$$

Это позволяет получить соотношения

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\hat{\alpha}} &= \{u' + \hat{\alpha}(u') \mid u' \in A'_{mn'}\} = \tau\big(\{\sigma(u') + \alpha\big(\sigma(u')\big) \mid u' \in A'_{mn'}\}\big) \subseteq \\
&\subseteq \tau(\{u + \alpha(u) \mid u \in A'_{mn}\}) = \tau(\mathcal{F}_\alpha), \quad \pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{F}_{\hat{\alpha}}) \subseteq \varphi\big(\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha)\big), \\
\mathcal{N}_{\hat{\beta}} &= \{v' + \hat{\beta}(v') \mid v' \in \mathcal{N}_{kmn'}\} = \tau\big(\{\sigma(v') + \beta\big(\sigma(v')\big) \mid v' \in \mathcal{N}_{kmn'}\}\big) \subseteq \\
&\subseteq \tau(\{v + \alpha(v) \mid v \in \mathcal{N}_{kmn}\}) = \tau(\mathcal{N}_\beta), \quad \pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{N}_{\hat{\beta}}) \subseteq \varphi\big(\pi_{R,A}(\mathcal{N}_\beta)\big), \\
\mathcal{S}_{\hat{\gamma}} &= \{w' + \hat{\gamma}(w') \mid w' \in \mathcal{S}_{lmn'}\} = \tau\big(\{\sigma(w') + \gamma\big(\sigma(w')\big) \mid w' \in \mathcal{S}_{lmn'}\}\big) \subseteq \\
&\subseteq \tau(\{w + \gamma(w) \mid w \in \mathcal{S}_{lmn}\}) = \tau(\mathcal{S}_\gamma), \quad \pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{S}_{\hat{\gamma}}) \subseteq \varphi\big(\pi_{R,A}(\mathcal{S}_\gamma)\big),
\end{aligned}$$

а также включения

$$\pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{F}_{\hat{\alpha}} \cup \mathcal{N}_{\hat{\beta}}) \subseteq \varphi\big(\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta)\big), \quad \pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{F}_{\hat{\alpha}} \cup \mathcal{S}_{\hat{\gamma}}) \subseteq \varphi\big(\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma)\big).$$

В соответствии с полученными выводами для любых $k, m \geqslant 1$, $l \geqslant 0$ и идеала I кольца F равенство $\pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{F}_{\alpha'}) = \{0\}$, $\pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{F}_{\alpha'} \cup \mathcal{N}_{\beta'}) = \{0\}$ или $\pi_{\varphi(R),A'}(\mathcal{F}_{\alpha'} \cup \mathcal{S}_{\gamma'}) = \{0\}$ выполняется при некотором $\alpha' \in J_{mn'}$, $\beta' \in N_{kmn'}(I)$ или $\gamma' \in S_{lmn'}(I)$ тогда и только тогда, когда соответствующее равенство $\varphi\big(\pi_{R,A}(\mathcal{F}_\alpha)\big) = \{0\}$, $\varphi(\pi_{R,A}\big(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta)\big) = \{0\}$ или $\varphi(\pi_{R,A}\big(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma)\big) = \{0\}$ выполняется при каком-то $\alpha \in J_{mn}$, $\beta \in N_{kmn}(I)$ или $\gamma \in S_{lmn}(I)$. Поэтому мы можем с полным на то основанием говорить о классах слабо $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимых алгебр $\mathfrak{U}_{W\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})}}$ над кольцом F применительно к системам $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})} = \mathcal{F}_{(\mathrm{fs})}, \mathcal{N}\mathcal{F}_{I\,(\mathrm{fs})}$, $\mathcal{S}\mathcal{F}_{I\,(\mathrm{fs})}$, $I \lhd F$, и свойству (fs) «быть конечным подмножеством». В силу сказанного ранее классы $\mathfrak{U}_{W\mathcal{F}_{(\mathrm{fs})}}$, $\mathfrak{U}_{W\mathcal{N}\mathcal{F}_{I\,(\mathrm{fs})}}$ и $\mathfrak{U}_{W\mathcal{S}\mathcal{F}_{I\,(\mathrm{fs})}}$ совпадают также с классами $L\mathfrak{F}$, $L\mathfrak{R}\mathfrak{F}_I$ и $L\mathfrak{R}\mathfrak{S}_I$ локально конечных над кольцом F, локально конечных в смысле Ширшова над идеалом I кольца F и локально конечных над этим идеалом алгебр соответственно.

Если $\mathfrak{M}$ — подкласс универсального класса $\mathfrak{U}$ всех алгебр над кольцом F, то его подклассы $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{R}\mathfrak{F}_I$ и $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I$, $I \lhd F$, можно определить как классы слабо $\mathcal{F}'_{(\mathrm{fs})}$-разрешимых, слабо $\mathcal{N}\mathcal{F}_I{}'_{(\mathrm{fs})}$-разрешимых и слабо $\mathcal{S}\mathcal{F}_I{}'_{(\mathrm{fs})}$-разрешимых алгебр из класса $\mathfrak{M}$ для систем $\mathcal{X}'_{(\mathrm{fs})} = \{\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})}(R) \mid R \in \mathfrak{M}\}$, $\mathcal{X} = \mathcal{F}, \mathcal{N}\mathcal{F}_I, \mathcal{S}\mathcal{F}_I$. В ситуации, когда рассматриваемый класс $\mathfrak{M}$ замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов и класс $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_{W\mathcal{F}'_{(\mathrm{fs})}}$, $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{R}\mathfrak{F}_I = \mathfrak{M}_{W\mathcal{N}\mathcal{F}_I{}'_{(\mathrm{fs})}}$ или $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{S}\mathfrak{F}_I = \mathfrak{M}_{W\mathcal{S}\mathcal{F}_I{}'_{(\mathrm{fs})}}$, $I \lhd F$, является его радикальным подклассом, мы будем обозначать нижний радикал, определяемый на классе $\mathfrak{M}$ данным радикальным подклассом, через LF, LNF_I или LSF_I. Вполне естественно, что при этом сами радикалы LF, LNF_I и LSF_I мы будем называть *локально конечным* (над кольцом F) *радикалом*, *локально конечным*

в смысле Ширшова над идеалом I радикалом и *локально конечным над идеалом I радикалом*, $I \lhd F$. Отметим, что несобственному идеалу $I = F$ кольца F отвечают равные друг другу радикалы LF, LNF_F и LSF_F, а соответствующие его нулевому идеалу $I = \{0\}$ радикалы $LNF_{\{0\}}$ и $LSF_{\{0\}}$ совпадают с *локально нильпотентным радикалом* LN и *локально конечным и разрешимым радикалом* LSF.

Теорема 3.4. *Если для некоторого идеала I кольца F радикал LNF_I или (и) LSF_I определён на замкнутом относительно взятия идеалов, конечно порождённых подалгебр и гомоморфных образов классе алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F, то этот радикал является специальным на классе $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Для начала заметим, что в данной ситуации нет необходимости в использовании условий $\widetilde{\mathcal{NF}'}_{I\,(\mathrm{fs})}$-специальности и $\widetilde{\mathcal{SF}'}_{I\,(\mathrm{fs})}$-специальности, так как они не внесут ничего нового в свойства рассматриваемых наднильпотентных радикалов LNF_I и LSF_I по сравнению с обычным условием специальности.

Утверждение теоремы напрямую следует из теоремы 2.10. Действительно, системы отображений $\mathcal{F}'_{(\mathrm{fs})}$, $\mathcal{NF}_I{}'_{(\mathrm{fs})}$ и $\mathcal{SF}_I{}'_{(\mathrm{fs})}$, $I \lhd F$, удовлетворяют первым двум условиям теоремы 2.9, третьему условию теоремы 2.10 (см. лемму 3.3 и [5, леммы 1 и 2]) и её четвёртому условию (см. предыдущее обсуждение). Вместе с тем замкнутость класса $\mathfrak{M}$ относительно взятия конечно порождённых подалгебр и использование свойства (fs) «быть конечным подмножеством» обеспечивают выполнение первого и второго условий теоремы 2.10. □

Часть теоремы 3.4, касающаяся радикала LNF_I, составляет содержание теоремы Шестакова (см. [5, теорема 7]). Следующий результат представляет собой расширение теоремы 3.4 на случай нётерова основного кольца F.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутый относительно взятия идеалов, конечно порождённых подалгебр и гомоморфных образов класс алгебр над нётеровым кольцом F и $\mathfrak{X}$ — замкнутый относительно взятия конечно порождённых подалгебр подкласс класса конечных над кольцом F алгебр из класса $\mathfrak{M}$, для которого класс $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}$ локально $\mathfrak{X}$-алгебр из класса $\mathfrak{M}$ является радикальным подклассом $\mathfrak{M}$. Тогда значение $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}(R)$ нижнего радикала, определяемого классом локально $\mathfrak{X}$-алгебр $L\mathfrak{X}$, на любой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ совпадает с пересечением всех её идеалов J, таких что фактор-алгебра R/J является $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}$-полупростой и любые два ненулевых идеала алгебры R/J имеют ненулевое пересечение. В частности, в случае если класс $\mathfrak{X}$ содержит все конечные над кольцом F алгебры с нулевым умножением из класса $\mathfrak{M}$, радикал $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}$ является специальным на классе $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Отметим в первую очередь, что в рассматриваемой ситуации класс $\mathfrak{X}$ входит в класс $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X} = \mathfrak{M} \cap L(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{X})$ локально $\mathfrak{X}$-алгебр из класса $\mathfrak{M}$. Поскольку по условию класс $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}$ является радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$, он замкнут относительно взятия гомоморфных образов, и,

как следствие, это же верно для его подкласса $\mathfrak{X}$ (с учётом того, что алгебры из класса $\mathfrak{X}$ являются конечно порождёнными и, более того, конечными над кольцом F). Поэтому класс локально $\mathfrak{X}$-алгебр $L\mathfrak{X}$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов и $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}$-радикал $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}(R)$ любой алгебры R над кольцом F является наибольшим из её идеалов, принадлежащих расширению $R(L\mathfrak{X})$ класса $L\mathfrak{X}$ в классе всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F (см. раздел 1.1). Радикал $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}$ совпадает на классе $\mathfrak{M}$ с нижним радикалом $\mathcal{T}_{\mathfrak{M}\cap L\mathfrak{X}}$, определяемым на $\mathfrak{M}$ его радикальным подклассом $\mathfrak{M}\cap L\mathfrak{X}$. Следовательно, радикал $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}(R) = \mathcal{T}_{\mathfrak{M}\cap L\mathfrak{X}}(R)$ произвольной алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ является её наибольшим локально $\mathfrak{X}$-идеалом.

Для доказательства теоремы необходимо (и достаточно) установить существование для всякого элемента r алгебры R из класса $\mathfrak{M}$, лежащего вне её радикала $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}(R)$, идеала P алгебры R, такого что он не содержит элемента r, не может быть представлен в виде пересечения двух строго содержащих его идеалов алгебры R и фактор-алгебра R/P является $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}$-полупростой, $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}(R/P) = \{0\}$. Так как идеал $(r)_R$ алгебры R, порождённый элементом r, не является локально $\mathfrak{X}$-идеалом, он содержит конечно порождённую подалгебру B, которая не принадлежит классу $\mathfrak{X}$. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех таких идеалов J алгебры R, что образ $\varphi_J(B) = (B+J)/J$ подалгебры B при действии естественного эпиморфизма $\varphi_J\colon R \to R/J$ алгебры R на её фактор-алгебру R/J не содержится в классе $\mathfrak{X}$. Множество $\mathcal{L}$ включает в себя по меньшей мере нулевой идеал алгебры R и потому не пусто. Допустим, что частично упорядоченное по включению множество $\mathcal{L}$ не является индуктивным, а значит, не содержит объединения $H = \bigcup\limits_{a\in A} H_a$ некоторого своего упорядоченного подмножества $\{H_a \mid a \in A\}$. В таком случае образ $\varphi_H(B) = (B+H)/H$ подалгебры B в фактор-алгебре R/H при действии эпиморфизма $\varphi_H\colon R \to R/H$ входит в класс $\mathfrak{X}$ и, следовательно, является конечной алгеброй над кольцом F. Выберем и зафиксируем какую-то одну конечную систему порождающих C алгебры B, $|C| = n \geqslant 1$. Согласно сделанным ранее замечаниям конечность над кольцом F алгебры $\varphi_H(B) = \langle\varphi_H(C)\rangle$, порождённой элементами образа $\varphi_H(C)$ множества C при действии эпиморфизма φ_H, равносильна выполнению равенства $\pi_{\varphi_H(R),\varphi_H(C)}(\mathcal{F}_\alpha) = \{0\}$ для подходящего $\alpha \in J_{mn'}$, где $m \geqslant 1$ и $n' = |\varphi_H(C)|$, что возможно лишь тогда, когда $\varphi_H\bigl(\pi_{R,C}(\mathcal{F}_{\alpha'})\bigr) = \{0\}$, $\pi_{R,C}(\mathcal{F}_{\alpha'}) \subseteq H = \operatorname{Ker}\varphi_H$ для некоторого $\alpha' \in J_{mn}$. В свою очередь включение конечного множества $\pi_{R,C}(\mathcal{F}_{\alpha'})$ в идеал H влечёт за собой его включение в идеал H_a для какого-то $a \in A$ и равенство нулю его образа при действии эпиморфизма $\varphi_{H_a}\colon R \to R/H_a$ алгебр R и R/H_a, $\varphi_{H_a}\bigl(\pi_{R,C}(\mathcal{F}_{\alpha'})\bigr) = \{0\}$. Отсюда следует выполнение равенства $\pi_{\varphi_{H_a}(R),\varphi_{H_a}(C)}(\mathcal{F}_{\alpha''}) = \{0\}$ для соответствующего $\alpha'' \in J_{mn''}$, $n'' = |\varphi_{H_a}(C)|$, и конечность над кольцом F образа $\varphi_{H_a}(B) = \langle\varphi_{H_a}(C)\rangle = (B+H_a)/H_a$ подалгебры B при действии эпиморфизма φ_{H_a} (см. выше). Поэтому F-модуль $(B+H_a)/H_a$ конечно порождён. Вследствие нётеровости кольца F каждый конечно порождённый модуль над ним, в частности $(B+H_a)/H_a$, является нётеровым. Это позволяет выбрать в упорядоченном по

включению множестве подмодулей $\{V_{a'} = (B \cap H_{a'} + H_a)/H_a \mid a' \in A\}$ модуля $(B + H_a)/H_a$ (множестве образов идеалов $\{B \cap H_{a'} \mid a' \in A\}$ подалгебры B при действии эпиморфизма φ_{H_a}) наибольший элемент $V_{a''}$, $a'' \in A$, равный объединению всех элементов данного множества. Тогда

$$V_{a''} = (B \cap H_{a''} + H_a)/H_a = \bigcup_{a' \in A} V_{a'} = \Big(\bigcup_{a' \in A} (B \cap H_{a'}) + H_a \Big)/H_a =$$
$$= \Big(B \cap \Big(\bigcup_{a' \in A} H_{a'} \Big) + H_a \Big)/H_a = (B \cap H + H_a)/H_a,$$

а потому $B \cap H_{a''} + H_a = B \cap H + H_a$ и $B \cap H_{a''} + B \cap H_a = B \cap H$. Полагая $a''' = a''$ в случае $H_a \subseteq H_{a''}$ и $a''' = a$ иначе, мы получаем отсюда, что $B \cap H_{a'''} = B \cap H$ и

$$(B + H)/H \cong B/(B \cap H) = B/(B \cap H_{a'''}) \cong (B + H_{a'''})/H_{a'''}.$$

Последнее невозможно ввиду того, что алгебра $(B + H)/H$ из класса $\mathfrak{X}$ не может быть изоморфна алгебре $(B + H_{a'''})/H_{a'''}$, не принадлежащей этому классу по выбору идеала $H_{a'''}$, $H_{a'''} \in \mathcal{L}$. Таким образом, множество $\mathcal{L}$ является индуктивным, и по лемме Цорна в нём имеется как минимум один максимальный элемент. Выберем любой из таких элементов и обозначим его через P. Как и всякий элемент множества $\mathcal{L}$, идеал P не содержит элемента r (включение элемента r в идеал J из множества $\mathcal{L}$ влечёт за собой включение в этот идеал подалгебры B и тем самым исключает принадлежность классу $\mathfrak{X}$ нулевой алгебры $(B + J)/J$, что противоречит понятию класса). По выбору идеала P каждый строго содержащий его идеал P' алгебры R не входит в множество $\mathcal{L}$, и следовательно, образ $\varphi_{P'}(B) = (B + P')/P'$ подалгебры B при действии эпиморфизма $\varphi_{P'} \colon R \to R/P'$ алгебр R и R/P' содержится в классе $\mathfrak{X}$. Допустим, что алгебра P'/P является локально $\mathfrak{X}$-алгеброй. Как уже отмечалось, класс $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}$ локально $\mathfrak{X}$-алгебр из класса $\mathfrak{M}$ включает в себя класс $\mathfrak{X}$. Кроме того, он замкнут относительно взятия идеалов (взятия подалгебр из класса $\mathfrak{M}$) и, будучи радикальным подклассом класса $\mathfrak{M}$, относительно взятия расширений. Следовательно, в данном случае алгебра $B/(B \cap P)$, представляющая собой расширение своего локально $\mathfrak{X}$-идеала

$$(B \cap P')/(B \cap P) \cong (B + P)/P \cap P'/P = (B \cap P' + P)/P$$

при помощи алгебры из класса $\mathfrak{X}$

$$\big(B/(B \cap P)\big)/\big((B \cap P')/(B \cap P)\big) \cong B/(B \cap P') \cong (B + P')/P',$$

содержится в классе $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}$ вместе со всеми изоморфными ей алгебрами. Поскольку алгебра $B/(B \cap P) \cong (B + P)/P$ является гомоморфным образом конечно порождённой алгебры B, она конечно порождённая. Поэтому она входит не только в класс $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}$, но и в его подкласс $\mathfrak{X}$, что противоречит выбору идеала P среди элементов множества $\mathcal{L}$. Отсюда следует, что фактор-алгебра R/P алгебры R по её идеалу P не имеет ненулевых локально $\mathfrak{X}$-идеалов и является $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}$-полупростой алгеброй (см. начало доказательства).

Предположим теперь, что идеал P равен пересечению двух строго содержащих его идеалов P_1 и P_2 алгебры R, $P = P_1 \cap P_2$. Тогда в силу сделанных выше наблюдений для каждого $s = 1, 2$ алгебра $(B + P_s)/P_s \cong B/(B \cap P_s)$ должна принадлежать классу $\mathfrak{X}$. При этом она изоморфна фактор-алгебре алгебры $B/(B \cap P)$ по её идеалу $(B \cap P_s)/(B \cap P)$, который изоморфен идеалу $(B \cap P_s + P_{s'})/P_{s'}$ алгебры $(B + P_{s'})/P_{s'}$, где $\{s, s'\} = \{1, 2\}$,

$$B/(B \cap P_s) \cong \big(B/(B \cap P)\big)/\big((B \cap P_s)/(B \cap P)\big),$$
$$(B \cap P_s)/(B \cap P) \cong (B \cap P_s + P_{s'})/P_{s'}.$$

Вновь используя отмеченные ранее замкнутость класса $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}$ относительно взятия идеалов и расширений, включение в него класса $\mathfrak{X}$ и конечную порождённость алгебры $B/(B \cap P)$, мы получаем отсюда, что алгебра $B/(B \cap P)$ входит в класс $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}$ и его подкласс $\mathfrak{X}$, и опять приходим к противоречию с выбором идеала P. Значит, идеал P не может быть представлен в виде пересечения двух строго содержащих его идеалов алгебры R. Таким образом, найденный нами идеал P алгебры R удовлетворяет всем необходимым условиям: он не содержит элемента r, фактор-алгебра R/P является $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}$-полупростой и любой ненулевой идеал алгебры R/P имеет ненулевые пересечения со всеми её ненулевыми идеалами.

Поэтому радикал $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ равен пересечению всех её идеалов, фактор-алгебры по которым $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}$-полупросты и не содержат пар (конечных систем) ненулевых идеалов с нулевым пересечением. Остаётся заметить, что в случае если рассматриваемый класс $\mathfrak{X}$ включает в себя все конечные над кольцом F алгебры с нулевым умножением из класса $\mathfrak{M}$, $P\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} \cap \mathfrak{A} \subseteq \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}$, радикал $\mathcal{T}_{\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}}$ на классе $\mathfrak{M}$, совпадающий с ограничением на $\mathfrak{M}$ радикала $\mathcal{T}_{L\mathfrak{X}}$, является наднильпотентным и вследствие полученных выводов специальным. $\square$

Следующий весьма важный пример слабо G_S-разрешимого радикала представляет собой обобщённую версию конструкции слабо разрешимого радикала, предложенной В. А. Парфёновым [10]. Начнём с описания необходимой для его построения операции $\circ$ на свободной неассоциативной алгебре $F\langle X\rangle$ над кольцом F со счётным множеством свободных порождающих $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. Для каждого ненулевого элемента f алгебры $F\langle X\rangle$ обозначим через $n(f)$ наименьший из натуральных индексов i, таких что f входит в подалгебру $F\langle x_1, \ldots, x_i\rangle$ алгебры $F\langle X\rangle$, порождённую первыми i свободными порождающими $x_1, \ldots, x_i \in X$. Определим $\circ$-произведение $p \circ q$ любых двух ненулевых элементов p и q алгебры $F\langle X\rangle$, записанных в виде $p = p(x_1, \ldots, x_m)$ и $q = q(x_1, \ldots, x_k)$ с $m = n(p)$ и $k = n(q)$, полагая

$$p \circ q = g = g(x_1, \ldots, x_{mk}) = p\big(q(x_1, \ldots, x_k), \ldots, q(x_{(m-1)k+1}, \ldots, x_{mk})\big).$$

Понятно, что определение элемента $p \circ q$ алгебры $F\langle X\rangle$ не зависит от выбранных форм записи элементов p и q как многочленов от $x_1, \ldots, x_m$ и $x_1, \ldots, x_k$ (в частности, их формы записи можно считать несократимыми) и потому полностью

корректно. Более того, элемент $p \circ q$ останется неизменным при использовании любой записи $p = p'(x_1, \ldots, x_{m'})$ элемента p с $m' \geqslant m$,

$$p \circ q = g = g'(x_1, \ldots, x_{m'k}) = p'\big(q(x_1, \ldots, x_k), \ldots, q(x_{(m'-1)k+1}, \ldots, x_{m'k})\big).$$

Отметим также, что $n(p \circ q) \leqslant mk = n(p)n(q)$, если $p \circ q \neq 0$. Продолжим операцию $\circ$ на всю алгебру $F\langle X\rangle$, доопределив $0 \circ h = h \circ 0 = 0$ для всех $h \in F\langle X\rangle$. Элемент x_1 играет роль нейтрального элемента относительно этой операции, поскольку $x_1 \circ h = h \circ x_1 = h$ для всякого $h \in F\langle X\rangle$. Независимость определения операции $\circ$ от выбранной формы записи первого аргумента гарантирует, что для любых $a, b, c \in F\langle X\rangle$

— если $b \circ c \neq 0$ и $n(b \circ c) = n(b)n(c)$, то $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
— если $b \circ c = 0$, то $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = 0$.

Напомним, что ненулевой элемент f алгебры $F\langle X\rangle$ называется *нормальным многочленом*, если каждый ненулевой одночлен в его несократимой записи зависит от всех элементов из некоторого конечного подмножества X_f множества X. Если в любой из ненулевых одночленов в несократимой записи нормального многочлена f все элементы множества X_f входят по одному разу, то многочлен f называется *полилинейным*.

Замечание 3.6. Множества всех нормальных и полилинейных многочленов алгебры $F\langle X\rangle$, дополненные её нулевым элементом, образуют полугруппы с нулём и единицей относительно операции $\circ$.

Доказательство. Для всякого нормального многочлена f из алгебры $F\langle X\rangle$ индекс $n(f)$ равен наибольшему из индексов i порождающих x_i, входящих в множество X_f, $n(f) = \max\limits_{x_i \in X_f} i$. Следовательно, в соответствии с определением операции $\circ$ произведение $g \circ h$ любых двух нормальных многочленов g и h из алгебры $F\langle X\rangle$ или равно нулю, или является ненулевым нормальным многочленом, для которого $n(g \circ h) = n(g)n(h)$ и

$$X_{g \circ h} = \{x_{i+n(h)s} \mid x_i \in X_h,\ s = 0, \ldots, n(g) - 1\}.$$

Если многочлены g и h полилинейны и многочлен $g \circ h$ отличен от нуля, то он также является полилинейным многочленом. Для завершения доказательства остаётся лишь воспользоваться отмеченными ранее свойствами операции $\circ$. $\square$

Замечание 3.7. Свободная счётно порождённая неассоциативная алгебра $F\langle X\rangle$ над кольцом F образует полугруппу (точнее, полугруппу с нулём и единицей) относительно операции $\circ$, если и только если F является областью целостности.

Доказательство. Пусть кольцо F — область целостности и Q — его поле частных. Тогда мы можем рассматривать алгебру $F\langle X\rangle$ в качестве F-подалгебры свободной неассоциативной алгебры $Q\langle X\rangle$ над полем Q с той же счётной системой свободных порождающих X и можем отождествить операцию $\circ$ на алгебре $F\langle X\rangle$ с ограничением на неё операции $\circ$, определённой на алгебре $Q\langle X\rangle$.

Рассмотрим любые два ненулевых элемента p и q алгебры $Q\langle X\rangle$, которые мы запишем в виде

$$p(x_1,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{l}p_i(x_1,\dots,x_m),\quad q(x_1,\dots,x_k)=\sum_{j=1}^{l'}q_j(x_1,\dots,x_k),$$

где $m=n(p)$, $k=n(q)$, $p_i=p_i(x_1,\dots,x_m)$ и $q_j=q_j(x_1,\dots,x_k)$ — ненулевые однородные по порождающим x_m и x_k многочлены из алгебры $Q\langle X\rangle$ степеней $d_i=\deg_{x_m}p_i$ по x_m и $d'_j=\deg_{x_k}q_j$ по x_k соответственно, причём $d_l,d'_{l'}>0$, $d_l>\ldots>d_1\geqslant 0$ при $l>1$ и $d'_{l'}>\ldots>d'_1\geqslant 0$ при $l'>1$. Многочлен

$$p\circ q=p\bigl(q(x_1,\dots,x_k),\dots,q(x_{(m-1)k+1},\dots,x_{mk})\bigr)$$

представляет собой конечную сумму одночленов от порождающих $x_1,\dots,x_{mk}$, степени которых по порождающей x_{mk} не превосходят $d_ld'_{l'}$, а часть этой суммы, состоящая из одночленов степени $d_ld'_{l'}$ по x_{mk}, формирует многочлен

$$f=\begin{cases}p_l\bigl(q_{l'}(x_1,\dots,x_k)\bigr) & \text{при } m=1,\\ p_l\bigl(q(x_1,\dots,x_k),\dots,\\ \quad q(x_{(m-2)k+1},\dots,x_{(m-1)k}),q_{l'}(x_{(m-1)k+1},\dots,x_{mk})\bigr) & \text{при } m>1.\end{cases}$$

Заметим, что многочлен f является ненулевым. Для $m=1$ это немедленно следует из того, что при любом $s\geqslant 1$ всякое произведение s ненулевых одночленов из несократимой записи многочлена $q_{l'}(x_1,\dots,x_k)$ отлично от нуля и совпадение двух таких произведений возможно только в том случае, когда они являются произведениями одного набора одночленов, записанными в одном порядке с одинаковой расстановкой скобок. Нетривиальность многочлена f в случае $m>1$ можно установить с помощью известной теоремы Куроша о подалгебрах свободных алгебр (см. [8, теорема 1 и её следствия]). Действительно, положим $a_j=q\bigl(x_{(j-1)k+1},\dots,x_{jk}\bigr)$, $j=1,\dots,m-1$, $a_m=q_{l'}\bigl(x_{(m-1)k+1},\dots,x_{mk}\bigr)$, а затем выберем для каждого многочлена a_j, $j=1,\dots,m$, один из одночленов максимальной полной степени в его несократимой записи, который обозначим через $x(a_j)$. Поскольку при любом $j=1,\dots,m$ в записи многочлена a_j и многочленов $a_{j'}$, $j'=1,\dots,m$, $j'\neq j$, участвуют элементы из непересекающихся подмножеств множества X, старший член $x(a_j)$ многочлена a_j заведомо не принадлежит подалгебре алгебры $Q\langle X\rangle$, порождённой старшими частями $x(a_{j'})$ многочленов $a_{j'}$, $j'=1,\dots,m$, $j'\neq j$. Следовательно, согласно упомянутой теореме Куроша (см. также её доказательство) подалгебра $\langle a_1,\dots,a_m\rangle$ алгебры $Q\langle X\rangle$, порождённая многочленами $a_1,\dots,a_m$, является свободной алгеброй с системой свободных порождающих $\{a_1,\dots,a_m\}$. Последнее означает, в частности, что $f=p_l(a_1,\dots,a_m)\neq 0$. Поэтому $n(p\circ q)=n(p)n(q)$ для любых ненулевых элементов p и q из алгебры $Q\langle X\rangle$. Полученный нами вывод и свойства операции $\circ$, отмеченные ранее, гарантируют ассоциативность операции $\circ$ на алгебре $Q\langle X\rangle$. Таким образом, в данной ситуации группоид $(Q\langle X\rangle,\circ)$ и его подгруппоид $(F\langle X\rangle,\circ)$ являются полугруппами с нулём 0 и единицей x_1.

В то же время если кольцо F содержит ненулевые делители нуля s и t, $st = 0$, то

$$x_3 \circ \big((x_1 + sx_1x_2) \circ (tx_1x_2)\big) = x_3 \circ (tx_1x_2) = tx_5x_6 \neq$$
$$\neq \big(x_3 \circ (x_1 + sx_1x_2)\big) \circ (tx_1x_2) = (x_5 + sx_5x_6) \circ (tx_1x_2) = tx_9x_{10},$$

а значит, в этом случае группоид $(F\langle X\rangle, \circ)$ не является ассоциативным. $\square$

Назовём семейство $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ непустых конечных подмножеств алгебры $F\langle X\rangle$ *замкнутым*, если для любых индексов $a, b \in \mathcal{A}$ найдётся индекс $c \in \mathcal{A}$, такой что

$$\mathcal{P}_c \subseteq \mathcal{P}_a \circ \mathcal{P}_b = \{p \circ q \mid p \in \mathcal{P}_a,\ q \in \mathcal{P}_b\}.$$

Например, всякому подгруппоиду G группоида $(F\langle X\rangle, \circ)$ отвечает замкнутое семейство подмножеств $\hat{G} = \big\{\{g\} \mid g \in G\big\}$, каждое из которых состоит из одного единственного элемента группоида G. В частности, порождённому элементом x_1x_2 группоиду $\langle x_1x_2\rangle^{(\circ)}$ с единицей x_1 (в силу замечания 3.6 он также является моноидом) соответствует уже встречавшееся нам прежде замкнутое семейство подмножеств $\mathcal{S} = \big\{\mathcal{S}_k = \{g_k\}\big\}_{k\geqslant 0}$, где g_k — k-й многочлен разрешимости или, что то же самое, k-я степень относительно операции $\circ$ первого многочлена разрешимости $g_1 = x_1x_2$, $k \geqslant 0$. Используя построения из начала этого раздела, мы можем определить на основе любого замкнутого семейства подмножеств $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ и свойства (fs) «быть конечным подмножеством» замкнутую систему отображений $\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})} = \{p_a\}_{a\in\mathcal{A}}$, которые перестановочны с гомоморфизмами алгебр над кольцом F и не зависят от первого аргумента в смысле теоремы 2.5. Более того, такая система $\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$, отождествляемая естественным образом с системой множеств $\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})} = \{\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}(R) \mid R \in \mathfrak{U}\}$, удовлетворяет всем условиям теоремы 2.8, что позволяет нам сразу сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.8. *Для любого замкнутого семейства подмножеств $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ класс слабо $\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимых алгебр $\mathfrak{U}_{W\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}}$ над кольцом F является радикальным подклассом класса всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F и совпадает со своим расширением $A\mathfrak{U}_{W\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}}$ в классе $\mathfrak{U}$.*

Будем говорить, что замкнутое семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ является *идеально замкнутым*, если для любых индексов $a, b \in \mathcal{A}$ можно подобрать индекс $c \in \mathcal{A}$, такой что $\mathcal{P}_c \subseteq I_a \cap I_b$, где I_d — идеал алгебры $F\langle X\rangle$, который порождают элементы её подмножества $\mathcal{P}_d$ и их образы при действии эндоморфизмов $F\langle X\rangle$, продолжающих отображения множества X в себя, $d \in \mathcal{A}$.

Теорема 3.9. *Слабо $\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимый радикал $W\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$, отвечающий любому идеально замкнутому семейству подмножеств $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_a \mid a \in \mathcal{A}\}$, является $\tilde{\mathcal{P}}_{(\mathrm{fs})}$-специальным.*

Доказательство. Следует установить только то, что любой элемент r алгебры R над кольцом F, не принадлежащий её слабо $\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимому радикалу

$W\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}(R)$, не входит в по меньшей мере один из $\tilde{\mathcal{P}}_{(\mathrm{fs})}$-первичных идеалов алгебры R, фактор-алгебры по которым $W\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$-полупросты. Идеал $(r)_R$ алгебры R, порождённый таким элементом r, не является слабо $\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимым и потому содержит конечное подмножество A, удовлетворяющее следующему условию: $p_a(R, A) = \mathcal{P}_a(A) \neq \{0\}$ для всех $a \in \mathcal{A}$. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех тех идеалов алгебры R, которые не включают в себя целиком ни одно из конечных подмножеств $\mathcal{P}_a(A)$, $a \in \mathcal{A}$. Множество $\mathcal{L}$ содержит во всяком случае нулевой идеал $\{0\}$ и не является пустым. Поскольку вместе с элементом r в любой из содержащих его идеалов алгебры R входят порождённый им идеал $(r)_R$ и его подмножества $\mathcal{P}_a(A)$, $a \in \mathcal{A}$, элемент r не принадлежит ни одному из идеалов из множества $\mathcal{L}$. Заметим, что в рассматриваемой ситуации выполняются все условия теоремы 2.9 за исключением, быть может, последнего из них. Поэтому с помощью рассуждений из доказательства данной теоремы можно установить как индуктивность частично упорядоченного по включению множество $\mathcal{L}$, так и то, что фактор-алгебра R/P алгебры R по любому из её идеалов P, выбранных среди максимальных элементов множества $\mathcal{L}$, существующих в нём согласно лемме Цорна, $W\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$-полупроста и, следовательно, $\tilde{\mathcal{P}}_{(\mathrm{fs})}$-полупервична. Предположим, что такой идеал P представим в виде пересечения двух строго содержащих его идеалов P_1 и P_2 алгебры R, $P = P_1 \cap P_2$. Так как идеал P является максимальным элементом множества $\mathcal{L}$, идеалы P_1 и P_2 не принадлежат этому множеству, а значит, для каждого $i = 1, 2$ найдётся хотя бы один индекс $a_i \in \mathcal{A}$, при котором множество $\mathcal{P}_{a_i}(A)$ и вместе с ним множество $I_{a_i}(A)$ всех значений элементов идеала I_{a_i} алгебры $F\langle X\rangle$ на элементах множества A входят в идеал P_i, $\mathcal{P}_{a_i}(A) \subseteq I_{a_i}(A) \subseteq P_i$. Идеальная замкнутость семейства $\mathcal{P}$ позволяет подобрать индекс $a_3 \in \mathcal{A}$, для которого $\mathcal{P}_{a_3} \subseteq I_{a_1} \cap I_{a_2}$ и, как следствие, $\mathcal{P}_{a_3}(A) \subseteq P_1 \cap P_2 = P$, но $P \in \mathcal{L}$, $P \cap \mathcal{P}_{a'}(A) \neq \mathcal{P}_{a'}(A)$ при всех $a' \in \mathcal{A}$?! Таким образом, идеал P является $\tilde{\mathcal{P}}_{(\mathrm{fs})}$-первичным. Остаётся заметить, что $\tilde{\mathcal{P}}_{(\mathrm{fs})}$-первичный идеал P удовлетворяет всем необходимым требованиям, поскольку он не содержит элемента r и фактор-алгебра R/P алгебры R по этому идеалу является $W\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$-полупростой (см. выше). Поэтому слабо $\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимый радикал $W\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}(R)$ любой алгебры R над кольцом F равен пересечению всех её $\tilde{\mathcal{P}}_{(\mathrm{fs})}$-первичных идеалов, фактор-алгебры по которым $W\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$-полупросты. $\square$

Замечание 3.10. Если идеально замкнутое семейство подмножеств $\mathcal{P} = \{\mathcal{P}_a \mid a \in \mathcal{A}\}$ содержит подмножество $\mathcal{P}_{a'}$, $a' \in \mathcal{A}$, в несократимые записи элементов которого не входят одночлены первой степени от элементов множества X, то слабо $\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимый радикал $W\mathcal{P}_{(\mathrm{fs})}$ является специальным.

Доказательство. Достаточно заметить, что в этом случае для любых алгебры R над кольцом F и её идеала I $\tilde{p}_{a'}(R, I) = \bigcup\limits_{A \in M_{(\mathrm{fs})}(I)} \mathcal{P}_{a'}(A) \subseteq I^2$, а затем воспользоваться замечанием 2.2. $\square$

Применяя полученные нами выводы к идеально замкнутому семейству $\mathcal{S}$, можно установить специальность слабо разрешимого радикала $T = W\mathcal{S}_{(\mathrm{fs})}$, доказанную ранее В. А. Парфёновым [10] для алгебр Ли.

В группоиде $(F\langle X\rangle, \circ)$ многочлены, зависящие от порождающей x_1, формируют подгруппоид $(F\langle x_1\rangle, \circ)$, который согласно замечанию 3.6 является также полугруппой с нулём 0 и единицей x_1. При этом $\circ$-произведение $p \circ q$ любых элементов $p = p(x_1)$ и $q = q(x_1)$ полугруппы $(F\langle x_1\rangle, \circ)$ может быть интерпретировано как их суперпозиция, так как оно совпадает с образом элемента p при действии эндоморфизма алгебры $F\langle x_1\rangle$, продолжающего отображение $x_1 \mapsto q$, $p \circ q = p(q) = p\bigl(q(x_1)\bigr)$.

Пусть теперь G — произвольная подполугруппа полугруппы $(F\langle x_1\rangle, \circ)$. Тогда на базе связанного с полугруппой G замкнутого семейства подмножеств $\hat{G} = \{\{g\} \mid g \in G\}$ и свойств (fs) и $(\mathrm{fs})_k$ «быть конечным подмножеством» и «быть подмножеством из не более чем k элементов для некоторого $k \geqslant 1$» можно определить замкнутые системы перестановочных с гомоморфизмами алгебр над кольцом F и не зависящих от первого аргумента в смысле теоремы 2.5 отображений $\hat{G}_{(\mathrm{fs})} = \{\hat{g}\}_{g\in G}$ и $\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k} = \{\hat{g}\}_{g\in G}$, где в зависимости от рассматриваемой системы отображение $\hat{g} = p_g$, отвечающее элементу g полугруппы G, ставит в соответствие любым алгебре R над кольцом F и её конечному подмножеству или подмножеству, состоящему из не более чем k элементов, A множество значений многочлена g на его элементах $\hat{g}(R, A) = g(A) = \{g(r) \mid r \in A\}$. Понятно также, что системы $\hat{G}_{(\mathrm{fs})}$ и $\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k}$, $k \geqslant 1$, отождествляемые с системами множеств $\hat{G}_{(\mathrm{fs})} = \bigl\{\hat{G}_{(\mathrm{fs})}(R) \mid R \in \mathfrak{U}\bigr\}$ и $\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k} = \bigl\{\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k}(R) \mid R \in \mathfrak{U}\bigr\}$, $k \geqslant 1$, подчиняются всем требованиям теоремы 2.8.

Замечание 3.11. Для любого $k \geqslant 1$ класс слабо $\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k}$-разрешимых алгебр $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k}}$ над кольцом F является радикальным подклассом класса всех алгебр $\mathfrak{U}$ над этим кольцом и совпадает со своим расширением $A\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k}}$ в классе $\mathfrak{U}$. Если семейство подмножеств $\hat{G}$ является идеально замкнутым, то все классы $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k}}$, $k \geqslant 1$, равны друг другу и совпадают с классом слабо $\hat{G}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимых алгебр $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})}}$.

Доказательство. Как и теорема 3.8, первое из этих утверждений немедленно следует из теоремы 2.8. Остаётся убедиться в совпадении классов $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k}}$, $k \geqslant 1$, и $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})}}$ в ситуации, когда семейство подмножеств $\hat{G}$ является идеально замкнутым. Поскольку классы $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k}}$, $k \geqslant 1$, формируют невозрастающую с ростом k цепочку, пересечение элементов которой совпадает с классом $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})}}$, для этого следует установить только равенство классов $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})_1}}$ и $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})}}$. Идеальная замкнутость семейства $\hat{G}$ равносильна тому, что для любых элементов g и g' полугруппы G в пересечение порождённых ими идеалов $(g)_{F\langle x_1\rangle} = F\langle x_1\rangle \cap I_g$ и $(g')_{F\langle x_1\rangle} = F\langle x_1\rangle \cap I_{g'}$ алгебры $F\langle x_1\rangle$ входит по меньшей мере один элемент полугруппы G, $G \cap (g)_{F\langle x_1\rangle} \cap (g')_{F\langle x_1\rangle} = G \cap I_g \cap I_{g'} \neq \varnothing$, где в соответствии с принятыми ранее обозначениями I_a — идеал алгебры $F\langle X\rangle$, порождённый всеми элементами $a(x_i)$, $i \geqslant 1$, $a \in G$. Если алгебра R над кольцом F является слабо $\hat{G}_{(\mathrm{fs})_1}$-разрешимой, то каждый её элемент r аннулируется

некоторым элементом g_r полугруппы G, $g_r(r) = 0$. Идеальная замкнутость семейства $\hat{G}$ позволяет подобрать для всякого конечного подмножества A такой алгебры R элемент g полугруппы G, который принадлежит пересечению идеалов $(g_r)_{F\langle x_1\rangle}$, $r \in A$,

$$g \in \left(\bigcap_{r\in A} (g_r)_{F\langle x_1\rangle}\right) \cap G,$$

и, как следствие, аннулирует все элементы множества A,

$$g(r) \in (g_r)_{F\langle x_1\rangle}(r) = \{f(r) \mid f \in (g_r)_{F\langle x_1\rangle}\} \subseteq \big(g_r(r)\big)_R = \{0\} \quad (r \in A).$$

Поэтому алгебра R является также слабо $\hat{G}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимой. Таким образом, в случае если семейство $\hat{G}$ является идеально замкнутым, классы $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})_1}}$ и $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})}}$ равны друг другу, а значит, совпадают со всеми классами $\mathfrak{U}_{W\hat{G}_{(\mathrm{fs})_k}}$, $k \geqslant 1$. $\square$

Будет уместно привести ряд примеров полугрупп G, которым отвечают идеально замкнутые семейства подмножеств $\hat{G}$. Простейшими среди них являются полугруппа $(F\langle x_1\rangle, \circ)$ и порождённая любым её элементом f полугруппа $\langle f\rangle^{(\circ)}$, которая состоит из всех положительных $\circ$-степеней $f^{(m)}$, $m \geqslant 1$, элемента f, определяемых индуктивным правилом: $f^{(1)} = f$ и далее $f^{(l+1)} = f^{(l)} \circ f$ для каждого $l \geqslant 1$. При этом сохраняют свою силу стандартные степенные соотношения $f^{(i)} \circ f^{(j)} = f^{(i+j)}$ и $\big(f^{(i)}\big)^{(j)} = f^{(ij)}$ для всех $i, j \geqslant 1$. Примерами полугрупп с таким условием могут служить также подполугруппы полугруппы $(F\langle x_1\rangle, \circ)$, замкнутые относительно умножения, определённого на алгебре $F\langle x_1\rangle$. В частности, если основное кольцо F является областью целостности, то одной из подобных полугрупп является подполугруппа $(F\langle x_1\rangle \setminus \{0\}, \circ)$ всех ненулевых элементов полугруппы $(F\langle x_1\rangle, \circ)$ (здесь мы пользуемся отсутствием в алгебре $F\langle x_1\rangle$ ненулевых делителей нуля и доказательством замечания 3.7). Ещё одним примером подобного рода является отвечающая любому идеалу I кольца F подполугруппа (точнее подмоноид) G_I полугруппы $(F\langle x_1\rangle, \circ)$, состоящая из всех многочленов вида

$$u + \sum_{i\geqslant 1} f_i u_i,$$

где $u, u_i \in \langle x_1\rangle$, $f_i \in I$ и $\deg u_i < \deg u$, $i \geqslant 1$. Последние два примера полугруппы G без нуля являются для нас особенно важными, поскольку по понятным причинам интерес представляет исследование только нетривиальных слабо $\hat{G}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимых радикалов.

В дальнейшем через $\mathcal{W}_I$ и $\mathcal{N}_f$ мы будем обозначать слабо $\hat{G}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимые радикалы, соответствующие полугруппам $G = G_I$ и $G = \langle f\rangle^{(\circ)}$, где I — идеал кольца F и f — элемент алгебры $F\langle x_1\rangle$, все $\circ$-степени которого $f^{(m)}$, $m \geqslant 1$, отличны от нуля. Согласно замечанию 3.10 радикалы $\mathcal{W}_I$, $I \lhd F$, являются специальными, а специальность радикала $\mathcal{N}_f$ может быть обеспечена

требованием отсутствия одночлена единичной степени в несократимой записи многочлена f. Последнее, к примеру, справедливо для элемента $f = x_1^2$, порождающего полугруппу $\langle x_1^2 \rangle^{(\circ)} = \{(x_1^2)^{(m)} = g_m(x_1, \ldots, x_1)\}_{m \geqslant 1}$.

Сказанное здесь имеет непосредственное отношение к понятиям целого элемента и целой алгебры, на которых мы ненадолго остановимся. Назовём элемент r алгебры R над кольцом F *целым* (*целым в смысле Ширшова*) *над идеалом* I этого кольца, если он порождает конечную (конечную в смысле Ширшова) над I подалгебру $\langle r \rangle$ алгебры R. Алгебры над кольцом F, все элементы которых являются целыми (целыми в смысле Ширшова) над его идеалом I, мы будем называть *целыми* (*целыми в смысле Ширшова*) *над идеалом* I. Понятно, что классы целых и целых в смысле Ширшова над идеалом I алгебр замкнуты относительно взятия подалгебр и гомоморфных образов. Нижние радикалы, определяемые этими классами на классе всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F, мы будем называть *верхним целым над идеалом* I *радикалом* и *верхним целым в смысле Ширшова над идеалом* I *радикалом* и будем обозначать их $\mathcal{S}_I$ и $\mathcal{N}_I$ соответственно.

Целые алгебры над идеалом можно определить также в терминах систем множеств отображений, построенных нами ранее для описания классов локально конечных алгебр. Для любых алгебры R над кольцом F и её элемента r обозначим через $\pi_{R,r}$ гомоморфизм $\pi_{R,r}\colon F\langle X \rangle \to R$ алгебр $F\langle X \rangle$ и R, который продолжает отображение, действующее на множестве свободных порождающих X по правилу

$$\varphi_{R,r}(x_i) = \begin{cases} r & \text{при } i = 1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

а затем, используя наши прежние обозначения, выделим систему подмножеств

$$\mathcal{F}(R, r) = \{\pi_{R,r}(\mathcal{F}_\alpha) \mid \alpha \in J_{m1},\ m \geqslant 1\}$$

и для всякого идеала I кольца F системы подмножеств

$$\mathcal{NF}_I(R, r) = \{\pi_{R,r}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta) \mid \alpha \in J_{m1},\ \beta \in N_{km1}(I),\ m, k \geqslant 1\},$$
$$\mathcal{SF}_I(R, r) = \{\pi_{R,r}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma) \mid \alpha \in J_{m1},\ \gamma \in S_{lm1}(I),\ m \geqslant 1,\ l \geqslant 0\}.$$

Далее для $\mathcal{X} = \mathcal{F}, \mathcal{NF}_I, \mathcal{SF}_I$, $I \lhd F$, обозначим через $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})_1}(R)$ множество всех возможных отображений g, которые ставят в соответствие каждому элементу r выбранной алгебры R или в иных терминах каждой паре $(R, \{r\})$, $r \in R$, её подмножество $g(R, r)$ из системы $\mathcal{X}(R, r)$, и через $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})_1}$ — систему множеств $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})_1}(R)$, где R пробегает все алгебры над кольцом F, $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})_1} = \{\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})_1}(R) \mid R \in \mathfrak{U}\}$.

Согласно лемме 3.1, её следствию 3.2 и определению множеств $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta$ и $\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma$ подалгебра $\langle r \rangle$ алгебры R над кольцом F, порождённая её элементом r, конечна над кольцом F, конечна в смысле Ширшова над его идеалом I или (и) конечна над этим идеалом (другими словами, элемент r является целым (целым в смысле Ширшова) над кольцом F, целым в смысле Ширшова над идеалом I или (и) целым над I) в том и только в том случае, если $\pi_{R,r}(\mathcal{F}_\alpha) = \{0\}$,

$\pi_{R,r}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta) = \{0\}$ или (и) $\pi_{R,r}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma) = \{0\}$ для подходящих $\alpha \in J_{m1}$, $\beta \in N_{km1}(I)$, $\gamma \in S_{lm1}(I)$, $k, m \geqslant 1$, $l \geqslant 0$, соответственно.

Понятно также, что для произвольных гомоморфизма $\varphi\colon R \to R'$ алгебр R и R' над кольцом F, элемента r алгебры R и идеала I кольца F

$$\varphi\bigl(\pi_{R,r}(\mathcal{F}_\alpha)\bigr) = \pi_{\varphi(R),\varphi(r)}(\mathcal{F}_\alpha), \quad \varphi\bigl(\pi_{R,r}(\mathcal{N}_\beta)\bigr) = \pi_{\varphi(R),\varphi(r)}(\mathcal{N}_\beta),$$
$$\varphi\bigl(\pi_{R,r}(\mathcal{S}_\gamma)\bigr) = \pi_{\varphi(R),\varphi(r)}(\mathcal{S}_\gamma)$$

и, как следствие,

$$\pi_{\varphi(R),\varphi(r)}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta) = \varphi\bigl(\pi_{R,r}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{N}_\beta)\bigr), \quad \pi_{\varphi(R),\varphi(r)}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma) = \varphi\bigl(\pi_{R,r}(\mathcal{F}_\alpha \cup \mathcal{S}_\gamma)\bigr)$$

при всех $\alpha \in J_{m1}$, $\beta \in N_{km1}(I)$, $\gamma \in S_{lm1}(I)$, $k, m \geqslant 1$ и $l \geqslant 0$. Поэтому мы можем корректным образом с точки зрения принятой ранее терминологии ввести понятие слабо $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})_1}$-разрешимой алгебры и рассматривать класс таких алгебр $\mathfrak{U}_{W\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})_1}}$ над кольцом F для систем множеств $\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})_1} = \mathcal{F}_{(\mathrm{fs})_1}, \mathcal{NF}_{I(\mathrm{fs})_1}, \mathcal{SF}_{I(\mathrm{fs})_1}$, $I \lhd F$, и свойства $(\mathrm{fs})_1$ «быть одноэлементным подмножеством». В силу вышесказанного классы $\mathfrak{U}_{W\mathcal{F}_{(\mathrm{fs})_1}}$, $\mathfrak{U}_{W\mathcal{NF}_{I(\mathrm{fs})_1}}$ и $\mathfrak{U}_{W\mathcal{SF}_{I(\mathrm{fs})_1}}$ совпадают с классами целых (целых в смысле Ширшова) над кольцом F алгебр, целых в смысле Ширшова над идеалом I кольца F алгебр и целых над этим идеалом алгебр соответственно. Стоит отметить, что для любого класса алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F его подклассы

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{U}_{W\mathcal{F}_{(\mathrm{fs})_1}} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{U}_{W\mathcal{NF}_{F(\mathrm{fs})_1}} = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{U}_{W\mathcal{SF}_{F(\mathrm{fs})_1}} = \mathfrak{M}_{W\mathcal{F}_{(\mathrm{fs})_1}},$$
$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{U}_{W\mathcal{NF}_{I(\mathrm{fs})_1}} = \mathfrak{M}_{W\mathcal{NF}_{I(\mathrm{fs})_1}}, \quad \mathfrak{M} \cap \mathfrak{U}_{W\mathcal{SF}_{I(\mathrm{fs})_1}} = \mathfrak{M}_{W\mathcal{SF}_{I(\mathrm{fs})_1}}, \quad I \lhd F,$$

можно определить как классы слабо $\mathcal{F}'_{(\mathrm{fs})_1}$-разрешимых, слабо $\mathcal{NF}_I{}'_{(\mathrm{fs})_1}$-разрешимых и слабо $\mathcal{SF}_I{}'_{(\mathrm{fs})_1}$-разрешимых алгебр из класса $\mathfrak{M}$ для систем множеств $\mathcal{X}'_{(\mathrm{fs})_1} = \bigl\{\mathcal{X}_{(\mathrm{fs})_1}(R) \mid R \in \mathfrak{M}\bigr\}$, где $\mathcal{X} = \mathcal{F}, \mathcal{NF}_I, \mathcal{SF}_I$. По аналогии с теоремой 3.4 мы можем воспользоваться теоремой 2.10 и сформулировать замечание 3.12.

Замечание 3.12. Если для некоторого идеала I кольца F подкласс $\mathfrak{M}_{W\mathcal{NF}_{I(\mathrm{fs})_1}}$ или (и) $\mathfrak{M}_{W\mathcal{SF}_{I(\mathrm{fs})_1}}$ замкнутого относительно взятия идеалов, однопорождённых подалгебр и гомоморфных образов класса алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F является его радикальным подклассом, то верхний целый в смысле Ширшова над идеалом I радикал $\mathcal{N}_I$ или (и) верхний целый над этим идеалом радикал $\mathcal{S}_I$ является специальным на классе $\mathfrak{M}$.

При этом на классе $\mathfrak{M}$ радикалы $\mathcal{N}_I$ и $\mathcal{S}_I$, $I \lhd F$, совпадают с нижними радикалами, определяемыми на нём его подклассами $\mathfrak{M}_{W\mathcal{NF}_{I(\mathrm{fs})_1}}$ и $\mathfrak{M}_{W\mathcal{SF}_{I(\mathrm{fs})_1}}$.

Принято говорить, что элемент r алгебры R над кольцом F имеет ассоциативные степени или является элементом с ассоциативными степенями, если порождённая им подалгебра $\langle r \rangle$ алгебры R является ассоциативной, а значит, и коммутативной. Иначе говоря, наличие у элемента r алгебры R ассоциативных степеней равносильно тому, что порождённый им подгруппоид мультипликативного группоида R является полугруппой. Элемент с ассоциативными степенями r тогда и только тогда является целым в смысле Ширшова над идеалом I

кольца F или, что в данном случае эквивалентно, целым над этим идеалом, когда $r^{n+1} + h_n r^n + \ldots + h_1 r = 0$ для некоторых $n = n(r) \geqslant 1$ и $h_1, \ldots, h_n \in I$. Поэтому для алгебр с ассоциативными степенями (или моноассоциативных алгебр) над кольцом F, определяемых как алгебры, все элементы которых имеют ассоциативные степени, условия целостности в смысле Ширшова над идеалом I кольца F, целостности над идеалом I и $\mathcal{W}_I$-радикальности равносильны друг другу. Последнее наблюдение, а также замечание 3.12 позволяют сделать следующий вывод относительно ограничений на замкнутый относительно взятия подалгебр и гомоморфных образов класс алгебр с ассоциативными степенями над кольцом F радикалов $\mathcal{N}_I$, $\mathcal{S}_I$ и специального на классе всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F радикала $\mathcal{W}_I$, отвечающих любому идеалу I кольца F.

Следствие 3.13. *Для любого идеала I кольца F радикалы $\mathcal{N}_I$ и $\mathcal{S}_I$ совпадают на классе алгебр с ассоциативными степенями над кольцом F со специальным радикалом $\mathcal{W}_I$, $\mathcal{N}_I = \mathcal{S}_I = \mathcal{W}_I$, а потому являются специальными радикалами на этом классе.*

Для нулевого идеала $I = \{0\}$ кольца F утверждение этого следствия соответствует классическому результату о специальности *верхнего ниль-радикала* (*радикала Кёте*) $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\{0\}} = \mathcal{S}_{\{0\}} = \mathcal{W}_{\{0\}}$ на классе алгебр с ассоциативными степенями над кольцом F, на котором он совпадает также со всеми специальными радикалами $\mathcal{N}_f$, определёнными для одночленов неединичной степени с единичным коэффициентом f от элемента x_1.

О слабо локально разрешимом радикале

В этом заключительном разделе мы рассмотрим ещё один вариант обобщения условия локальной разрешимости, который отличен от условия слабой разрешимости Парфёнова и представляет собой частный случай обсуждавшегося нами ранее условия локальной G'_S-разрешимости. Роль основного класса алгебр будет играть класс всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F, а интересующее нас условие локальной G'_S-разрешимости отвечает свойству $S = (\mathrm{fgs})$ «быть конечно порождённой подалгеброй» и одноэлементной системе $G_{(\mathrm{fgs})} = \{{}_2g\}$, которая состоит из отображения ${}_2g$, ставящего в соответствие любым алгебре R над кольцом F и её конечно порождённой подалгебре A квадрат ${}_2g(R, A) = A^2$ данной подалгебры. Локально $G'_{(\mathrm{fgs})}$-разрешимые или, что то же самое, локально сильно $G_{(\mathrm{fgs})}$-разрешимые алгебры над кольцом F мы будем называть *слабо локально разрешимыми* и будем обозначать класс таких алгебр $\mathfrak{U}_{LG'_{(\mathrm{fgs})}} = \mathfrak{U}_{LG_{(\mathrm{fgs})}}$ через $\mathfrak{Q}$. В соответствии с общими определениями второй части статьи алгебра R над кольцом F является слабо локально разрешимой, если и только если любая цепочка её конечно порождённых подалгебр $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$, в которой каждая подалгебра A_{i+1}, $i \geqslant 0$, входит в квадрат ${}_2g(R, A_i) = A_i^2$ предыдущей подалгебры A_i, стабилизируется нулевой подалгеброй на некотором шаге. Вместе с тем слабая локальная разрешимость алгебры R равносильна наличию нулевой подалгебры во всякой цепочке её подалгебр $\{C_i\}_{i=0}^{\infty}$, в которой каждая

подалгебра C_{i+1}, $i \geqslant 0$, является подалгеброй некоторой конечно порождённой подалгебры C_i' квадрата C_i^2 подалгебры C_i. Действительно, слабая локальная разрешимость алгебры R с таким условием не вызывает сомнений. С другой стороны, если $\{C_i\}_{i=0}^{\infty}$ — цепочка подалгебр слабо локально разрешимой алгебры R, такая что подалгебра C_{i+1} входит в конечно порождённую подалгебру C_i' подалгебры C_i^2 при любом $i \geqslant 0$, то цепочка конечно порождённых подалгебр $\{C_i'\}_{i=0}^{\infty}$, связанных включениями $C_{i+1}' \subseteq C_{i+1}^2 \subseteq C'^2_i$ при всех $i \geqslant 0$, содержит нулевую подалгебру $C_k' = \{0\}$ для некоторого $k \geqslant 0$, и потому исходная цепочка $\{C_i\}_{i=0}^{\infty}$ включает в себя нулевую подалгебру $C_{k+1} = \{0\}$. Таким образом, слабо локально разрешимые алгебры можно определить и как локально $G'_{(\mathrm{sub})}$-разрешимые (локально сильно $G_{(\mathrm{sub})}$-разрешимые) алгебры для свойства (sub) «быть подалгеброй» и системы $G_{(\mathrm{sub})} = \{{}_2g\}$ из одного отображения ${}_2g$, которое ставит в соответствие произвольным алгебре R над кольцом F и её подалгебре B квадрат ${}_2g(R, B) = B^2$ этой подалгебры.

Согласно теореме 2.4 класс слабо локально разрешимых алгебр $\mathfrak{Q}$ над кольцом F является радикальным подклассом класса всех алгебр $\mathfrak{U}$ над этим кольцом и совпадает со своим расширением $A\mathfrak{Q}$ в классе $\mathfrak{U}$. Теорема 2.5 гарантирует также специальность нижнего радикала $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$, определяемого на классе $\mathfrak{U}$ его радикальным подклассом $\mathfrak{Q}$. В дальнейшем мы будем обозначать радикал $\mathcal{T}_{\mathfrak{Q}}$ через Q и будем называть его *слабо локально разрешимым радикалом*.

Стоит сказать несколько слов о слабо разрешимом (в наших прежних терминах слабо $\mathcal{S}_{(\mathrm{fs})}$-разрешимом) радикале T, специальность которого отмечалась нами ранее. Класс T-радикальных или *слабо разрешимых* алгебр $\mathfrak{T} = \mathfrak{R}_T = \mathfrak{U}_{W\mathcal{S}_{(\mathrm{fs})}}$ составляют алгебры R над кольцом F, для каждого непустого конечного подмножества A которых можно подобрать номер $k = k(A) \geqslant 0$, такой что множество $g_k(A)$ всех значений k-го многочлена разрешимости g_k на элементах множества A состоит из одного нулевого элемента, $g_k(A) = \{0\}$.

Замечание 3.14. Класс слабо локально разрешимых алгебр $\mathfrak{Q}$ входит в класс слабо разрешимых алгебр $\mathfrak{T}$ и содержит класс локально разрешимых алгебр $L\mathfrak{S}$ вместе с его радикальным расширением $A(L\mathfrak{S})$, $L\mathfrak{S} \subset A(L\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{T}$.

Доказательство. Речь идёт, естественно, о классах алгебр над одним кольцом F или, что то же самое, о подклассах класса всех алгебр $\mathfrak{U}$ над этим кольцом. В рамках последнего определяется и расширение $A(L\mathfrak{S})$ класса $L\mathfrak{S}$.

Локальная разрешимость алгебры R над кольцом F предполагает разрешимость каждой её конечно порождённой подалгебры A, т. е. существование $m = m(A) \geqslant 0$, для которого $A^{(m)} = \{0\}$. Отсюда сразу следует, что всякая цепочка конечно порождённых подалгебр $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ алгебры R, в которой $A_0 = A$ и $A_{i+1} \subseteq A_i^2 = A_i^{(1)} \subseteq A^{(i+1)}$ при любом $i \geqslant 0$, содержит нулевую подалгебру $A_m = \{0\}$. Поэтому локально разрешимые алгебры являются слабо локально разрешимыми. Поскольку класс слабо локально разрешимых алгебр $\mathfrak{Q}$ совпадает со своим расширением $A\mathfrak{Q}$ в классе $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{Q} = A\mathfrak{Q}$ (см. выше), вместе с классом локально разрешимых алгебр $L\mathfrak{S}$ он содержит также его расширение $A(L\mathfrak{S})$ в классе $\mathfrak{U}$, $L\mathfrak{S} \subseteq A(L\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{Q}$.

Пусть теперь R — слабо локально разрешимая алгебра над кольцом F и B — любое её непустое конечное подмножество. Для каждого $k \geqslant 0$ обозначим через A_k подалгебру алгебры R, порождённую элементами множества $g_k(B)$ всех возможных значений k-го многочлена разрешимости g_k на элементах множества B. Понятно, что все множества $g_k(B)$, $k \geqslant 0$, являются конечными. Определение многочленов разрешимости позволяет нам также построить эти множества по индукции в соответствии со следующим правилом: $B_0 = B$ и далее $B_k = \{bb' \mid b, b' \in B_{k-1}\}$ для всех $k \geqslant 1$. Поэтому конечно порождённые подалгебры $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ алгебры R связаны включениями $A_{k+1} \subseteq A_k^2 \subseteq A_k$ при любом $k \geqslant 0$. Вследствие слабой локальной разрешимости алгебры R такая цепочка подалгебр $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ должна стабилизироваться нулевой подалгеброй на некотором шаге $n \geqslant 0$, а значит, $A_m = \{0\}$ и $B_m = g_m(B) = \{0\}$ при всех $m \geqslant n$. Следовательно, всякая слабо локально разрешимая алгебра R является слабо разрешимой. Иначе говоря, класс слабо локально разрешимых алгебр $\mathfrak{Q}$ входит в класс слабо разрешимых алгебр $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{T}$. $\square$

Как известно, наличие в алгебре локально разрешимого идеала, фактор-алгебра по которому локально разрешима, ещё не гарантирует её локальную разрешимость. Более того, согласно [9] сумма локально разрешимых идеалов алгебры не является, вообще говоря, её локально разрешимым идеалом. Поэтому класс локально разрешимых алгебр $L\mathfrak{S}$ над кольцом F не является радикальным подклассом класса всех алгебр $\mathfrak{U}$ над этим кольцом и, следовательно, строго содержится в своих радикальных расширениях $R(L\mathfrak{X})$ и $A(L\mathfrak{X})$ в классе $\mathfrak{U}$. Вместе с тем довольно часто приходится иметь дело с замкнутыми относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классами алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F, такими что класс $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{S}$ локально разрешимых алгебр из класса $\mathfrak{M}$ является его радикальным подклассом (это равносильно замкнутости класса $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{S}$ относительно взятия расширений в классе $\mathfrak{M}$). В этом и только в этом случае мы будем говорить, что на классе $\mathfrak{M}$ определён *локально разрешимый радикал* LS, под которым мы понимаем нижний радикал $\mathcal{T}_{\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}}$, определяемый на классе $\mathfrak{M}$ его подклассом $\mathfrak{M} \cap L\mathfrak{X}$. Одним из наиболее важных примеров такого класса $\mathfrak{M}$ является класс $G_{(\mathrm{sub})}$-щукинских алгебр над кольцом F, отвечающий одноэлементной системе $G_{(\mathrm{sub})} = \{{}_2g\}$ (см. выше). Согласно введённым ранее определениям класс $G_{(\mathrm{sub})}$-щукинских алгебр $\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$, который мы будем называть далее классом *алгебр Щукина*, составляют алгебры R над кольцом F, такие что в квадрате A^2 каждой конечно порождённых подалгебры A алгебры R имеется конечно порождённая подалгебра A', содержащая k-й коммутант $A^{(k)}$ подалгебры A для некоторого $k \geqslant 1$, $A^{(k)} \subseteq A' \subseteq A^{(1)} = A^2$. Вместо этого условия можно использовать также следующее эквивалентное ему условие: для любых $n \geqslant 0$ и конечно порождённой подалгебры A алгебры R существуют $m \geqslant n$ и конечно порождённая подалгебра A' n-го коммутанта $A^{(n)}$ подалгебры A, такие что m-й коммутант $A^{(m)}$ подалгебры A входит в подалгебру A', $A^{(m)} \subseteq A' \subseteq A^{(n)}$. Понятно, что класс алгебр Щукина $\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$ над кольцом F включает в себя класс локально разрешимых алгебр $L\mathfrak{S}$ над этим кольцом. Нетрудно заметить и то,

что класс $\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$ замкнут относительно взятия подалгебр и гомоморфных образов и совпадает со своим локальным расширением $L\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$ в классе всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F. Поскольку в рассматриваемой ситуации $G'_{(\mathrm{sub})}$-условие равносильно обычному условию локальной разрешимости, следствие 2.7 позволяет нам сделать следующий вывод.

Следствие 3.15. *Алгебра Щукина над кольцом F локально разрешима, если и только если она слабо локально разрешима.*

Таким образом, класс локально разрешимых алгебр $L\mathfrak{S}$ над кольцом F представляет собой пересечение классов алгебр Щукина $\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$ и слабо локально разрешимых алгебр $\mathfrak{Q}$ над кольцом F, $L\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}} \cap \mathfrak{Q}$. Отсюда следует, что локально разрешимый радикал LS определён на классе алгебр Щукина $\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$ над кольцом F и совпадает на классе $\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$ со слабо локально разрешимым радикалом Q. Отмеченное ранее совпадение класса слабо локально разрешимых алгебр $\mathfrak{Q}$ с его расширением $A\mathfrak{Q}$ в классе всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F влечёт за собой равенство класса локально разрешимых алгебр $L\mathfrak{S}$ его расширению $A(L\mathfrak{S})$ в классе алгебр Щукина $\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$.

К числу наиболее важных подклассов класса алгебр Щукина $\mathfrak{U}_{\mathrm{Sch}}$ относится класс, состоящий из алгебр над кольцом F, в которых квадрат каждой конечно порождённой подалгебры является конечно порождённой подалгеброй. Алгебры с этим свойством мы будем называть *квадратичными алгебрами Щукина* и будем обозначать образованный ими класс через $\mathfrak{U}_{2\text{-Sch}}$. Класс $\mathfrak{U}_{2\text{-Sch}}$ замкнут относительно взятия подалгебр и гомоморфных образов и совпадает со своим расширением $L\mathfrak{U}_{2\text{-Sch}}$ в классе $\mathfrak{U}$. Помимо этого, класс $\mathfrak{U}_{2\text{-Sch}}$ содержит очевидным образом класс локально конечных алгебр $L\mathfrak{F}$ над кольцом F, а в силу теоремы Дорофеева и ряда связанных с ней утверждений (см. [6, теорема 7 и лемма 5 на с. 195, предложение 1 на с. 140 и следствие на с. 197]) также класс альтернативных алгебр над кольцом F. При наличии в кольце F элемента $1/2$ в него входит ещё и класс линейных йордановых алгебр над этим кольцом. Последнее утверждение сформулировано в [6] в виде упражнения 5 на с. 112, которое может быть выведено из леммы 5 на с. 109 (в доказательстве теоремы Жевлакова) и однородности многообразия линейных йордановых алгебр над кольцом с $1/2$. Говоря о квадратичных алгебрах Щукина, необходимо упомянуть следующее их свойство.

Замечание 3.16. Локально разрешимые квадратичные алгебры Щукина над кольцом F локально конечны над этим кольцом.

Доказательство. Поскольку класс квадратичных алгебр Щукина $\mathfrak{U}_{2\text{-Sch}}$ над кольцом F замкнут относительно взятия подалгебр, следует установить лишь конечность над кольцом F любой конечно порождённой разрешимой алгебры R из данного класса. Для этого достаточно заметить, что коммутанты такой алгебры R образуют для некоторого $l \geqslant 0$ конечный нормальный ряд её конечно порождённых подалгебр $\{R^{(i)} \mid i = 0, \ldots, l\}$,

$$R^{(l)} = \{0\} \subseteq R^{(l-1)} \subseteq \ldots \subseteq R^{(0)} = R,$$

факторы которого являются конечно порождёнными алгебрами с нулевым умножением и, как следствие, конечны над кольцом F, а затем воспользоваться замкнутостью класса конечных алгебр $\mathfrak{F}$ над кольцом F относительно взятия расширений. $\square$

Сделанные нами наблюдения позволяют записать равенства

$$L(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{F}) = L\mathfrak{S} \cap L\mathfrak{F} = \mathfrak{U}_{2\text{-Sch}} \cap L\mathfrak{S} = \mathfrak{U}_{2\text{-Sch}} \cap \mathfrak{Q},$$

в соответствии с которыми на классе квадратичных алгебр Щукина $\mathfrak{U}_{2\text{-Sch}}$ над кольцом F слабо локально разрешимый радикал Q совпадает не только с локально разрешимым радикалом LS, но и с локально конечным и разрешимым радикалом LSF, определённым на этом классе в силу следствия 3.15 и замечания 3.16. Кроме того, из сказанного ранее следует, что класс локально конечных и разрешимых алгебр $L(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{F})$ над кольцом F равен своему расширению $A\big(L(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{F})\big)$ в классе $\mathfrak{U}_{2\text{-Sch}}$.

Специальность слабо локально разрешимого радикала Q на классе всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F гарантирует специальность его ограничений LS и LSF на подклассы $\mathfrak{U}_{\text{Sch}}$ и $\mathfrak{U}_{2\text{-Sch}}$ класса $\mathfrak{U}$. Последнее в свою очередь может служить ещё одним подходом к обоснованию специальности локально нильпотентного радикала (*радикала Левицкого*) LN на классах альтернативных алгебр над кольцом F и линейных йордановых алгебр над кольцом F с $1/2$, на которых он совпадает с радикалом LSF.

В качестве дополнения к полученным выводам будет уместно привести следующее утверждение, которое может рассматриваться как составная часть теоремы Дорофеева (см. [4; 6, теорема 7 на с. 195]).

Предложение 3.17. *Пусть $\mathfrak{H}$ — такое однородное многообразие алгебр над кольцом F, что вторые коммутанты алгебр из многообразия $\mathfrak{H}$ являются их идеалами. Тогда локально конечный и разрешимый радикал LSF определён на многообразии $\mathfrak{H}$, если и только если оно входит в класс квадратичных алгебр Щукина $\mathfrak{U}_{2\text{-Sch}}$ над кольцом F.*

Доказательство. С учётом предыдущих замечаний достаточно показать только то, что квадраты конечно порождённых подалгебр алгебр из многообразия $\mathfrak{H}$, на котором определён радикал LSF, являются их конечно порождёнными подалгебрами. Это можно сделать при помощи немного изменённых рассуждений из доказательства леммы 5 на с. 195 в [6]. Для того чтобы доказать интересующее нас утверждение, следует лишь установить, что квадрат A^2 свободной алгебры $A = F_{\mathfrak{H}}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ из многообразия $\mathfrak{H}$ с n свободными порождающими $x_1, \ldots, x_n$ является её конечно порождённой подалгеброй при любом $n \geqslant 1$. В первую очередь отметим, что разрешимая фактор-алгебра $A/A^{(2)}$ алгебры A по её идеалу $A^{(2)}$ является конечно порождённой и LSF-радикальной, поскольку класс LSF-радикальных алгебр $\mathfrak{H} \cap L(\mathfrak{S} \cap \mathfrak{F})$ из многообразия $\mathfrak{H}$, будучи радикальным подклассом класса $\mathfrak{H}$, замкнут относительно взятия расширений и, следовательно, содержит вместе с классом $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{A}$ алгебр с нулевым умножением из $\mathfrak{H}$ класс $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{S}$ разрешимых алгебр из $\mathfrak{H}$. Поэтому алгебра $A/A^{(2)}$

конечна над кольцом F и можно считать, что она порождена как F-модуль образами в ней одночленов с единичными коэффициентами от элементов $x_1, \ldots, x_n$ степени не выше некоторого $m \geqslant 1$. Другими словами, каждый ненулевой одночлен $u \in A$ от элементов $x_1, \ldots, x_n$ представи́м в виде суммы многочлена от них, степень которого меньше или равна m, и некоторого элемента $u' \in A^{(2)}$, который в свою очередь выражается через конечную сумму $u' = \sum\limits_i v_i v_i'$ для подходящих одночленов $v_i, v_i' \in A^{(1)} = A^2$ от элементов $x_1, \ldots, x_n$. Более того, если одночлен u имеет степень $\deg u > m$, то, используя однородность многообразия $\mathfrak{H}$, мы можем выбрать описанное здесь представление элемента u таким образом, что $u = u' = \sum\limits_i v_i v_i'$, где одночлены $v_i, v_i' \in A^2$ удовлетворяют условию $\deg u = \deg v_i + \deg v_i'$ при любом i. Отсюда следует, что одночлены с единичными коэффициентами от элементов $x_1, \ldots, x_n$ степени $l = 2, \ldots, m$ составляют конечную систему порождающих алгебры A^2. $\square$

Необходимо подчеркнуть, что все известные результаты, в которых доказывается существование локально нильпотентного и локально конечного радикалов LN и LF на некотором замкнутом относительно взятия идеалов, конечно порождённых подалгебр и гомоморфных образов классе алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F, устанавливают к тому же существование на классе $\mathfrak{M}$ локально конечного и разрешимого и локально разрешимого радикалов LSF и LS вместе с их совпадением на этом классе. Существование на классе $\mathfrak{M}$ радикала LN влечёт за собой также равенство между ним и радикалами LSF и LS на классе $\mathfrak{M}$. Понятно и то, что радикал LN тогда и только тогда определён на классе $\mathfrak{M}$, когда на нём определён радикал LSF или (и) LS и при этом все локально конечные и разрешимые или (и) локально разрешимые алгебры из класса $\mathfrak{M}$ являются локально нильпотентными.

В заключение стоит сказать, что использование нами термина «алгебра Щукина» и различных его вариантов связано с известной степенью общности идей представленной работы с конструкциями из работы К. К. Щукина [12].

Литература

[1] Андрунакиевич В. А. Радикалы ассоциативных алгебр. I // Матем. сб. — 1958. — Т. 44 (86). — С. 179—212.

[2] Андрунакиевич В. А., Рябухин В. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[3] Бабич А. М. О радикале Левицкого // ДАН СССР. — 1959. — Т. 126. — С. 242—243.

[4] Дорофеев Г. В. О локально нильпотентном радикале неассоциативных колец // Алгебра и логика. — 1971. — Т. 10, № 4. — С. 355—364.

[5] Жевлаков К. А., Шестаков И. П. О локальной конечности в смысле Ширшова // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 41—73.

[6] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[7] Зельманов Е. И. Характеризация радикала Маккриммона // Сиб. матем. журн. — 1984. — Т. 25, № 5. — С. 190—192.

[8] Курош А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Матем. сб. — 1947. — Т. 20 (62), № 2. — С. 239—262.

[9] Латышев В. Н., Михалёв А. В., Пихтильков С. А. О сумме локально разрешимых идеалов алгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика — 2003. — № 3. — С. 29—32.

[10] Парфёнов В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли // Сиб. матем. журн. — 1971. — Т. 12, № 1. — С. 171—176.

[11] Скосырский В. Г. Радикалы йордановых алгебр и связанных с ними ассоциативных алгебр: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1981.

[12] Щукин К. К. О локально разрешимом радикале одного класса групп // Учён. зап. Кишинёв. унив. — 1960. — № 54. — С. 95—100.

[13] García E., Gómez Lozano M. A characterization of the Kostrikin radical of a Lie algebra // J. Algebra. — 2011. — Vol. 346. — P. 266—283.

[14] Rowen L. H. Polynomial Identities in Ring Theory. — London: Academic Press, 1980. — (Pure Appl. Math.; Vol. 84).

[15] Thedy A. Z-closed ideals of quadratic Jordan algebras // Commun. Algebra. — 1985. — Vol. 13, no. 12. — P. 2537—2565.

[16] Thedy A. Radicals of right-alternative and Jordan rings // Commun. Algebra. — 1984. — Vol. 12, no. 7. — P. 857—887.