

Группы Гротендика и Уайтхеда колец формальных матриц*

П. А. КРЫЛОВ

Национальный исследовательский
Томский государственный университет
e-mail: krylov@math.tsu.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ

Национальный исследовательский университет «МЭИ»
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, группа K_0 , группа K_1 .

Аннотация

Развивается некоторый метод вычисления групп K_0 и K_1 колец формальных матриц через группы K_0 и K_1 исходных колец.

Abstract

P. A. Krylov, A. A. Tuganbaev, Grothendieck and Whitehead groups of formal matrix rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 1, pp. 173–203.

For formal matrix rings, we construct some method of calculation of groups K_0 and K_1 with the use of groups K_0 and K_1 of original rings.

Раздел 1 содержит некоторые факты общего характера о кольцах формальных матриц и модулях над ними. В разделе 2 устанавливается эквивалентность двух категорий модулей. Разделы 3 и 4 посвящены группе Гротендика K_0 кольца формальных матриц порядка 2. В разделе 5 изучается группа Уайтхеда K_1 кольца формальных матриц порядка 2. В разделе 6 рассматриваются группы K_0 и K_1 кольца формальных матриц произвольного порядка.

Группы K_i колец формальных матриц изучались в [3, 4, 12, 13, 15, 20].

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули предполагаются унитарными и обычно левыми. Гомоморфизмы записываются слева от аргументов. Композиция отображений $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ обозначается через fg ; таким образом, $(fg)(x) = g(f(x))$. Категория всех (левых) модулей над кольцом T обозначается через $T\text{-mod}$, $J(T)$ — радикал Джекобсона кольца T , $\text{End}_T A$ — кольцо эндоморфизмов T -модуля A , A^n — прямая сумма n копий абелевой группы A .

*Второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 14-01-00452-А: «Теория колец: структурная теория; приложения».

1. Кольца формальных матриц и модули над ними

Приведём необходимые сведения о кольцах формальных матриц и модулях над ними. Более полное изложение этой темы содержится в [5, 6].

Пусть R и S — кольца, M — R - S -бимодуль и N — S - R -бимодуль. Предположим, что имеются бимодульные гомоморфизмы $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$ и $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$. Считаем, что через mn обозначается $\varphi(m \otimes n)$ и через nt обозначается $\psi(n \otimes t)$ для любых элементов $m \in M$ и $n \in N$. Пусть выполняются равенства ассоциативности $(mn)m' = m(nt')$ и $(nt)n' = n(mn')$ для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$. Множество K всех матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}, \quad r \in R, \quad s \in S, \quad m \in M, \quad n \in N,$$

образует кольцо относительно обычных операций сложения и умножения матриц. Это кольцо K называется *кольцом формальных* (или *обобщённых*) *матриц* (порядка 2). Кольцо K также обозначается через

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Образы I и J гомоморфизмов φ и ψ являются идеалами колец R и S соответственно; они называются *идеалами следа* кольца K .

Сделаем также ряд замечаний о кольцах формальных матриц произвольного порядка n . Зафиксируем натуральное число $n \geq 2$. Пусть $R_1, \dots, R_n$ — кольца, M_{ij} — R_i - R_j -бимодули, причём $M_{ii} = R_i$, $i, j = 1, \dots, n$. Предположим, что для любых $i, j, k = 1, \dots, n$ с условием $i \neq j$, $j \neq k$ задан R_i - R_k -бимодульный гомоморфизм

$$\varphi_{ijk}: M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}.$$

Для индексов $i = j$ и $j = k$ считаем, что φ_{iik} и φ_{ikk} — это канонические изоморфизмы

$$R_i \otimes_{R_i} M_{ik} \rightarrow M_{ik}, \quad M_{ij} \otimes_{R_j} R_j \rightarrow M_{ij}.$$

Вместо $\varphi_{ijk}(a \otimes b)$ пишем $a \circ b$ или просто ab . Допустим также, что в этих обозначениях $(ab)c = a(bc)$ для всех элементов $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$, $c \in M_{k\ell}$ и индексов i, j, k, ℓ .

Обозначим через K множество всех матриц (a_{ij}) порядка n со значениями в бимодулях M_{ij} . Относительно стандартных матричных операций сложения и умножения K является кольцом. Его можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix}.$$

Говорят, что K — *кольцо формальных матриц порядка n* .

Для каждого $k = 1, \dots, n$ положим

$$I_k = \sum_{i \neq k} \text{Im}(\varphi_{kik}),$$

где $\varphi_{kik}: M_{ki} \otimes_{R_i} M_{ik} \rightarrow R_k$, или, по-другому,

$$I_k = \sum_{i \neq k} M_{ki} M_{ik},$$

где $M_{ki} M_{ik}$ — множество всех конечных сумм элементов вида ab , $a \in M_{ki}$, $b \in M_{ik}$. Тогда I_k — идеал кольца R_k . Назовём эти идеалы $I_1, \dots, I_n$ *идеалами следа* кольца K .

Возьмём теперь некоторое кольцо K формальных матриц порядка n , такое что $R_1 = \dots = R_n = R$ и $M_{ij} = R$ для всех i и j . Такое кольцо называется *кольцом формальных матриц порядка n над кольцом R* . Конструкцию такого кольца можно представить в более простом непосредственном виде (см. [6]). Именно, существует взаимно-однозначное соответствие между кольцами формальных матриц порядка n над кольцом R и множествами центральных элементов $\{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ кольца R , удовлетворяющих равенствам

$$s_{iik} = 1 = s_{ikk}, \quad s_{ijk} \cdot s_{ikl} = s_{ijl} \cdot s_{jkl} \quad (*)$$

для всех индексов $i, j, k, \ell = 1, \dots, n$. Конкретное такое кольцо будем обозначать $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, или $M(n, R, \Sigma)$, где $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$, или просто K . Множество Σ называется *системой множителей*, а его элементы называются *множителями* кольца K . Если все s_{ijk} равны 1, то получаем кольцо $M(n, R)$. Правило умножения матриц в кольце K таково. Пусть $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и $AB = (c_{ij})$. Тогда

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n s_{ikj} a_{ik} b_{kj}.$$

В частности, пусть дано кольцо $M(2, R, \Sigma)$ формальных матриц порядка 2 над кольцом R . Тогда найдётся такой центральный элемент s в R , что матрицы в $M(2, R, \Sigma)$ умножаются по правилу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + sa_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & sa_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}. \quad (**)$$

Верно и обратное. Любой центральный элемент s кольца R определяет кольцо формальных (2×2) -матриц над R , умножение в котором выполняется по правилу (**). Такие кольца были введены в [2] и обозначались там через K_s .

Для разных Σ свойства колец $M(n, R, \Sigma)$ могут сильно различаться. В частности, эти свойства могут сильно отличаться от свойств кольца $M(n, R)$.

Модули над кольцом формальных матриц представляют собой конструкцию модуля «векторов-столбцов» или «векторов-строк». Пусть X — R -модуль, Y — S -модуль и $g: N \otimes_R X \rightarrow Y$, $f: M \otimes_S Y \rightarrow X$ — S -модульный гомоморфизм и

R -модульный гомоморфизм соответственно. Допустим, что справедливы равенства

$$m(nx) = (mn)x, \quad n(my) = (nm)y \quad \text{для всех } m \in M, \quad n \in N, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

где nx — это $g(n \otimes x)$ и my — это $f(m \otimes y)$.

Группа векторов-столбцов

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

превращается в K -модуль, если в качестве умножения взять произведение матрицы на столбец. Любой K -модуль можно получить указанным способом. Модуль

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

и его элементы более удобно записывать в виде строк.

Гомоморфизмы K -модулей действуют покомпонентно. Именно, если $\Gamma: (X, Y) \rightarrow (X', Y')$ — K -гомоморфизм, то найдутся R -гомоморфизм $\alpha: X \rightarrow X'$ и S -гомоморфизм $\beta: Y \rightarrow Y'$, такие что $\Gamma(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$. При этом верны равенства

$$\alpha(my) = m\beta(y), \quad \beta(nx) = n\alpha(x)$$

для всех значений букв.

Большую роль играет одна конструкция K -модулей. Пусть X — R -модуль. Группа векторов-строк $(X, N \otimes_R X)$ является K -модулем, у которого гомоморфизмами модульного умножения служат гомоморфизм

$$M \otimes_S (N \otimes_R X) \rightarrow X, \quad m(n \otimes x) \rightarrow (mn)x$$

и тождественный автоморфизм $N \otimes_R X \rightarrow N \otimes_R X$. Таким образом, $m(n \otimes x) = (mn)x$ и $nx = n \otimes x$ в принятых обозначениях. Аналогично получаем K -модуль $(M \otimes_S Y, Y)$ из S -модуля Y . Будем обозначать $N \otimes_R X$ через $T(X)$ и $M \otimes_S Y$ через $T(Y)$. Буква T ниже используется также для обозначения функторов тензорного произведения.

Важное свойство введённых K -модулей заключается в следующем (см. [5, лемма 2.2]). Каждый гомоморфизм $(X, T(X)) \rightarrow (X', T(X'))$ равен $(\alpha, 1 \otimes \alpha)$ для единственного гомоморфизма $\alpha: X \rightarrow X'$. Более точно, соответствие $\alpha \rightarrow (\alpha, 1 \otimes \alpha)$ определяет изоморфизм соответствующих групп Нот. Аналогичный изоморфизм имеется для модулей вида $(T(Y), Y)$.

Пусть дан K -модуль (X, Y) с гомоморфизмами модульного умножения

$$g: N \otimes_R X \rightarrow Y, \quad f: M \otimes_S Y \rightarrow X.$$

Рассмотрим ещё один вид K -модулей: определим K -модуль $(T(Y), T(X))$. Нужно указать соответствующие гомоморфизмы модульного умножения, которые мы

обозначим f' и g' . Положим

$$\begin{aligned} f' &= 1 \otimes f: N \otimes_R T(Y) \rightarrow T(X), & f'(n \otimes (m \otimes y)) &= n \otimes my, \\ g' &= 1 \otimes g: M \otimes_S T(X) \rightarrow T(Y), & g'(m \otimes (n \otimes x)) &= m \otimes nx. \end{aligned}$$

Используем принятые ранее соглашения о записи, считаем, что nx' — это $f'(n \otimes x')$ и my' — это $g'(m \otimes y')$. Теперь можно записать равенства

$$m(n \otimes x) = g'(m \otimes (n \otimes x)) = m \otimes nx, \quad n(m \otimes y) = n \otimes my.$$

Мы должны проверить равенства ассоциативности, т. е. равенства

$$\begin{aligned} (m'n')x' &= m'(n'x'), & (n'm')y' &= n'(m'y') \\ &\text{для любых элементов } m' \in M, \quad n' \in N, \quad x' \in T(Y), \quad y' \in T(X). \end{aligned}$$

Конечно, можно считать, что $x = m \otimes y$ и $y' = n \otimes x$ для некоторых $m \in M$, $n \in N$, $x \in X$, $y \in Y$. Вычисляя, находим, что верны равенства

$$\begin{aligned} m'(n'x') &= m'(n'(m \otimes y)) = m'(n' \otimes my) = m' \otimes n'(my) = \\ &= m' \otimes (n'm)y = m'(n'm)y = (m'n')my = (m'n')m \otimes y, \\ (m'n')x' &= (m'n')(m \otimes y) = (m'n')m \otimes y. \end{aligned}$$

Второе равенство проверяется аналогично.

Итак, существует K -модуль $(T(Y), T(X))$ с гомоморфизмами модульного умножения f' и g' . Верны равенства

$$n(m \otimes y) = n \otimes my, \quad m(n \otimes x) = m \otimes nx$$

для всех букв, входящих в эти равенства. Можно проверить, что отображение

$$(f, g): (T(Y), T(X)) \rightarrow (X, Y)$$

является K -гомоморфизмом.

Уточним строение K -модулей для кольца K формальных матриц порядка 2, т. е.

$$K = M(2, R, s) = \begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}.$$

Особое внимание уделим модулям $(A, T(A))$, $(T(B), B)$ и $(T(B), T(A))$.

Для любых элементов $x, y \in R$ полагаем $x \circ y = sxy$ (см. [6, разделы 5, 10]. Таким образом, $x \circ y$ — это тот элемент, который в случае произвольного кольца K обозначается через tn или nm .

Пусть теперь дан произвольный K -модуль (A, B) с гомоморфизмами модульного умножения

$$g: R \otimes_R A \rightarrow B, \quad f: R \otimes_R B \rightarrow A.$$

Отождествим $R \otimes_R A$ и $R \otimes_R B$ с A и B соответственно, полагая $r \otimes a = ra$ и $r \otimes b = rb$. После этого можно считать, что у нас есть гомоморфизмы $g: A \rightarrow B$ и $f: B \rightarrow A$. Введём некоторые обозначения. Полагаем $y \circ a = g(ya)$ и $y \circ b = f(yb)$, где $y \in R$, $a \in A$ и $b \in B$.

Равенства $m(na) = (mn)a$ и $n(mb) = (nm)b$ для кольца $M(2, R, s)$ принимают вид $x \circ (y \circ a) = (x \circ y)a$ и $y \circ (x \circ b) = (y \circ x)b$, где $x, y \in R$, $a \in A$, $b \in B$. Теперь имеем равенства

$$x \circ (y \circ a) = x \circ g(ya) = x \circ (yg(a)) = xf(yg(a)) = xyfg(a), \quad (x \circ y)a = sxua.$$

Поэтому $xyfg(a) = sxua$ для всех $x, y \in R$. Следовательно, $fg(a) = sa$, $a \in A$, и $fg = s \cdot 1_A$. Аналогично $gf = s \cdot 1_B$.

Верно и обратное. Любая пара R -гомоморфизмов $g: A \rightarrow B$ и $f: B \rightarrow A$, удовлетворяющих равенствам $fg = s \cdot 1_A$ и $gf = s \cdot 1_B$, задаёт K -модуль (A, B) с модульным умножением

$$\begin{pmatrix} x & v \\ w & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa + vf(b) \\ wg(a) + yb \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь дан некоторый K -модуль (A, B) и $g: A \rightarrow B$, $f: B \rightarrow A$ — его гомоморфизмы модульного умножения. Как мы установили, они удовлетворяют равенствам $fg = s \cdot 1_A$ и $gf = s \cdot 1_B$. Выясним, как устроен K -модуль $(T(B), T(A))$. Для него гомоморфизмы модульного умножения есть $f' = 1 \otimes f$ и $g' = 1 \otimes g$. (Напоминаем об отождествлении $T(B)$ с B , $T(A)$ с A и т. п.) Отображение $f': R \otimes_R (R \otimes_R B) \rightarrow R \otimes_R A$ действует по правилу $x \otimes (y \otimes b) = x \otimes y \otimes b$. Однако по нашим договорённостям

$$x \otimes (y \otimes b) = xyb, \quad x \otimes y \otimes b = x(y \otimes b) = xyf(b).$$

Поэтому можно написать

$$f'(xyb) = xyf(b), \quad f'(b) = f(b), \quad f' = f.$$

Аналогично имеем $g' = g$. Можно сделать вывод, что K -модуль $(T(B), T(A))$ — это K -модуль (B, A) с гомоморфизмами модульного умножения f и g .

Существуют гомоморфизмы

$$(g, f): (A, B) \rightarrow (B, A), \quad (f, g): (B, A) \rightarrow (A, B),$$

поскольку $g(y \otimes b) = y \otimes f(b)$ и $f(x \otimes a) = x \otimes g(a)$ для всех значений букв.

Для произвольного R -модуля A опишем строение K -модулей $(A, T(A))$ и $(T(A), A)$. Поскольку мы отождествляем $T(A)$ с A , то первый модуль обозначим $(A, A)'$, а второй модуль обозначим $(A, A)''$. Для $(A, A)'$ гомоморфизмами модульного умножения являются 1_A и отображение $x \otimes (y \otimes a) \rightarrow (x \otimes y)a$. Однако $x \otimes (y \otimes a) = xa$ и $(x \otimes y)a = sxua$. Поэтому второй гомоморфизм модульного умножения равен $s \cdot 1_A$. Для K -модуля $(A, A)''$ гомоморфизмами модульного умножения, наоборот, являются $s \cdot 1_A$ и 1_A .

Итак, любой R -модуль A задаёт два K -модуля: $(A, A)'$ и $(A, A)''$. При этом для модуля $(A, A)'$ модуль $(T(A), T(A))$ (его строение установлено только что) есть $(A, A)''$ и наоборот.

Вернёмся к произвольному кольцу

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Укажем некоторые функторы, действующие между категориями $K\text{-mod}$, $R\text{-mod}$ и $S\text{-mod}$.

Существует кольцевой гомоморфизм

$$R \times S \rightarrow K, \quad (r, s) \rightarrow \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

т. е. диагональное вложение. Следовательно, каждый K -модуль можно считать $(R \times S)$ -модулем. Это задаёт «забывающий» функтор $E: K\text{-mod} \rightarrow (R \times S)\text{-mod}$.

Теперь определим функтор T из $(R \times S)\text{-mod}$ в $K\text{-mod}$. Функтор T ставит в соответствие $(R \times S)$ -модулю (X, Y) K -модуль $(X, T(X)) \oplus (T(Y), Y)$. Если $(\alpha, \beta): (X, Y) \rightarrow (X_1, Y_1)$ — гомоморфизм $(R \times S)$ -модулей, то $T(\alpha, \beta)$ — индуцированный гомоморфизм $T(X, Y) \rightarrow T(X_1, Y_1)$, определённый очевидным образом. Фактически T — функтор

$$K \otimes_{R \times S} (-): (X, Y) \rightarrow K \otimes_{R \times S} (X, Y).$$

Функтор T сопряжён слева к функтору E .

Зададим функтор

$$T_N = N \otimes_R (-): R\text{-mod} \rightarrow S\text{-mod}$$

равенством $T_N(X) = N \otimes_R X$ для любого R -модуля X . Гомоморфизмы R -модулей функтор T_N переводит в индуцированные гомоморфизмы S -модулей. Аналогично определяется функтор T_M .

Существуют также функторы

$$(1, T_N): R\text{-mod} \rightarrow K\text{-mod}, \quad (1, 0): K\text{-mod} \rightarrow R\text{-mod}.$$

Первый функтор фактически является ограничением функтора T , введённого выше. А именно, $(1, T_N)X = (X, T_N(X))$ и $(1, 0)(X, Y) = X$ для любого R -модуля X и каждого K -модуля (X, Y) . Оба функтора переводят гомоморфизмы в индуцированные гомоморфизмы. Имеем равенства

$$((1, T_N)(1, 0))X = X, \quad ((1, 0)(1, T_N))(X, Y) = (X, T_N(X)).$$

Имеются также аналогичные функторы

$$(T_M, 1): S\text{-mod} \rightarrow K\text{-mod}, \quad (0, 1): K\text{-mod} \rightarrow S\text{-mod}.$$

Наконец, определим функтор (T, T) из категории $T\text{-mod}$ в ту же категорию. Функтор (T, T) переводит модуль (X, Y) в модуль $(T(Y), T(X))$, а гомоморфизм

$$(\alpha, \beta): (X, Y) \rightarrow (X', Y')$$

переводится в гомоморфизм

$$(T(\beta), T(\alpha)): (T(Y), T(X)) \rightarrow (T(Y'), T(X')).$$

То, что отображение $(T(\beta), T(\alpha))$ является K -гомоморфизмом, проверяется следующим образом. Используя равенства $\alpha(my) = m\beta(y)$ и $\beta(nx) = n\alpha(x)$, выведем равенства $T(\beta)(my') = mT(\alpha)(y')$ и $T(\alpha)(nx') = nT(\beta)(x')$, где $y' = n \otimes x$

и $x' = m \otimes y$. Можно записать равенства

$$\begin{aligned} T(\beta)(my') &= T(\beta)(m(n \otimes x)) = T(\beta)(m \otimes nx) = m \otimes \beta(nx) = \\ &= m \otimes n\alpha(x) = m(n \otimes \alpha(x)) = m((1 \otimes \alpha)(n \otimes x)) = mT(\alpha)(y'). \end{aligned}$$

Второе равенство получается аналогично.

Модули над кольцом формальных матриц порядка $n > 2$ устроены так же, как в случае $n = 2$. Такой модуль представляет собой модуль векторов-столбцов высоты n , а модульное умножение — это умножение матрицы на столбец. Конкретный K -модуль X имеет вид

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix},$$

где X_i — R_i -модуль, $i = 1, \dots, n$. Кроме того, для любого k существуют гомоморфизмы $f_{ki}: M_{ki} \otimes_{R_i} X_i \rightarrow X_k$, $i = 1, \dots, n$, и выполняются очевидные равенства ассоциативности. Положим $f_{ki}(a \otimes x) = ax$, где $a \in M_{ki}$ и $x \in X_i$. Обычно мы записываем модуль X и его элементы как строки.

Все функторы, определённые для $n = 2$, имеют аналоги для $n > 2$. Определим только аналог функтора T . Обозначим через L кольцевое прямое произведение $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$. Диагональное вложение $i: L \rightarrow K$ индуцирует функтор $T = T(i) = K \otimes_L (-): L\text{-mod} \rightarrow K\text{-mod}$. Если $X = (X_1, \dots, X_n)$ — L -модуль, то

$$\begin{aligned} T(X) &= (X_1, T(X_1), \dots, T(X_1)) \oplus \\ &\oplus (T(X_2), X_2, \dots, T(X_2)) \oplus \dots \oplus (T(X_n), T(X_n), \dots, X_n). \end{aligned}$$

Используя краткие обозначения, можно писать

$$T(X) = (X_1, T(X_1)) \oplus \dots \oplus (T(X_n), X_n)$$

(см. [14]).

2. Эквивалентность двух категорий проективных модулей

Пусть R — кольцо. Обозначим через $P(R)$ категорию всех конечно порождённых проективных R -модулей.

Группа Гротендика $K_0(R)$ кольца R — это фактор-группа F/H , где F — свободная абелева группа, базис которой составляют классы изоморфных модулей из $P(R)$, а H — подгруппа в F , порождённая всеми элементами вида $(X \oplus Y) - (X) - (Y)$ для всех $X, Y \in P(R)$, где (X) обозначает класс модулей, изоморфных X . Пусть $[X] = (X) + H \in K_0(R)$. Тогда $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$.

Пусть $\mathrm{GL}(n, R)$ — группа обратимых матриц порядка n над кольцом R . Считаем, что группа $\mathrm{GL}(n, R)$ вложена в группу $\mathrm{GL}(n+1, R)$ с помощью мономорфизма

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathrm{GL}(R)$ объединение групп $\mathrm{GL}(n, R)$ для всех $n \geq 1$. Пусть $E(n, R)$ обозначает подгруппу в $\mathrm{GL}(n, R)$, порождённую всеми элементарными матрицами. При вложении $\mathrm{GL}(n, R)$ в $\mathrm{GL}(n+1, R)$ подгруппа $E(n, R)$ вкладывается в $E(n+1, R)$. Объединение всех $E(n, R)$ обозначается $E(R)$ и называется *группой элементарных матриц*. Эта группа совпадает с коммутантом группы $\mathrm{GL}(R)$. *Группа Уайтхеда* $K_1(R)$ кольца R есть абелева группа $\mathrm{GL}(R)/E(R)$.

Для наших целей более полезно другое определение группы $K_1(R)$. Возьмём категорию автоморфизмов в $P(R)$. Её объекты — пары вида (X, α) , где $X \in P(R)$ и α — автоморфизм модуля X . Морфизмы определяются обычным для подобных категорий образом. Пусть F — свободная абелева группа, у которой образующими являются пары (X, α) по одной для каждого класса пар, изоморфных в категории автоморфизмов. Группа $K_1(R)$ есть фактор-группа F/G , где подгруппа G порождается элементами вида $(X, \alpha\beta) - (X, \alpha) - (X, \beta)$ и $(X \oplus Y, \alpha\beta) - (X, \alpha) - (Y, \beta)$ и подразумевается, что α действует тождественно на Y и β действует тождественно на X . Смежный класс $(X, \alpha) + G$ обозначается через $[(X, \alpha)]$.

Естественный изоморфизм между двумя группами $K_1(R)$ устанавливается следующим образом (см. [7, гл. 9, теорема 1.2; 21, теорема 3.1.7]). Матрица $A \in \mathrm{GL}(n, R)$ определяет автоморфизм α модуля R^n . Элементу $AE(R)$ группы $\mathrm{GL}(R)/E(R)$ ставится в соответствие элемент $[(R^n, \alpha)]$ группы F/G . В данной работе используется только второе определение группы $K_1(R)$.

Любой элемент группы $K_1(R)$ можно записать в виде $[(X, \alpha)]$ для некоторых X и α . Нулевым элементом является $[(X, 1)]$ при всяком X . Противоположным элементом к $[(X, \alpha)]$ является $[(X, \alpha^{-1})]$. Автоморфизм α несёт основную информацию об элементе $[(X, \alpha)]$. Поэтому мы часто пишем $[\alpha]$ вместо $[(X, \alpha)]$.

Для определения гомоморфизмов между группами K_0 и K_1 мы будем использовать следующие факты.

Если R и S — два кольца, то каждый аддитивный функтор $F: P(R) \rightarrow P(S)$ индуцирует групповой гомоморфизм

$$K_0(F): K_0(R) \rightarrow K_0(S), \quad [X] \rightarrow [FX]$$

(так действует гомоморфизм на образующих группы $K_0(R)$),

$$K_1(F): K_1(R) \rightarrow K_1(S), \quad [(X, \alpha)] \rightarrow [(FX, F\alpha)].$$

В частности, кольцевой гомоморфизм $i: R \rightarrow S$ индуцирует функтор

$$T(i) = S \otimes_R (-): P(R) \rightarrow P(S), \quad X \rightarrow S \otimes_R X.$$

Следовательно, имеются гомоморфизмы

$$\begin{aligned} K_0(i): K_0(R) &\rightarrow K_0(S), & [X] &\rightarrow [S \otimes_R X], \\ K_1(i): K_1(R) &\rightarrow K_1(S), & [(X, \alpha)] &\rightarrow [(S \otimes_R X, 1 \otimes \alpha)]. \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц с идеалами следа I и J , определённое в разделе 1. Имеется коммутативная диаграмма колец

$$\begin{array}{ccc} R \times S & \xrightarrow{k} & R/I \times S/J \\ i \downarrow & & \parallel \\ K & \xrightarrow{j} & R/I \times S/J \end{array}, \quad (2.1)$$

в которой i — диагональное вложение,

$$(r, s) \rightarrow \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

k — канонический эпиморфизм,

$$j: \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \rightarrow (r + I, s + J).$$

Можно записать диаграмму функторов

$$\begin{array}{ccc} P(R \times S) & \xrightarrow{T(k)} & P(R/I \times S/J) \\ T(i) \downarrow & & \parallel \\ P(K) & \xrightarrow{T(j)} & P(R/I \times S/J) \end{array}. \quad (2.2)$$

Действие этих функторов таково. Если $X \oplus Y$ — проективный $(R \times S)$ -модуль, то

$$T(i)(X \oplus Y) = (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y),$$

т. е. $T(i)$ — ограничение функтора T из раздела 1, и

$$T(k)(X \oplus Y) = (R/I \otimes_R X) \oplus (S/J \otimes_S Y) \cong X/IX \oplus Y/JY.$$

Если (X, Y) — проективный K -модуль, то

$$T(j)(X, Y) = X/MY \oplus Y/NX$$

(см. [5, замечание перед следствием 6.2]). Все три функтора переводят гомоморфизмы в индуцированные гомоморфизмы. Можно проверить, что функторы $T(i)T(j)$ и $T(k)$ естественно эквивалентны.

Диаграммы (2.1) и (2.2) индуцируют коммутативную диаграмму групп K_0 и их гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} K_0(R) \oplus K_0(S) & \xrightarrow{K_0(k)} & K_0(R/I) \oplus K_0(S/J) \\ K_0(i) \downarrow & & \parallel \\ K_0(K) & \xrightarrow{K_0(j)} & K_0(R/I) \oplus K_0(S/J) \end{array} . \quad (2.3)$$

Гомоморфизмы действуют следующим образом (мы задаём их только на образующих элементах групп K_0):

$$K_0(i): [X] + [Y] \rightarrow [(X, T(X))] + [(T(Y), Y)].$$

Затем

$$K_0(k): [X] + [Y] \rightarrow [X/IX] + [Y/JY].$$

Наконец,

$$K_0(j): [(X, Y)] \rightarrow [X/MY] + [Y/NX].$$

Диаграммы (2.1) и (2.2) также индуцируют коммутативную диаграмму групп K_1 и их гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccc} K_1(R) \oplus K_1(S) & \xrightarrow{K_1(k)} & K_1(R/I) \oplus K_1(S/J) \\ K_1(i) \downarrow & & \parallel \\ K_1(K) & \xrightarrow{K_1(j)} & K_1(R/I) \oplus K_1(S/J) \end{array} . \quad (2.4)$$

Для этой диаграммы

$$K_1(i): [\alpha] + [\beta] \rightarrow [(\alpha, 1 \otimes \alpha)] + [(1 \otimes \beta, \beta)].$$

Можно записать

$$K_1(k): [\alpha] + [\beta] \rightarrow [\bar{\alpha}] + [\bar{\beta}],$$

где $\bar{\alpha}$ ($\bar{\beta}$) — автоморфизм, индуцированный автоморфизмом α (соответственно β) на X/IX (соответственно на Y/JY), а также

$$K_1(j): [(\alpha, \beta)] \rightarrow [\bar{\alpha}] + [\bar{\beta}],$$

где $\bar{\alpha}$ ($\bar{\beta}$) — автоморфизм, индуцированный автоморфизмом α (соответственно β) на X/MY (соответственно на Y/NX).

Сформулируем один результат об эквивалентности категорий проективных модулей. Если L — идеал некоторого кольца T , то множество всех степеней идеала L образует базис окрестностей нуля так называемой L -адической топологии кольца T .

Теорема 2.1. Если $I \subseteq J(R)$, $J \subseteq J(S)$, кольцо R полно в I -адической топологии и кольцо S полно в J -адической топологии, то функтор $T(i)$ задаёт эквивалентность между категориями $P(R \times S)$ и $P(K)$.

Доказательство. По [6, теорема 4.1] ядро

$$\begin{pmatrix} I & M \\ N & J \end{pmatrix}$$

гомоморфизма j лежит в радикале $J(K)$. Следовательно, функтор $T(K)$ действует биективно, а функтор $T(j)$ действует инъективно на соответствующих классах изоморфных конечно порождённых проективных модулей (см. [7, гл. 3, предложение 2.12]).

Пусть (P, Q) — некоторый конечно порождённый проективный K -модуль. Существует такой конечно порождённый проективный $(R \times S)$ -модуль $X \oplus Y$, что $T(k)(X \oplus Y) \cong P/MQ \oplus Q/NP$. Получаем

$$T(i)(X \oplus Y) \cong (P, Q) \quad \text{или} \quad (P, Q) \cong (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y).$$

Возьмём произвольные конечно порождённые проективные R -модули X_1, X_2 и S -модули Y_1, Y_2 . Отображения

$$T(i): \text{Hom}_R(X_1, X_2) \rightarrow \text{Hom}_K((X_1, T(X_1)), (X_2, T(X_2))),$$

$$T(i): \text{Hom}_S(Y_1, Y_2) \rightarrow \text{Hom}_K((Y_1, T(Y_1)), (Y_2, T(Y_2)))$$

являются изоморфизмами (см. раздел 1 и [5, лемма 2.2]). Мы показали, что $T(i)$ — эквивалентность. $\square$

В процессе доказательства теоремы 2.1 мы установили следующий факт (ср. с [5, теорема 7.3]).

Следствие 2.2. В условиях теоремы 2.1 для любого конечно порождённого проективного K -модуля (P, Q) существуют конечно порождённый проективный R -модуль X и конечно порождённый проективный S -модуль Y , такие что $(P, Q) \cong (X, T(X)) \oplus (T(Y), Y)$.

Следствие 2.3. В условиях теоремы 2.1 справедливы изоморфизмы $K_i(K) \cong K_i(R) \oplus K_i(S)$, $i = 0, 1$.

Доказательство. В случае $i = 0$ утверждение следует из эквивалентности категорий $P(R \times S)$ и $P(K)$. В случае $i = 1$ утверждение следует из эквивалентности категорий автоморфизмов категорий $P(R \times S)$ и $P(K)$. $\square$

Замечание 2.4. Условиям теоремы 2.1 удовлетворяют кольца K с нильпотентными идеалами следа I и J . Это так, например, для колец формальных треугольных матриц, где $M = 0$ или $N = 0$.

3. Группа $K_0(A, B)$

Рассмотрим более общие категории, чем категория $P(R)$ конечно порождённых проективных модулей. Пусть A — R -модуль. Прямые слагаемые прямых сумм конечного числа копий модуля A называются *конечно A -проективными*

R -модулями [17, § 32]. Обозначим через $P(A)$ категорию конечно A -проективных R -модулей. Категории $P(A)$ и $P(\text{End}_R A)$ эквивалентны [17, теорема 32.1].

Категория $P(A)$ аддитивна, и классы её изоморфных объектов образуют множество. Следовательно, можно определить группу Гротендика $K_0(P(A))$ категории $P(A)$ так, чтобы $K_0(R) = K_0(P(R))$ [7, 21]. В силу указанной выше эквивалентности имеет место групповой изоморфизм $K_0(P(A)) \cong K_0(\text{End}_R A)$. Будем использовать обозначение $K_0(A)$ вместо $K_0(P(A))$.

Аналогично разделу 2 заметим, что группа $K_0(A)$ — это фактор-группа F/H , где F — свободная абелева группа, базис которой составляют классы изоморфных модулей из $P(A)$, а H — подгруппа в F , порождённая всеми элементами вида $(X \oplus Y) - (X) - (Y)$ для всех $X, Y \in P(A)$, где (X) обозначает класс модулей, изоморфных X . Пусть $[X] = (X) + H \in K_0(A)$. Тогда $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$. Если $z \in K_0(A)$, то $z = [X] - [Y]$ для некоторых X и Y из $P(A)$. Этот полезный факт мы будем использовать без дополнительного напоминания. Кроме того, отметим, что равенство $[X] = [Y]$ в $K_0(A)$ равносильно тому, что $X \oplus A^n \cong Y \oplus A^n$ для некоторого натурального числа n . В таком случае говорят, что X и Y *стабильно изоморфны* в $P(A)$. В частности, модули X и Y из $P(R)$ стабильно изоморфны, если $X \oplus R^n \cong Y \oplus R^n$ для некоторого натурального числа n .

Если A и C — два модуля, то любой аддитивный функтор $F: P(A) \rightarrow P(C)$ индуцирует групповой гомоморфизм $K_0(A) \rightarrow K_0(C)$, $[X] \rightarrow [FX]$ (мы указываем действие этого гомоморфизма только на образующих элементах группы $K_0(A)$).

Отметим, что можно не различать категории $P(A)$ и $P(A^n)$, $n \geq 2$. Следовательно, $K_0(A) \cong K_0(A^n)$.

Лемма 3.1. Пусть A и B — два модуля, причём A — конечно B -проективный модуль. Тогда существует вложение категорий $P(A) \rightarrow P(B)$, индуцирующее гомоморфизм $K_0(A) \rightarrow K_0(B)$.

Доказательство. Утверждение следует из того, что каждый конечно A -проективный модуль является конечно B -проективным модулем. $\square$

Пусть дано прямое разложение модулей $A = B \oplus C$. Так как B и C — конечно A -проективные модули, то существуют гомоморфизмы $K_0(B) \rightarrow K_0(A)$ и $K_0(C) \rightarrow K_0(A)$ из леммы 3.1.

Предложение 3.2. Если $A = B \oplus C$, где C — конечно B -проективный модуль, то существует канонический изоморфизм $K_0(A) \cong K_0(B)$.

Доказательство. Ясно, что A — конечно B -проективный модуль. Имеется гомоморфизм $K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ из леммы 3.1. Он является обратным к гомоморфизму $K_0(B) \rightarrow K_0(A)$, указанному перед предложением. $\square$

Как и раньше, пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц.

До конца раздела считаем, что (A, B) — некоторый K -модуль, $P(A)$ и $P(B)$ — определённые выше категории, $P(A, B)$ — категория конечно (A, B) -проективных K -модулей. Далее, $K_0(A)$ и $K_0(B)$ — группы, определённые выше, $K_0(A, B)$ — аналогичная группа для категории $P(A, B)$.

Наша цель — выразить группу $K_0(A, B)$ через группы $K_0(A)$ и $K_0(B)$.

Приведём два простых результата общего характера.

Следствие 3.3. Для любого R -модуля X и каждого S -модуля Y существуют изоморфизмы $K_0(X, T(X)) \cong K_0(X)$ и $K_0(T(Y), Y) \cong K_0(Y)$.

Доказательство. По [5, следствие 2.4] существуют канонические кольцевые изоморфизмы $\text{End}_K(X, T(X)) \cong \text{End}_R X$ и $\text{End}_K(T(Y), Y) \cong \text{End}_S Y$. Они индуцируют эквивалентность категорий $P(X, T(X))$ и $P(X)$, эквивалентность категорий $P(T(Y), Y)$ и $P(Y)$, а также изоморфизмы соответствующих групп K_0 . $\square$

Следствие 3.4. Пусть для кольца K имеет место ситуация эквивалентности, т. е. $I = R$ и $J = S$ (см. [5, раздел 8]). Тогда $K_0(A) \cong K_0(A, B) \cong K_0(B)$.

Доказательство. По [5, следствие 8.2] существуют модульные изоморфизмы $(A, T(A)) \cong (A, B) \cong (T(B), B)$. Теперь применяем следствие 3.3. $\square$

Введём краткие обозначения для элементов группы $K_0(A, B)$. Пусть $z = [(X_1, Y_1)] - [(X_2, Y_2)] \in K_0(A, B)$. Положим $x = [X_1] - [X_2] \in K_0(A)$ и $y = [Y_1] - [Y_2] \in K_0(B)$. Элемент z будем записывать в виде пары $[x, y]$. Верны соотношения

$$-[x, y] = [-x, -y], \quad [x, y] + [x', y'] = [x + x', y + y'].$$

Теперь определим некоторые функторы и гомоморфизмы между введёнными выше категориями и группами K_0 .

Если $(X, Y) \in P(A, B)$, то $X \in P(A)$ и $Y \in P(B)$. Можно определить функтор $F: P(A, B) \rightarrow P(A)$, считая, что $F(X, Y) = X$, а гомоморфизмы переводятся в индуцированные гомоморфизмы. Обозначим также буквой F аналогичный функтор $P(A, B) \rightarrow P(B)$, $(X, Y) \rightarrow Y$. Эти функторы являются ограничениями функторов $(1, 0)$ и $(0, 1)$ из раздела 1. Функторы F индуцируют гомоморфизмы

$$\begin{aligned} \mu_1: K_0(A, B) &\rightarrow K_0(A), & [x, y] &\rightarrow x, \\ \mu_2: K_0(A, B) &\rightarrow K_0(B), & [x, y] &\rightarrow y. \end{aligned}$$

Положим также

$$\mu = \mu_1 + \mu_2: K_0(A, B) \rightarrow K_0(A) \oplus K_0(B), \quad [x, y] \rightarrow x + y.$$

Ясно, что

$$\text{Ker } \mu = \text{Ker } \mu_1 \cap \text{Ker } \mu_2$$

и $x = 0 = y$ тогда и только тогда, когда $[x, y] \in \text{Ker } \mu$.

Сделаем одно предположение. Оно даст возможность задать гомоморфизм групп K_0 в «противоположном» по сравнению с μ_1 направлении. Считаем далее, что $(A, T(A))$ — конечно (A, B) -проективный K -модуль (напомним, что K -модуль (A, B) зафиксирован). В таком случае для всякого конечно A -проективного R -модуля X K -модуль $(X, T(X))$ является конечно (A, B) -проективным.

Определим функтор $P(A) \rightarrow P(A, B)$, $X \rightarrow (X, T(X))$ (гомоморфизмы переводятся в индуцированные гомоморфизмы, см. раздел 1). Этот функтор является ограничением функтора $(1, T_N)$ из раздела 1.

Введённый функтор индуцирует гомоморфизм

$$\alpha_1: K_0(A) \rightarrow K_0(A, B), \quad [X_1] - [X_2] \rightarrow [(X_1, T(X_1))] - [(X_2, T(X_2))].$$

Пусть

$$\sigma = \alpha_1 \mu_2: K_0(A) \rightarrow K_0(B), \quad [X_1] - [X_2] \rightarrow [T(X_1)] - [T(X_2)].$$

Если обозначить $x = [X_1] - [X_2]$, то в соответствии с правилом записи элементов группы $K_0(A, B)$ имеем равенство $\alpha_1(x) = [x, \sigma(x)]$. Поскольку $\alpha_1 \mu_1 = 1$, то получаем следующий результат.

Следствие 3.5. Существует прямое разложение $K_0(A, B) = \text{Im } \alpha_1 \oplus \text{Ker } \mu_1$, где $\text{Im } \alpha_1 \cong K_0(A)$.

Запись элемента $[x, y]$ относительно прямой суммы из следствия 3.5 имеет вид $[x, y] = [x, \sigma(x)] + [0, y - \sigma(x)]$. Заметим, что соответствие $\alpha_1: x \rightarrow [x, \sigma(x)]$ является изоморфизмом между $K_0(A)$ и $\text{Im } \alpha_1$. Определим подгруппу G группы $K_0(B)$, полагая

$$G = \{y - \sigma(x) \mid [x, y] \in K_0(A, B)\}.$$

Теперь можно выяснить строение фактор-группы $K_0(A, B)/\text{Ker } \mu$.

Теорема 3.6. Существует изоморфизм

$$K_0(A, B)/\text{Ker } \mu \cong K_0(A) \oplus G, \quad [x, y] + \text{Ker } \mu \rightarrow x + (y - \sigma(x)).$$

Доказательство. Ядро гомоморфизма

$$K_0(A, B) \rightarrow K_0(A) \oplus G, \quad [x, y] \rightarrow x + (y - \sigma(x))$$

состоит из таких элементов $[x, y]$, что $x = 0 = y$. Таким образом, это ядро равно $\text{Ker } \mu$. $\square$

По-видимому, выявить строение подгруппы $\text{Ker } \mu$ непросто. Из материала раздела 6 следует, что эта подгруппа может быть не равной нулю. Если z — ненулевой элемент из $\text{Ker } \mu$ и $z = [(X_1, Y_1)] - [(X_2, Y_2)]$, то X_1, X_2 стабильно изоморфны в $P(A)$ и Y_1, Y_2 стабильно изоморфны в $P(B)$, но (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) не являются стабильно изоморфными в $P(A, B)$.

Следствие 3.7. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) $G = 0$;
- б) $y = \sigma(x)$ для любого $[x, y] \in K_0(A, B)$;
- в) $K_0(A, B) = \text{Im } \alpha_1 \oplus \text{Ker } \mu$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений а) и б) вытекает из определения подгруппы G .

Докажем импликацию б) $\implies$ в). В наших условиях $\text{Ker } \mu_1 \subseteq \text{Ker } \mu_2$ и $\text{Ker } \mu = \text{Ker } \mu_1$. Теперь можно использовать следствие 3.5.

Докажем импликацию в) $\implies$ а). Снова получаем $\text{Ker } \mu_1 \subseteq \text{Ker } \mu_2$. Пусть $[x, y] \in K_0(A, B)$. Тогда

$$[x, y] - [x, \sigma(x)] = [0, y - \sigma(x)] \in \text{Ker } \mu_1.$$

Следовательно, $[0, y - \sigma(x)] \in \text{Ker } \mu_2$, $y - \sigma(x) = 0$ и $G = 0$. $\square$

В следствии 3.5, теореме 3.6 и следствии 3.7 мы предполагали, что $(A, T(A))$ — конечно (A, B) -проективный K -модуль. Теперь пусть $(T(B), B)$ — конечно (A, B) -проективный K -модуль. Конечно, будут верны утверждения, аналогичные приведённым выше. Имеем функтор

$$P(B) \rightarrow P(A, B), \quad Y \rightarrow (T(Y), Y)$$

и индуцированный гомоморфизм

$$\alpha_2: K_0(B) \rightarrow K_0(A, B), \quad [Y_1] - [Y_2] \rightarrow [(T(Y_1), Y_1)] - [(T(Y_2), Y_2)].$$

Пусть

$$\tau = \alpha_2 \mu_1: K_0(B) \rightarrow K_0(A), \quad [Y_1] - [Y_2] \rightarrow [T(Y_1)] - [T(Y_2)].$$

Тогда $\alpha_2(y) = [\tau(y), y]$, где $y = [Y_1] - [Y_2]$. Также верно равенство $\alpha_2 \mu_2 = 1$ и справедливы аналоги следствия 3.5, теоремы 3.6 и следствия 3.7. А именно, существует прямое разложение

$$K_0(A, B) = \text{Im } \alpha_2 \oplus \text{Ker } \mu_2,$$

где $\text{Im } \alpha_2 \cong K_0(B)$. Существует изоморфизм

$$K_0(A, B) / \text{Ker } \mu \cong H \oplus K_0(B), \quad [x, y] + \text{Ker } \mu \rightarrow (x - \tau(y)) + y,$$

где $H = \{x - \tau(y) \mid [x, y] \in K_0(A, B)\}$ — подгруппа группы $K_0(A)$.

Теперь предположим, что оба K -модуля $(A, T(A))$ и $(T(B), B)$ являются конечно (A, B) -проективными. В таком случае $\sigma\tau$ и $\tau\sigma$ — эндоморфизмы групп $K_0(A)$ и $K_0(B)$ соответственно. Обозначим также

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2: K_0(A) \oplus K_0(B) \rightarrow K_0(A, B).$$

Композиция $\alpha\mu$ является эндоморфизмом группы $K_0(A) \oplus K_0(B)$,

$$\alpha\mu(x + y) = (x + \tau(y)) + (\sigma(x) + y), \quad x \in K_0(A), \quad y \in K_0(B).$$

Относительно этой прямой суммы этот эндоморфизм представим матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ \sigma & 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие 3.8. Если

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ \sigma & 1 \end{pmatrix} -$$

обратимая матрица, то имеем равенство

$$K_0(A, B) = \text{Im } \alpha_1 \oplus \text{Im } \alpha_2 \oplus \text{Ker } \mu$$

и изоморфизм

$$K_0(A, B) \cong K_0(A) \oplus K_0(B) \oplus \text{Ker } \mu.$$

Доказательство. В наших условиях $\alpha\mu$ — автоморфизм группы $K_0(A) \oplus K_0(B)$. Следовательно, $\alpha(\mu\xi) = 1$ для некоторого автоморфизма ξ этой группы. Поэтому

$$K_0(A, B) = \text{Im } \alpha \oplus \text{Ker } \mu\xi = \text{Im } \alpha_1 \oplus \text{Im } \alpha_2 \oplus \text{Ker } \mu. \quad \square$$

Обратимость эндоморфизма $1 - \sigma\tau$ группы $K_0(A)$ равносильна обратимости эндоморфизма $1 - \tau\sigma$ группы $K_0(B)$. В таком случае

$$\begin{pmatrix} 1 & \sigma \\ \tau & 1 \end{pmatrix} -$$

обратимая матрица с обратной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sigma \\ -\tau & 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие 3.9. Если $1 - \sigma\tau$ — автоморфизм группы $K_0(A)$ (это так, например, если эндоморфизм $\sigma\tau$ нильпотентен или лежит в радикале $J(\text{End } K_0(A))$), то для группы $K_0(A, B)$ верно утверждение следствия 3.8.

Следующий результат дополняет следствие 3.7.

Следствие 3.10. Если $G = 0 = H$, то σ и τ — взаимно обратные изоморфизмы и

$$K_0(A, B) \cong K_0(A) \oplus \text{Ker } \mu \cong K_0(B) \oplus \text{Ker } \mu.$$

Замечание 3.11. В заключение заметим, что верны равенства

$$G = (1 - \tau\sigma)K_0(B) + \sigma(H), \quad H = (1 - \sigma\tau)K_0(A) + \tau(G).$$

4. Группа Гротендика кольца $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$

Применим результаты раздела 3 к кольцу формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Берём K -модуль K в качестве модуля (A, B) . Можно записать этот модуль в виде $((R, M), (N, S))$ или $(R \oplus M, N \oplus S)$. В ряде случаев вычислим группу $K_0(K)$ с помощью групп $K_0(R)$ и $K_0(S)$ (иногда с точностью до подгруппы $\text{Ker } \mu$).

Сначала приведём два характерных результата, относящихся к крайним ситуациям. Первый результат вытекает из следствия 2.3.

Следствие 4.1. Если идеалы следа I и J кольца K нильпотентны, то $K_0(K) \cong K_0(R) \oplus K_0(S)$.

Если гомоморфизм $\psi: N \otimes_R M \rightarrow S$ из раздела 1 является эпиморфизмом, то говорят, что K — полусюръективный контекст Мориты.

Следствие 4.2.

1. Если K — полусюръективный контекст Мориты, то $K_0(K) \cong K_0(R)$ [7].
2. Если K — ситуация эквивалентности, т. е. $I = R$ и $J = S$, то $K_0(R) \cong K_0(K) \cong K_0(S)$ (ср. со следствием 3.4).

Доказательство. Докажем утверждение 1. Имеем

$$T(R \oplus M) \cong (N \otimes_R R) \oplus (N \otimes_R M) \cong N \oplus (N \otimes_R M).$$

Отображение ψ будет изоморфизмом [5, раздел 8]. Следовательно,

$$T(R \oplus M) \cong N \oplus S, \quad K \cong (R \oplus M, T(R \oplus M)).$$

По следствию 3.3 $K_0(K) \cong K_0(R \oplus M)$. R -модуль M является конечно порождённым проективным R -модулем [5, раздел 8]. Из предложения 3.2 вытекает, что $K_0(R \oplus M) \cong K_0(R)$. Итак, $K_0(K) \cong K_0(R)$.

Утверждение 2 является частным случаем утверждения 1. □

Возьмём функторы

$$T_N = N \otimes_R (-): R\text{-mod} \rightarrow S\text{-mod}, \quad T_M = M \otimes_S (-): S\text{-mod} \rightarrow R\text{-mod}$$

из раздела 1. Мы обычно будем обозначать их одной буквой T . Ограничения этих функторов дают функторы

$$T: P(R) \rightarrow P(N), \quad T: P(S) \rightarrow P(M).$$

Функторы T индуцируют гомоморфизмы

$$\begin{aligned} \sigma: K_0(R) &\rightarrow K_0(N), & [X_1] - [X_2] &\rightarrow [T(X_1)] - [T(X_2)], \\ \tau: K_0(S) &\rightarrow K_0(M), & [Y_1] - [Y_2] &\rightarrow [T(Y_1)] - [T(Y_2)]. \end{aligned}$$

Функторы

$$(1, T_N): R\text{-mod} \rightarrow K\text{-mod}, \quad (T_M, 1): S\text{-mod} \rightarrow K\text{-mod}$$

из раздела 1 дают функторы

$$\begin{aligned} P(R) &\rightarrow P(K), & X &\rightarrow (X, T(X)), \\ P(S) &\rightarrow P(K), & Y &\rightarrow (T(Y), Y), \end{aligned}$$

индуцирующие гомоморфизмы

$$\alpha_1: K_0(R) \rightarrow K_0(K), \quad \alpha_2: K_0(S) \rightarrow K_0(K).$$

Если использовать обозначения раздела 3 для элементов группы $K_0(K)$, то можно записать выражения

$$\alpha_1(x) = [x, \sigma(x)], \quad x \in K_0(R), \quad \alpha_2(y) = [\tau(y), y], \quad y \in K_0(S).$$

Теперь положим $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Гомоморфизмы $\sigma, \tau, \alpha_1, \alpha_2$ аналогичны соответствующим гомоморфизмам из раздела 3.

Также имеем два функтора

$$F: P(K) \rightarrow P(R \oplus M), \quad F: P(K) \rightarrow P(N \oplus S)$$

и соответствующие гомоморфизмы

$$\mu_1: K_0(K) \rightarrow K_0(R \oplus M), \quad \mu_2: K_0(K) \rightarrow K_0(N \oplus S), \quad \mu = \mu_1 + \mu_2$$

(см. текст после следствия 3.4).

Для кольца K формальных матриц мы имеем диаграмму (2.3). Ещё раз запишем её в виде

$$\begin{array}{ccc} K_0(R) \oplus K_0(S) & \xrightarrow{\pi} & K_0(R/I) \oplus K_0(S/J) \\ \alpha \downarrow & & \parallel \\ K_0(K) & \xrightarrow{\rho} & K_0(R/I) \oplus K_0(S/J) \end{array},$$

где $\alpha = K_0(i)$, $\pi = K_0(k)$ и $\rho = K_0(j)$. Представим действие этих гомоморфизмов в более компактной форме. Положим

$$x = [X_1] - [X_2] \in K_0(R), \quad y = [Y_1] - [Y_2] \in K_0(S).$$

Тогда $\alpha(x + y) = [x, \sigma(x)] + [\tau(y), y]$. Обозначим $[X_1/IX_1] - [X_2/IX_2]$ через x/Ix и $[Y_1/JY_1] - [Y_2/JY_2]$ через y/Jy . Тогда $\pi(x + y) = x/Ix + y/Jy$. Если же $[x, y] \in K_0(K)$, где $x = [X_1] - [X_2]$ и $y = [Y_1] - [Y_2]$, то пусть

$$x/My = [X_1/MY_1] - [X_2/MY_2], \quad y/Nx = [Y_1/NX_1] - [Y_2/NX_2].$$

Тогда $\rho([x, y]) = x/My + y/Nx$.

По следствию 2.3 имеем, что $K_0(K) \cong K_0(R) \oplus K_0(S)$, если идеалы следа I и J кольца K нильпотентны. При этом гомоморфизм $K_0(i)$ из диаграммы (2.3) является изоморфизмом, и следовательно, гомоморфизм α — изоморфизм. Ниже указано, как действуют эти изоморфизмы.

Сейчас рассмотрим более общую ситуацию, когда $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$. Но сначала приведём один известный факт.

Пусть T — некоторое кольцо, L — идеал кольца T , лежащий в $J(T)$, и $e: T \rightarrow T/L$ — канонический эпиморфизм. Тогда ядро индуцированного гомоморфизма $K_0(e): K_0(T) \rightarrow K_0(T/L)$ равно нулю. (Если дополнительно предполагать, что кольцо T полно в L -адической топологии, то $K_0(e)$ — изоморфизм [7, гл. 9, предложение 1.3].)

Вернёмся к кольцу формальных матриц K . Если $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$, то ядро

$$\begin{pmatrix} I & M \\ N & J \end{pmatrix}$$

гомоморфизма j из диаграммы (2.1) лежит в радикале $J(K)$ (этот факт уже использовался в доказательстве теоремы 2.1). Следовательно, π , ρ и α являются мономорфизмами. После естественных отождествлений можно считать, что верны включения

$$K_0(R) \oplus K_0(S) \subseteq K_0(K) \subseteq K_0(R/I) \oplus K_0(S/J).$$

Теорема 4.3. Допустим, что $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$. Равенство $K_0(K) = K_0(R) \oplus K_0(S)$ выполняется в точности тогда, когда $\text{Im } \rho = \text{Im } \pi$.

Доказательство. Теорема 4.3 вытекает из того, что равенство $\text{Im } \rho = \text{Im } \pi$ выполняется в точности тогда, когда α — изоморфизм. $\square$

Как действуют изоморфизмы α и α^{-1} (см. также следствие 2.3)? Возьмём элемент $[x, y] \in K_0(K)$. Тогда

$$x/My = x'/Ix', \quad y/Nx = y'/Jy',$$

где $x' \in K_0(R)$, $y' \in K_0(S)$, причём x' и y' определяются единственным образом. Соответствие $[x, y] \rightarrow x' + y'$ задаёт изоморфизм α^{-1} , а соответствие $x' + y' \rightarrow [x, y]$ задаёт изоморфизм α . Получаем, что $K_0(K) = \text{Im } \alpha_1 \oplus \text{Im } \alpha_2$ и $[x, y] = [x', \sigma(x')] + [\tau(y'), y']$ — запись элемента $[x, y]$ относительно этой прямой суммы.

В разделе 3 мы предполагали, что хотя бы один из K -модулей $(A, T(A))$, $(T(B), B)$ является конечно (A, B) -проективным. Допустим, что ${}_R M$ — конечно порождённый проективный модуль. Тогда $(R \oplus M, T(R \oplus M))$ — конечно порождённый проективный K -модуль по [5, предложение 7.1], т. е. указанное предположение выполняется для K -модуля K . В таком случае если ${}_S Y$ — конечно порождённый проективный модуль, то $T(Y) = M \otimes_S Y$ — конечно порождённый проективный R -модуль. А если (X, Y) — конечно порождённый проективный K -модуль, то X — конечно порождённый проективный R -модуль.

В такой ситуации можно уточнить функторы T , F и соответствующие гомоморфизмы τ и μ_1 , определённые в разделе 3. Действительно, мы получаем «новый» функтор $T: P(S) \rightarrow P(R)$, $Y \rightarrow T(Y)$ и «новый» гомоморфизм $\tau: K_0(S) \rightarrow K_0(R)$ вместо $T: P(S) \rightarrow P(M)$ и $\tau: K_0(S) \rightarrow K_0(M)$ соответственно. Далее, имеем «новый» функтор $F: P(K) \rightarrow P(R)$, $(X, Y) \rightarrow X$ и «новый» гомоморфизм $\mu_1: K_0(K) \rightarrow K_0(R)$, $[x, y] \rightarrow x$ вместо $F: P(K) \rightarrow P(R \oplus M)$ и $\mu_1: K_0(K) \rightarrow K_0(R \oplus M)$ соответственно.

Так как $\alpha_1 \mu_1 = 1$, то выполняется следствие 4.4.

Следствие 4.4. Если M — конечно порождённый проективный R -модуль, то существует прямое разложение

$$K_0(K) = \text{Im } \alpha_1 \oplus \text{Ker } \mu_1,$$

где $\text{Im } \alpha_1 \cong K_0(R)$.

Если ${}_S N$ — конечно порождённый проективный модуль, то аналогично можно получить «новые» функторы $T: P(R) \rightarrow P(S)$ и $F: P(K) \rightarrow P(S)$, $(X, Y) \rightarrow Y$ и «новые» гомоморфизмы

$$\begin{aligned} \sigma: K_0(R) &\rightarrow K_0(S), & [X_1] - [X_2] &\rightarrow [T(X_1)] - [T(X_2)], \\ \mu_2: K_0(K) &\rightarrow K_0(S), & [x, y] &\rightarrow y. \end{aligned}$$

При этом $\alpha_2 \mu_2 = 1$. Следовательно, мы имеем прямое разложение $K_0(K) = \text{Im } \alpha_2 \oplus \text{Ker } \mu_2$, где $\text{Im } \alpha_2 \cong K_0(S)$.

Теперь предположим, что оба модуля ${}_R M$, ${}_S N$ являются конечно порождёнными проективными модулями. В таком случае верны аналогии теоремы 3.6 и следствий 3.7—

теор. 3.10, если в этих утверждениях мы положим $\mu = \mu_1 + \mu_2$ и заменим $K_0(A, B)$ на $K_0(K)$, $K_0(A)$ на $K_0(R)$, $K_0(B)$ на $K_0(S)$ соответственно. Мы сформулируем только аналог теоремы 3.6. Сначала мы определим подгруппу

$$G = \{y - \sigma(x) \mid [x, y] \in K_0(K)\}$$

группы $K_0(S)$ и подгруппу

$$H = \{x - \tau(y) \mid [x, y] \in K_0(K)\}$$

группы $K_0(R)$.

Теорема 4.5. Предположим, что ${}_R M$, ${}_S N$ — конечно порождённые проективные модули. Существуют изоморфизмы

$$\begin{aligned} K_0(K)/\text{Ker } \mu &\cong K_0(R) \oplus G, & [x, y] + \text{Ker } \mu &\rightarrow x + (y - \sigma(x)), \\ K_0(K)/\text{Ker } \mu &\cong H \oplus K_0(S), & [x, y] + \text{Ker } \mu &\rightarrow (x - \tau(y)) + y. \end{aligned}$$

Приведём один случай, когда выполнено предположение аналога следствия 3.9.

Если задано кольцо формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

(см. раздел 1) и гомоморфизм $\varphi: M \otimes_S N \rightarrow R$ является мономорфизмом, то говорят, что K — *полуинъективный контекст Мориты* (ср. с утверждением 1 следствия 4.2).

Следствие 4.6. Пусть выполнены условия теоремы 4.5, K — полуинъективный контекст Мориты и идеал следа I нильпотентен. Тогда имеется изоморфизм

$$K_0(K) \cong K_0(R) \oplus K_0(S) \oplus \text{Ker } \mu.$$

Доказательство. Пусть $x = [X_1] - [X_2] \in K_0(R)$. Тогда

$$\sigma\tau(x) = [M \otimes_S N \otimes_R X_1] - [M \otimes_S N \otimes_R X_2].$$

Так как $M \otimes_S N \cong I$ и проективные R -модули X_1, X_2 являются плоскими, то получаем канонические изоморфизмы $M \otimes_S N \otimes_R X_1 \cong IX_1$, $M \otimes_S N \otimes_R X_2 \cong IX_2$ и равенство $\sigma\tau(x) = [IX_1] - [IX_2]$, $x \in K_0(R)$. Обозначим последнюю разность через Ix . Итак, имеем равенство $\sigma\tau(x) = Ix$, $x \in K_0(R)$. Индукцией по n получаем, что $(\sigma\tau)^n(x) = I^n x$ для любого $n > 1$, где $I^n x$ обозначает $[I^n X_1] - [I^n X_2]$. Ясно, что $(\sigma\tau)^k = 0$ для некоторого k . Остаётся применить следствие 3.9. $\square$

По-прежнему считаем, что модули ${}_R M$ и ${}_S N$ являются конечно порождёнными проективными модулями. Вернёмся к функтору (T, T) из раздела 1. Напомним, что (T, T) — такой функтор $K\text{-mod} \rightarrow K\text{-mod}$, что

$$(X, Y) \rightarrow (T(Y), T(X)), \quad (\alpha, \beta) \rightarrow (T(\beta), T(\alpha)).$$

K -модуль $(T, T)(K)$ является конечно порождённым проективным модулем. Поэтому для любого конечно порождённого проективного K -модуля (A, B) $(T(B), T(A))$ — конечно порождённый проективный K -модуль. Следовательно, мы имеем аддитивный функтор $(T, T): P(K) \rightarrow P(K)$. Обозначим через $[\sigma, \tau]$ эндоморфизм группы $K_0(K)$, индуцированный функтором (T, T) . Итак, $[\sigma, \tau]([x, y]) = [\tau(y), \sigma(x)]$.

5. Группа Уайтхеда кольца $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$

Как и в предыдущем разделе, в данном разделе дано кольцо формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

При некоторых ограничениях мы выразим группу Уайтхеда $K_1(K)$ через группы $K_1(R)$ и $K_1(S)$. В соответствующих формулах иногда присутствует некоторая группа Кегл с неясным строением. Интересно, что результаты и рассуждения этого раздела похожи на соответствующие результаты и рассуждения из раздела 4.

Мы считаем, что ${}_R M$ и ${}_S N$ — конечно порождённые проективные модули. Функторы $T: P(R) \rightarrow P(S)$ и $T: P(S) \rightarrow P(R)$ индуцируют гомоморфизмы $e: K_1(R) \rightarrow K_1(S)$ и $h: K_1(S) \rightarrow K_1(R)$, где $e: [\alpha] \rightarrow [1 \otimes \alpha]$ и $h: [\beta] \rightarrow [1 \otimes \beta]$ (см. разделы 2 и 4). Следовательно, eh — эндоморфизм группы $K_1(R)$ и he — эндоморфизм группы $K_1(S)$.

Мы обозначим через θ_1 ограничение гомоморфизма $K_1(i)$ из диаграммы (2.4) на группу $K_1(R)$; ограничение $K_1(i)$ на $K_1(S)$ обозначается через θ_2 . Таким образом,

$$\begin{aligned} \theta_1: K_1(R) &\rightarrow K_1(K), & [\alpha] &\rightarrow [(\alpha, 1 \otimes \alpha)], \\ \theta_2: K_1(S) &\rightarrow K_1(K), & [\beta] &\rightarrow [(1 \otimes \beta, \beta)]. \end{aligned}$$

Функторы $F: P(K) \rightarrow P(R)$ и $F: P(K) \rightarrow P(S)$ из раздела 4 приводят к гомоморфизмам

$$\begin{aligned}\pi_1: K_1(K) &\rightarrow K_1(R), & [(\alpha, \beta)] &\rightarrow [\alpha], \\ \pi_2: K_1(K) &\rightarrow K_1(S), & [(\alpha, \beta)] &\rightarrow [\beta].\end{aligned}$$

Положим $\pi = \pi_1 + \pi_2$. Ясно, что $\text{Ker } \pi = \text{Ker } \pi_1 \cap \text{Ker } \pi_2$.

Верны равенства $\theta_1 \pi_1 = 1$ и $\theta_2 \pi_2 = 1$.

Если дано, что только ${}_R M$ — конечно порождённый проективный модуль, то все равно π_1 существует и $\theta_1 \pi_1 = 1$. Поэтому имеет место следующее утверждение.

Следствие 5.1. *Если ${}_R M$ — конечно порождённый проективный модуль, то существует прямое разложение*

$$K_1(K) = \text{Im } \theta_1 \oplus \text{Ker } \pi_1,$$

где $\text{Im } \theta_1 \cong K_1(R)$.

Относительно этой прямой суммы элемент $[(\alpha, \beta)]$ записывается в виде

$$[(\alpha, \beta)] = [(\alpha, 1 \otimes \alpha)] + [(1, \beta(1 \otimes \alpha)^{-1})].$$

До конца раздела считаем, что оба модуля ${}_R M$ и ${}_S N$ являются конечно порождёнными проективными модулями. Тогда также имеем

$$K_1(K) = \text{Im } \theta_2 \oplus \text{Ker } \pi_2,$$

где $\text{Im } \theta_2 \cong K_1(S)$.

Для группы $K_1(K)$ верны аналоги теорем 3.6 и 4.5. В этих теоремах присутствуют подгруппы G и H . Для разнообразия определим соответствующие подгруппы для группы $K_1(K)$ более содержательным способом.

Рассмотрим имеющиеся прямые разложения

$$K_1(K) = \text{Im } \theta_1 \oplus \text{Ker } \pi_1 = \text{Im } \theta_2 \oplus \text{Ker } \pi_2.$$

Ограничение проекции $K_1(K) \rightarrow \text{Im } \theta_2$ на $\text{Ker } \pi_1$ имеет ядро, равное $\text{Ker } \pi$. Пусть B' — образ этого ограничения. Обозначим через B образ подгруппы B' при изоморфизме

$$\text{Im } \theta_2 \rightarrow K_1(S), \quad [(1 \otimes \beta, \beta)] \rightarrow [\beta].$$

Итак, B — подгруппа в $K_1(S)$. Найдём вид её элементов. Выше указано представление элемента $[(\alpha, \beta)]$ группы $K_1(K)$ относительно первого разложения. Представление этого элемента относительно второго разложения есть

$$[(\alpha, \beta)] = [(1 \otimes \beta, \beta)] + [(\alpha(1 \otimes \beta)^{-1}, 1)].$$

Теперь ясно, что

$$B = \{[\beta(1 \otimes \alpha)^{-1}] \mid [(\alpha, \beta)] \in K_1(K)\}.$$

Аналогично определим подгруппу A группы $K_1(R)$, полагая

$$A = \{[\alpha(1 \otimes \beta)^{-1}] \mid [(\alpha, \beta)] \in K_1(K)\}.$$

Заметим, что

$$[\beta(1 \otimes \alpha)^{-1}] = [\beta] - e([\alpha]), \quad [\alpha(1 \otimes \beta)^{-1}] = [\alpha] - h([\beta]).$$

Сформулируем один результат общего характера.

Теорема 5.2. *Существуют изоморфизмы*

$$\begin{aligned} K_1(K)/\text{Ker } \pi &\cong K_1(R) \oplus B, & [(\alpha, \beta)] + \text{Ker } \pi &\rightarrow [\alpha] + [\beta(1 \otimes \alpha)^{-1}], \\ K_1(K)/\text{Ker } \pi &\cong A \oplus K_1(S), & [(\alpha, \beta)] + \text{Ker } \pi &\rightarrow [\alpha(1 \otimes \beta)^{-1}] + [\beta], \end{aligned}$$

где B и A — подгруппы в $K_1(S)$ и $K_1(R)$, определённые выше.

Что касается подгруппы $\text{Ker } \pi$, то первый возникающий вопрос следующий. Может ли подгруппа $\text{Ker } \pi$ быть ненулевой? Ответ содержится в разделе 6.

Некоторые части групп B и A можно точно указать.

Лемма 5.3. *Справедливы включения*

$$(1 - he)K_1(S) \subseteq B, \quad (1 - eh)K_1(R) \subseteq A.$$

Доказательство. Для элемента $[\beta] \in K_1(S)$ верны равенства

$$(1 - he)([\beta]) = [\beta] - [1 \otimes 1 \otimes \beta] = [\beta(1 \otimes 1 \otimes \beta)^{-1}].$$

Так как $[(1 \otimes \beta, \beta)] \in K_1(K)$, то $[\beta(1 \otimes 1 \otimes \beta)^{-1}] \in B$. Второе включение проверяется аналогично. $\square$

В одной достаточно понятной ситуации теорему 5.2 можно уточнить.

Следствие 5.4. *Если $1 - eh$ — автоморфизм группы $K_1(R)$ (это так, например, если эндоморфизм eh нильпотентен или $eh \in J(\text{End } K_1(R))$), то имеем равенство*

$$K_1(K) = \text{Im } \theta_1 \oplus \text{Im } \theta_2 \oplus \text{Ker } \pi$$

и изоморфизм

$$K_1(K) \cong K_1(R) \oplus K_1(S) \oplus \text{Ker } \pi.$$

Доказательство. Положим $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Композиция $\theta\pi$ является эндоморфизмом группы $K_1(R) \oplus K_1(S)$,

$$[\alpha] + [\beta] \rightarrow ([\alpha] + [1 \otimes \beta]) + ([1 \otimes \alpha] + [\beta]) = ([\alpha] + h([\beta])) + (e([\alpha]) + [\beta]).$$

Относительно данной прямой суммы эндоморфизм $\theta\pi$ представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & e \\ h & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратимость элемента $1 - eh$ кольца $\text{End } K_1(R)$ равносильна обратимости элемента $1 - he$ кольца $\text{End } K_1(S)$. В этом случае

$$\begin{pmatrix} 1 & e \\ h & 1 \end{pmatrix} -$$

обратимая матрица с обратной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & -e \\ -h & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что $\theta\pi$ — автоморфизм группы $K_1(R) \oplus K_1(S)$. Поэтому $\theta(\pi\omega) = 1$ для некоторого автоморфизма ω группы $K_1(R) \oplus K_1(S)$. Поэтому

$$K_1(K) = \text{Im } \theta \oplus \text{Ker } \pi\omega = \text{Im } \theta_1 \oplus \text{Im } \theta_2 \oplus \text{Ker } \pi. \quad \square$$

Приведём один случай, когда выполнены предположения следствия 5.4.

Следствие 5.5. Пусть K — полуинъективный контекст Мориты (см. следствие 4.6). Если I — нильпотентный идеал, то

$$K_1(K) \cong K_1(R) \oplus K_1(S) \oplus \text{Ker } \pi.$$

Доказательство. Имеем

$$(eh)([(X, \alpha)]) = [(M \otimes_S N \otimes_R X, 1 \otimes 1 \otimes \alpha)].$$

Так как $M \otimes_S N \cong I$ и проективный R -модуль X является плоским, то получаем канонический изоморфизм $M \otimes_S N \otimes_R X \cong IX$, а затем получаем равенство $[(M \otimes_S N \otimes_R X, 1 \otimes 1 \otimes \alpha)] = [(IX, \bar{\alpha})]$, где $\bar{\alpha}$ — сужение α на IX . Находим, что $(eh)^n([(X, \alpha)]) = [(I^n X, \bar{\alpha})]$ для $n > 1$. Понятно, что $(eh)^k = 0$ для некоторого k . Остаётся применить следствие 5.4. $\square$

Отметим один важный частный случай теоремы 5.2, когда одна из подгрупп B , A равна нулю.

Следствие 5.6.

1. Следующие утверждения эквивалентны:

- а) $B = 0$;
- б) $[\beta] = [1 \otimes \alpha] = e([\alpha])$ для любого элемента $[(\alpha, \beta)] \in K_1(K)$;
- в) $K_1(K) = \text{Im } \theta_1 \oplus \text{Ker } \pi \cong K_1(R) \oplus \text{Ker } \pi$.

2. Если $B = 0 = A$, то e и h — взаимно обратные изоморфизмы и $K_1(K) \cong K_1(R) \oplus \text{Ker } \pi \cong K_1(S) \oplus \text{Ker } \pi$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Эквивалентность а) $\iff$ б) вытекает из определения подгруппы B .

Докажем импликацию б) $\implies$ в). Имеем $B = 0$. Следовательно, $\text{Ker } \pi_1 \subseteq \text{Ker } \pi_2$ и $K_1(K) = \text{Im } \theta_1 \oplus \text{Ker } \pi$, где $\text{Im } \theta_1 \cong K_1(R)$.

Докажем импликацию в) $\implies$ а). Снова получаем, что $\text{Ker } \pi_1 \subseteq \text{Ker } \pi_2$, откуда следует, что $B = 0$.

Утверждение 2 вытекает из утверждения 1. $\square$

Следствие 5.7 (ср. со следствием 4.2). Если кольцо K есть ситуация эквивалентности, то $K_1(R) \cong K_1(K) \cong K_1(S)$.

Доказательство. В наших условиях верно утверждение б) следствия 5.6. Кроме того, $\text{Ker } \pi = 0$ (см. раздел 1). Достаточно также указать, что категории $P(K)$, $P(R)$ и $P(S)$ попарно эквивалентны [5, теорема 8.5]. $\square$

Замечание 5.8. Как и для группы K_0 (см. конец раздела 4), функтор (T, T) индуцирует эндоморфизм группы $K_1(K)$. Обозначим этот эндоморфизм через $[e, h]$. Можно записать равенство

$$[e, h]([\alpha, \beta]) = [(1 \otimes \beta, 1 \otimes \alpha)], \quad [(\alpha, \beta)] \in K_1(K).$$

6. Группы Гротендика и Уайтхеда колец формальных матриц порядка $n \geq 2$

В этом разделе мы получим некоторую информацию о группах K_0 и K_1 колец формальных матриц произвольного порядка n . При этом можно действовать по аналогии с ситуацией для $n = 2$. Иногда можно использовать рассмотренный случай $n = 2$, представляя кольцо формальных матриц порядка $n > 2$ в виде кольца формальных блочных матриц порядка 2.

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & R_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & R_n \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц порядка n с идеалами следа $I_1, \dots, I_n$ (см. раздел 1). Имеем коммутативную диаграмму колец

$$\begin{array}{ccc} R_1 \times \dots \times R_n & \xrightarrow{k} & R_1/I_1 \times \dots \times R_n/I_n \\ i \downarrow & & \parallel \\ K & \xrightarrow{j} & R_1/I_1 \times \dots \times R_n/I_n \end{array}, \quad (6.1)$$

в которой i — диагональное вложение, k — канонический эпиморфизм,

$$j: \begin{pmatrix} r_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & r_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & r_n \end{pmatrix} \rightarrow (r_1 + I_1, \dots, r_n + I_n).$$

Имеем диаграмму функторов

$$\begin{array}{ccc} P(R_1 \times \dots \times R_n) & \xrightarrow{T(k)} & P(R_1/I_1 \times \dots \times R_n/I_n) \\ T(i) \downarrow & & \parallel \\ P(K) & \xrightarrow{T(j)} & P(R_1/I_1 \times \dots \times R_n/I_n) \end{array}. \quad (6.2)$$

Действие функторов вида $T(i)$ и т. п. указано в разделе 2.

Диаграмма 6.2 индуцирует коммутативную диаграмму групп K_0 и их гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc}
K_0(R_1) \oplus \dots \oplus K_0(R_n) & \xrightarrow{K_0(k)} & K_0(R_1/I_1) \oplus \dots \oplus K_0(R_n/I_n) \\
K_0(i) \downarrow & & \parallel \\
K_0(K) & \xrightarrow{K_0(j)} & K_0(R_1/I_1) \oplus \dots \oplus K_0(R_n/I_n)
\end{array} \quad (6.3)$$

и такую же диаграмму, где индекс 0 заменён на индекс 1. Действие гомоморфизмов вида $K_0(i)$, $K_1(i)$ и т. п. указано в разделе 2. Напомним, что раздел 1 содержит некоторую информацию о строении и свойствах модулей над кольцом формальных матриц порядка n .

Теорема 6.1. Пусть дано кольцо K формальных матриц порядка n и $I_1, \dots, I_n$ — его идеалы следа. Если $I_k \subseteq J(R_k)$ и кольцо R_k полно в I_k -адической топологии для каждого $k = 1, \dots, n$, то

- 1) функтор $T(i)$ является эквивалентностью;
- 2) имеется групповой изоморфизм

$$K_i(K) \cong K_i(R_1) \oplus \dots \oplus K_i(R_n), \quad i = 0, 1.$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Ядро гомоморфизма j равно

$$\begin{pmatrix} I_1 & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & I_2 & \dots & M_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & I_n \end{pmatrix};$$

и по [6, теорема 4.3] лежит в радикале $J(K)$. На соответствующих классах изоморфных конечно порождённых проективных модулей функтор $T(k)$ действует биективно, а функтор $T(j)$ действует инъективно.

Далее можно в целом повторить рассуждения из доказательства теоремы 2.1. При этом надо учитывать информацию о модулях над кольцом формальных матриц порядка n , содержащуюся в разделе 1.

Утверждение 2) непосредственно следует из утверждения 1). $\square$

Кольцо K с нильпотентными идеалами следа удовлетворяет условиям теоремы 6.1. Допустим, что даны только включения $I_1 \subseteq J(R_1), \dots, I_n \subseteq J(R_n)$. Аналогично случаю $n = 2$ (см. абзац перед теоремой 4.3) можно после отождествления считать, что имеются включения

$$K_0(R_1) \oplus \dots \oplus K_0(R_n) \subseteq K_0(K) \subseteq K_0(R_1/I_1) \oplus \dots \oplus K_0(R_n/I_n).$$

Применим теорему 6.1 к кольцам формальных матриц над кольцом R , которые были определены в разделе 1. Пусть $K = M(n, R, \Sigma)$ — кольцо формальных матриц порядка $n \geq 2$ над кольцом R , где $\Sigma = \{s_{ijk} \mid i, j, k = 1, \dots, n\}$ — система множителей кольца K .

Прежде всего заметим, что если все множители s_{ijk} являются обратимыми элементами, то $K_0(K) \cong K_0(R)$ и $K_1(K) \cong K_1(R)$. Действительно, по [6, предложение 5.2] имеет место изоморфизм $K \cong M(n, R)$. Следовательно, $K_i(K) \cong \cong K_i(M(n, R)) \cong K_i(R)$ (см. следствия 4.2 и 5.7).

Можно точно указать идеалы следа кольца K . Именно, верно равенство

$$I_k = \sum_{i \neq k} s_{kik} R$$

для всех $k = 1, \dots, n$. Мы не будем записывать следствия из теоремы 6.1 для произвольного кольца K . Возьмём такое кольцо K , что каждый множитель s_{iji} , $i \neq j$, равен s^m для какого-то $m \geq 1$, где s — некоторый центральный элемент кольца R . Примеры таких колец K есть в [6, раздел 8]. Любое такое кольцо обозначим через $M(n, R, s)$.

Следствие 6.2. Пусть K — определённое выше кольцо $M(n, R, s)$.

1. Если s — обратимый элемент, то $K_i(M(n, R, s)) \cong K_i(R)$, $i = 0, 1$.
2. Если s — нильпотентный элемент, то $K_i(M(n, R, s)) \cong K_i(R)^n$, $i = 0, 1$.
3. Если $s \in J(R)$, то верны включения

$$K_0(R)^n \subseteq K_0(K) \subseteq K_0(R/sR)^n.$$

Более подробно рассмотрим случай кольца формальных матриц $M(2, R, s)$ порядка 2 над кольцом R . Первоначальные сведения о таких кольцах и их модулях приведены в разделе 1. Сначала запишем частный случай следствия 6.2.

Следствие 6.3. Для кольца $K = M(2, R, s)$ верны утверждения 1–3 следствия 6.2 при $n = 2$.

Далее считаем, что K — кольцо вида $M(2, R, s)$. Получим некоторые сведения о группах $K_0(K)$ и $K_1(K)$.

Начнём с группы $K_0(K)$. Гомоморфизмы σ и τ групп K_0 , определённые в разделе 4, являются тождественными автоморфизмами в рассматриваемой ситуации. Определённый в конце раздела 4 эндоморфизм $[\sigma, \tau]$ принимает вид $[1, 1]$ и действует по правилу $[x, y] \rightarrow [y, x]$, $[x, y] \in K_0(K)$. Следовательно, $[1, 1]$ — инволюция. Она изоморфно отображает $\text{Im } \alpha_1$ на $\text{Im } \alpha_2$ и $\text{Ker } \mu_1$ на $\text{Ker } \mu_2$ (см. разделы 3 и 4 о гомоморфизмах α_i и μ_i).

Возьмём гомоморфизмы $\alpha_1, \alpha_2: K_0(R) \rightarrow K_0(K)$, где $\alpha_1(x) = [x, \sigma(x)]$ и $\alpha_2(x) = [\tau(x), x]$, $x \in K_0(R)$ (можно было бы обозначить $[x, x]' = \alpha_1(x)$ и $[x, x]'' = \alpha_2(x)$). Теперь положим $d = \alpha_1 - \alpha_2$ и $D = \text{Im } d$. Имеем изоморфизм $K_0(R)/\text{Ker } d \cong D$, где $\text{Ker } d = \{x \in K_0(R) \mid \alpha_1(x) = \alpha_2(x)\}$. Для нас важно, что $D \subseteq \text{Ker } \mu$.

Предположим, что множитель s лежит в радикале $J(R)$. Тогда отображение

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2): K_0(R) \oplus K_0(R) \rightarrow K_0(K)$$

является мономорфизмом (см. абзац перед теоремой 4.3). Понятно, что d также мономорфизм и $D \cong K_0(R)$. В частности, $\text{Ker } \mu \neq 0$ (см. текст перед следствием 3.7).

По-прежнему пусть $s \in J(R)$, и дополнительно считаем, что кольцо R полно в sR -адической топологии (это будет так, если s — нильпотентный элемент). При таких предположениях имеем соотношения

$$K_0(K) = \text{Im } \alpha_1 \oplus \text{Im } \alpha_2 \cong K_0(R) \oplus K_0(R)$$

(см. следствия 2.3, 4.1 и теорему 4.3). Ясно, что также верны равенства $K_0(K) = \text{Im } \alpha_i \oplus D$, $i = 1, 2$. Из соотношений $D \subseteq \text{Ker } \mu = \text{Ker } \mu_1 \cap \text{Ker } \mu_2$ и $K_0(K) = \text{Im } \alpha_i \oplus \text{Ker } \mu_i$, $i = 1, 2$ (см. следствия 3.5, 4.4) получаем, что $D = \text{Ker } \mu$. Применяя следствие 3.7, также получаем, что $G = 0 = H$ (см. разделы 3 и 4 о подгруппах G и H).

Перейдём к группе $K_1(K)$. Эндоморфизм $[e, h]$ группы $K_1(K)$ из раздела 5 имеет вид $[1, 1]$. Итак,

$$[1, 1]: [(\alpha, \beta)] \rightarrow [(\beta, \alpha)], \quad [(\alpha, \beta)] \in K_1(K).$$

Следовательно, $[1, 1]$ — инволюция, которая изоморфно отображает $\text{Im } \theta_1$ и $\text{Ker } \pi_1$ на $\text{Im } \theta_2$ и $\text{Ker } \pi_2$ соответственно; гомоморфизмы θ_i и π_i , $i = 1, 2$, определены в разделах 2 и 5. В данной ситуации θ_1 и θ_2 — это гомоморфизмы $K_1(R) \rightarrow K_1(K)$, где $\theta_1([\alpha]) = [(\alpha, 1 \otimes \alpha)]$ и $\theta_2([\alpha]) = [(1 \otimes \alpha, \alpha)]$, $[\alpha] \in K_1(R)$. Запишем более точные равенства

$$\theta_1([(X, \alpha)]) = [((X, T(X)), (\alpha, 1 \otimes \alpha))], \quad \theta_2([(X, \alpha)]) = [((T(X), X), (1 \otimes \alpha, \alpha))].$$

Учитывая отождествления и обозначения разделов 2 и 5, получаем равенства

$$\theta_1([\alpha]) = [((X, X)', (\alpha, \alpha))], \quad \theta_2([\alpha]) = [((X, X)'', (\alpha, \alpha))].$$

Можно было бы обозначить $\theta_1([\alpha])$ и $\theta_2([\alpha])$ через $[(\alpha, \alpha)']$ и $[(\alpha, \alpha)']'$ соответственно. Обозначим

$$c = \theta_1 - \theta_2: K_1(R) \rightarrow K_1(K), \quad C = \text{Im } c.$$

Тогда $K_1(R)/\text{Ker } c \cong C$, где

$$\text{Ker } c = \{[\alpha] \in K_1(R) \mid \theta_1([\alpha]) = \theta_2([\alpha])\}.$$

Так как

$$\theta_1([\alpha]) - \theta_2([\alpha]) = [(\alpha\alpha^{-1}, \alpha\alpha^{-1})] = [(1, 1)],$$

то $C \subseteq \text{Ker } \pi$.

Как и в случае группы K_0 , теперь предположим, что $s \in J(R)$ и кольцо R полно в sR -адической топологии. Тогда верны соотношения

$$K_1(K) = \text{Im } \theta_1 \oplus \text{Im } \theta_2 \cong K_1(R) \oplus K_1(R)$$

(см. теорему 2.1 и следствие 2.3). Далее находим, что

$$K_1(K) = \text{Im } \theta_i \oplus C, \quad i = 1, 2, \quad C = \text{Ker } \pi.$$

Поэтому $\text{Ker } \pi \neq 0$, а это даёт ответ на вопрос, поставленный после теоремы 5.2. Наконец, выводим из следствия 5.6, что $B = 0 = A$, где подгруппы B и A определены перед теоремой 5.2.

В заключение статьи мы укажем некоторые возможные направления будущих исследований колец формальных матриц (эти кольца также называются *кольцами обобщённых матриц*). Несколько таких направлений представлено в [6, раздел 5] и в конце [6].

1. В данной статье основная информация о группах $K_i(K)$, где

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

предоставляется группами $K_i(R)$, $K_i(S)$ и их гомоморфными образами $\text{Im } \alpha_i$, $\text{Im } \theta_i$, $i = 1, 2$. Интересно найти какие-нибудь подгруппы в $K_i(K)$, отличные от $\text{Im } \alpha_i$ и $\text{Im } \theta_i$. В частности, очень желательно выяснить строение подгрупп $\text{Ker } \mu$, $\text{Ker } \pi$, $\text{Ker } \mu_i$ и $\text{Ker } \pi_i$, $i = 1, 2$.

2. Обширная содержательная область исследований — это описание различных (линейных) отображений между кольцами формальных матриц и описание отображений из колец формальных матриц в различные другие кольца. Сюда относится изучение обычных изоморфизмов, левых изоморфизмов и дифференцирований колец формальных матриц (см., например, [2, 8, 10, 16] и статьи из списков литературы этих работ). В [18, вопрос 4.4] авторы поставили вопрос об общей форме автоморфизмов формальных матриц порядка 2.

В серии интересных статей [9, 18, 19, 22, 23] изучаются коммутирующие и централизующие отображения, коммутирующие и централизующие следы и другие отображения алгебр формальных матриц порядка 2; много источников содержится в списках литературы этих статей. Одним из достоинств этих работ являются обстоятельные и информативные введения. Авторы также формулируют ряд конкретных проблем и тем для дальнейших исследований. Обзор [11] посвящён коммутирующим отображениям.

Представляется перспективным рассматривать перечисленные и другие отображения (прежде всего линейные отображения) для колец формальных матриц любого порядка n . В первую очередь следует рассмотреть кольца формальных матриц $M(n, R, \Sigma)$ над кольцом R . Помимо прочего, здесь можно исследовать зависимость свойств отображений от систем множителей Σ .

Литература

- [1] Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. О некоторых классах колец формальных матриц // Изв. высш. учебн. завед. Матем. — 2015. — № 3. — С. 3—14.
- [2] Крылов П. А. Об изоморфизме колец обобщённых матриц // Алгебра и логика. — 2008. — Т. 47, № 4. — Р. 456—463.
- [3] Крылов П. А. О группе K_0 кольца обобщённых матриц // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, № 3. — Р. 370—385.
- [4] Крылов П. А. Вычисление группы K_1 кольца обобщённых матриц // Сиб. мат. журн. — 2014. — Т. 55, № 4. — С. 783—789.
- [5] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над кольцами формальных матриц // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 8. — С. 145—211.
- [6] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Формальные матрицы и их определители // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 1. — С. 65—119.
- [7] Bass H. Algebraic K-Theory. — New York: Benjamin, 1968.

- [8] Benkovič D. Lie derivations on triangular matrices // *Linear Multilinear Algebra*. — 2007. — Vol. 55. — P. 619–626.
- [9] Benkovič D., Eremita D. Commuting traces and commutativity preserving maps on triangular algebras // *J. Algebra*. — 2004. — Vol. 280. — P. 797–824.
- [10] Boboc C., Dăscălescu S., Wyk L., van. Isomorphisms between Morita context rings // *Linear Multilinear Algebra*. — 2012. — Vol. 60, no. 5. — P. 545–563.
- [11] Brešar M. Commuting maps: a survey // *Taiwanese J. Math.* — 2004. — Vol. 8. — P. 361–397.
- [12] Chen H. Morita contexts with many units // *Commun. Algebra*. — 2002. — Vol. 30, no. 3. — P. 1499–1512.
- [13] Dennis R. K., Geller S. K_i of upper triangular matrix rings // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1976. — Vol. 56. — P. 73–78.
- [14] Enochs E., Torrecillas B. Flat covers over formal triangular matrix rings and minimal Quillen factorizations // *Forum Math.* — 2011. — Vol. 23. — P. 611–624.
- [15] Hao Z., Shum K.-P. The Grothendieck group of rings of Morita contexts // *Proc. of the 1996 Beijing Int. Conf. on Group Theory*. — 1997. — P. 88–97.
- [16] Khazal R., Dăscălescu S., Wyk L., van. Isomorphism of generalized triangular matrix rings and recovery of tiles // *Int. J. Math. Math. Sci.* — 2003. — No. 9. — P. 533–538.
- [17] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. *Endomorphism Rings of Abelian Groups*. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.
- [18] Li Y.-B., Wei F. Semi-centralizing maps of generalized matrix algebras // *Linear Algebra Appl.* — 2012. — Vol. 436. — P. 1122–1153.
- [19] Liang X., Wei F., Xiao Z., Fošner A. Centralizing traces and Lie triple isomorphisms on triangular algebras // *Linear Multilinear Algebra*. — 2014. — Vol. 8, no. 3. — P. 821–847.
- [20] Nauman S. K. Morita similar matrix rings and their Grothendieck groups // *Aligarh Bull. Math.* — 2004. — Vol. 23, no. 1-2. — P. 49–60.
- [21] Rosenberg J. *Algebraic K-Theory and Its Applications*. — Berlin: Springer, 1994.
- [22] Xiao Z., Wei F. Commuting mappings of generalized matrix algebras // *Linear Algebra Appl.* — 2010. — Vol. 433. — P. 2178–2197.
- [23] Xiao Z., Wei F. Commuting traces and Lie isomorphisms on generalized matrix algebras // *Operators Matrices*. — 2014. — Vol. 8. — P. 821–847.

