

Топологические инварианты эллиптических бильярдов и геодезических потоков эллипсоидов в пространстве Минковского

В. ДРАГОВИЧ

*Техасский университет в Далласе, США;
Математический институт
Сербской академии наук и искусств, Сербия
e-mail: vladimir.dragovic@utdallas.edu*

М. РАДНОВИЧ

*Школа математики и статистики
университета Сиднея, Австралия;
Математический институт
Сербской академии наук и искусств, Сербия
e-mail: milena.radnovic@sydney.edu.au, milena@mi.sanu.ac.rs*

УДК 517.938.5

Ключевые слова: пространство Минковского, эллиптический бильярд, геодезический поток, изоэнергетическая поверхность, граф Фоменко.

Аннотация

Описываются топологические свойства эллиптического бильярда на плоскости Минковского и геодезического потока эллипсоида в пространстве Минковского.

Abstract

V. Dragović, M. Radnović, Topological invariants for elliptical billiards and geodesics on ellipsoids in the Minkowski space, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 51–64.

We describe topological properties of the elliptical billiard in the Minkowski plane and geodesic motion on an ellipsoid in the Minkowski space.

*Посвящается Анатолию Тимофеевичу Фоменко
по случаю 70-летия*

1. Введение

По теореме Лиувилля—Арнольда динамика интегрируемых систем, ограниченных на инвариантные лиувиллевы торы, устроена всегда одинаково. Тем не

менее имеется богатое разнообразие интегрируемых систем, связанное с различием во взаимном расположении торов в фазовом многообразии. Это разнообразие существенно даже в случае двух степеней свободы. А. Т. Фоменко разработал эффективные инструменты, ныне широко известные под названием графов Фоменко, которые позволяют кодировать топологическую природу «упаковки» торов Лиувилля в фазовом многообразии для интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Изучение топологических инвариантов интегрируемых систем, начатое в [2, 8, 9, 17–19], было продолжено А. Т. Фоменко и его школой в нескольких направлениях (см. [1, 3], а также ссылки в этих работах).

В настоящей заметке рассматриваются две основные интегрируемые системы с двумя степенями свободы в пространстве Минковского: эллиптические бильярды на плоскости Минковского (т. е. двумерном пространстве Минковского) и движение по геодезическим на эллипсоиде в трёхмерном пространстве Минковского.

Геодезические на эллипсоиде в пространстве Минковского были исследованы в [20]. Геодезическим в псевдоевклидовых пространствах посвящена также работа [21], в которой для таких пространств введено понятие бильярда внутри эллипсов. Дальнейший вклад в изучение этих бильярдов, а также софокусных семейств квадрик внесён авторами в [14, 16].

Цель настоящей работы — топологическое описание в терминах графов Фоменко двух интегрируемых систем с двумя степенями свободы, возникших в ходе упомянутых исследований. Подробное изложение теории Фоменко можно найти в [2, 4, 11], а также приведённых там ссылках. В рамках этой теории графы соответствуют, как правило, компактным изоэнергетическим поверхностям, что в нашем случае не так: рассматриваемые в данной статье системы относятся к пространствам с псевдоримановой метрикой, а потому изоэнергетические поверхности некомпактны. В связи с этим мы применим топологический анализ по Фоменко к объекту иного сорта. Для построения этого объекта воспользуемся тем фактом, что поведение двух траекторий, лежащих на разных слоях в расслоённом фазовом пространстве, одинаково, если им соответствует одна и та же каустика, независимо от содержащих их изоэнергетических поверхностей. Это соответствие порождает отношение эквивалентности на фазовом пространстве, после факторизации по которому получаем компактное трёхмерное многообразие, расслоённое на торы и особые слои. Именно для описания этого многообразия и слоения на нём мы используем в данной работе графы Фоменко.

Пространством Минковского размерности n называется пространство \mathbf{R}^n со скалярным произведением сигнатуры $(n - 1, 1)$ (*скалярным произведением Минковского*):

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n. \quad (1)$$

Расстояние Минковского между точками x, y определяется как

$$\text{dist}(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Заметим, что поскольку скалярное произведение может быть отрицательным, то расстояние Минковского может принимать и мнимые значения. В этом случае значение квадратного корня будем выбирать так, чтобы оно имело положительную мнимую часть.

Вектор v называется

- *пространственноподобным*, если $\langle v, v \rangle > 0$;
- *временноподобным*, если $\langle v, v \rangle < 0$;
- *светоподобным*, если $\langle v, v \rangle = 0$.

Два вектора x, y *ортогональны* в пространстве Минковского, если $\langle x, y \rangle = 0$. Отметим, что светоподобный вектор ортогонален самому себе.

Пространства Минковского, как геометрическая основа общей теории относительности, занимают особое место в науке [6].

2. Эллиптический бильярд на плоскости Минковского

В этом разделе мы даём обзор свойств софокусных семейств коник и связанных с ними бильярдных движений на плоскости Минковского (т. е. двумерном пространстве Минковского). Более подробные сведения можно найти в [14, 15].

Сначала в разделе 2.1 вводится понятие софокусных семейств коник на плоскости Минковского. Затем в разделе 2.2 даётся определение бильярдного отражения и приводятся его основные свойства. Наконец, в разделе 2.3 описываются топологические свойства бильярдного движения в эллипсе.

2.1. Софокусные семейства коник

Рассмотрим на плоскости эллипс

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1, \quad (2)$$

где a и b — фиксированные положительные числа. Ассоциированное с ним семейство софокусных коник задаётся следующим образом:

$$\mathcal{C}_\lambda: \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} = 1, \quad \lambda \in \mathbf{R}. \quad (3)$$

Это семейство показано на рис. 1.

В семействе (3) можно выделить три подсемейства:

- при $\lambda \in (-b, a)$ коника \mathcal{C}_λ является эллипсом;
- при $\lambda < -b$ коника \mathcal{C}_λ — гипербола, у которой ось x действительная;
- при $\lambda > a$ коника \mathcal{C}_λ снова гипербола, но её действительной осью является ось y .

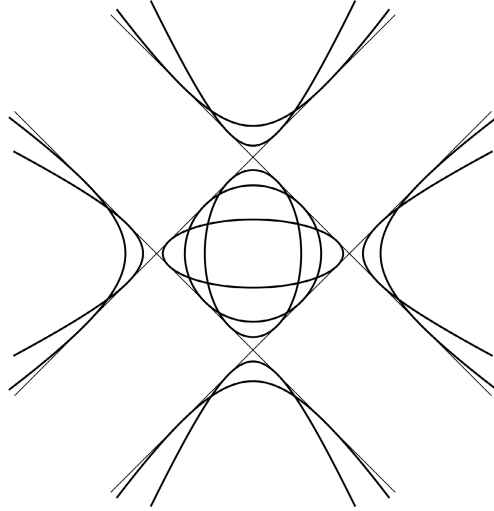


Рис. 1. Семейство софокусных коник на плоскости Минковского

Более того, имеется три вырожденных квадрики: C_a , C_{-b} и C_∞ , отвечающие оси y , оси x и прямой на бесконечности соответственно.

Более подробное описание семейства софокусных коник на плоскости Минковского можно найти в [10].

С каждым софокусным семейством коник ассоциированы четыре различные прямые — общие касательные всех коник семейства. Для семейства (3) эти прямые задаются следующим образом:

$$\begin{aligned} x + y &= \sqrt{a + b}, & x + y &= -\sqrt{a + b}, \\ x - y &= \sqrt{a + b}, & x - y &= -\sqrt{a + b}. \end{aligned}$$

Две пары несмежных вершин четырёхугольника, образуемого этими прямыми, являются фокусами данного софокусного семейства.

Геометрические свойства коник на плоскости Минковского аналогичны таковым на евклидовой плоскости. А именно, для каждой точки на конике C_λ сумма или разность её расстояний (в смысле Минковского) до пары фокусов, лежащих на пространственноподобной оси, равна $2\sqrt{a - \lambda}$. Аналогично сумма или разность расстояний от этой точки до пары фокусов на времениподобной оси равна $2\sqrt{-b - \lambda}$ [14].

2.2. Биллиардное отражение на плоскости Минковского

Пусть v — вектор и p — прямая на плоскости Минковского. Разложим вектор v в сумму $v = a + n_p$ вектора a , принадлежащего прямой p , и вектора n_p , ортогонального p . Тогда вектор $v' = a - n_p$ назовём *биллиардным отражением*

вектора v от прямой p . Легко убедиться, что вектор v также является бильярдным отражением вектора v' от p . Кроме того, так как $\langle v, v \rangle = \langle v', v' \rangle$, то векторы v и v' имеют один и тот же тип.

Отметим, что $v = v'$, если вектор v содержится в прямой p , и $v' = -v$, если он ортогонален p . Если вектор n_p светоподобен (а значит, лежит на прямой p), то в этом случае отражение не определено.

Прямую ℓ' назовём *бильярдным отражением* прямой ℓ от гладкой кривой \mathcal{S} , если точка их пересечения $\ell \cap \ell'$ принадлежит кривой \mathcal{S} , а направляющие векторы прямых ℓ, ℓ' являются отражениями друг друга от касательной к \mathcal{S} в этой точке. Прямые, содержащие отрезки данной бильярдной траектории внутри кривой \mathcal{S} , имеют один и тот же тип: они все либо пространственноподобные, либо времениподобные, либо светоподобные.

Пусть теперь кривая \mathcal{S} является эллипсом \mathcal{E} . Тогда можно доопределить отражение в тех точках, в которых направляющий вектор касательной светоподобен. А именно, в окрестности этих точек отражение устроено таким образом, что в пределе бильярдная частица после столкновения с границей продолжает движение в строго противоположном направлении. Таким образом, в особых точках полагаем, что векторы при отражении переходят в противоположные, т. е. $v' = -v$ и $\ell' = \ell$. Поскольку на близких траекториях бильярдная частица успевает отразиться от границы два раза, то естественно считать, что и в рассматриваемых точках отражение происходит дважды. Подробности можно найти в [21].

Бильярдные траектории внутри эллипсов на плоскости Минковского обладают каустическим свойством: каждый прямолинейный отрезок фиксированной траектории касается одной и той же коники, софокусной с границей бильярда (см. [14]).

Известно также фокальное свойство: если прямая, содержащая некоторый отрезок данной траектории внутри эллипса из семейства (3), проходит через фокус семейства, то прямая, содержащая следующий отрезок, проходит через второй фокус (из соответствующей пары фокусов).

2.3. Топологические свойства эллиптических бильярдov

В этом разделе мы даём топологическое описание эллиптического бильярда на плоскости Минковского. Для этой цели мы используем инварианты Фоменко (см. [4], а также ссылки в этой книге).

Пусть \mathcal{D} — конфигурационное пространство бильярда, т. е. множество всех точек внутри эллипса \mathcal{E} с уравнением (2), а также на самом эллипсе. Введём на $\mathcal{D} \times \mathbf{S}^1$ отношение эквивалентности \sim по следующему правилу:

$$(A, v) \sim (A, v') \iff A \in \mathcal{E}$$

и векторы v, v' переходят друг в друга при отражении от \mathcal{E} .

Каждой билиардной траектории внутри эллипса отвечает естественным образом траектория в $\mathcal{D} \times \mathbf{S}^1/\sim$. Кроме того, это соответствие индуцирует проекцию фазового пространства билиарда на $\mathcal{D} \times \mathbf{S}^1/\sim$, сохраняющую билиардные траектории и слои слоения Лиувилля.

Теорема 2.1. *Многообразие $\mathcal{D} \times \mathbf{S}^1/\sim$ с билиардным потоком представляется графом Фоменко, изображённым на рис. 2.*

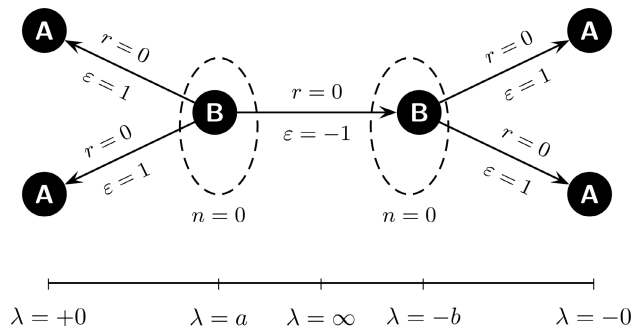


Рис. 2. Граф Фоменко для эллиптического билиарда на плоскости Минковского

Доказательство. Каждое множество уровня на многообразии $\mathcal{D} \times \mathbf{S}^1/\sim$ отвечает билиардному движению с постоянной каустикой \mathcal{C}_λ , $\lambda \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

При $\lambda \notin \{0, a, -b\}$ множества уровня регулярны. Если каустика является гиперболой (т. е. в случае $\lambda \in (a, +\infty) \cup (-\infty, -b) \cup \{\infty\}$), множество уровня — тор. Если же $\lambda \in (0, a) \cup (-b, 0)$, а каустика — эллипс, то множество уровня — несвязное объединение двух торов.

Если $\lambda = -b$, то множество уровня состоит из одной периодической траектории, расположенной вдоль оси y , и гомоклинических траекторий, естественным образом сгруппированных в два сепаратрисных многообразия. Проекция каждого из последних лежит по соответствующую сторону оси y . Аналогичное утверждение с заменой оси y на ось x имеет место и для множества уровня, отвечающего значению $\lambda = a$. Эти два множества уровня представлены на рис. 2 атомом Фоменко типа B .

Рассмотрим теперь предельный случай $\lambda = 0$, когда каустика совпадает с границей конфигурационного пространства билиарда. В этом случае движение будет происходить на четырёх дугах эллипса \mathcal{E} с концами в точках касания четырёх общих касательных софокусного семейства (3). Более точно, если λ стремится к нулю снизу, то предельное движение будет иметь место на двух дугах слева и справа от оси y ; если же λ приближается к нулю сверху, то предельное движение будет иметь место на двух дугах сверху и снизу от оси x . Четыре периодические траектории, возникающие в пределе $\lambda = 0$, отвечают A -атомам на рис. 2. \square

Соответствующий анализ для евклидова случая был проведён в [5] (см. также [7] о бильярдах внутри софокусных парабол).

3. Топология геодезического движения на эллипсоиде в трёхмерном пространстве Минковского

3.1. Софокусные квадрики в трёхмерном пространстве Минковского

Рассмотрим в трёхмерном пространстве Минковского эллипсоид

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1, \quad a > b > 0, \quad c > 0. \quad (4)$$

С ним ассоциировано семейство софокусных квадрик

$$\mathcal{Q}_\lambda: \frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1 \quad (5)$$

(рис. 3).

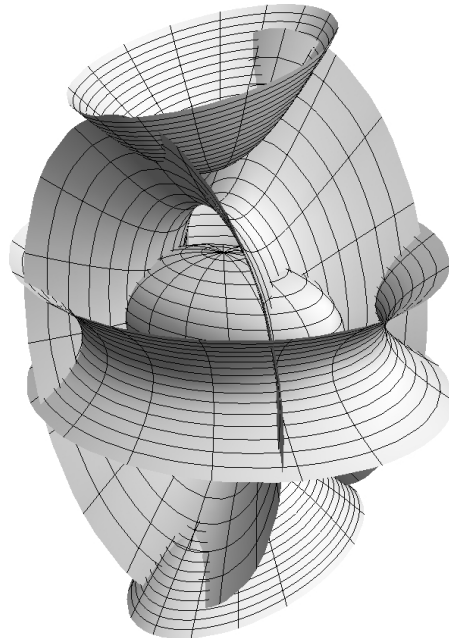


Рис. 3. Софокусные квадрики в трёхмерном пространстве Минковского

Семейство (5) содержит четыре геометрических типа квадрик:

- однополостные гиперболоиды, ориентированные вдоль оси z , при $\lambda \in (-\infty, -c)$;
- эллипсоиды при $\lambda \in (-c, b)$;
- однополостные гиперболоиды, ориентированные вдоль оси y , при $\lambda \in (b, a)$;
- двуполостные гиперболоиды, ориентированные вдоль оси z , при $\lambda \in (a, +\infty)$.

Кроме того, имеются четыре вырожденные квадрики $\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b, \mathcal{Q}_{-c}, \mathcal{Q}_\infty$, соответствующие плоскостям $x = 0, y = 0, z = 0$ и плоскости на бесконечности. В координатных плоскостях выделим также следующие коники:

- гиперболу

$$C_a^{yz}: -\frac{y^2}{a-b} + \frac{z^2}{c+a} = 1$$

в плоскости $x = 0$;

- эллипс

$$C_b^{xz}: \frac{x^2}{a-b} + \frac{z^2}{c+b} = 1$$

в плоскости $y = 0$;

- эллипс

$$C_{-c}^{xy}: \frac{x^2}{a+c} + \frac{y^2}{b+c} = 1$$

в плоскости $z = 0$.

3.2. Свойства геодезических

В этом разделе мы рассмотрим геодезический поток эллипсоида \mathcal{E} , задаваемого уравнением (4).

Индукированная метрика на \mathcal{E} вырождается вдоль двух кривых, называемых *тропическими кривыми* (рис. 4). Эти кривые являются пересечением эллипсоида с конусом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}.$$

Тропические кривые делят эллипсоид на три части: индуцированная метрика оказывается римановой на «шапочках», в то время как на поясе между ними она псевдориманова (т. е. метрика Минковского).

В [20] было показано, что предельное направление геодезической, приближающейся к тропической линии, является светоподобным. Таким образом, все геодезические с общей предельной точкой на тропической кривой касаются друг друга в этой точке.

Каждая касательная к данной геодезической касается, кроме эллипса \mathcal{E} , в точности одной квадрики из софокусного семейства (5). Эту квадрику будем называть *каустикой* данной геодезической.

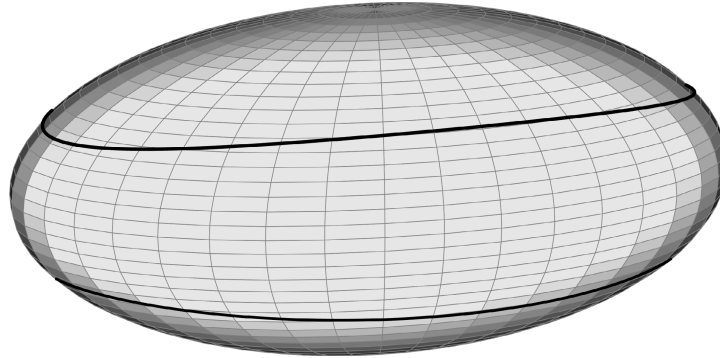


Рис. 4. Тропические кривые на эллипсоиде

Следует отметить, что слои слоения Лиувилля в фазовом пространстве некомпактны: каждый слой, отвечающий каустике с параметром $\lambda \notin \{a, b, -c\}$, является объединением нескольких открытых цилиндров. Для компактификации слоёв добавим предельные точки геодезических и продолжим последние таким образом, чтобы отражённая от тропической кривой геодезическая имела ту же самую каустическую. Тем самым соответствующие пары цилиндрических слоёв склеиваются в тор.

Заметим, что каждая геодезическая целиком расположена внутри одной из трёх частей эллипсоида. Подробное объяснение поведения геодезических вблизи тропических линий можно найти в [20].

Каждая геодезическая является либо пространственноподобной, либо времениподобной, либо светоподобной, причём последние два случая могут иметь место лишь на поясе между тропическими кривыми.

3.3. Топология геодезического потока

Теорема 3.1. *Расслоённое многообразие, отвечающее геодезическому потоку эллипсоида \mathcal{E} с уравнением (4) в пространстве Минковского, представлено графом Фоменко на рис. 5.*

Доказательство. Случай 1. Геодезические внутри тропических кривых.

Внутри «шапочек» на эллипсоиде \mathcal{E} каустики \mathcal{Q}_λ геодезических удовлетворяют условию $\lambda \in (0, a]$, т. е. каустика может быть

- эллипсоидом из семейства (5), пересекающим \mathcal{E} внутри «шапочки»;
- однополостным гиперболоидом, ориентированным вдоль оси y ;
- вырожденной квадрикой \mathcal{Q}_b ;
- вырожденной квадрикой \mathcal{Q}_a .

Если каустика \mathcal{Q}_λ является эллипсоидом, то соответствующие геодезические расположены в кольце между каустикой и тропической кривой. В зависимо-

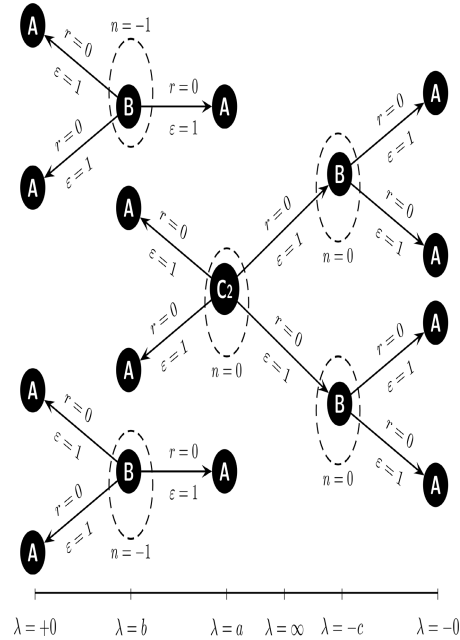


Рис. 5. Граф Фоменко для геодезического потока эллипсоида в пространстве Минковского

сти от направления обмотки вокруг оси z они принадлежат одному из двух семейств.

Когда λ стремится к нулю, кольцо стягивается к тропической линии и пределом геодезического потока служит траектория вдоль тропической кривой. Эти предельные потоки представлены на рис. 5 как **A**-атомы, соответствующие значению $\lambda = +0$. Таких атома четыре, поскольку имеем две тропические кривые и два направления движения вдоль них.

При $\lambda = b$ имеется одна замкнутая геодезическая, лежащая в пересечении с плоскостью $y = 0$. Но существуют также геодезические, проходящие попеременно через две точки пересечения квадрики C_b^{xz} с эллипсоидом \mathcal{E} и асимптотически приближающиеся к особой геодезической.

При $\lambda \in (b, a)$ геодезические расположены между двумя кривыми, служащими пересечением эллипсоида \mathcal{E} с каустикой \mathcal{Q}_λ . Когда λ стремится к a , геодезические приближаются к замкнутой траектории, расположенной в пересечении \mathcal{E} с плоскостью $x = 0$.

Случай 2. Геодезические между тропическими кривыми.

Рассмотрим теперь геодезические в кольце между двумя тропическими кривыми. Каустика \mathcal{Q}_λ такой геодезической удовлетворяет условию $\lambda \in (-\infty, 0) \cup [b, +\infty)$, а потому она может быть

- эллипсоидом, пересекающим \mathcal{E} в области между двумя тропическими линиями;
- гиперboloидом из семейства (5) любого из трёх типов;
- любой из вырожденных квадрик $\mathcal{Q}_a, \mathcal{Q}_b, \mathcal{Q}_{-c}, \mathcal{Q}_\infty$.

При $\lambda \in (-c, 0)$ каустика является эллипсоидом и пересекает \mathcal{E} между тропическими кривыми. Соответствующие геодезические пространственноподобны и лежат в двух непересекающихся кольцах.

Такие геодезические составляют четыре семейства: каждое семейство соответствует одному из колец и одному из направлений обмотки вокруг оси z . Когда λ стремится к нулю, геодезический поток «сползает» на тропические кривые. Этот предельный поток представлен на рис. 5 четырьмя \mathbf{A} -атомами, соответствующими значению $\lambda = -0$.

При $\lambda = -c$ имеем две замкнутые геодезические; обе лежат на экваторе $z = 0$ эллипсоида \mathcal{E} . Каждой из них соответствуют два семейства гомоклинических траекторий: одно над экватором и другое под ним. Каждая из этих гомоклинических траекторий имеет ровно одну общую точку с тропической кривой, находящейся по ту же сторону от экватора.

При $\lambda < -c$ каустики представляют собой однополостные гиперboloиды, ориентированные вдоль оси z . Геодезические по-прежнему пространственноподобны. Геодезический поток монотонен по координате z между тропическими кривыми, на которых он меняет направление. Каждая траектория обматывает ось z в одном и том же направлении, а потому множество геодезических распадается на два семейства.

При $\lambda = \infty$ каустика является вырожденной квадрикой \mathcal{Q}_∞ . Геодезические светоподобны, и их поведение качественно такое же, как и в случае $\lambda < -c$.

При $\lambda > a$ каустики представляют собой двуполостные гиперboloиды, ориентированные вдоль оси z . Геодезические времениподобны, но их поведение по-прежнему качественно не отличается от случаев $\lambda < -c$ и $\lambda = \infty$.

Таким образом, все геодезические с каустиками \mathcal{Q}_λ , где $\lambda \in (a, \infty) \cup \{\infty\} \cup (-\infty, -c)$, принадлежат двум однопараметрическим семействам торов Лиувилля в фазовом пространстве. Каждое из этих двух семейств характеризуется тем, что геодезические в нём обматываются вокруг оси z в фиксированном направлении. При этом торы Лиувилля, отвечающие светоподобным геодезическим, разделяют пространственноподобный и времениподобный потоки.

При $\lambda = a$ имеем две замкнутые геодезические, лежащие в пересечении плоскости $x = 0$ с кольцом между тропическими кривыми, а также четыре сепаратрисных многообразия. Каждое из многообразий находится по одну сторону плоскости $x = 0$ и содержит геодезические, являющиеся гетероклиническими по отношению к двум периодическим траекториям.

При $\lambda \in (b, a)$ каустики являются однополостными гиперboloидами, ориентированными вдоль оси y . Они делят кольцо между тропическими кривыми на четыре части, но геодезические имеются только в тех двух из них, которые пересекают ось x . Геодезические при этом времениподобны.

В пределе $\lambda \rightarrow b$ поток вырождается в две замкнутые геодезические, находящиеся в пересечении кольца с плоскостью $y = 0$. \square

Замечание 3.2. Геодезический поток внутри каждой «шапочки» на эллипсоиде \mathcal{E} топологически эквивалентен бильярдному движению внутри эллипса на евклидовой плоскости (см. [5, 12, 13]). Действительно, в пределе $c \rightarrow 0$ кольцо между тропическими кривыми исчезает, и геодезический поток становится бильярдным потоком внутри эллипса на евклидовой плоскости.

Замечание 3.3. При $b \rightarrow 0$ пределом геодезического потока является бильярд внутри эллипса на плоскости Минковского. Соответствующий граф Фоменко на рис. 2 получается из наибольшей связной компоненты рис. 5 отождествлением по симметрии относительно плоскости $y = 0$.

Замечание 3.4. Между типами каустик и типами геодезических имеется следующее соответствие:

- однополостные гиперboloиды, ориентированные вдоль оси z ($\lambda \in (-\infty, -c)$), и эллипсоиды, пересекающие \mathcal{E} между тропическими кривыми ($\lambda \in (-c, 0)$), служат каустиками пространственноподобных геодезических, расположенных между тропическими кривыми;
- эллипсоиды, пересекающие \mathcal{E} внутри тропических линий ($\lambda \in (0, b)$), являются каустиками для пространственноподобных геодезических на «шапочках»;
- однополостные гиперboloиды, ориентированные вдоль оси y ($\lambda \in (b, a)$), являются каустиками как для пространственноподобных геодезических на «шапочках», так и для времениподобных геодезических между тропическими кривыми;
- двуполостные гиперboloиды ($\lambda \in (a, +\infty)$) служат каустиками времениподобных геодезических между тропическими кривыми.

В течение многих лет авторы пользуются счастливой возможностью поддерживать научные и дружеские контакты со школой академика РАН А. Т. Фоменко. Пользуясь случаем, они желают Анатолию Тимофеевичу дальнейших успехов и много новых замечательных студентов.

Исследование, лежащее в основе данной работы, частично поддержано Министерством образования и науки Сербии (проект № 174020 «Геометрия и топология многообразий и интегрируемых динамических систем») и грантом Австралийского совета по научным исследованиям № FL120100094. Авторы благодарны Алексею Болсинову за ценные замечания.

Литература

- [1] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН. — 2010. — Т. 65, № 2. — С. 71–132.

- [2] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. — 1990. — Т. 45, № 2. — С. 49–77.
- [3] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Геодезический поток эллипсоида траекторно эквивалентен интегрируемому случаю Эйлера в динамике твёрдого тела // Докл. РАН. — 1994. — Т. 339, № 3. — С. 293–296.
- [4] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. — Ижевск: Удмуртский унив., 1999.
- [5] Драгович В., Раднович М. Интегрируемые бильярды и квадрики // УМН. — 2010. — Т. 65, № 2. — С. 133–194.
- [6] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
- [7] Фокичева В. В. Классификация бильярдных движений в областях, ограниченных софокусными параболами // Матем. сб. — 2014. — Т. 205, № 8. — С. 139–160.
- [8] Фоменко А. Т. Качественная геометрическая теория интегрируемых систем, классификация изоэнергетических поверхностей и бифуркаций торов Лиувилля при критических значениях энергии // Геометрия и теория особенностей в нелинейных уравнениях. Новое в глобальном анализе. — Воронеж: Изд-во Воронежского ун-та, 1987. — С. 118–139.
- [9] Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, № 4. — С. 38–51.
- [10] Birkhoff G., Morris R. Confocal conics in space-time // Amer. Math. Month. — 1962. — Vol. 69, no. 1. — P. 1–4.
- [11] Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Singularities of integrable Hamiltonian systems // Topological Methods in the Theory of Integrable Systems. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2006. — P. 1–67.
- [12] Dragović V., Radnović M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards // Regul. Chaotic Dynam. — 2009. — Vol. 14, no. 4-5. — P. 479–494.
- [13] Dragović V., Radnović M. Poncelet Porisms and Beyond. — Basel: Birkhäuser, 2011.
- [14] Dragović V., Radnović M. Ellipsoidal billiards in pseudo-Euclidean spaces and relativistic quadrics // Adv. Math. — 2012. — Vol. 231. — P. 1173–1201.
- [15] Dragović V., Radnović M. Minkowski plane, confocal conics, and billiards // Publ. Inst. Math. (Beograd). — 2013. — Vol. 94 (108). — P. 17–30.
- [16] Dragović V., Radnović M. Bicentennial of the Great Poncelet Theorem (1813–2013): Current advances // Bull. Amer. Math. Soc. — 2014. — Vol. 51, no. 3. — P. 373–445.
- [17] Fomenko A. T. Invariant portrait of Hamiltonian integrable in Liouville sense // Topology and Geometry — Rohlin Seminar. — Berlin: Springer, 1988. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1346). — P. 57–76.
- [18] Fomenko A. T. List of all integrable Hamiltonian systems of general type with two degrees of freedom. “Physical zone” in this table // Integrable and Superintegrable Systems. — Teaneck: World Sci., 1990. — P. 134–164.
- [19] Fomenko A. T. Topological classification of all integrable Hamiltonian differential equations of general type with two degrees of freedom // The Geometry of Hamiltonian Systems (Berkeley, CA, 1989). — New York: Springer, 1991. — (Math. Sci. Res. Inst. Publ.; Vol. 22). — P. 131–339.

- [20] Genin D., Khesin B., Tabachnikov S. Geodesics on an ellipsoid in Minkowski space // Enseign. Math. — 2007. — Vol. 53. — P. 307—331.
- [21] Khesin B., Tabachnikov S. Pseudo-Riemannian geodesics and billiards // Adv. Math. — 2009. — Vol. 221. — P. 1364—1396.