О геометрии квадратичных обыкновенных дифференциальных уравнений Абеля второго порядка*

П. В. БИБИКОВ
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН
e-mail: tsdtp4u@proc.ru

УДК 517.925.4+514.763.52+514.763.8

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, контактные преобразования, пространство джетов, $\{e\}$-структура.

Аннотация

В работе изучается контактная геометрия обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, квадратичных по старшей производной (так называемых квадратичных уравнений Абеля). А именно, мы реализуем каждое квадратичное уравнение Абеля как ядро некоторого нелинейного дифференциального оператора, который в свою очередь задаётся квадратичной формой на распределении Картана в пространстве 1-джетов. Это позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между квадратичными уравнениями Абеля и квадратичными формами на распределении Картана. Далее с помощью этой реализации мы строим контактно-инвариантную $\{e\}$-структуру, ассоциированную с невырожденным уравнением Абеля (т. е. базис из векторных полей, инвариантный относительно контактных преобразований). Наконец, используя построенную $\{e\}$-структуру, мы решаем вопрос о контактной эквивалентности невырожденных уравнений Абеля.

Abstract

P. V. Bibikov, On the geometry of quadratic second-order Abel ordinary differential equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 21—34.

In this paper, we study the contact geometry of second-order ordinary differential equations that are quadratic in the highest derivative (the so-called quadratic Abel equations). Namely, we realize each quadratic Abel equation as the kernel of some nonlinear differential operator. This operator is defined by a quadratic form on the Cartan distribution in the 1-jet space. This observation makes it possible to establish a one-to-one correspondence between quadratic Abel equations and quadratic forms on Cartan distribution. Using this realization, we construct a contact-invariant $\{e\}$-structure associated with a nondegenerate Abel equation (i.e., basis of vector fields that is invariant under contact transformations). Finally, in terms of this $\{e\}$-structure we solve the problem of contact equivalence of nondegenerate Abel equations.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант мол_а-14-01-31045.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 2, с. 21—34.

1. Введение

Изучение действия контактных и точечных преобразований на различных классах дифференциальных уравнений является одной из важнейших задач, восходящих к классическим работам С. Ли, Э. Картана и др.

Основные методы, которые используются в этих исследованиях, основаны на идеях геометрии дифференциальных уравнений, имеющей давнюю историю. Ещё Софус Ли в своих работах применял контактную геометрию к дифференциальным уравнениям для приведения их к нормальным формам и отыскания их решений с помощью симметрий. В Советском Союзе идеи симметрий дифференциальных уравнений Софуса Ли были развиты в работах Л. В. Овсянникова, который использовал в основном точечные преобразования (преобразования независимых и зависимых переменных) для получения решений. После перевода книги Л. В. Овсянникова на английский язык появилось множество работ зарубежных математиков (Дж. Блюмана, Дж. Коула, П. Олвера и др.) по групповому анализу дифференциальных уравнений. Однако вскоре интерес к групповому анализу дифференциальных уравнений угас, и стала бурно развиваться другая область математики, известная сейчас как геометрия дифференциальных уравнений. Основы её были заложены в 60—80-х годах прошлого столетия в работах московских математиков А. М. Виноградова, И. С. Красильщика, В. В. Лычагина и др., которые стали систематически применять контактные преобразования и преобразования Ли (преобразования независимых, зависимых переменных и их производных).

Опишем основные известные результаты, относящиеся к изучению и классификации обыкновенных дифференциальных уравнений.

1.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Большинство известных результатов связано с обыкновенными дифференциальными уравнениями, разрешёнными относительно старшей производной, т. е. уравнениями вида

$$y^{(n)} = f\bigl(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\bigr). \tag{1}$$

Первые результаты в этой области были получены Софусом Ли:

1) обыкновенное дифференциальное уравнение (1) первого порядка в окрестности неособой точки точечно эквивалентно уравнению $y' = 0$;
2) обыкновенное дифференциальное уравнение (1) второго порядка в окрестности неособой точки контактно эквивалентно уравнению $y'' = 0$.

Таким образом, интерес представляет точечная классификация обыкновенных дифференциальных уравнений вида (1) при $n \geqslant 2$ и контактная — при $n \geqslant 3$.

Случай $n = 2$ для уравнений вида (1) общего положения был исследован А. Трессе, учеником Софуса Ли (см. [13]). В более подробном изложении этот результат описан Б. Кругликовым [8].

Специальный класс уравнений (1) второго порядка, имеющих вид

$$y'' = a_0(x,y)(y')^3 + a_1(x,y)(y')^2 + a_2(x,y)y' + a_3(x,y),$$

исследовался С. Ли, А. Трессе, Ж. Лиувиллем, Э. Картаном и др. (см., например, [14]).

Контактной классификацией уравнений третьего порядка занимался Чжень Шэньшэнь [6], а уравнений четвёртого порядка — В. Чэнь и Х. Ли [5].

Б. М. Дубров в [7] построил набор относительных дифференциальных инвариантов дифференциальных уравнений вида 1 произвольного порядка. С помощью этих инвариантов им была решена проблема контактной тривиализации уравнений вида (1). В [2] был построен набор относительных дифференциальных инвариантов систем обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка.

Б. М. Дубров и Т. Моримото построили связность Картана, ассоциированную с каждым дифференциальным уравнением (1) (и, более общо, с каждой голономной системой дифференциальных уравнений), и свели проблему контактной эквивалентности уравнений вида (1) к классической проблеме эквивалентности $\{e\}$-структур (см. [12]). Таким образом, проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных уравнений (1) может быть решена в терминах $\{e\}$-структур.

1.2. Дифференциальные уравнения в частных производных

Что касается уравнений в частных производных, то здесь наиболее значимым достижением можно считать изучение уравнений Монжа—Ампера (см. [9]), т. е. дифференциальных уравнений вида

$$Av_{xx} + 2Bv_{xy} + Cv_{yy} + D(v_{xx}v_{yy} - v_{xy}^2) + E = 0, \tag{2}$$

где A, B, C, D, E — функции от независимых переменных x, y, неизвестной функции $v = v(x,y)$ и её первых производных v_x, v_y.

Класс уравнений Монжа—Ампера выделяется из уравнений второго порядка тем, что он замкнут относительно контактных преобразований и содержит квазилинейные уравнения. Этот факт был известен ещё Софусу Ли, который в серии работ [10] рассматривал проблему классификации гиперболических уравнений Монжа—Ампера. В современных терминах эту задачу можно обобщить следующим образом: найти классы эквивалентности уравнений Монжа—Ампера относительно псевдогруппы контактных преобразований.

В 1978 году В. В. Лычагин [4] предложил геометрическое описание широкого класса дифференциальных уравнений второго порядка на гладких многообразиях. Если размерность многообразия равна двум, то этот класс совпадает с классом уравнений Монжа—Ампера (2).

Основная идея В. В. Лычагина заключается в представлении уравнений Монжа—Ампера и их многомерных аналогов дифференциальными формами на пространстве 1-джетов функций на гладком многообразии. Преимуществом такого подхода перед классическим является редукция порядка пространства джетов: используется более простое пространство 1-джетов вместо пространства 2-джетов, в котором, будучи уравнениями второго порядка, априори должны лежать уравнения Монжа—Ампера.

Такая интерпретация уравнений Монжа—Ампера позволила по-новому взглянуть на проблему их классификации и послужила толчком к появлению множества работ других авторов. Заключительными в этой серии можно считать работы [3] и [9].

1.3. Постановка задачи

Целью данной статьи является изучение так называемых квадратичных обыкновенных дифференциальных уравнений Абеля второго порядка, т. е. уравнений вида

$$A(x, y, y')(y'')^2 + 2B(x, y, y')y'' + C(x, y, y') = 0, \tag{3}$$

где A, B, C — голоморфные функции.

Уравнения (3) можно рассматривать как нечто среднее между уравнениями (1) и (2): с одной стороны, уравнения Абеля (3) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (а значит, не должны быть слишком сложными для изучения), а с другой стороны, они являются уравнениями второго порядка (как и уравнения Монжа—Ампера, что позволяет надеяться на существовании геометрического подхода к их изучению).

Контактная классификация уравнений Абеля (3) была получена В. В. Шурыгиным (мл.) в [11]. Основная идея заключалась в сведении контактной классификации уравнений (3) к точечной классификации пар уравнений вида (1) второго порядка и использовании известных результатов А. Трессе [13] и Б. С. Кругликова [8].

В данной работы предложен альтернативный подход к изучению квадратичных уравнений Абеля, основанный, с одной стороны, на идеях, применяемых при изучении уравнений Монжа—Ампера, а с другой — на построении $\{e\}$-структуры, ассоциированной с уравнениями Абеля, по аналогии с подходом Дуброва—Моримото. А именно, мы реализуем каждое квадратичное дифференциальное уравнение Абеля как ядро некоторого дифференциального оператора, задаваемого квадратичной формой на распределении Картана в пространстве 1-джетов. Тем самым вместо изучения квадратичных уравнений Абеля в пространстве 2-джетов мы будем изучать квадратичные формы в пространстве 1-джетов. Это соображение, с одной стороны, упрощает нам задачу (так как объекты первого порядка устроены проще объектов второго порядка), а с другой стороны, позволяет использовать геометрические соображения, которые оказываются крайне эффективными.

Конечным результатом работы является построение $\{e\}$-структуры, ассоциированной с квадратичным уравнением Абеля, т. е. базиса в касательном пространстве 1-джетов, который, во-первых, однозначно задаёт квадратичное уравнение Абеля (и сам однозначно им задаётся), а во-вторых, является инвариантным относительно контактных преобразований.

2. Необходимые сведения

Все рассмотрения, которые мы будем проводить, являются геометрическими, т. е. не зависят от выбора системы координат. Тем не менее для практического применения мы будем параллельно приводить и координатные формулы для изучаемых объектов. Кроме того, мы будем рассматривать все объекты над полем комплексных, а не вещественных чисел (прежде всего для того, чтобы не рассматривать случаи гиперболических и эллиптических уравнений отдельно, см. [11]).

2.1. Пространство 1-джетов

Напомним, что 1-*джетом* $[f]_a^1$ *голоморфной функции* $f \in C^\omega(\mathbb{C})$ *в точке* $a \in \mathbb{C}$ называется класс кривых на пространстве 0-джетов $J^0 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, касающихся графика L_f в точке $\big(a, f(a)\big)$. Аналитически это означает, что 1-джет $[f]_a^1$ задаётся точкой a, значением функции f и значением производной функции f в этой точке, т. е. в координатах 1-джет $[f]_a^1$ представляется следующим образом:

$$[f]_a^1 = \big(a, f(a), f'(a)\big).$$

Множество всех 1-джетов всех голоморфных функций во всех точках называется *пространством* 1-*джетов* и обозначается через J^1. Координаты на этом пространстве мы обозначим через (x, y, p), где x — координата на $\mathbb{C}$ и p — координата, соответствующая производной: по определению

$$x([f]_a^1) = a, \quad y([f]_a^1) = f(a), \quad p([f]_a^1) = f'(a).$$

2.2. Распределение Картана

Пространство 1-джетов J^1 снабжается естественной контактной структурой, которая называется *распределением Картана*. Определим для каждой функции $f \in C^\omega(\mathbb{C})$ её 1-*график*

$$L_f^1 = \{[f]_a^1 \colon a \in \mathbb{C}\}.$$

Распределением Картана $\mathcal{C} \colon \theta \mapsto \mathcal{C}_\theta$ называется распределение, плоскости $\mathcal{C}_\theta$ которого порождены касательными прямыми $T_\theta L_f^1$ ко всевозможным графикам L_f^1, проходящими через данный 1-джет θ. В координатах график функции f имеет вид

$$L_f^1 := \big\{\big(a, f(a), f'(a)\big) \colon a \in \mathbb{C}\big\},$$

поэтому распределение Картана может быть задано с помощью дифференциальной 1-формы

$$\varkappa := dy - p\,dx,$$

называемой *формой Картана*: $\mathcal{C} = \ker \varkappa$.

Замечание 1. Дифференциальная 1-форма Картана $\varkappa$ определена с точностью до умножения на ненулевую голоморфную функцию $\mu \in C^\omega(J^1)$.

2.3. Контактные преобразования

Диффеоморфизм φ пространства J^1, сохраняющий распределение Картана, называется *контактным преобразованием*. В координатах это означает, что $\varphi^*(\varkappa) \wedge \varkappa = 0$. Множество всех контактных преобразований называется *контактной псевдогруппой*.

Аналогично векторное поле X на пространстве 1-джетов называется *контактным*, если сдвиги вдоль этого поля сохраняют распределение Картана (т. е. являются контактными преобразованиями). В координатах это условие записывается следующим образом: $L_X(\varkappa) \wedge \varkappa = 0$.

Замечание 2. Контактные векторные поля можно задать в координатах следующим образом. Пусть $h \in C^\omega(J^1)$ — произвольная голоморфная функция. Тогда векторное поле

$$X_h := -h_p \frac{\partial}{\partial x} + (h - p h_p)\frac{\partial}{\partial y} + (h_x + p h_y)\frac{\partial}{\partial p} \tag{4}$$

является контактным полем. Заметим, что $h = \varkappa(X_h)$ и каждое контактное векторное поле имеет такой вид (см. [1]). Таким образом, контактные векторные поля находятся во взаимно-однозначном соответствии с голоморфными функциями на J^1. Однако это соответствие неканоническое: оно зависит от выбора дифференциальной 1-формы Картана.

2.4. Пространство 2-джетов

По аналогии с пространством 1-джетов J^1 определяется пространство 2-джетов J^2. Оно представляет собой множество 2-джетов голоморфных функций

$$[f]^2_a = \big(a, f(a), f'(a), f''(a)\big).$$

Очевидно, имеет место естественная проекция $J^2 \to J^1$.

Пространство J^2, в отличие от пространства J^1, не является контактным, однако и оно снабжается геометрической структурой — распределением Картана. Диффеоморфизмы, сохраняющие это распределение, называются преобразованиями Ли.

Отметим, что каждое контактное преобразование пространства 1-джетов продолжается до преобразования Ли пространства 2-джетов. А именно, каждый 2-джет может быть представлен в виде пары 1-джета (в который он проектируется) и прямой, лежащей в плоскости распределения Картана в этом

1-джете (см. [1]). Действуя на такую пару контактным диффеоморфизмом, мы получаем новую пару, являющуюся образом исходного 2-джета. Таким образом, мы получаем преобразование пространства 2-джетов, которое и называется *продолжением контактного преобразования* 1*-джетов*.

Имеет место теорема Ли—Бэклунда, утверждающая, что все преобразования Ли пространства 2-джетов (и вообще пространства n-джетов) получаются подобным образом, т. е. являются продолжениями контактных преобразований пространства J^1. Поэтому, допуская вольность речи, обычно говорят «контактные преобразования пространства J^2», понимая под этим продолжения контактных преобразований из J^1.

2.5. Квадратичные дифференциальные уравнения Абеля

Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка занимают промежуточное положение между (достаточно простыми) уравнениями первого порядка и (достаточно сложными) уравнениями высоких порядков. Кроме того, оказывается, что именно уравнения второго порядка тесно связаны с различными вопросами из самых разных областей математики и механики (в частности, второй закон Ньютона представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка), поэтому эти уравнения уже несколько столетий привлекают к себе внимание математиков.

Как уже было отмечено, контактная классификация уравнений второго порядка, разрешённых относительно старшей производной, тривиальна: все такие уравнения контактно эквивалентны уравнению $y'' = 0$. Поэтому представляется естественным рассмотреть действие контактной псевдогруппы на уравнениях, не разрешённых относительно старшей производной.

Мы будем рассматривать уравнения, в которых старшая производная входит квадратично, т. е. уравнения вида

$$A(x, y, y')(y'')^2 + 2B(x, y, y')y'' + C(x, y, y') = 0,$$

где A, B, C — голоморфные функции. Такие уравнения мы будем называть *квадратичными дифференциальными уравнениями Абеля второго порядка* или, для краткости, *квадратичными уравнениями Абеля*.

Псевдогруппа контактных диффеоморфизмов, действующая в пространстве 2-джетов, сохраняет класс квадратичных дифференциальных уравнений Абеля, так как её действие на слое естественной проекции $J^2 \to J^1$ является дробно-линейным (см. [1]). Таким образом, мы получаем действие контактной псевдогруппы на квадратичных уравнениях Абеля.

Наша цель — изучить контактную геометрию квадратичных уравнений Абеля, т. е. геометрию, инвариантную относительно контактных преобразований. Для этого нам прежде всего понадобится геометризация квадратичных уравнений Абеля. Более точно, мы свяжем с каждым уравнением Абеля геометрический объект (квадратичную форму на распределении Картана в J^1), который полностью определяет само уравнение, и будем исследовать действие контактной псевдогруппы на множестве этих объектов.

3. Геометризация квадратичных уравнений Абеля

В этом разделе мы поставим в соответствие каждому квадратичному уравнению Абеля геометрический объект — квадратичную форму на распределении Картана в пространстве 1-джетов. Каждая такая форма задаёт нелинейный дифференциальный оператор второго порядка, ядро которого есть в точности квадратичное уравнение Абеля. Тем самым вместо изучения уравнений второго порядка мы получаем возможность изучать квадратичные формы, зависящие от производных первого порядка, что существенно проще.

Отметим, что впервые подобная идея геометризации дифференциальных уравнений появилась в работе В. В. Лычагина [4], где широкий класс уравнений второго порядка в частных производных был представлен как ядро дифференциального оператора, строящегося по дифференциальной 2-форме на распределении Картана. В этот класс попали так называемые уравнения Монжа—Ампера, содержащие практически все наиболее известные уравнения математической физики (уравнение Лапласа, волновое уравнение, уравнение Эйлера, Пуассона и т. д.). Такая геометризация привела к огромному количеству работ, посвящённых уравнениям Монжа—Ампера, завершающими в которых стали [9] и [3]. Мы же применим эту идею для изучения геометрии квадратичных уравнений Абеля.

3.1. Операторы Абеля и уравнения Абеля

Итак, наша ближайшая цель — поставить в соответствие каждому квадратичному уравнению Абеля квадратичную форму на распределении Картана $\mathcal{C}$ в пространстве 1-джетов J^1. Однако для удобства мы начнём с обратной задачи: по заданной квадратичной форме мы построим дифференциальный оператор, ядро которого окажется квадратичным уравнением Абеля.

Пусть $q \in \mathsf{S}^2(T^*J^1)$ — произвольная квадрика на пространстве 1-джетов. Рассмотрим голоморфную функцию $f \in C^\omega(\mathbb{C})$ и ограничение квадрики q на 1-график $L^1_f \subset J^1$. Это ограничение порождает дифференциальный оператор

$$\Delta_q \colon C^\omega(\mathbb{C}) \to \mathsf{S}^2(T^*\mathbb{C}), \quad \Delta_q(f) = q|_{L^1_f}.$$

Таким образом, каждой квадратичной форме на пространстве 1-джетов можно поставить в соответствие дифференциальный оператор Δ_q.

Теперь рассмотрим ядро этого оператора, т. е. уравнение

$$\mathcal{A}_q := \{\Delta_q(f) = 0\}.$$

Оказывается, что это есть в точности квадратичное дифференциальное уравнение Абеля второго порядка. Ниже мы это докажем, а пока что просто будем называть уравнение $\mathcal{A}_q$ *уравнением Абеля*.

3.2. Эффективные квадратичные формы

Выше мы каждой квадратичной форме q поставили в соответствие дифференциальное уравнение $\mathcal{A}_q$. Возникает естественный вопрос: какие квадратичные формы задают одни и те же уравнения? Иными словами, при каких условиях $\mathcal{A}_{q_1} = \mathcal{A}_{q_2}$?

Для этого нужно понять, какие квадратичные формы задают тривиальное уравнение $0 = 0$. Иными словами, для каких форм ограничение на 1-график любой голоморфной функции $f \in C^\omega(\mathbb{C})$ равно 0.

Предложение. *Уравнение Абеля $\mathcal{A}_q$ тривиально тогда и только тогда, когда квадратичная форма q пропорциональна форме Картана $\varkappa$: $q = \alpha \cdot \varkappa$ (здесь $\cdot$ обозначает симметрическое умножение).*

Замечание 3. Как уже отмечалось выше, форма Картана $\varkappa$ определена с точностью до умножения на ненулевой множитель. Тем не менее условие $q = \alpha \cdot \varkappa$ не зависит от выбора этого множителя и потому корректно определяет множество форм, задающих тривиальное уравнение Абеля.

Доказательство. Предположим, что квадратичная форма $q \in \mathsf{S}^2(T^*J^1)$ такова, что $\Delta_q \equiv 0$. Это означает, что для любой голоморфной функции $f \in C^\omega(J^1)$ имеем $q|_{L^1_f} = 0$. Но тогда по определению распределения Картана $q|_{\mathcal{C}} = 0$.

Разложим квадрику q на линейные множители (1-формы): $q = \alpha \cdot \beta$. Тогда ограничение одной из 1-форм, α или β, на распределение Картана $\mathcal{C}$ равно 0. Но это означает, что одна из форм пропорциональна форме Картана $\varkappa$, и потому q также пропорциональна $\varkappa$, что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, вместо рассмотрения множества $\mathsf{S}^2(T^*J^1)$ всех квадратичных форм на пространстве 1-джетов достаточно рассматривать элементы фактора $\mathsf{S}^2(T^*J^1)/(\varkappa)$, где $(\varkappa) := \{\alpha \cdot \varkappa \colon \alpha \in T^*J^1\}$ — модуль квадратичных форм, пропорциональных форме Картана (и потому задающих тривиальное уравнение Абеля). Геометрически это означает, что мы рассматриваем ограничения квадратичных форм на распределение Картана $\mathcal{C}$ или, что то же самое, просто квадратичные формы на $\mathcal{C}$. Такие формы мы будем называть *эффективными* (по аналогии с эффективными дифференциальными формами уравнений Монжа—Ампера [3, 4, 9]) и обозначать q_ε.

Посмотрим, как выглядит уравнение Абеля $\mathcal{A}_{q_\varepsilon}$ в координатах. Ограничение квадратичной формы $q \in \mathsf{S}^2(T^*J^1)$ на распределение Картана $\mathcal{C}$ в координатах представляет собой просто замену 1-формы dy на 1-форму $p\,dx$. Поэтому в общем виде эффективная квадратичная форма записывается так:

$$q_\varepsilon = A(dp)^2 + 2B\,dp\,dx + C(dx)^2,$$

где $A, B, C \in C^\omega(J^1)$ — голоморфные функции (слагаемых, содержащих dy, как мы помним, нет). Тогда оператор Δ_{q_ε} выглядит следующим образом:

$$\Delta_{q_\varepsilon}(f) = A\big(d(f')\big)^2 + 2B\,d(f') \cdot dx + C(dx)^2 = (A(f'')^2 + 2Bf'' + C)(dx)^2.$$

Тем самым в координатах уравнение $\mathcal{A}_{q_\varepsilon}$ записывает в виде

$$A(f'')^2 + 2Bf'' + C = 0,$$

т. е. представляет собой уравнение (3), которое мы изначально и назвали уравнением Абеля.

Замечание 4. В терминах квадратичных форм действие контактной псевдогруппы на уравнениях Абеля выглядит следующим образом:

$$\varphi(\mathcal{A}_{q_\varepsilon}) = \mathcal{A}_{\varphi^{*-1}(q_\varepsilon)}.$$

Наконец, заметим, что $\mathcal{A}_{q_\varepsilon} = \mathcal{A}_{\lambda q_\varepsilon}$ для произвольной голоморфной функции $\lambda \in C^\omega(J^1)$. Поэтому нам необходимо нормировать эффективную форму q_ε. Для этого рассмотрим дискриминант D квадратичной формы q_ε. В координатах дискриминант имеет вид

$$D = B^2 - AC.$$

Будем считать, что $D \neq 0$ в некоторой окрестности пространства 1-джетов J^1. Формы с таким дискриминантом (а также соответствующие им уравнения Абеля) будем называть *невырожденными*. Ниже мы будем рассматривать только невырожденные эффективные формы.

Дискриминант является относительным контактным инвариантом уравнения Абеля, т. е. множество $\{D = 0\}$ инвариантно относительно контактных преобразований (см. [11]). Поэтому класс невырожденных квадратичных уравнений Абеля также замкнут относительно контактных преобразований.

Каждую невырожденную форму можно нормировать таким образом, чтобы её дискриминант был равен 1 (для этого достаточно разделить её на $\sqrt{D}$ или $i\sqrt{D}$), поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только невырожденные формы с дискриминантом 1. При таких условиях соответствие

$$\text{квадратичные уравнения Абеля} \quad \leftrightsquigarrow \quad \text{квадратичные формы на } \mathcal{C}$$

является взаимно-однозначным (с точностью до умножения формы на ± 1).

Итак, каждому квадратичному уравнению Абеля соответствует единственная эффективная квадратичная форма.

4. Построение $\{e\}$-структуры для уравнений Абеля

В этом разделе для каждого квадратичного уравнения Абеля $\mathcal{A}_{q_\varepsilon}$ мы построим ассоциированную с ним контактно-инвариантную $\{e\}$-структуру, т. е. базис в пространстве 1-джетов J^1, который инвариантен относительно контактных диффеоморфизмов (другими словами, это базис из контактно-инвариантных дифференцирований, ограниченный на заданное уравнение Абеля). $\{e\}$-структура несёт в себе полную информацию о квадратичном уравнении Абеля и может быть использована для его дальнейшего изучения. В частности, в терминах $\{e\}$-структур мы ниже получим контактную классификацию квадратичных уравнений Абеля.

4.1. Построение дифференциальных 1-форм

Рассмотрим эффективную квадратичную форму $q_\varepsilon \in \mathsf{S}^2(\mathcal{C}^*)$ с дискриминантом 1. Разложим её в произведение двух дифференциальных 1-форм на $\mathcal{C}$: $q_\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega_2$. В координатах эти 1-формы выглядят следующим образом:

$$\omega_1 = dp + \frac{B-1}{A}\,dx, \quad \omega_2 = A\,dp + (B+1)\,dx.$$

Дифференциальные 1-формы ω_1, ω_2 определены с точностью до умножения на ненулевую голоморфную функцию $\lambda \in C^\omega(J^1)$:

$$q_\varepsilon = (\lambda\omega_1) \cdot (\lambda^{-1}\omega_2).$$

Таким образом, мы получаем на распределении Картана кобазис $\{\lambda\omega_1, \lambda^{-1}\omega_2\}$, определённый с точностью до умножения на функцию λ. Двойственный базис мы обозначим через $\{\lambda^{-1}X_1, \lambda X_2\}$, где $\omega_i(X_j) = \delta_{ij}$ — символ Кронекера. Векторы X_1, X_2 в координатах записываются следующим образом:

$$X_1 = -\frac{A}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} - \frac{B+1}{A}\frac{\partial}{\partial p}\right), \quad X_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y} - \frac{B-1}{A}\frac{\partial}{\partial p}\right).$$

Введённые базисы обладают одним недостатком: они зависят от нумерации 1-форм ω_1 и ω_2, в то время как в исходной квадратичной форме $q_\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega_2$ такой нумерации нет (схожая сложность возникла у В. В. Шурыгина (мл.) в [11], из-за чего ему пришлось рассматривать два случая). Поэтому нам будет удобнее выбрать базисы

$$\left\{\frac{1}{2}(\lambda\omega_1 + \lambda^{-1}\omega_2),\ \frac{1}{2}(\lambda\omega_1 - \lambda^{-1}\omega_2)\right\}, \quad \{Y_1 := \lambda^{-1}X_1 + \lambda X_2,\ Y_2 := \lambda^{-1}X_1 - \lambda X_2\},$$

которые уже не зависят от этой нумерации.

Замечание 5. Кажется, что вторые векторы в этих базисах меняют знак при изменении нумерации, однако следует помнить, что 1-формы ω_1 и ω_2, а также векторы X_1 и X_2 определены с точностью до умножения на ±1, поэтому и векторы нового базиса также определены с точностью до умножения на ±1 (более того, отсюда также следует, что векторы в этих базисах не упорядочены).

Нашей основной задачей является нормализация этих базисов, т. е. контактно-инвариантный выбор функции λ.

4.2. Нормализация

Прежде всего мы нормализуем форму Картана $\varkappa$ (напомним, что до сих пор она была определена с точностью до умножения на ненулевую голоморфную функцию). Для этого рассмотрим дифференциальную 2-форму

$$\Omega := \omega_1 \wedge \omega_2$$

на распределении Картана $\mathcal{C}$. Легко убедиться, что эта 2-форма не зависит от выбора множителя λ и потому является инвариантной. В координатах эта форма записывается очень просто:

$$\Omega = 2\,dp \wedge dx.$$

Теперь нормируем форму Картана таким образом, чтобы

$$(d\varkappa)|_{\mathcal{C}} = \Omega.$$

Это условие определяет форму $\varkappa$ однозначно с точностью до умножения на ± 1. В координатах получаем

$$\varkappa = -2(dy - p\,dx).$$

Теперь с помощью нормированной формы Картана, которую мы по-прежнему будем обозначать через $\varkappa$, построим контактное векторное поле Z с производящей функцией -1. В координатах оно записывается так:

$$Z = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Теперь нормализуем базис $\{Y_1, Y_2\}$ на распределении Картана $\mathcal{C}$. Для этого рассмотрим дифференциальные 1-формы

$$\psi_1 := L_{Y_1}\varkappa, \quad \psi_2 := L_{Y_2}\varkappa.$$

Условие нормировки для выбора функции λ выглядит следующим образом:

$$d\psi_1 \wedge \psi_1 = d\psi_2 \wedge \psi_2.$$

Это условие является дифференциальным уравнением на функцию λ. Решение этого уравнения с начальным условием $\lambda(x, 0, p) = 1$ выглядит следующим образом:

$$\lambda = \exp\biggl(\int\limits_0^y \frac{A_y(1-B) + B_y}{2A}\,dy\biggr).$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Базис $\{Y_1, Y_2, Z\}$ векторных полей образует контактно-инвариантную $\{e\}$-структуру, ассоциированную с квадратичным уравнением Абеля.*

4.3. Контактная эквивалентность квадратичных уравнений Абеля

Построенная нами $\{e\}$-структура, ассоциированная с квадратичным уравнением Абеля, даёт возможность получить контактную классификацию таких уравнений. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 2. *Два квадратичных дифференциальных уравнения Абеля $\mathcal{A}_{q_\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_{\widetilde{q}_\varepsilon}$ контактно эквивалентны, если и только если ассоциированные с ними $\{e\}$-структуры эквивалентны.*

Замечание 6. Таким образом, проблема контактной эквивалентности квадратичных уравнений Абеля сводится к известному вопросу эквивалентности $\{e\}$-структур (см. [12]). Отметим, что требование *контактной* эквивалентности $\{e\}$-структур не нужно.

Доказательство. Если два уравнения Абеля контактно эквивалентны, то ассоциированные с ними $\{e\}$-структуры также контактно эквивалентны.

Обратно, пусть две $\{e\}$-структуры эквивалентны и φ — диффеоморфизм, переводящий первую $\{e\}$-структуру во вторую.

1. Векторы $\{Y_1, Y_2\}$ из первой $\{e\}$-структуры переходят в векторы $\{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2\}$ второй $\{e\}$-структуры. Так как эти векторы порождают распределение Картана $\mathcal{C}$, то φ сохраняет $\mathcal{C}$ и потому является контактным.

2. По паре векторов $\{Y_1, Y_2\}$ можно однозначно восстановить векторные поля X_1 и X_2, затем 1-формы ω_1 и ω_2 и, наконец, эффективную квадратичную форму $q_\varepsilon = \omega_1 \cdot \omega_2$ (см. раздел 4.1). Аналогично можно поступить со второй парой векторов $\{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2\}$. Значит, переведя пару $\{Y_1, Y_2\}$ в пару $\{\tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2\}$, мы переведём форму q_ε в форму $\tilde{q}_\varepsilon$, т. е. $\varphi(\mathcal{A}_{q_\varepsilon}) = \mathcal{A}_{\tilde{q}_\varepsilon}$.

Таким образом, мы построили контактный диффеоморфизм φ, переводящий первое уравнение Абеля во второе. Тем самым мы доказали их контактную эквивалентность, что и требовалось. □

Автор благодарит В. В. Лычагина за ценные замечания и внимание к работе.

Литература

[1] Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. — М.: ВИНИТИ, 1988. — (Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления; Т. 28).

[2] Дубров Б. М. Об одном классе контактных инвариантов систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2006. — № 1. — С. 76—77.

[3] Кушнер А. Г. Классификация уравнений Монжа—Ампера: Дис.… докт. физ.-мат. наук. — Астрахань, 2009.

[4] Лычагин В. В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка // ДАН СССР. — 1978. — Т. 238, № 5. — С. 273—276.

[5] Chen W., Li H. The geometry of the differential equations of the fourth order under the contact transformations // Acta Sci. Nat. Univ. Pekinensis. — 1999. — Vol. 35, no. 3.

[6] Chern S. The geometry of the differential equation $y''' = F(x, y, y', y'')$ // Sci. Rep. Nat. Tsing Hua Univ. — 1950. — Vol. 4. — P. 97—111.

[7] Dubrov B. Contact trivialization of ordinary differential equations // Differential Geometry and Its Applications. Proc. Conf., Opava, August 27—31, 2001. — P. 73—84.

[8] Kruglikov B. Point classification of 2nd order ODEs: Tresse classification revisited and beyond. — `arXiv:0809.4653`.

[9] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N. Contact Geometry and Non-Linear Differential Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2007.

[10] Lie S. Begründung einer Invarianten-Theorie der Berührungs-Transformationen // Math. Ann. — 1874. — Vol. 8. — P. 215—303.

[11] Shurygin V. V. (jr.) On the contact equivalence problem of second-order ODEs which are quadratic with respect to the second-order derivative // Lobachevskii J. Math. — 2013. — Vol. 34, no. 3. — P. 264—271.

[12] Sternberg S. Lectures on Differential Geometry. — Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964.

[13] Tresse A. Détermination des invariants ponctuels de l' équation différentielle ordinaire du second ordre $y'' = \omega(x, y, y')$. — Leipzig, 1896.

[14] Yumaguzhin V. Differential invariants of 2-order ODEs. I. — `arXiv:0804.0674v1`.