

Усреднение и траектории гамильтоновой системы, возникающей в графене, помещённом в сильное магнитное поле и периодическое электрическое поле

А. Ю. АНИКИН

Московский физико-технический институт
e-mail: anikin83@inbox.ru

Й. БРЮНИНГ

Берлинский университет имени Гумбольдта, Германия
e-mail: bruening@mathematik.hu-berlin.de

С. Ю. ДОБРОХОТОВ

*Институт проблем механики РАН,
Московский физико-технический институт*
e-mail: dobr@ipmnet.ru

УДК 517.928.7+517.984.5

Ключевые слова: усреднение, соответствие Мопертюи—Якоби, графен, уравнение Дирака, спектр.

Аннотация

Рассматривается двумерная гамильтонова система, описывающая классическое движение электрона в графене, помещённом в большое постоянное магнитное поле и электрическое поле с периодическим потенциалом. Используя принцип Мопертюи—Якоби и предположение, что магнитное поле велико, мы проводим процедуру усреднения и сводим исходную систему к одномерной гамильтоновой системе на торе. Это позволяет описать траектории обеих систем и классифицировать их с помощью графов Рибба.

Abstract

A. Yu. Anikin, J. Brüning, S. Yu. Dobrokhotov, Averaging and trajectories of a Hamiltonian system appearing in graphene placed in a strong magnetic field and a periodic potential, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 5—20.

We consider a 2-dimensional Hamiltonian system describing classical electron motion in a graphene placed in a large constant magnetic field and an electric field with a periodic potential. Using the Maupertuis–Jacobi correspondence and an assumption that the magnetic field is large, we make averaging and reduce the original system to a 1-dimensional Hamiltonian system on the torus. This allows us to describe the trajectories of both systems and classify them by means of Reeb graphs.

1. Введение.

Классическая динамика электрона в графене

Цель настоящей статьи состоит в изучении движений, описываемых гамильтоновой системой

$$H^\pm = \varepsilon U(x) \pm \sqrt{G(p, x, \varepsilon)}, \quad G = (p_1 + x_2)^2 + p_2^2 + \varepsilon^2 m^2(x), \quad (1.1)$$

где ε — малый параметр, функции U (потенциал) и m (масса) периодичны относительно решётки Γ , порождённой двумя векторами

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

Мы будем предполагать, что функции U и m аналитичны по всем переменным.

Такие гамильтоновы системы описывают классическое движение электронов и дырок в графене, помещённом в большое постоянное магнитное поле и электрическое поле с периодическим потенциалом. Они возникают при рассмотрении двумерного стационарного уравнения Дирака для векторной функции

$$\Psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

описывающей квантовое движение электронов и дырок в безразмерных переменных [21]:

$$\mathcal{H}(\hat{p}_1, \hat{p}_2, x_1, x_2)\Psi = E\Psi. \quad (1.2)$$

Здесь

$$\mathcal{H}(p_1, p_2, x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon(U(x) + m(x)) & p_1 - A_1(x) - i(p_2 - A_2(x)) \\ p_1 - A_1(x) + i(p_2 - A_2(x)) & \varepsilon(U(x) + m(x)) \end{pmatrix},$$

$$\hat{p}_1 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \hat{p}_2 = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad A_1 = -x_2, \quad A_2 = 0,$$

\hbar — малый параметр, характеризующий медленное изменение потенциала, ε — малый параметр, характеризующий большое магнитное поле. Тогда классические гамильтонианы (1.1) — это собственные значения матрицы $\mathcal{H}(p_1, p_2, x_1, x_2)$.

Наша основная цель — построить асимптотические собственные значения и собственные функции (квазимоды) для оператора $\mathcal{H}(\hat{p}_1, \hat{p}_2, x_1, x_2)$, используя квазиклассическое приближение. Хорошо известно [9, 10], что основными классическими объектами, необходимыми для построения квазимод, являются инвариантные лагранжевы многообразия соответствующей классической гамильтоновой системы. Если система вполне интегрируема, то эти многообразия не что иное, как лиувиллевы торы.

Гамильтоновы системы (1.1) неинтегрируемы, и, вообще говоря, мы не можем напрямую использовать методы из [9, 10] для оператора $\mathcal{H}(\hat{p}_1, \hat{p}_2, x_1, x_2)$. Тем не менее оператор $\mathcal{H}(\hat{p}_1, \hat{p}_2, x_1, x_2)$, так же как и классический гамильто-

ниан H^\pm , имеет малый параметр ε , который позволяет сделать усреднение и свести исходную гамильтонову систему к интегрируемой.

Здесь мы сталкиваемся с ситуацией, схожей с рассмотренной в [13–15], где изучался двумерный магнитный оператор Шрёдингера с помощью процедуры усреднения. Эта процедура сводит исходную гамильтонову систему с двумя степенями свободы к системе с одной степенью свободы, фазовое пространство которой — двумерный тор \mathbb{T} , и приведённый гамильтониан можно представлять себе как функцию Морса на \mathbb{T} .

Это наблюдение позволяет применять красивую теорию [4, 18] для описания траекторий соответствующей гамильтоновой системы, классифицировать их и, кроме того, описать спектр соответствующего оператора Шрёдингера в терминах графа Рибба (который даёт описание некоторой части так называемой бабочки Хофштадтера [20] в теории периодического магнитного оператора Шрёдингера (см. [16])).

Несмотря на то, что ситуация с оператором Дирака близка к ситуации с оператором Шрёдингера, одно важное отличие усложняет процедуру усреднения H^\pm . Оно связано с особенностью типа квадратного корня у функции H^\pm для малого магнитного радиуса невозмущённой ($\varepsilon = 0$) орбиты. Мера этих орбит почти нулевая, поэтому они могут считаться нетипичными с математической точки зрения. Однако в квантовом случае эти орбиты отвечают так называемым уровням Ландау, которые более важны, чем другие, поскольку описывают невозбуждённые (основные) квантовые состояния.

Для преодоления этих трудностей, мы используем следующий трюк. Возведём в квадрат левую и правую части уравнения $H^\pm = E$, приведём его к виду $F_E = 0$, где функция F_E , рассматриваемая как новый гамильтониан, уже аналитична. Фазовые траектории этих двух гамильтоновых систем совпадают в силу принципа Мопертюи—Якоби (см., например, [2]). Однако траектории, вообще говоря, по-разному параметризованы временем. Такой метод позволяет построить много инвариантных торов, с помощью которых можно вычислять асимптотики квазимод в квантовой задаче.

Отметим, что вдали от области, где магнитный радиус мал, гамильтонианы H^\pm аналитичны, и можно использовать методы из [13–15] непосредственно.

В этой работе мы ограничиваемся классической проблемой, квантовая будет нами рассмотрена в будущем. План статьи следующий. Сначала (раздел 2) мы переписываем гамильтонианы в удобных симплектических координатах и, используя принцип Мопертюи—Якоби, записываем новый аналитичный гамильтониан. Процедура усреднения для аналитичного гамильтониана предлагается в разделе 3. Интегрируемость усреднённой системы и её связь с графами Рибба обсуждается в разделах 4 и 5. Используя КАМ-теорию, в разделе 6 мы обсуждаем связь между усреднённой системой и системой с гамильтонианом F_E . Наконец, динамика исходной системы H^\pm обсуждается в разделе 7. Одно техническое утверждение доказано в приложении А.

2. Новые координаты и принцип Мопертюи—Якоби

Введём новые симплектические координаты для (1.1). Для простоты обозначений мы будем опускать индексы \pm у H^\pm .

Сделаем симплектическую замену переменных

$$(p_1, p_2, x_1, x_2) \rightarrow (y_1, P, y_2, Q),$$

где y_1 и P — новые импульсы, а y_2 и Q — канонически сопряжённые координаты,

$$x_1 = y_1 + Q, \quad x_2 = P + y_2, \quad p_1 = -y_2, \quad p_2 = -Q.$$

Рассмотрим ещё одну симплектическую замену переменных:

$$(y_1, P, y_2, Q) \rightarrow (y_1, I, y_2, \varphi): P = \sqrt{2I} \cos \varphi, \quad Q = \sqrt{2I} \sin \varphi.$$

Обозначим

$$X_1 = y_1 + \sqrt{2I} \sin \varphi, \quad X_2 = y_2 + \sqrt{2I} \cos \varphi.$$

Тогда гамильтониан принимает вид (1.1), где

$$U = U(X_1(I, \varphi), X_2(I, \varphi)), \quad G = 2I + \varepsilon^2 m^2 (X_1(I, \varphi), X_2(I, \varphi)).$$

Как уже было сказано в разделе 1, непосредственное применение метода усреднения (по аналогии с [14, 15]) наталкивается на трудности из-за негладкой особенности типа квадратного корня для $\varepsilon = 0$ вблизи $I = 0$.

Чтобы преодолеть это «неприятное» обстоятельство, воспользуемся принципом Мопертюи—Якоби.

Предложение 1. Пусть $H, \mathcal{H}: M \rightarrow \mathbb{R}$ — две функции на симплектическом многообразии (M, ω) . Предположим, что для некоторых $E, \mathcal{E} \in \mathbb{R}$ их поверхности уровня совпадают: $\{H = E\} = \{\mathcal{H} = \mathcal{E}\}$. Тогда фазовые траектории гамильтоновых векторных полей v_H и $v_{\mathcal{H}}$ также совпадают.

Замечание 1. Заметим, что фазовые потоки на M , порождённые H и \mathcal{H} , вообще говоря, различны. Они будут совпадать только после замены времени.

Замечание 2. Доказательство хорошо известно и довольно просто, особенно в случае, когда $M = \mathbb{R}^{2n}$ и $\omega = dp \wedge dx$. В самом деле, ∇H и $\nabla \mathcal{H}$ ортогональны поверхностям уровня $\Sigma = \{H = E\}$, поэтому они параллельны всюду на Σ . Следовательно, гамильтоновы векторные поля $v_H = \iota \nabla H$ и $v_{\mathcal{H}} = \iota \nabla \mathcal{H}$ также параллельны.

Теперь для каждого $E \in \mathbb{R}$ определим гамильтониан

$$f_E = \frac{G}{2} + \varepsilon E U - \frac{\varepsilon^2 U^2}{2}. \quad (2.1)$$

Ясно, что

$$\{H = E\} = \left\{ f_E = \frac{E^2}{2} \right\},$$

поэтому можно применить принцип Мопертюи—Якоби.

Положим

$$f_E = f_{E,0} + \varepsilon f_{E,1} + \varepsilon^2 f_{E,2}, \quad (2.2)$$

где

$$f_{E,0} = I, \quad f_{E,1} = EU, \quad f_{E,2} = \frac{1}{2}(m^2 - U^2), \\ U = U(X_1(I, \varphi), X_2(I, \varphi)), \quad m = m(X_1(I, \varphi), X_2(I, \varphi)).$$

Очевидное преимущество f_E состоит в его аналитичности при $\varepsilon = 0$.

3. Усреднение

Теорема 1. *Существуют такие симплектические координаты J, ϕ, y_1, y_2 (зависящие от E), что*

$$f_E = \tilde{f}_E(J, y_1, y_2) + O(e^{-C/\varepsilon}).$$

Замечание 3. Таким образом, гамильтониан f_E определяет интегрируемую систему с точностью до экспоненциально малой по ε поправки.

Теорема 1 [5] (см. также [19]) близка к результату Нейштадта [12] об усреднении в быстро-медленных системах. Различие в том, что здесь строятся переменные типа действие-угол вблизи положения равновесия.

Теорема 1 доказывается с использованием сходящейся последовательности замен переменных в духе теории КАМ. Первый шаг, как это часто бывает в теории возмущений, даёт усреднение по переменной φ гамильтониана f_E . Мы будем позволять себе вольность речи, называя усреднением не только первый шаг теории возмущений, но и всю процедуру.

Более точно, пусть $\rho(x_1, x_2)$ — аналитическая Γ -периодичная функция. Положим

$$\langle \rho \rangle(I, y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(X_1(I, \varphi), X_2(I, \varphi)) d\varphi.$$

Ясно, что $\langle \rho \rangle$ тоже Γ -периодична по y_1, y_2 .

Заметим, что функция $\langle \rho \rangle$ может быть выписана более явно благодаря интегральному представлению Бесселя (см. [14]).

Предложение 2.

$$\langle \rho \rangle = \mathbf{J}_0(\sqrt{-2I\Delta_y})\rho(y).$$

Здесь \mathbf{J}_0 — функция Бесселя нулевого порядка,

$$\Delta_y = \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2},$$

$\mathbf{J}_0(\sqrt{-2I\Delta_y})$ — псевдодифференциальный оператор, действующий на ρ следующим образом. Пусть ρ разложено в ряд Фурье

$$\rho = \sum_{k=(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} \rho_k e^{ik \cdot Y}, \quad k \cdot Y = k_1 \left(y_1 - \frac{2\pi a_{21}}{a_{22}} y_2 \right) + 2\pi k_2 a_{22} y_2. \quad (3.1)$$

Тогда

$$\mathbf{J}_0(-\sqrt{2I\Delta_y})\rho = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} \rho_k \mathbf{J}_0 \left(\sqrt{2I \left(k_1^2 + 4\pi^2 \left(\frac{k_1 a_{21}}{a_{22}} + k_2 a_{22} \right)^2 \right)} \right) e^{ik \cdot Y}. \quad (3.2)$$

Первый шаг процедуры усреднения даёт следующий результат.

Теорема 2. Существуют такие симплектические координаты J, φ, y_1, y_2 (зависящие от E), что

$$f_E = J + \varepsilon E \langle U \rangle (J, y) + O(\varepsilon^2), \quad (3.3)$$

где функция $\langle U \rangle (J, y)$ аналитична по J вблизи $J = 0$.

Доказательство теоремы 2 довольно естественно с точки зрения теории нормальных форм, оно представлено в приложении А.

4. Интегрируемая система: топология траекторий

Как мы отмечали выше, \tilde{f}_E определяет вполне интегрируемую гамильтонову систему (где J есть дополнительный первый интеграл). Более того, у \tilde{f}_E имеется циклическая переменная φ , и поэтому переменные действие-угол могут быть легко построены явно. В самом деле, из уравнений Гамильтона $\dot{J} = 0$, и два уравнения для y_1, y_2 отделяются и определяют гамильтонову систему с одной степенью свободы и Γ -периодичным по y потенциалом. Ясно, что фазовые траектории этой системы определяются динамикой на торе \mathbb{R}^2/Γ с тем же самым гамильтонианом. Ниже мы будем изучать именно динамику на торе.

Рассмотрим многообразие уровня двух первых интегралов:

$$M_{c_1 c_2} = \{(J, \varphi, y) : f_E = c_1, J = c_2\}.$$

(На самом деле достаточно ограничиться случаем $c_2 = E^2/2$.) Ясно, что $M_{c_1 c_2} \subset \mathbb{R}^2/\Gamma$ компактны, поэтому диффеоморфны объединению торов

$$S^1 \times \mu^{-1}(c_1), \quad S^1 = \{\varphi \bmod 2\pi\}, \quad \mu = \tilde{f}_E|_{J=c_2} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}.$$

В предположении, что μ является функцией Морса, топология $\mu^{-1}(c_1)$ может быть описана с помощью графа Роба. В простейшем случае μ имеет четыре критических значения: максимум, минимум и две седловые точки (тогда μ можно представлять себе как функцию высоты на торе) (рис. 1 слева). Соответствующий граф Роба изображён на рис. 1 в центре. Фазовые траектории изображены на рис. 1 справа. Вблизи минимума и максимума имеется семейство

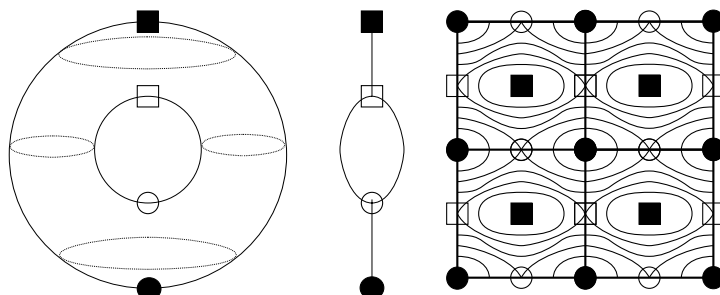


Рис. 1. Чёрный квадрат означает максимум, чёрный кружок — минимум, белые кружок и квадрат — седловые точки. Слева: критические точки функции высоты, в центре: граф Рибба, справа: фазовые траектории

стягиваемых (на торе) периодических траекторий. Каждому из двух седловых значений отвечают гиперболические положения равновесия, соединённые сами с собой двумя сепаратрисами (гомоклиническими орбитами). Наконец, имеется семейство нестягиваемых периодических траекторий, заключённых между сепаратрисами.

Теперь переменные действие-угол $J, \varphi, J_2, \varphi_2$ можно легко построить. Мы можем определить J и J_2 как интегралы $\oint p dx$ по базисным циклами на торе. Один из этих циклов, S^1 , отвечает изменению φ и называется циклотронным движением. Второй даётся одной из компонент связности $\mu^{-1}(c_1)$.

Замечание 4. Отметим, что переменные действие-угол строятся с помощью явного алгоритма. Гамильтониан усреднённой системы может быть найден (после конечного числа шагов) с погрешностью $O(\varepsilon^N)$ с любым N . У полученной приближённой системы инвариантные торы описываются явно и действия вдоль базисных циклов могут быть легко вычислены.

5. Пример

Пусть $U(x_1, x_2) = \cos x_1 + \cos \beta x_2$. Тогда по предложению 2

$$\langle U \rangle = \mathbf{J}_0(\sqrt{2J}) \cos y_1 + \mathbf{J}_0(\beta\sqrt{2J}) \cos \beta y_2.$$

Теперь для фиксированного J найдём критические точки $\langle U \rangle$. Если $\mathbf{J}_0(\sqrt{2J}) \neq 0$ и $\mathbf{J}_0(\beta\sqrt{2J}) \neq 0$, то $\langle U \rangle$ имеет четыре критические точки на торе Λ :

$$y_1 = \pi k, \quad y_2 = \frac{\pi l}{\beta}, \quad k, l = 0, 1,$$

и все они невырождены. Если $\mathbf{J}_0(\sqrt{2J}) = 0$, то $\langle U \rangle$ имеет критическое многообразие в виде объединения двух окружностей: $y_2 = \pi l/\beta$, а y_1 произвольно.

Аналогично если $\mathbf{J}_0(\beta\sqrt{2J}) = 0$, то критическим многообразием будет $y_1 = \pi l$, а y_2 произвольно.

Перейдём к критическим значениям. Они равны

$$U_{\pm\pm} = \pm\mathbf{J}_0(\sqrt{2J}) \pm \mathbf{J}_0(\beta\sqrt{2J}).$$

Определим возрастающую последовательность A_1, A_2, \dots , состоящую из всех таких J , что $\mathbf{J}_0(\sqrt{2J}) = 0$ или $\mathbf{J}_0(\beta\sqrt{2J}) = 0$. Пусть B_1, B_2, \dots — другая возрастающая последовательность, состоящая из таких J , что $\mathbf{J}_0(\sqrt{2J}) = \pm \mathbf{J}_0(\beta\sqrt{2J})$ (рис. 2).

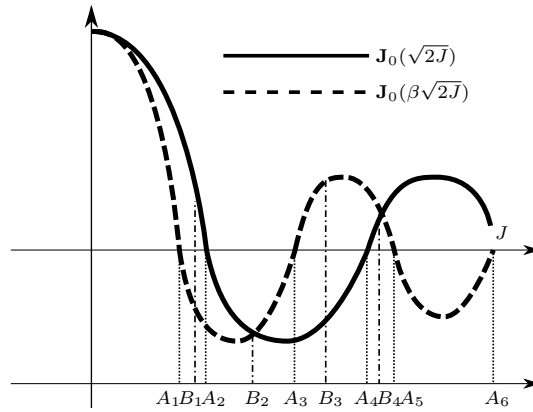


Рис. 2

Предложение 3.

1. Если $J \neq A_k$ и $J \neq B_k$, то $\langle U \rangle$ имеет четыре разных критических значения $U_{\pm\pm}$. Более того, U_{++} и U_{--} — минимум и максимум, а $U_{\pm\mp}$ — две седловые точки.
2. Если $J = B_k$, то $\langle U \rangle$ имеет три разных невырожденных критических значения: либо $\pm U_{++}$ (минимум и максимум) и $\pm U_{+-} = 0$ (седловая точка) или аналогично $\pm U_{-+}$ и $\pm U_{++} = 0$.
3. Если $J = A_k$, то $\langle U \rangle$ имеет два вырожденных критических значения $\pm U_{++}$. Соответствующими критическими многообразиями являются окружности: либо $y_1 = \pi l$, либо $y_2 = \pi l/\beta$.

Доказательство очевидно.

Итак, фазовые траектории на инвариантном торе системы \tilde{f}_E (при фиксированных E и J) — это попросту линии уровня функции $\langle U \rangle$. Изучим их топологию в случаях 1–3.

В случае 1 граф Роба и топология траекторий были рассмотрены выше.

В случае 2 можно интерпретировать $\langle U \rangle$ как функцию высоты вырожденного тора, у которого две седловые точки слились (рис. 3 слева). Граф Роба и фазовые траектории изображены на рис. 3 в центре и справа. Ситуация схожа со случаем 1, однако теперь седловому значению отвечают две седловые точки, соединённые сепаратрисами.

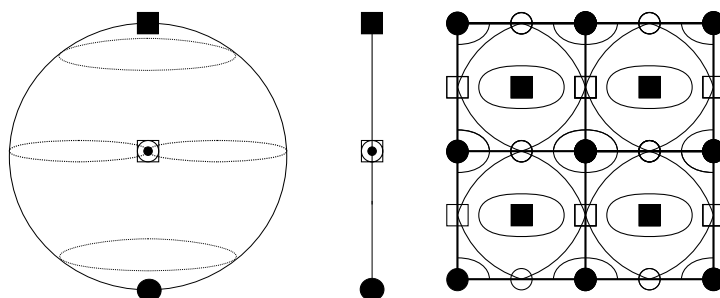


Рис. 3

Случай 3 является наиболее вырожденным. Теперь $\langle U \rangle$ можно интерпретировать как функцию высоты на торе, опрокинутом набор. Тор, положенный набор, изображён на рис. 4 слева. Верхний и нижний жирные отрезки — это вид сбоку двух окружностей критических точек. Некритические множества уровня — это объединения двух окружностей. Поэтому граф Роба такой, как показано на рис. 4 в центре. Фазовые траектории (рис. 4 справа) — окружности (с движением в противоположных направлениях по разные стороны от окружностей сингулярностей).

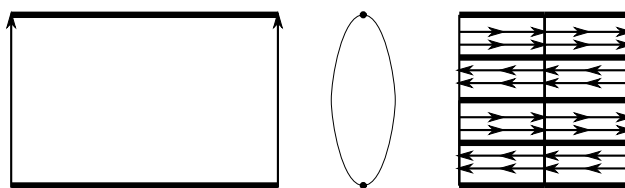


Рис. 4

Ответим на следующий вопрос. Пара E, J_0 определяет инвариантный тор

$$f_E = \frac{E^2}{2}, \quad J = J_0,$$

который представляет собой прямое произведение циклотронного движения и движения вдоль линии уровня кривой $\langle U \rangle(J_0, y)$. Как определить топологию этих движений для различных E, J_0 ?

Начнём с более простой задачи и предположим, что J_0 и u_0 фиксированы. Топология кривых $\langle U \rangle(J_0, y) = u_0$ легко определяется из предложения 3 (фрагмент на рис. 5 слева).

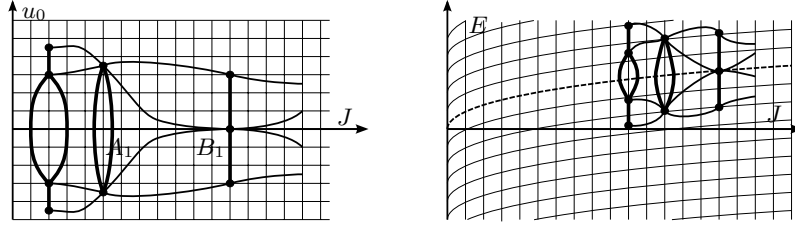


Рис. 5

Каждая точка на плоскости (J_0, u_0) определяет значение $E = E(J_0, u_0)$ из уравнения

$$\frac{E^2}{2} = J_0 + \varepsilon E u_0,$$

или $E = \pm \sqrt{2J_0} + \varepsilon u_0 + O(\varepsilon^2)$, где \pm отвечают H^\pm . Для определённости рассмотрим знак $+$.

После замены координат $(J_0, u_0) \rightarrow (E, J_0)$ мы можем определить топологию траекторий для различных (E, J_0) (рис. 5 справа).

6. Возмущённая система

Переходим к динамике системы с гамильтонианом f_E (она является возмущением интегрируемой системы \tilde{f}_E). В переменных $J, \varphi, J_2, \varphi_2$ гамильтониан (3.3) имеет так называемое собственное вырождение (см. [3]), т. е.

$$f_E = F_0(J) + \varepsilon F_1(J, J_2) + \varepsilon^2 F_2(J, J_2, \phi, \phi_2, \varepsilon) \equiv \tilde{f}_E(J, J_2, \varepsilon) + \varepsilon^2 F_2. \quad (6.1)$$

(Здесь, очевидно, $F_0 = J$ и $F_1 = \langle EU \rangle(J, J_2)$.) Системы такого типа хорошо изучены в рамках КАМ-теории.

Грубо говоря, КАМ-теория утверждает, что большинство инвариантных дифантовых торов (мера дополнения мала по ε) системы \tilde{f}_E сохраняются при возмущении при условии, что невозмущённая система невырождена в некотором смысле.

Для более точной формулировки напомним, что гамильтониан $H(I_1, \dots, I_n)$ интегрируемой системы называется изоэнергетически невырожденным на поверхности $\Sigma = \{H = h\}$, если хотя бы одна частота, скажем $\omega_1 = \partial H / \partial I_1$, не обращается в нуль на Σ и отношения ω_j / ω_1 (при $j \neq 1$) функционально независимы на Σ . Это условие эквивалентно следующему:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega}{\partial I} & \omega \\ \omega^T & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Теорема 3 [1]. Предположим, что $F_0(J)$ — изоэнергетически невырожденный гамильтониан

$$\Sigma = \left\{ F_0 = \frac{E^2}{2} \right\}$$

по переменной J , а гамильтониан \tilde{f}_E тоже изоэнергетически невырожден по переменным J, J_2 , или, эквивалентно,

$$\frac{\partial F_0}{\partial J} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial J_2^2} \neq 0. \quad (6.2)$$

Тогда Σ заполнена инвариантными торами гамильтоновой системы f_E с диофантовыми частотами и квазипериодическими движениями. Эти торы близки к инвариантным торам системы f_E , лежащим на поверхности Σ и имеющим те же самые частоты.

Замечание 5. Поскольку наша система имеет две степени свободы, из КАМ-теоремы вытекает отсутствие диффузии Арнольда. А именно, переменные действия J, J_2 являются вечными адиабатическими инвариантами, т. е. вечно остаются вблизи своих начальных значений.

Замечание 6. Система с собственным вырождением оказывается более регулярной, чем обычная невырожденная система типа КАМ. А именно, в [11] показано, что если $\partial F_1 / \partial J_2 \neq 0$ и выполнено (6.2), то мера дополнения к множеству инвариантных торов экспоненциально мала по ε (в то время как обычно она порядка $\sim \sqrt{\varepsilon}$). Кроме того, отклонение переменных действие от начальных значений имеет порядок ε (обычно $\sqrt{\varepsilon}$).

Замечание 7. Нерезонансные, но не диофантовы торы (так же как и некоторые диофантовы) могут разрушиться после возмущения. Но, по-видимому, это не очень существенно с точки зрения квантовой механики. Можно использовать «почти инвариантные торы» для построения квазимод. Хотя хаотические эффекты могут возникать, это происходит только на больших временах, и они не должны портить главные члены асимптотик. В данной работе рассматривается только классическая задача, поэтому мы изучаем только диофантов случай.

7. Замена времени

Принцип Мопертюи—Якоби утверждает, что инвариантные торы Λ системы, отвечающей гамильтонову векторному полю v_{f_E} , лежащие на уровне энергии

$$\left\{ f_E = \frac{E^2}{2} \right\}$$

инварианты и относительно v_H . Фазовые траектории тоже совпадают, но они могут быть по-разному параметризованы временем. Возникает естественный вопрос: верно ли, что динамика последней системы также квазипериодична. Если да, то каковы частоты движений?

Во-первых, ясно, что всюду на $H = E$

$$v_{f_E} = v_H(E - \varepsilon U). \quad (7.1)$$

Действительно, в исходных координатах (возьмём для определённости H^+)

$$\frac{\partial f_E}{\partial p} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial p}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial p}.$$

Тогда $v_{f_E} = \sqrt{G}v_H$ или (7.1). (Производные $\partial/\partial x$ нам не нужны, так как нам уже известно, что поля v_{f_E} и v_H параллельны.

Введём новое время: $d\tau = (E - \varepsilon U) dt$. Тогда всюду на $H = E$

$$\frac{dz}{d\tau} = v_H(z)$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{dz}{dt} = v_{f_E}(z).$$

Заметим, что $E - \varepsilon U > 0$ для $J \neq 0$, но это выражение может оказаться малым вблизи $J = 0$.

Следующая теорема была доказана в [6–8, 17].

Теорема 4. Рассмотрим $\Lambda = \mathbb{T}^n$ с прямолинейной обмоткой:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \omega,$$

где $\omega \in \mathbb{R}^n$ — постоянный диофантов вектор частот. Возьмём любую гладкую функцию $\gamma(\varphi) > 0$ на Λ и определим замену времени $dt = \gamma(\varphi(\tau)) d\tau$. Тогда существует гладкая замена координат $\varphi = \Phi(\phi)$, такая что

$$\frac{d\phi}{dt} = \nu \equiv \frac{\omega}{\langle \gamma \rangle_\Lambda}, \quad \langle \gamma \rangle_\Lambda = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_\Lambda \gamma d\varphi.$$

Более того, $\Phi(\phi) = \phi + \nu\beta(\phi)$ для некоторой гладкой функции $\beta: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$.

Замечание 8. Другими словами, динамика на Λ по отношению ко времени t имеет вид

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \nu t + \nu\beta(\varphi_0 + \nu t).$$

Замечание 9. Заметим, что если нам удалось как-нибудь доказать, что динамика по t квазипериодична, то формула для ν может быть легко получена даже без требования диофантовости. В самом деле,

$$\nu = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t)}{t} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\varphi_0 + \omega\tau}{t(\tau)} = \omega \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\int_0^\tau \gamma(\varphi_0 + \omega s) ds} = \frac{\omega}{\langle \gamma \rangle_\Lambda}.$$

Последнее равенство следует из теоремы о временном и пространственном средних при иррациональной обмотке тора (см. [2]). (Эта теорема работает в общем нерезонансном случае.)

Теперь применим теорему 4 и вычислим частоты квазипериодических движений на инвариантных торах $\Lambda \subset \{H = E\}$ гамильтоновой системы H :

$$\nu = \frac{\omega}{\langle (E - \varepsilon U)^{-1} \rangle_{\Lambda}}. \quad (7.2)$$

8. Заключение

Как было уже сказано, вычисление асимптотик спектра и квазимод будет выполнено в будущих работах. Эта статья даёт необходимые классические ингредиенты для этого и конструктивный алгоритм для их нахождения.

Для данного $E > 0$ мы строим новый гамильтониан f_E в соответствии с принципом Мопертюи—Якоби. Затем мы проводим процедуру усреднения (на практике лишь конечное число шагов) и получаем интегрируемую систему с точностью до экспоненциально малой по ε поправки. После этого вводят переменные действие-угол и находятся лагранжевы торы на поверхности $f_E = E^2/2$ с диофантовыми частотами ω . Они инвариантны и относительно исходной гамильтоновой системы H и несут квазипериодические движения с частотами (7.2).

А. Доказательство теоремы 2

Не теряя общности, мы будем игнорировать зависимость гамильтониана f_E от переменных y_1, y_2 . Можно представлять, что система имеет одну степень свободы (P, Q или I, φ), а y — параметры.

Построим симплектическую замену переменных, используя ряды Ли. (Впрочем, можно использовать традиционный подход с производящей функцией.) А именно, рассмотрим отображение (преобразование) g_W^ε , являющееся сдвигом за время ε вдоль гамильтонова векторного поля v_W (аналитичное вблизи $P = Q = 0$). Известно, что такое преобразование симплектично. Оно преобразует исходный гамильтониан к виду

$$\tilde{f}_E = e^{\text{ad}_\varepsilon W} f_E \equiv f_E + \varepsilon \{W, f_E\} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \{W, \{W, f_E\}\} + \dots, \quad (\text{A.1})$$

где $\{, \}$ обозначает стандартную скобку Пуассона.

Подставляя разложение (2.2) в (A.1), мы получаем

$$\tilde{f}_E = f_{E,0} + \varepsilon(\{W, f_{E,0}\} + f_{E,1}) + O(\varepsilon^2).$$

Лемма 1. Существует единственная функция \tilde{f}_E , такая что $\{\tilde{f}_E, f_{E,0}\} = 0$ и для некоторой W

$$\{W, f_{E,0}\} + f_{E,1} = \tilde{f}_E. \quad (\text{A.2})$$

В координатах P, Q

$$\tilde{f}_E = g(P^2 + Q^2).$$

Замечание 10. Уравнение (А.2) называется гомологическим. Функция \tilde{f}_E называется нормальной формой. Отметим, что первое утверждение леммы инвариантно, и мы можем использовать любые симплектические координаты.

Доказательство. Используем комплексные симплектические координаты:

$$P = \frac{\xi + i\eta}{\sqrt{2}}, \quad Q = \frac{i\xi + \eta}{\sqrt{2}}.$$

Ясно, что $dP \wedge dQ = d\xi \wedge d\eta$ и $f_{E,0} = i\xi\eta$.

Теперь разложим $f_{E,1}$ и W в ряды Тейлора вблизи $\xi = \eta = 0$:

$$f_{E,1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^2} c_k \xi^{k_1} \eta^{k_2}, \quad W = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^2} w_k \xi^{k_1} \eta^{k_2}.$$

Поскольку скобка Пуассона инвариантна относительно симплектических преобразований,

$$\{W, f_{E,0}\} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^2} w_k i(k_1 - k_2) \xi^{k_1} \eta^{k_2}.$$

Тогда $\{\tilde{f}_E, f_{E,0}\} = 0$ эквивалентно тому, что $c_k = 0$ для всех $k_1 \neq k_2$. Поэтому из (А.2) следует, что необходимо, чтобы

$$w_k = -\frac{c_k}{i(k_1 - k_2)}$$

для всех $k_1 \neq k_2$. Коэффициенты w_{k_1, k_1} не влияют на правую часть (А.2) (и могут быть взяты равными нулю). Очевидно, W аналитична, так как $f_{E,1}$ также аналитична. Тогда \tilde{f}_E из утверждения единственна и равна

$$\tilde{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{k,k} (\xi\eta)^k$$

или в координатах P, Q $\tilde{f}_E = g(P^2 + Q^2)$.

Теперь в координатах I, φ нормальная форма имеет вид $\tilde{F}_E = g(2I)$. Поэтому \tilde{F}_E аналитична по I (не содержит полужелтых степеней в разложении).

Чтобы получить явную формулу для нормальной формы, запишем (А.2) в координатах I, φ :

$$-\frac{\partial W}{\partial \varphi} + f_{E,1} = \tilde{f}_E.$$

Ясно, что \tilde{f}_E является нормальной формой тогда и только тогда, когда $\tilde{f}_E = \tilde{f}_E(I)$.

После разложения W и v в ряды Фурье по φ мы легко находим, что $\tilde{f}_E = \langle f_{E,1} \rangle$. Теорема доказана. \square

Авторы благодарят М. И. Кацнельсона за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 14-01-0052 и 12-01-00441), Программы поддержки ведущих научных школ (НШ-2964.2014.1) и проекта SFB 647 (Германия).

Литература

- [1] Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН. — 1963. — Т. 18, № 6 (114). — С. 91—192.
- [2] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.
- [3] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.
- [4] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
- [5] Брюнинг Й., Доброхотов С. Ю., Потеряхин М. А. Об усреднении для гамильтоновых систем с одной быстрой фазой и малыми амплитудами // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, № 5. — С. 660—669.
- [6] Доброхотов С. Ю., Руло М. Квазиклассический аналог принципа Мопертюи—Якоби и его приложение к линейной теории волн на воде // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 3. — С. 458—463.
- [7] Козлов В. В. Динамические системы на торе с многозначными интегралами // Динамические системы и оптимизация: Сб. статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова. Тр. МИАН. Т. 256. — М.: Наука, 2007. — С. 201—218.
- [8] Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. — 1953. — Т. 93, № 5. — С. 763—766.
- [9] Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965; Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988.
- [10] Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
- [11] Нейштадт А. И. Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений // Прикл. матем. и мех. — 1981. — Т. 45, № 6. — С. 1016—1025.
- [12] Нейштадт А. И. О разделении движений в системах с быстро вращающейся фазой // Прикл. матем. и мех. — 1984. — Т. 48, № 2. — С. 197—204.
- [13] Brüning J., Dobrokhotov S. Yu., Pankrashkin K. V. The asymptotic form of the low Landau bands in a strong magnetic field // Theor. Math. Phys. — 2002. — Vol. 131, no. 2. — P. 705—731.
- [14] Brüning J., Dobrokhotov S. Yu., Pankrashkin K. V. The spectral asymptotics of the two-dimensional Schrödinger operator with a strong magnetic field. I // Russ. J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 9, no. 1. — P. 14—49.
- [15] Brüning J., Dobrokhotov S. Yu., Pankrashkin K. V. The spectral asymptotics of the two-dimensional Schrödinger operator with a strong magnetic field. II // Russ. J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 9, no. 4. — P. 400—416.
- [16] Bruening J., Geyler V. A., Dobrokhotov S. Yu., Pankrashkin K. V. Hall conductivity of minibands lying at the wings of Landau levels // JETP Lett. — 2003. — Vol. 77, no. 11. — P. 616—618.
- [17] Dobrokhotov S., Rouleux M. The semi-classical Maupertuis—Jacobi correspondence for quasi-periodic Hamiltonian flows with applications to linear water waves theory // Asympt. Anal. — 2011. — Vol. 74. — P. 33—73.

- [18] Fomenko A. T. *Topological Classification of Integrable Systems*. — Providence: Amer. Math. Soc., 1991. — (Adv. Sov. Math.; Vol. 6).
- [19] Gelfreich V., Lerman L. Almost invariant elliptic manifolds in a singularly perturbed Hamiltonian system // *Nonlinearity*. — 2002. — Vol. 15. — P. 447–457.
- [20] Hofstadter D. Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields // *Phys. Rev. B*. — 1976. — Vol. 14. — P. 2239–2249.
- [21] Katsnelson M. I. *Graphene: Carbon in Two Dimensions*. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012.