О полноте интегралов Манакова

Б. ГАЙЧ
Математический институт
Сербской академии наук и искусств, Сербия
e-mail: gajab@mi.sanu.ac.rs

В. ДРАГОВИЧ
Техасский университет в Далласе, США;
Математический институт
Сербской академии наук и искусств, Сербия
e-mail: vladimir.dragovic@utdallas.edu

Б. ЙОВАНОВИЧ
Математический институт
Сербской академии наук и искусств, Сербия
e-mail: bozaj@mi.sanu.ac.rs

УДК 513.944

Ключевые слова: алгебра Ли, геодезический поток, однородное пространство, интегралы Манакова, полный коммутативный набор.

Аннотация

Целью данной заметки является представление простого доказательства полноты интегралов Манакова для движения твёрдого тела с неподвижной точкой в $\mathbb{R}^n$, а также для геодезических потоков на классе однородных пространств вида $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n_1) \times \ldots \times \mathrm{SO}(n_r)$.

Abstract

B. Gajić, V. Dragović, B. Jovanović, On the completeness of the Manakov integrals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 35—49.

The aim of this note is to present a simple proof of the completeness of the Manakov integrals for a motion of a rigid body fixed at a point in $\mathbb{R}^n$, as well as for geodesic flows on a class of homogeneous spaces $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n_1) \times \cdots \times \mathrm{SO}(n_r)$.

Посвящается академику РАН
Анатолию Тимофеевичу Фоменко
по случаю 70-летия

1. Введение

В данной работе рассматривается известная задача о движении n-мерного твёрдого тела, тесно связанная с двумя важными вопросами теории интегрируемых систем: построением интегрируемых систем на алгебрах Ли и гипотезой

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 2, с. 35—49.

о том, что некоммутативная интегрируемость влечёт обычную (т. е. по Лиувиллю) посредством интегралов из того же функционального класса, что и некоммутативные интегралы. Оба вопроса обязаны своим возникновением и развитием Анатолию Тимофеевичу Фоменко и его школе [2, 10, 11, 14]. В настоящее время второй из названных вопросов известен как гипотеза Мищенко—Фоменко.

Уравнения Эйлера левоинвариантного геодезического потока на $\mathrm{SO}(n)$ имеют вид

$$\dot{M} = [M, \Omega], \quad \Omega = \mathfrak{A}(M), \tag{1}$$

где $\Omega \in \mathfrak{so}(n)$ — угловая скорость, $M \in \mathfrak{so}(n)^* \cong \mathfrak{so}(n)$ — момент, $\mathfrak{I} = \mathfrak{A}^{-1}$ — положительно определённый оператор, определяющий левоинвариантную метрику [1]. Здесь мы отождествляем пространства $\mathfrak{so}(n)$ и $\mathfrak{so}(n)^*$ с помощью скалярного произведения, пропорционального форме Киллинга

$$\langle X, Y\rangle = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(XY), \quad X, Y \in \mathfrak{so}(n).$$

Уравнения Эйлера (1) гамильтоновы по отношению к скобке Ли—Пуассона

$$\{f, g\}(M) = -\langle M, [\nabla f(M), \nabla g(M)]\rangle, \quad M \in \mathfrak{so}(n), \tag{2}$$

с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\langle M, \mathfrak{A}(M)\rangle.$$

Инвариантные полиномы $\operatorname{tr}(M^{2k})$, $k = 1, \ldots, [n/2] = \operatorname{rank}\mathfrak{so}(n)$ являются центральными функциями, определяющими регулярные симплектические листы (присоединённые орбиты) скобки Ли—Пуассона (2). Для полной интегрируемости требуется дополнительно ещё $(1/2)\big(\dim\mathfrak{so}(n) - \operatorname{rank}\mathfrak{so}(n)\big)$ независимых интегралов в инволюции. Для оператора $\mathfrak{A}$ общего типа и $n \geqslant 4$ эта система неинтегрируема.

С. В. Манаковым было найдено представление Лакса для данной задачи, полиномиальное по спектральному параметру λ (см. [8]):

$$\dot{L}(\lambda) = [L(\lambda), U(\lambda)], \quad L(\lambda) = M + \lambda A, \quad U(\lambda) = \Omega + \lambda B, \tag{3}$$

при условии, что M и Ω связаны соотношением

$$[M, B] = [\Omega, A], \tag{4}$$

где A и B — диагональные матрицы: $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, $B = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$.

В случае $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$, $i \neq j$, соотношение (4) определяет вид оператора $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} = \operatorname{ad}_A^{-1} \circ \operatorname{ad}_B = \operatorname{ad}_B \circ \operatorname{ad}_A^{-1},$$

т. е.

$$\Omega_{ij} = \frac{b_i - b_j}{a_i - a_j} M_{ij},$$

где $M_{ij} = \langle M, E_i \wedge E_j \rangle$ и $E_1, \ldots, E_n$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Матрицы A и B выбираем так, чтобы оператор $\mathfrak{A}$ был положительно определённым. Операторы $\mathrm{ad}_A(M) = [A, M]$ и $\mathrm{ad}_B(M) = [B, M]$ рассматриваются здесь как линейные преобразования из $\mathfrak{so}(n)$ в подпространство матриц с нулями на диагонали в пространстве симметрических матриц $\mathrm{Sym}(n)$. В силу того что собственные значения матриц A и B различны, эти операторы обратимы. С. В. Манаковым было доказано, что решения уравнений Эйлера (1) выражаются в терминах θ-функций с использованием процедуры алгеброгеометрического интегрирования, развитой Б. А. Дубровиным в [6, 7] (см. [8]). Иная пара Лакса для данной задачи представлена в [19].

Непосредственная проверка того, что возникающие из представления Лакса интегралы

$$\mathcal{L} = \{\mathrm{tr}(M + \lambda A)^k \mid k = 1, 2, \ldots, n,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{5}$$

образуют полный коммутативный набор на $\mathfrak{so}(n)$, была осуществлена А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в [10].

Теорема 1. *Пусть собственные значения матрицы A различны. Тогда в наборе $\mathcal{L}$ найдётся*

$$\rho_{\mathfrak{so}(n)} = \frac{1}{2}\big(\dim \mathfrak{so}(n) + \mathrm{rank}\, \mathfrak{so}(n)\big) = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} + \left[\frac{n}{2}\right]\right) \tag{6}$$

независимых полиномов, т. е. $\mathcal{L}$ — полный коммутативный набор на $\mathfrak{so}(n)$.

Теорема 1 представляет собой частный случай утверждения о полноте набора полиномов, полученных методом сдвига аргумента инвариантных полиномов на комплексных полупростых алгебрах Ли после их ограничения на нормальные подалгебры [10]. А. В. Болсиновым было предложено другое доказательство, использующее бигамильтонов подход. Оно основывается на согласованности скобки Ли—Пуассона (2) со скобкой

$$\{f, g\}_A(M) = -\langle M, [\nabla f(M), \nabla g(M)]_A \rangle, \tag{7}$$

где операция умножения $[M_1, M_2]_A = M_1 A M_2 - M_2 A M_1$ согласована со стандартной операцией умножения в $\mathfrak{so}(n)$ [2].

В случае $A = B^2$ момент и угловая скорость связаны соотношением

$$M = \mathfrak{I}(\Omega) = \mathrm{ad}_B^{-1} \mathrm{ad}_{B^2}(\Omega) = B\Omega + \Omega B,$$

т. е.

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{b_i + b_j} M_{ij}, \tag{8}$$

и уравнения Эйлера (1) переписываются в виде

$$\dot{M}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_i - b_j}{(b_k + b_i)(b_k + b_j)} M_{ik} M_{kj}. \tag{9}$$

Уравнения (9) описывают свободное движение около неподвижной точки n-мерного твёрдого тела с тензором масс B и тензором инерции $\mathfrak{I}$ [20]. Первое четырёхмерное обобщение волчка Эйлера было сделано Ф. Фрамом во второй половине XIX века [21]. Система (9) также рассматривалась А. С. Мищенко, который нашёл набор интегралов

$$J_k = \sum_{p=1}^{k} \operatorname{tr}\bigl(B^{p-1} M B^{k-p} \mathfrak{A}(M)\bigr), \quad k \geqslant 0, \tag{10}$$

и доказал их независимость при $k = 1, \ldots, n-1$, $k \neq 2$ на присоединённых орбитах общего положения, откуда следует, что система вполне интегрируема при $n = 4$ [9]. Интегралы (10) попарно коммутируют (см. [5, 27]), а также коммутируют с интегралами Манакова (см. [27]). Отметим, что интеграл J_1 пропорционален гамильтониану H, а интеграл J_2 совпадает с инвариантом $\operatorname{tr}(M^2)$.

Интерес представляет также изучение сингулярных потоков Манакова (см. раздел 2), возникающих при совпадении некоторых из собственных значений матрицы A. В этом случае изотропная подалгебра

$$\mathfrak{so}(n)_A = \{X \in \mathfrak{so}(n) \mid [X, A] = 0\}$$

нетривиальна. Рассмотрим ортогональное разложение

$$\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{so}(n)_A \oplus \mathfrak{v} \cong \mathfrak{so}(n_1) \oplus \mathfrak{so}(n_2) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{so}(n_r) \oplus \mathfrak{v}. \tag{11}$$

Обозначим через $\mathcal{S}$ множество линейных функций на $\mathfrak{so}(n)_A$. Тогда имеем $\{\mathcal{L}, \mathcal{S}\} = 0$, т. е. полиномы из $\mathcal{L}$ оказываются $\mathrm{Ad}_{\mathrm{SO}(n)_A}$-инвариантными, где $\mathrm{SO}(n)_A \cong \mathrm{SO}(n_1) \times \ldots \times \mathrm{SO}(n_r)$ — подгруппа в $\mathrm{SO}(n)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(n)_A$. Поскольку алгебра $\mathcal{S}$ линейных функций некоммутативна, если какие-то из чисел $n_1, \ldots, n_r$ превосходят 2, то представляется естественным изучать сингулярные потоки Манакова в рамках теории некоммутативного интегрирования (см. [11, 12]).

Теорема 2. *Множество $\mathcal{L} + \mathcal{S}$ является полным некоммутативным набором функций на $\mathfrak{so}(n)$ по отношению к скобке Ли—Пуассона* (2).

А. В. Болсинов доказал эту теорему, опираясь на согласованность скобок Пуассона (2) и (7) (см. [14, с. 241—244]). Другое доказательство, использующее картановское разложение алгебры $\mathfrak{gl}(n)$, приведено в [17].

Следующий естественный вопрос, связанный с интегрируемостью геодезических потоков на однородном пространстве $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n)_A$ (см. раздел 2) — это полнота ограничений полиномов (5) на подпространство $\mathfrak{v}$

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{v}} = \{\operatorname{tr}(M + \lambda A)^k|_{\mathfrak{v}} \mid k = 1, 2, \ldots, n,\ \lambda \in \mathbb{R}\} \tag{12}$$

в алгебре $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^{\mathrm{SO}(n)_A}$ $\mathrm{Ad}_{\mathrm{SO}(n)_A}$-инвариантных полиномов на $\mathfrak{v}$ по отношению к ограничению скобки Ли—Пуассона (2):

$$\{f, g\}_{\mathfrak{v}}(M) = -\langle M, [\nabla_{\mathfrak{v}} f(M), \nabla_{\mathfrak{v}} g(M)]\rangle, \quad f, g \in \mathbb{R}[\mathfrak{v}]^{\mathrm{SO}(n)_A}. \tag{13}$$

Отметим, что алгебру $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^{\mathrm{SO}(n)_A}$ можно рассматривать как алгебру функций на сингулярном пуассоновом многообразии $(\mathfrak{v}/\mathrm{SO}(n)_A, \{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{v}})$. Набор $\mathcal{L}_{\mathfrak{v}}$ представляет собой коммутативное подмножество в $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^{\mathrm{SO}(n)_A}$. При этом он будет полным, если в нём найдётся

$$\rho_{\mathfrak{v}} = \dim \mathfrak{v} - \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_{\mathrm{SO}(n)}(M) \tag{14}$$

функционально независимых полиномов, где $\mathcal{O}_{\mathrm{SO}(n)}(M)$ — орбита элемента $M \in \mathfrak{v}$ общего положения для присоединённого действия группы $\mathrm{SO}(n)$ (см. [4, 16]).

Без ограничения общности будем полагать, что $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant \ldots \leqslant n_r$. Если выполнено условие

$$n_r \leqslant n_1 + \ldots + n_{r-1} + 1, \tag{15}$$

то элемент $M \in \mathfrak{v}$ общего положения является регулярным в $\mathfrak{so}(n)$ и необходимое число (14) независимых интегралов определяется формулой

$$\rho_{\mathfrak{v}} = \rho_{\mathfrak{so}(n)} - \dim \mathfrak{so}(n)_A = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} + \left[\frac{n}{2}\right]\right) - \sum_{i=1}^{r} \frac{n_i(n_i-1)}{2}. \tag{16}$$

Теорема 3. *Набор $\mathcal{L}_{\mathfrak{v}}$ образует полное коммутативное подмножество в алгебре $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^{\mathrm{SO}(n)_A}$.*

Теорема 3 была сформулирована в [17] как теорема 4. Однако, как было замечено в [18] (см. замечание 2.3 в разделе 2), приведённое там доказательство нуждается в уточнениях. Недавно И. В. Микитюк доказал теорему 3, основываясь на бигамильтоновом подходе (см. [26]).

Цель настоящей заметки — дать короткое явное доказательство теорем 1 и 3 для семейства матриц A с кратными собственными значениями (см. раздел 3). Это доказательство аналогично доказательству А. С. Мищенко независимости интегралов (10) уравнений Эйлера (9), основанному на вычислении их градиентов в некоторой специальной точке алгебры $\mathfrak{so}(n)$ (см. [9]).

2. Сингулярные потоки Манакова и геодезические потоки на однородных пространствах $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n_1) \times \ldots \times \mathrm{SO}(n_r)$

2.1. Симметричные твёрдые тела

Предположим, что выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&a_1 = \ldots = a_{n_1} = \alpha_1,\ \ldots,\ a_{n+1-n_r} = \ldots = a_n = \alpha_r,\\
&b_1 = \ldots = b_{n_1} = \beta_1,\ \ldots,\ b_{n+1-n_r} = \ldots = b_n = \beta_r,\\
&n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n, \quad \alpha_i \neq \alpha_j, \quad \beta_i \neq \beta_j, \quad i, j = 1, \ldots, r.
\end{aligned} \tag{17}$$

Пусть $\mathfrak{B}\colon \mathfrak{so}(n)_A \to \mathfrak{so}(n)_A$ — произвольный положительно определённый оператор. Выберем матрицы A и B таким образом, чтобы секционный оператор $\mathfrak{A}\colon \mathfrak{so}(n) \to \mathfrak{so}(n)$, задаваемый формулой

$$\mathfrak{A}(\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}} M + \operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} M) = \operatorname{ad}_A^{-1} \operatorname{ad}_B(\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}} M) + \mathfrak{B}(\operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} M), \tag{18}$$

был положительно определённым. Здесь через $\operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A}$ и $\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}}$ обозначены проекции в соответствии с разложением (11), а ad_A и ad_B рассматриваются как обратимые линейные преобразования из $\mathfrak{v}$ в $[A, \mathfrak{v}] \subset \operatorname{Sym}(n)$.

Для такого оператора $\mathfrak{A}$ имеем

$$[\Omega, A] = [\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}} \Omega, A] = [\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}} M, B] = [M, B],$$

так что условие Манакова (4) выполнено. С учётом того что

$$\operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A}[\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}} M, \operatorname{ad}_A^{-1} \operatorname{ad}_B(\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}} M)] = 0,$$

система (1) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} M = \big[\operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} M, \mathfrak{B}\big(\operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} M\big)\big], \tag{19}$$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{pr}_{\mathfrak{v}} M = [M, \operatorname{ad}_A^{-1} \operatorname{ad}_B(\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}} M)] + \big[\operatorname{pr}_{\mathfrak{v}} M, \mathfrak{B}\big(\operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} M\big)\big]. \tag{20}$$

Систему уравнений (19), (20) будем называть *сингулярным потоком Манакова*.

Если $n_i \geqslant 4$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant r$, то уравнения (19) (а следовательно, и система (19), (20)) неинтегрируемы для оператора $\mathfrak{B}$ общего вида. Так как условие (4) выполнено, то система имеет представление Лакса (3), однако получаемые из него интегралы не дают полной интегрируемости. С другой стороны, если

$$\big[\operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} M, \mathfrak{B}\big(\operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} M\big)\big] \equiv 0$$

(например, в случае когда оператор $\mathfrak{B}$ пропорционален тождественному), то $\operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} M = \mathrm{const}$.

Рассмотрим случай $A = B^2$ в условиях (17) ($\big(\mathrm{SO}(n_1) \times \mathrm{SO}(n_2) \times \ldots \times \mathrm{SO}(n_r)\big)$-*симметричное твёрдое тело*). Оператор $\mathfrak{A}$, задаваемый формулой (8), корректно определён на всей алгебре $\mathfrak{so}(n)$, а его ограничения на $\mathfrak{so}(n_i)$ совпадают с оператором умножения на число $1/2\beta_i$. Таким образом, система (19) тривиальна, и мы имеем нётеров закон сохранения $\operatorname{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} M = \mathrm{const}$. Из теоремы 2 получаем следствие.

Следствие 1. *Система уравнений Эйлера* (9) *для твёрдого тела с условиями симметрии* (17) *вполне интегрируема в некоммутативном смысле. Кроме того, предположим, что система* (19) *вполне интегрируема на* $\mathfrak{so}(n)_A$ *при помощи полного набора коммутирующих интегралов* $\mathcal{S}^0$. *Тогда сингулярный поток Манакова* (19), (20) *также вполне интегрируем с полным набором коммутирующих интегралов* $\mathcal{L} + \mathcal{S}^0$.

2.2. Геодезические потоки на $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n_1)\times\ldots\times\mathrm{SO}(n_r)$

Предположим, что оператор $\mathfrak{A}$ задаётся формулой (18), где $\mathfrak{B}$ — тождественный оператор. Тогда сингулярный поток Манакова (19), (20) представляет собой геодезический поток $\mathrm{SO}(n)$-левоинвариантной метрики на $\mathrm{SO}(n)$, которая также $\mathrm{SO}(n)_A$-правоинвариантна. Эта метрика индуцирует $\mathrm{SO}(n)$-инвариантную метрику на однородном пространстве $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n)_A$, мы обозначим её через $ds^2_{A,B}$.

На подпространстве $\mathfrak{v}$, отождествляемом с касательным пространством к смежному классу единичного элемента, метрика задаётся $\mathrm{SO}(n)_A$-инвариантным скалярным произведением

$$(\cdot,\cdot)_{A,B}=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant r}\frac{\alpha_i-\alpha_j}{\beta_i-\beta_j}\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathfrak{v}_{i,j}},\tag{21}$$

где

$$\mathfrak{v}=\bigoplus_{1\leqslant i<j\leqslant r}\mathfrak{v}_{i,j}\text{ —}$$

разложение в сумму $\mathrm{SO}(n)_A$-инвариантных подпространств, определяемое из соотношения

$$\mathfrak{so}(n_i+n_j)=\mathfrak{so}(n_i)\oplus\mathfrak{so}(n_j)\oplus\mathfrak{v}_{i,j}.$$

В частности, при $A=B$ получаем нормальную метрику ds^2_0.

Пусть $\mathcal{F}^{\mathrm{SO}(n)}$ — алгебра $\mathrm{SO}(n)$-инвариантных функций, полиномиальных по импульсам, и

$$\Phi\colon T^*(\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n)_A)\to\mathfrak{so}(n)^*\cong\mathfrak{so}(n)\text{ —}$$

отображение момента естественного гамильтонова действия группы $\mathrm{SO}(n)$. Тогда имеем $\{\mathcal{F}^{\mathrm{SO}(n)},\Phi^*(\mathbb{R}[\mathfrak{so}(n)])\}=0$, где через $\{\cdot,\cdot\}$ обозначена уже каноническая скобка Пуассона на $T^*(\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n)_A)$. Гамильтониан нормальной метрики ds^2_0 является центральной функцией в $\mathcal{F}^{\mathrm{SO}(n)}$, поэтому он коммутирует как с $\Phi^*(\mathbb{R}[\mathfrak{so}(n)])$, так и с $\mathcal{F}^{\mathrm{SO}(n)}$. Более того, набор функций $\mathcal{F}^{\mathrm{SO}(n)}+\Phi^*(\mathbb{R}[\mathfrak{so}(n)])$ является полным на $T^*(\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n)_A)$, что влечёт некоммутативную интегрируемость геодезического потока нормальной метрики ds^2_0 (см. [4, 15]).

Алгебра $(\mathcal{F}^{\mathrm{SO}(n)},\{\cdot,\cdot\})$ может быть естественным образом отождествлена с $(\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^{\mathrm{SO}(n)_A},\{\cdot,\cdot\}_{\mathfrak{v}})$ (см. [28]). Ввиду этого отождествления гамильтониан геодезического потока метрики $ds^2_{A,B}$ записывается в виде

$$H_{A,B}(M)=\frac{1}{2}\langle\mathrm{ad}_A^{-1}\circ\mathrm{ad}_B(M),M\rangle,$$

и $\{H_{A,B},\mathcal{L}_{\mathfrak{v}}\}_{\mathfrak{v}}=0$. Из теоремы 3 теперь получаем следствие.

Следствие 2. *Геодезический поток метрики $ds^2_{A,B}$, в частности нормальной метрики ds^2_0, интегрируем по Лиувиллю посредством полиномиальных интегралов $\mathcal{L}_{\mathfrak{v}}+\Phi^*(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — коммутативный набор полиномов на $\mathfrak{so}(n)$, полный на присоединённых орбитах, содержащихся в образе отображения момента Φ.*

Указанный в следствии 2 коммутативный набор полиномов $\mathcal{A}$ существует всегда. Действительно, пусть $\tilde{M}$ — произвольный элемент алгебры $\mathfrak{so}(n)$. Тогда найдётся симметрическая матрица $\tilde{A}$, такая что соответствующий набор интегралов Манакова $\tilde{\mathcal{L}}$ полон на присоединённой орбите, проходящей через $\tilde{M}$ (см. [2, теорема 1.6]).

2.3. Замечание

Теорема 3 и следствие 2 содержатся в [17]. Тем не менее, как было отмечено нами в [18], первая часть доказательства теоремы 4 в [17], относящаяся к случаю (15), неполна. Соотношение (29) в [17] (полнота набора $\mathcal{L}+\mathcal{S}$) имеет место на множестве $U \subset \mathfrak{so}(n)$, открытом в топологии Зариского. Хотя в случае выполнения условия (15) в $\mathfrak{v}$ и содержатся регулярные элементы $\mathfrak{so}(n)$, в [18] было показано, что полнота набора $\mathcal{L}+\mathcal{S}$ на $\mathfrak{v}$ (означающая, что $U \cap \mathfrak{v} \neq 0$) равносильна условию $n_1, \ldots, n_r \leqslant 2$ (см. [18, с. 1287]). Таким образом, соотношение (36) в [17] нуждается в дополнительном пояснении.

2.4. Интегрируемые пары

А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко выдвинули гипотезу о том, что некоммутативная интегрируемость влечёт обычную интегрируемость по Лиувиллю посредством интегралов из того же функционального класса, что и некоммутативные интегралы [11, 14]. Эта гипотеза доказана в C^∞-гладком случае для бесконечномерных алгебр интегралов (см. [15]), а также в полиномиальном и аналитическом случаях для конечномерных алгебр (см. [3, 13]).

Пусть G/H — однородное пространство компактной связной группы Ли G с нормальной метрикой ds_0^2, индуцированной биинвариантной римановой метрикой на G. Как и выше, геодезический поток метрики ds_0^2 интегрируем в некоммутативном смысле при помощи аналитических интегралов, полиномиальных по импульсам [4, 15], и гипотеза Мищенко—Фоменко сводится к построению полного коммутативного набора $\mathcal{L}$ G-инвариантных, полиномиальных по импульсам функций на $T^*(G/H)$. Если такой набор $\mathcal{L}$ существует, скажем, что (G, H) — *интегрируемая пара* [16]. Помимо $\big(\mathrm{SO}(n), \mathrm{SO}(n_1) \times \ldots \times \mathrm{SO}(n_r)\big)$, известны ещё некоторые классы интегрируемых пар (см. [4, 16, 22—25]), но в общем случае проблема до сих пор не решена. В частности, если G/H — симметрическое пространство, то сама алгебра G-инвариантных функций уже коммутативна и (G, H) — тривиальный пример интегрируемой пары.

3. Полнота интегралов

Представляя интегралы (5) как многочлены от λ и используя тот факт, что произведение симметрической и кососимметрической матриц имеет нулевой след, получаем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\big((M+\lambda A)^2\big) = \mathrm{tr}(M^2) + \lambda^2 \,\mathrm{tr}(A^2),\\
&\mathrm{tr}\big((M+\lambda A)^3\big) = \lambda \,\mathrm{tr}(M^2A + MAM + AM^2) + \lambda^3 \,\mathrm{tr}(A^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}\big((M+\lambda A)^4\big)=\operatorname{tr}(M^4)+\\&\quad+\lambda^2\operatorname{tr}(M^2A^2+MAMA+MAAM+AMMA+AMAM+A^2M^2)+\\&\quad+\lambda^4\operatorname{tr}(A^4),\ldots\end{aligned}$$

Коэффициенты этих многочленов (за исключением старших, являющихся константами) дают полиномиальные интегралы Манакова:

$$\begin{aligned}&p_l^k=\operatorname{tr}\big(M^{2k}A^l+\\&\quad+(\text{все другие мономы с } 2k \text{ множителями } M \text{ и } l \text{ множителями } A)\big),\\&\quad k=1,2,\ldots,\left[\frac{n}{2}\right],\quad l=0,1,\ldots,n-2k.\end{aligned}$$

Поскольку для $\mathrm{SO}(n)_A$-инвариантного многочлена f на $\mathfrak{v}$ справедливо $\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A}[M,\nabla_{\mathfrak{v}}f|_M]=0$, то корректно определено гамильтоново векторное поле $X_f^{\mathfrak{v}}=[M,\nabla_{\mathfrak{v}}f]$ со значениями в $\mathfrak{v}$. А так как градиент $\nabla_{\mathfrak{v}}\tilde{p}_l^k$ ограничения $\tilde{p}_l^k=p_l^k|_{\mathfrak{v}}$ является попросту проекцией $\nabla_{\mathfrak{v}}\tilde{p}_l^k=\mathrm{pr}_{\mathfrak{v}}(\nabla p_l^k)$, то гамильтоново поле для $\tilde{p}_l^k$ записывается в виде

$$X^{\mathfrak{v}}_{\tilde{p}_l^k}(M)=[M,\nabla_{\mathfrak{v}}\tilde{p}_l^k|_M]=[M,\nabla p_l^k|_M]-[M,\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A}\nabla p_l^k|_M],\quad M\in\mathfrak{v}.$$

Легко проверить, что градиент $\nabla p_l^k|_M$ пропорционален многочлену

$$\begin{aligned}&P_l^k(M)=M^{2k-1}A^l+\\&\quad+(\text{все другие мономы с } 2k-1 \text{ множителями } M \text{ и } l \text{ множителями } A),\end{aligned}$$

и следовательно, гамильтоново поле для $\tilde{p}_l^k$ пропорционально многочлену

$$Q_l^k(M)=[M,P_l^k(M)]-[M,\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A}P_l^k(M)]\in\mathfrak{v},\quad M\in\mathfrak{v}. \tag{22}$$

Определим векторные подпространства

$$\begin{aligned}U_k&=U_k(M)=\mathrm{span}\{Q_l^k(M)\mid l=0,1,\ldots,n-2k\},\\U&=U(M)=U_1+U_2+\ldots+U_{[n/2]}.\end{aligned}$$

3.1. Регулярный случай

Предположим сначала, что выполнено условие (15). Тогда элемент общего положения $M\in\mathfrak{v}$ регулярен в $\mathfrak{so}(n)$ и инвариантные полиномы

$$p_0^1,\ldots,p_0^{[n/2]} \tag{23}$$

независимы на $\mathfrak{v}$. Так как их гамильтоновы поля нулевые, то нужно показать, что

$$\dim U(M)=\rho_{\mathfrak{v}}-\left[\frac{n}{2}\right]=\rho_{\mathfrak{so}(n)}-\dim\mathfrak{so}(n)_A-\left[\frac{n}{2}\right] \tag{24}$$

для элемента общего положения $M\in\mathfrak{so}(n)$. Отметим, что общее число полиномов p_l^k равно

$$(n-1)+(n-3)+\ldots+\left(n+1-2\left[\frac{n}{2}\right]\right)=\rho_{\mathfrak{so}(n)}.$$

Поскольку мы имеем дело с полиномами, то достаточно проверить равенство (24) лишь в одной точке M_0. В [9] А. С. Мищенко вычислил градиенты интегралов (10) в точке

$$\sum_{i>1} E_1 \wedge E_i + \sum_{k>1} E_{2k-1} \wedge E_{2k}.$$

Сходным образом мы рассмотрим градиенты в точке

$$M_0 = \sum_i E_i \wedge E_{i+1}. \tag{25}$$

При этом, пользуясь условием (15), выполним перестановку элементов a_i матрицы A таким образом, чтобы $M_0 \in \mathfrak{v}$. Отметим, что перестановка диагональных элементов матрицы A ведёт к эквивалентной задаче. Для новой матрицы A сохраним то же обозначение.

Рассмотрим векторные подпространства (рис. 1)

$$\begin{aligned} &W_k = \operatorname{span}\{E_1 \wedge E_{2k}, E_2 \wedge E_{2k+1}, \ldots\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], \\ &V_k = \operatorname{span}\{E_1 \wedge E_{2k+1}, E_2 \wedge E_{2k+2}, \ldots\}, \\ &\mathfrak{v}_k = V_k \cap \mathfrak{v}, \quad k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right] \end{aligned}$$

($V_{[n/2]} = 0$, если n чётно, и $V_{[n/2]} = \operatorname{span}\{E_1 \wedge E_n\}$, если n нечётно).

Из выражения для P_l^k в точке M_0 и формулы (22) выводим, что

$$P_l^k(M_0) \in W_1 \oplus \ldots \oplus W_k, \quad Q_l^k(M_0) \in \mathfrak{v}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{v}_k.$$

	W_1	V_1	W_2	V_2	W_3	V_3	W_4	V_4	
W_1	$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$
V_1		$so(n_1)$		$so(n_1)$					
W_2	$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$
V_2		$so(n_1)$		$so(n_1)$					
W_3	$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$
V_3						$so(n_2)$		$so(n_2)$	
W_4	$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$
V_4						$so(n_2)$		$so(n_2)$	
	$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$		$so(n_3)$

Рис. 1. Пример для $\mathfrak{so}(9) = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(5) \oplus \mathfrak{v}$. Имеем $\mathfrak{v} = W_1 \oplus \mathfrak{v}_1 \oplus W_2 \oplus \mathfrak{v}_2 \oplus W_3 \oplus \mathfrak{v}_3 \oplus W_4 \oplus \mathfrak{v}_4$, $\dim \mathfrak{v}_1 = 1$, $\dim \mathfrak{v}_2 = 2$, $\dim \mathfrak{v}_3 = 1$ и $\dim \mathfrak{v}_4 = 0$

Следовательно,

$$U_k(M_0) \subset \mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{v}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{v}_k. \tag{26}$$

В дополнение для набора чисел $(n_1, \ldots, n_r)$, $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_r$, $n_r \leqslant$ $\leqslant n_1 + \ldots + n_{r-1} + 1$, примем следующее допущение.

Предположение 1. Существует перестановка диагональных элементов матрицы A, расставляющая n_i элементов, равных α_i, на места с номерами $j_i, j_i + 2, \ldots, j_i + 2(n_i - 1)$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Здесь номер j_i соответствует первому появлению элемента, равного α_i.

Если предположение 1 выполнено, то $\mathfrak{so}(n)_A$ является подмножеством в $V_1 \oplus \ldots \oplus V_{[n/2]}$, а градиенты $P_l^k(M_0)$ содержатся в подпространстве $W_1 \oplus \ldots \oplus W_k \subset \mathfrak{v}$. Следовательно, $\mathrm{pr}_{\mathfrak{so}(n)_A} P_l^k(M_0) = 0$, и $Q_l^k(M_0) =$ $= [M_0, P_l^k(M_0)]$. Кроме того,

$$\dim \mathfrak{v}_k = \dim V_k - \delta_k = (n - 2k) - \delta_k, \quad \delta_k = \dim \mathfrak{so}(n)_A \cap V_k,$$

где

$$\begin{aligned} &\delta_k = \delta_{k,1} + \ldots + \delta_{k,r}, \quad \delta_{k,i} = \dim \mathfrak{so}(n_i) \cap V_k, \\ &\delta_{k,i} = n_i - k, \quad k = 1, \ldots, n_i - 1, \quad \delta_{k,i} = 0, \quad k \geqslant n_i. \end{aligned}$$

Пример 1. Если $n = 9$, $r = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 5$ (см. рис. 1), то описанная перестановка переводит матрицу

$$A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_3, \alpha_3, \alpha_3, \alpha_3),$$

в матрицу

$$A = \mathrm{diag}(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3).$$

С другой стороны, в случае $r = 3$, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$ предположение 1 не выполнено. При $n = 9$ это единственный пример, не удовлетворяющий предположению 1.

Легко вычисляются компоненты $S_{l,i}^k$ проекции $Q_l^k(M_0)$ на V_k:

$$\begin{aligned} &S_{1,i}^1 = \langle Q_1^1, E_i \wedge E_{i+2} \rangle = a_{i+2} - a_i, \\ &S_{2,i}^1 = \langle Q_2^1, E_i \wedge E_{i+2} \rangle = (a_{i+2} - a_i)(a_i + a_{i+1} + a_{i+2}), \\ &S_{3,i}^1 = \langle Q_3^1, E_i \wedge E_{i+2} \rangle = \\ &\quad = (a_{i+2} - a_i)(a_i a_{i+1} + a_i a_{i+2} + a_{i+1} a_{i+2} + a_i^2 + a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2), \\ &\ldots \\ &S_{1,i}^2 = \langle Q_1^2, E_i \wedge E_{i+4} \rangle = a_{i+4} - a_i, \\ &S_{2,i}^2 = \langle Q_2^2, E_i \wedge E_{i+4} \rangle = (a_{i+4} - a_i)(a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4}), \\ &S_{3,i}^2 = \langle Q_3^2, E_i \wedge E_{i+4} \rangle = (a_{i+4} - a_i) \sum_{i \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i+4} a_{i_1} a_{i_2}, \\ &\ldots \\ &S_{1,i}^3 = \langle Q_1^3, E_i \wedge E_{i+6} \rangle = a_{i+6} - a_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{2,i}^3 &= \langle Q_2^3, E_i \wedge E_{i+6} \rangle = \\
&= (a_{i+6} - a_i)(a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + a_{i+4} + a_{i+5} + a_{i+6}), \\
S_{3,i}^3 &= \langle Q_3^3, E_i \wedge E_{i+6} \rangle = (a_{i+6} - a_i) \sum_{i \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i+6} a_{i_1} a_{i_2}, \dots
\end{aligned}$$

Получается, что при

$$a_{j_i} = a_{j_i+2} = a_{j_i+4} = \ldots = a_{j_i+2(n_i-1)} = \alpha_i$$

$\delta_{k,i}$ столбцов $\big((n-2k)\times(n-2k)\big)$-матрицы S^k с номерами $j_i, j_i+2, j_i+4, \ldots,$ $j_i + 2(n_i - k - 1)$ оказываются нулевыми:

$$\begin{aligned}
&S_{1,j_i}^k = S_{2,j_i}^k = \ldots = S_{n-2k,j_i}^k = 0, \\
&S_{1,j_i+2}^k = S_{2,j_i+2}^k = \ldots = S_{n-2k,j_i+2}^k = 0, \\
&\ldots \\
&S_{1,j_i+2(n_i-k-1)}^k = S_{2,j_i+2(n_i-k-1)}^k = \ldots = S_{n-2k,j_i+2(n_i-k-1)}^k = 0.
\end{aligned}$$

Кроме того, ненулевые столбцы матрицы S^k линейно независимы. Отсюда следует, что ранг матрицы S^k равен $n - 2k - \delta_k$, и

$$\mathrm{pr}_{\mathfrak{v}_k}\big(U_k(M_0)\big) = \mathfrak{v}_k. \tag{27}$$

Таким образом, включение (26) становится равенством, и мы получаем соотношение (24):

$$\begin{aligned}
\dim U(M_0) = \sum_{k=1}^{[n/2]} \dim V_k - \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{n_i} (n_i - k) = \\
= \rho_{\mathfrak{so}(n)} - \left[\frac{n}{2}\right] - \sum_{i=1}^{r} \dim \mathfrak{so}(n_i) = \rho_{\mathfrak{v}} - \left[\frac{n}{2}\right].
\end{aligned}$$

Попутно мы доказали, что

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{v}}^0 = \left\{ p_l^k|_{\mathfrak{v}} \mid k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right],\ l = 0, 1, \ldots, n - 2k - \delta_k \right\} - \tag{28}$$

полный набор независимых интегралов.

Нами непосредственно было проверено, что полиномы (28) независимы даже в тех случаях, когда предположение 1 не выполняется. Тем не менее доказательство этого факта не столь изящно, и здесь нам более естественным кажется применение бигамильтонова подхода, как в [26].

Пример 2. Для случая, рассмотренного в примере 1, ограничения полиномов

$$p_0^1,\ p_1^1,\ p_0^2,\ p_1^2,\ p_2^2,\ p_0^3,\ p_1^3,\ p_0^4$$

на пространство $\mathfrak{v}$ дают полный коммутативный набор в $\mathbb{R}[\mathfrak{v}]^{\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(5)}$.

3.2. Сингулярный случай

Рассмотрим теперь случай, когда

$$n_r = n_1 + \ldots + n_{r-1} + s, \quad s > 1. \tag{29}$$

Пусть $n' = n - s$, и пусть $\mathfrak{so}(n') = \mathfrak{so}(n')_{A'} \oplus \mathfrak{v}'$ — ортогональное разложение, где A' — диагональная $(n' \times n')$-матрица, полученная из A удалением s элементов, равных α_r, а также содержащих их строк и столбцов. Тогда

$$\mathfrak{so}(n')_{A'} \cong \mathfrak{so}(n_1) \oplus \mathfrak{so}(n_2) \oplus \ldots \oplus \mathfrak{so}(n_{r-1}) \oplus \mathfrak{so}(n_r - s), \tag{30}$$

и условие (15) выполнено для алгебры $\mathfrak{so}(n')$ и матрицы A'. Поэтому если предположение 1 верно для набора $(n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r - s)$, то соответствующее множество $\mathcal{L}^0_{\mathfrak{v}'}$, определяемое по (28), будет полным коммутативным набором на $\mathfrak{v}'$. С другой стороны, из второй части доказательства теоремы 4 в [17] имеем, что

$$\rho_{\mathfrak{v}} = \rho_{\mathfrak{v}'}.$$

Таким образом, набор полиномов $\mathcal{L}^0_{\mathfrak{v}'}$ является полным коммутативным набором на $\mathfrak{v}$, вместо ограничений $p_l^k|_{\mathfrak{v}'}$ нужно взять ограничения $p_l^k|_{\mathfrak{v}}$.

Итак, мы доказали полноту интегралов Манакова для однородных пространств вида $\mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n_1) \times \ldots \times \mathrm{SO}(n_r)$, где числа $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_r$ удовлетворяют одному из следующих условий:

— $n_r \leqslant n_1 + \ldots + n_{r-1} + 1$ и для набора $(n_1, \ldots, n_r)$ выполнено предположение 1;

— $n_r = n_1 + \ldots + n_{r-1} + s$, $s > 1$ и для набора $(n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r - s)$ верно предположение 1.

В частности, если все собственные значения матрицы A различны, то $\mathfrak{v} = \mathfrak{so}(n)$ и интегралы p_l^k функционально независимы. В этом случае сказанное выше можно понимать как упрощённый вариант теоремы Мищенко—Фоменко о полноте полиномов на нормальных подалгебрах комплексных полупростых алгебр Ли [10].

Работа выполнена при поддержке Министерства науки Сербии (проект № 174020 «Геометрия и топология многообразий, классическая механика и интегрируемые динамические системы»). Мы признательны С. С. Николаенко за перевод статьи на русский язык и за исправление нескольких опечаток.

Литература

[1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1974.

[2] Болсинов А. В. Согласованные скобки Пуассона и полнота семейств функций в инволюции // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 1. — С. 68—92.

[3] Болсинов А. В. Полные инволютивные наборы полиномов в пуассоновых алгебрах: доказательство гипотезы Мищенко—Фоменко // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. — 2005. — Вып. 26. — С. 87—109.

[4] Болсинов А. В., Йованович Б. Интегрируемые геодезические потоки на однородных пространствах // Матем. сб. — 2001. — Т. 92, № 7. — С. 21—40.

[5] Дикий Л. А. Замечание о гамильтоновых системах, связанных с группой вращений // Функц. анализ и его прил. — 1972. — Т. 6, № 4. — С. 83—84.

[6] Дубровин Б. А. Конечнозонные линейные дифференциальные операторы и абелевы многообразия // УМН. — 1976. — Т. 31, № 4. — С. 259—260.

[7] Дубровин Б. А. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия // Функц. анализ и его прил. — 1977. — Т. 11, № 4. — С. 28—41.

[8] Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твёрдого тела // Функц. анализ и его прил. — 1976. — Т. 10, № 4. — С. 93—94.

[9] Мищенко А. С. Интегралы геодезических потоков на группах Ли // Функц. анализ и его прил. — 1970. — Т. 4, № 3. — С. 73—77.

[10] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396—415.

[11] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщённый метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 2. — С. 46—56.

[12] Нехорошев Н. Н. Переменные действие-угол и их обобщения // Тр. ММО. — 1972. — Т. 26. — С. 181—198.

[13] Садэтов С. Т. Доказательство гипотезы Мищенко—Фоменко // Докл. РАН. — 2004. — Т. 397, № 6. — С. 751—754.

[14] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых систем дифференциальных уравнений. — М.: Факториал, 1995.

[15] Bolsinov A. V., Jovanović B. Non-commutative integrability, moment map and geodesic flows // Ann. Global Anal. Geom. — 2003. — Vol. 23, no. 4. — P. 305—322.

[16] Bolsinov A. V., Jovanović B. Complete involutive algebras of functions on cotangent bundles of homogeneous spaces // Math. Z. — 2004. — Vol. 246, no. 1-2. — P. 213—236.

[17] Dragović V., Gajić B., Jovanović B. Singular Manakov flows and geodesic flows of homogeneous spaces of $\mathrm{SO}(n)$ // Transform. Groups. — 2009. — Vol. 14, no. 3. — P. 513—530.

[18] Dragović V., Gajić B., Jovanović B. Systems of Hess—Appel'rot type and Zhukovskii property // Int. J. Geom. Methods Modern Phys. — 2009. — Vol. 6, no. 8. — P. 1253—1304.

[19] Fedorov Yu. N. Integrable flows and Bäcklund transformations on extended Stiefel varieties with application to the Euler top on the Lie group SO(3) // J. Nonlinear Math. Phys. — 2005. — Vol. 12, Suppl. 2. — P. 77—94.

[20] Fedorov Yu. N., Kozlov V. V. Various aspects of n-dimensional rigid body dynamics // Dynamical Systems in Classical Mechanics. — Providence: Amer. Math. Soc., 1995. — (Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2; Vol. 168). — P. 141—171.

[21] Frahm F. Über gewisse Differentialgleichungen // Math. Ann. — 1874. — Vol. 8. — P. 35—44.

[22] Jovanović B. Integrability of invariant geodesic flows on n-symmetric spaces // Ann. Global Anal. Geom. — 2010. — Vol. 38. — P. 305—316.

[23] Jovanović B. Geodesic flows on Riemannian g.o. spaces // Regular Chaotic Dynam. — 2011. — Vol. 16, no. 5. — P. 504—513.

[24] Mykytyuk I. V. Actions of Borel subgroups on homogeneous spaces of reductive complex Lie groups and integrability // Compositio Math. — 2001. — Vol. 127, no. 1. — P. 55—67.

[25] Mykytyuk I. V., Panasyuk A. Bi-Poisson structures and integrability of geodesic flows on homogeneous spaces // Transform. Groups. — 2004. — Vol. 9, no. 3. — P. 289—308.

[26] Mykytyuk I. V. Integrability of geodesic flows for metrics on suborbits of the adjoint orbits of compact groups. — arXiv:1402.6526.

[27] Ratiu T. The motion of the free n-dimensional rigid body // Indiana Univ. Math. J. — 1980. — Vol. 29. — P. 609—629.

[28] Thimm A. Integrable geodesic flows on homogeneous spaces // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1981. — Vol. 1. — P. 495—517.