Степень компактных многозначных возмущений фредгольмовых отображений положительного индекса и её приложение к одной задаче оптимального управления*

В. Г. ЗВЯГИН
Воронежский государственный университет
e-mail: zvg_vsu@mail.ru

УДК 515.126.4

Ключевые слова: фредгольмовы отображения положительного индекса, многозначные возмущения, степень отображений, оптимальная задача с обратной связью.

Аннотация

Ранее была построена топологическая характеристика типа степени для многозначных возмущений фредгольмовых отображений нулевого индекса, при этом предполагалось, что многозначное возмущение допускает однозначную аппроксимацию. В настоящей работе аналогичная характеристика строится для многозначных возмущений фредгольмовых отображений положительного индекса и указывается приложение к проблеме существования оптимального решения для краевой задачи из теории обыкновенных уравнений с обратной связью.

Abstract

V. G. Zvyagin, The degree of compact multivalued perturbations of Fredholm mappings of positive index and its application to a certain optimal control problem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 65—87.

Earlier a topological characteristic of the degree type for multivalued perturbations of Fredholm mappings with zero index was constructed and it was assumed that the multivalued perturbation permits a single-valued approximation. In this paper, similar characteristic is constructed for multivalued perturbations of Fredholm mappings of positive index and its application is given to the problem of the existence of an optimal solution for the boundary-value problem in the theory of ordinary differential equations with feedback.

Введение

Топологическая характеристика типа степени для многозначных возмущений фредгольмовых отображений нулевого индекса была построена в [13] (см.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00041), РНФ (проект № 14-21-00066) и Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014—2016 годы (проект № 1.1539.2014/K).

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 2, с. 65—87.
© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

также [4, 14]), при этом предполагалось, что многозначное возмущение допускает однозначную аппроксимацию. В настоящей работе аналогичная характеристика строится для многозначных возмущений фредгольмовых отображений положительного индекса и указывается приложение к проблеме существования оптимального решения для краевой задачи из теории обыкновенных уравнений с обратной связью. Краткое содержание этой работы опубликовано в [5].

1. Основные понятия теории фредгольмовых отображений и фредгольмовых структур

Пусть E_1, E_2 — вещественные банаховы пространства. Обозначим через $L(E_1, E_2)$ пространство непрерывных линейных операторов $A\colon E_1 \to E_2$.

Определение 1.1. Линейный оператор $A \in L(E_1, E_2)$ называется фредгольмовым, если $\dim \operatorname{Ker} A < \infty$ и $\dim \operatorname{Coker} A < \infty$. Индексом фредгольмова оператора A называется число $\operatorname{ind} A = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A$.

Множество всех линейных фредгольмовых операторов $A \in L(E_1, E_2)$ индекса k будем обозначать $\Phi_k(E_1, E_2)$.

Пусть $U \subseteq E_1$ — открытое ограниченное множество, $\bar{U}$ — его замыкание.

Определение 1.2. C^1-гладкое отображение $F\colon U \to E_2$ называется фредгольмовым индекса k, если для любого $x \in U$ производная $D\,F(x)$ принадлежит $\Phi_k(E_1, E_2)$.

Через $\Phi_k C^1(U, E_2)$ будем обозначать совокупность всех (нелинейных) фредгольмовых отображений $F\colon U \to E_2$ индекса k.

Напомним, что отображение $F\colon \bar{U} \to E_2$ называется собственным, если прообраз $F^{-1}(K)$ является компактом для каждого компакта $K \subseteq E_2$.

Приведём теперь определение ориентированной степени компактных возмущений C^1-гладких собственных фредгольмовых отображений положительного индекса.

Пусть $\hat{X}$ — хаусдорфово паракомпактное топологическое пространство, $X \subset \hat{X}$ — его открытое подмножество, на котором задана структура C^1-гладкого банахова многообразия. Отметим, что $\hat{X} \setminus X$ может равняться, например, ∂X или $\varnothing$, так что мы охватываем одновременно случаи многообразия без края и с краем. Более того, граница ∂X может быть негладкой, т. е. не являться краем многообразия.

Рассмотрим непрерывное собственное отображение $F\colon \bar{X} \to E$, заданное на замыкании $\bar{X}$ и принимающее значения в банаховом пространстве E. Предположим, что его ограничение $F\colon X \to E$ на многообразии X есть C^1-гладкое фредгольмово отображение индекса $q \geqslant 0$. Для простоты мы рассматриваем отображения со значениями в банаховом пространстве, а не в банаховом многообразии.

Рассмотрим на многообразии X фредгольмову структуру, индуцированную отображением F из тривиальной фредгольмовой структуры на E (см. [6, теорема 3.6.1]). Обозначим эту структуру через X_Φ, она состоит из карт (U, φ), где $\varphi\colon U \subset X \to E \times \mathbb{R}^q$ — гомеоморфизм на открытое подмножество в $E \times \mathbb{R}^q$, $D(F \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(x)\big) = P + k(x)$, где $P\colon E \times \mathbb{R}^q \to E$ — проекция на первый сомножитель, а $k(x)$ — линейный вполне непрерывный оператор при каждом $x \in X$.

Пусть $y \in E \setminus F(\partial X)$. Обозначим $K = F^{-1}(y)$. Так как отображение $F\colon \bar{X} \to E$ собственное, множество K компактно и $K \cap \partial X = \varnothing$.

Если $K = \varnothing$, то положим

$$d(F, X_\Phi, y) = 0. \tag{1.1}$$

Для случая $K \neq \varnothing$ понадобится следующая теорема, доказательство которой можно найти, например, в [6, теорема 3.4.4].

Теорема 1.1. *Пусть $F\colon X \to E$ — C^1-фредгольмово отображение индекса $q \geqslant 0$. Пусть K — компактное подмножество в X. Тогда существуют такое разложение пространства $E = F^n \oplus F^{\infty-n}$, где F^n и $F^{\infty-n}$ — замкнутые подпространства банахова пространства E, подпространство F^n конечномерно, и такая открытая окрестность $\mathcal{O}(K)$ компактного множества K, что отображение F трансверсально подпространству F^n на множестве $\mathcal{O}(K)$.*

Выберем окрестность $\mathcal{O}(K)$ и разложение

$$E = F^n \oplus F^{\infty-n} \simeq F^n \times F^{\infty-n},$$

о которых идёт речь в теореме 1.1. Тогда $M^{n+q} = F^{-1}(F^n) \cap \mathcal{O}(K)$ — конечномерное подмногообразие в X_Φ размерности $n+q$. Если структура X_Φ ориентируемая и выбран её ориентированный податлас X_Φ^+, то подмногообразие M^{n+q} также ориентированное. Подмногообразие M^{n+q} имеет класс гладкости C^1, такой же, как у многообразия X. Без ограничения общности можно считать, что $K \subset M^{n+q}$ (если это не так, то вместо F^n мы всегда можем рассмотреть линейную оболочку множества $F^n \cup \{y\}$).

Заметим, что M^{n+q} является хаусдорфовым топологическим пространством как подпространство хаусдорфова пространства $\hat{X}$. Уменьшая, если нужно, окрестность $\mathcal{O}(K)$, можно считать, что M^{n+q} покрывается конечным числом карт. Из этого, в частности, вытекает, что многообразие M^{n+q} имеет счётную базу. Многообразие M^{n+q} не является, вообще говоря, компактным, но поскольку конечномерное евклидово пространство локально компактно и регулярно, то у каждой точки $x \in M^{n+q}$ можно выбрать такую окрестность V, что замыкание $\bar{V}$ компактно и

$$x \in V \subset \bar{V} \subset M^{n+q}, \tag{1.2}$$

а значит, существует открытая окрестность N^{n+q} компактного множества K в M^{n+q}, такая что замыкание $\bar{N}^{n+q}$ компактно и

$$K \subset N^{n+q} \subset \bar{N}^{n+q} \subset M^{n+q}. \tag{1.3}$$

Непрерывная функция $\|F(x) - y\|$ достигает на компактном множестве ∂N^{n+q} своего минимального значения, а поскольку множество $K = F^{-1}(y)$ целиком лежит в N^{n+q} и не пересекается с границей ∂N^{n+q}, то это минимальное значение положительно. Обозначим

$$\delta = \min_{x \in \partial N^{n+q}} \|F(x) - y\| > 0. \tag{1.4}$$

Поскольку конечномерное C^1-гладкое многообразие M^{n+q} хаусдорфово и имеет счётную базу, то по следствию из теоремы 4.8 в [7, с. 309] C^1-структура на M содержит C^∞-структуру.

Рассмотрим сужение отображения F на ориентированное конечномерное подмногообразие M^{n+q}

$$F|_{M^{n+q}} \colon M^{n+q} \to F^n, \tag{1.5}$$

будем называть его редуцированным отображением. Пусть число δ взято из условия (1.4), и пусть положительное число ε меньше δ. Аппроксимируем редуцированное отображение (1.5) C^∞-гладким отображением

$$F|_\varepsilon \colon M^{n+q} \to F^n$$

так, чтобы

$$\|F(x) - F_\varepsilon(x)\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in \bar{N}^{n+q}. \tag{1.6}$$

Тогда

$$\|F_\varepsilon(x) - y\| \geqslant \|F(x) - y\| - \|F_\varepsilon(x) - F(x)\| > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \partial N^{n+q}.$$

Без ограничения общности можно считать, что y является регулярным значением для отображения F_ε. Действительно, возьмём C^∞-гладкое отображение $F_{\varepsilon/2}$, которое является $(\varepsilon/2)$-аппроксимацией отображения F. По теореме Сарда множество регулярных значений отображения $F_{\varepsilon/2}$ всюду плотно, поэтому можно выбрать регулярное значение y_1 отображения $F_{\varepsilon/2}$ в $(\varepsilon/2)$-окрестности точки y. Тогда отображение $F_\varepsilon = F_{\varepsilon/2} + y - y_1$ является ε-аппроксимацией отображения F и y — регулярное значение для этого отображения. Прообраз регулярного значения y представляет собой замкнутое q-мерное подмногообразие в N^{n+q}, а значит, и в X. Обозначим

$$W^q = F_\varepsilon^{-1}(y).$$

Пусть $i \colon W^q \to X$ — тождественное вложение. Построим $\mathrm{GL_c}$-оснащение пары (W^q, i) в структуре X_Φ. Для этого зададим сначала оснащение q-мерного многообразия W^q в $(n+q)$-мерном многообразии N^{n+q}, а затем оснащение $(n+q)$-мерного многообразия N^{n+q} в структуре X_Φ.

Для C^r-отображения $F \colon X \to E$ $(r \geqslant 1)$ из многообразия X в пространство E дифференциал $D\,F \colon TX \to TE \simeq E \times E$ переводит касательный вектор $v \in T_x X$ в пару $(F(x), D\,F(x)v)$. Введём отображение $D^*F \colon TX \to X \times E$, которое переводит $v \in T_x X$ в пару $(x, D\,F(x)v)$. Очевидно, D^*F является C^{r-1}-морфизмом расслоений.

Поскольку y — регулярное значение для отображений F_ε, то для любого $x \in F^{-1}(y)$ дифференциал отображения F_ε в точке x представляет собой сюръективное линейное отображение

$$D\,F_\varepsilon(x)\colon T_xN^{n+q} \to T_yF^n = F^n.$$

Поскольку $W^q = F_\varepsilon^{-1}(y)$, то для $x \in W^q$ ядро отображения $D\,F_\varepsilon(x)$ совпадает с T_xW^q, а нормальное пространство $\mathcal{V}_xW^q_N$ к подмногообразию W^q в многообразии N^{n+q} изоморфно отображается на F^n. Поэтому D^*F_ε задаёт тривиализацию нормального расслоения

$$\xi_n = D^*F_\varepsilon|_{\mathcal{V}W^q_N}\colon \mathcal{V}W^q_N \to W^q \times F^n. \tag{1.7}$$

Поскольку конечномерное многообразие допускает гладкие разбиения единицы, то имеется разложение $TN^{n+q}|_{W^q} \simeq TW^q \oplus \mathcal{V}W^q_N$. Положим

$$\tau_n = I_{TW^q} \oplus \xi_n^{-1}\colon TW^q \oplus \underline{F}^n \to TW^q \oplus \mathcal{V}W^q_N \simeq TN^{n+q}|_{W^q}, \tag{1.8}$$

где $\underline{F}^n = W^q \times F^n$.

Аналогично построим бесконечномерную часть оснащения, т. е. $\mathrm{GL_c}$-оснащение N^{n+q} в структуре X_Φ. В силу трансверсальности $F \pitchfork_{\Omega(F^n)} F^n$ суперпозиция отображений

$$T_xX_\Phi \xrightarrow{D_xF} T_{F(x)}E \xrightarrow{p} T_{F(x)}E/T_{F(x)}F^n = E/F^n \simeq F^{\infty-n}$$

сюръективна, поэтому касательное пространство T_xN^{n+q}, которое совпадает с ядром суперпозиции, переводится в ноль, а нормальное пространство $\mathcal{V}N^{n+q}_X$ к подмногообразию N^{n+q} в структуре X_Φ изоморфно отображается на $F^{\infty-n}$. Следовательно, морфизм расслоений

$$\xi_{\infty-n} = D^*(PF)|_{\mathcal{V}N^{n+q}_X}\colon \mathcal{V}N^{n+q}_X \to N^{n+q} \times F^{\infty-n} \tag{1.9}$$

является изоморфизмом расслоений.

Поскольку в картах структуры X_Φ отображение F имеет вид $P + k(x)$, где $P\colon E \times \mathbb{R}^q \to E$ — проекция на первый сомножитель, а $k(x)$ — линейный компактный оператор при каждом x, то (1.9) — $\mathrm{GL_c}$-изоморфизм расслоений.

Зададим $\mathrm{GL_c}$-оснащение N^{n+q} в структуре X_Φ формулой

$$\tau_{\infty-n} = I_{TN} \oplus \xi_{\infty-n}^{-1}\colon TN^{n+q} \oplus \underline{F}^{\infty-n} \to TN^{n+q} \oplus \mathcal{V}N^{n+q}_X \simeq i^*(TX_\Phi). \tag{1.10}$$

Заметим, что здесь рассматривается многообразие N^{n+q} без края, так как нас будет интересовать только оснащение $\tau_{\infty-n}$ над W^q. Соединяя оснащения τ_n и $\tau_{\infty-n}$, получим $\mathrm{GL_c}$-оснащение пары (W^q, i) в структуре X_Φ:

$$\tau_W\colon TW^q \oplus \underline{E} = TW^q \oplus \underline{F}^n \oplus \underline{F}^{\infty-n} \xrightarrow{\tau_n \oplus I_{F^{\infty-n}}} TN^{n+q}|_{W^q} \oplus \underline{F}^{\infty-n} \xrightarrow{\tau_{\infty-n}} i^*(TX_\Phi). \tag{1.11}$$

Определение 1.3. Степенью $d(F, X_\Phi, y)$ отображения F в точке y назовём класс эквивалентности тройки (W^q, i, τ_W) в группе $\mathcal{F}_q(X_\Phi)$ — группе $\mathrm{GL_c}$-оснащённых бордизмов фредгольмовой структуры X_Φ (подробнее см. [15]), если $F^{-1}(y) \neq \varnothing$. Если же $F^{-1}(y) = \varnothing$, то положим степень $d(F, X_\Phi, y)$ равной нулевому элементу в $\mathcal{F}_q(X_\Phi)$.

2. Основные необходимые в дальнейшем понятия и факты из теории многозначных отображений

Пусть (X, d_X), (Z, d_Z) — метрические пространства.

Для подмножества A метрического пространства и $\varepsilon > 0$ мы обозначим через $O_\varepsilon(A)$ ε-окрестность подмножества A. Пусть $K(Z)$ обозначает совокупность всех непустых компактных подмножеств пространства Z.

Пусть даны многозначное отображение $\Sigma\colon X \multimap K(Z)$ и число $\varepsilon > 0$. Тогда непрерывное отображение $\sigma_\varepsilon\colon X \to Z$ ($\varepsilon > 0$ — произвольное число) называется ε-аппроксимацией отображения Σ, если для каждого $x \in X$ существует $x' \in O_\varepsilon(x)$, такое что $\sigma_\varepsilon(x) \in O_\varepsilon\big(\Sigma(x')\big)$, где через $O_\varepsilon(x)$ и $O_\varepsilon\big(\Sigma(x')\big)$ обозначены соответственно ε-окрестности точки x и множества $\Sigma(x')$. Это понятие можно эквивалентным образом задать как выполнение включения

$$\sigma_\varepsilon(x) \in O_\varepsilon\Big(\Sigma\big(O_\varepsilon(x)\big)\Big)$$

для всех $x \in X$ или как

$$\Gamma_{\sigma_\varepsilon} \subset O_\varepsilon(\Gamma_\Sigma),$$

где $\Gamma_{\sigma_\varepsilon}$, Γ_Σ — графики σ_ε и Σ соответственно, $O_\varepsilon(\Gamma_\Sigma)$ — ε-окрестность Γ_Σ и метрика в $X \times Z$ определяется естественным путём как

$$d\big((x,z),(x',z')\big) = \max\{d_X(x,x'), d_Z(z,z')\}.$$

Тот факт, что σ_ε есть ε-аппроксимация многозначного отображения Σ обозначается как $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma, \varepsilon)$.

Многозначное отображение $\Sigma\colon X \multimap K(Z)$ называется полунепрерывным сверху, если для каждого открытого множества $V \subset Z$ множество

$$\Sigma_+^{-1}(V) = \{x \in X\colon \Sigma(x) \subset V\}$$

открыто в X.

Суммируем некоторые свойства εcdf аппроксимаций в следующем утверждении (подробнее в [10]).

Предложение 2.1. *Пусть $\Sigma\colon X \multimap K(Z)$ — полунепрерывное сверху многозначное отображение. Имеют место следующие свойства.*

1. *Пусть X_1 — компактное подмножество X. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что включение $\sigma \in a(\Sigma, \delta)$ влечёт включение $\sigma|_{X_1} \in a(\Sigma|_{X_1}, \varepsilon)$.*
2. *Пусть X — компакт, Z_1 — метрическое пространство и $\varphi\colon Z \to Z_1$ — непрерывное отображение. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что из включения $\sigma \in a(\Sigma, \delta)$ следует включение $\varphi \circ \sigma \in a(\varphi \circ \Sigma, \varepsilon)$.*

3. *Пусть X — компакт и $\Sigma_*\colon X \times [0,1] \to K(Z)$ — полунепрерывное сверху мультиотображение. Тогда для каждых $\lambda \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что $\sigma_* \in a(\Sigma_*, \delta)$ влечёт, что $\sigma_*(\cdot, \lambda) \in a(\Sigma_*(\cdot, \lambda), \varepsilon)$.*
4. *Пусть Z_1 — метрическое пространство и $\Sigma_1\colon X \multimap K(Z_1)$ — полунепрерывное сверху мультиотображение. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что если $\sigma \in a(\Sigma, \delta)$ и $\sigma_1 \in a(\Sigma_1, \delta)$, то $\sigma \times \sigma_1 \in a(\Sigma \times \Sigma_1, \varepsilon)$, где $(\sigma \times \sigma_1)(x) = \sigma(x) \times \sigma_1(x)$, $(\Sigma \times \Sigma_1)(x) = \Sigma(x) \times \Sigma_1(x)$.*

В последующем мы будем использовать следующее важное свойство ε-аппроксимаций.

Предложение 2.2. *Пусть X, X', Z — метрические пространства. Пусть $F\colon X \to X'$ — непрерывное отображение, $\Sigma\colon X \multimap K(Z)$ — полунепрерывное сверху мультиотображение, $\varphi\colon Z \to X'$ — непрерывное отображение. Предположим, что $X_1 \subseteq X$ — такое компактное подмножество, что*

$$F(x) \notin \varphi \circ \Sigma(x), \quad x \in X_1. \tag{2.1}$$

Тогда если $\varepsilon > 0$ достаточно мало и $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma, \varepsilon)$, то

$$F(x) \notin \varphi \circ \sigma_\varepsilon(x), \quad x \in X_1.$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. что существуют последовательности $\{x_n\} \subset X_1$ и $\varepsilon_n \to 0$, $\varepsilon_n > 0$, такие что

$$F(x_n) = \varphi\sigma_{\varepsilon_n}(x_n) \tag{2.2}$$

для последовательности $\sigma_{\varepsilon_n} \in a(\Sigma, \varepsilon_n)$.

По пунктам 1 и 2 предложения 2.1 мы заключаем, что без ограничения общности отображения $\varphi\sigma_{\varepsilon_n}|_{X_1}$ определяют последовательность δ_n-аппроксимаций отображения $\varphi\Sigma|_{X_1}$ с $\delta_n \to 0$ и при этом

$$\bigl(x_n, \varphi\sigma_{\varepsilon_n}(x_n)\bigr) \in O_{\delta_n}\bigl(\Gamma_{\varphi\Sigma|_{X_1}}\bigr).$$

Так как график полунепрерывного сверху мультиотображения $\varphi\Sigma|_{X_1}$ — компактное множество (см. [1, теорема 1.1.7]), то мы можем предположить без ограничения общности, что

$$\bigl(x_n, \varphi_{\varepsilon_n}(x_n)\bigr) \to (x_0, y_0) \in \Gamma_{\varphi\Sigma|_{X_1}}$$

и что $y_0 \in \varphi\Sigma(x_0)$. Переходя к пределу в (2.2), мы получаем, что $f(x_0) = y_0 \in \varphi\Sigma(x_0)$, что противоречит предположению (2.1). Предложение доказано. □

Для представления класса многозначных отображений мы напомним некоторые понятия.

Определение 2.1 [8, 10, 11]. Непустое компактное подмножество A метрического пространства Z называется асферичным (или ∞-близостно связным), если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся δ, $0 < \delta < \varepsilon$, такое что для каждого $n = 0, 1, \ldots$

любое непрерывное отображение $d\colon S^n \to \mathcal{O}_\delta(A)$ может быть продолжено до непрерывного отображения $D\colon B^{n+1} \to \mathcal{O}_\varepsilon(A)$, где S^n, B^{n+1} — единичная сфера и шар в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\mathcal{O}_\delta(A)$, $\mathcal{O}_\varepsilon(A)$ обозначают соответствующие окрестности множества A.

Пусть X, Z — метрические пространства, $K(Z)$ обозначает совокупность всех непустых компактных подмножеств Z.

Полунепрерывное сверху многозначное отображение (мультиотображение) $\Sigma\colon X \to K(Z)$ называется J-мультиотображением ($\Sigma \in J(X,Z)$), если каждое значение $\Sigma(x)$, $x \in X$ — асферичное множество.

Под AR-пространством будет пониматься абсолютный ретракт, а под ANR-пространством — абсолютный окрестностный ретракт.

Предложение 2.3 (см. [10]). *Пусть Z — ANR-пространство, и пусть $\Sigma\colon X \to K(Z)$ — полунепрерывное сверху мультиотображение. Тогда, если для каждого $x \in X$ значение $\Sigma(x)$ есть*

а) *выпуклое множество,*

б) *стягиваемое множество,*

в) *R_δ-множество (пересечение убывающей последовательности стягиваемых компактных множеств),*

г) *AR-пространство,*

то Σ — J-мультиотображение. В частности, каждое непрерывное отображение $\sigma\colon X \to Z$ — J-мультиотображение.

Следующее утверждение описывает аппроксимационные свойства J-мультиотображений.

Предложение 2.4 (см. [10,11]). *Пусть X — компактное ANR-пространство, Z — метрическое пространство, $\Sigma \in J(X,Z)$. Тогда*

1) *мультиотображение Σ аппроксимируемо, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\sigma_\varepsilon \in a(\Sigma,\varepsilon)$;*

2) *для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$, такое что для любого δ $(0 < \delta < \delta_0)$ и для любых двух δ-аппроксимаций $\sigma_\delta, \sigma'_\delta \in a(\Sigma,\delta)$ существует непрерывное отображение (гомотопия) $\tau_*\colon X \times [0,1] \to Z$, такое что*

   а) *$\sigma_*(\cdot,0) = \sigma_\delta$, $\sigma_*(\cdot,1) = \sigma'_\delta$;*

   б) *$\sigma_*(\cdot,\lambda) \in a(\Sigma,\varepsilon)$ для всех $\lambda \in [0,1]$.*

Определение 2.2. Обозначим через $CJ(X,X')$ совокупность мультиотображений $G\colon X \to K(X')$, представимых в виде $G = \varphi \circ \Sigma$, где Z — некоторое метрическое пространство, $\Sigma \in J(X,Z)$, $\varphi\colon Z \to X'$ — непрерывное отображение.

Композиция $\varphi \circ \Sigma$ называется представлением мультиотображения G. Таким образом,

$$G = (\varphi \circ \Sigma) \in CJ(X,X').$$

3. Ориентированная степень компактных многозначных возмущений фредгольмовых отображений

Рассмотрим отображение вида $F - G\colon \bar{U} \to E_2$ (напомним, что $U \subseteq E_1$ — открытое ограниченное множество) и будем предполагать, что

(h_1) F — непрерывное собственное отображение, $F|_U \in \Phi_k C^1(U, E_2)$, где $k \geqslant 0$, причём F порождает на U ориентированную фредгольмову структуру U_Φ;

(h_2) $G = \varphi \circ \Sigma \in CJ(\bar{U}, E_2)$ и множество $G(\bar{U})$ относительно компактно в E_2;

(h_3) $F(x) \bar{\in} G(x)$, $x \in \partial U$.

Отметим, что из предположений (h_1), (h_2) вытекает, что множество

$$Q = \{x\colon F(x) \in G(x)\}$$

компактно.

Цель этого раздела — определение при предположениях (h_1)—(h_3) ориентированной степени для отображения $F - G$.

Вначале рассмотрим случай отображений вида $F - G_m\colon \bar{U} \to E_2$, где $G_m \in CJ(\bar{U}, E_2)$ является конечномерным мультиотображением (т. е. G_m такое, что существует конечномерное подпространство $E_2^m \subseteq E_2$, для которого $G_m(\bar{U}) \subseteq E_2^m$) и для отображений F и G_m выполнены условия (h_1)—(h_3).

Из теоремы 1.1 следует, что найдутся окрестность $\mathcal{O} \subseteq U$ множества

$$Q_m = \{x\colon F(x) \in G_m(x)\}$$

и n-мерное подпространство $E_2^n \subset E_2$, такие что множество $M = F^{-1}(E_2^n) \cap \mathcal{O}$ является $(n+k)$-мерным многообразием.

Без ущерба для общности можно считать, что $E_2^m \subseteq E_2^n$, где E_2^n — n-мерное пространство, указанное в теореме 1.1. Тогда $Q_m \subset M$. Отметим также, что ориентация на U индуцирует ориентацию на M.

Лемма 3.1. *Для отображения $F - G_m$ пусть $\mathcal{O}_\gamma^m \subseteq M$ — ограниченная γ-окрестность Q_m. Тогда сужение $\Sigma|_{\bar{\mathcal{O}}_\gamma^m}$ аппроксимируемо, если $\gamma > 0$ достаточно мало.*

Доказательство. Рассмотрим открытое ограниченное множество N, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $Q_m \subseteq N \subseteq \bar{N} \subseteq M$;
2) $\bar{N}$ — компактное ANR-пространство.

Заметим, что в качестве N можно взять объединение конечного набора шаров с центрами в точках Q_m.

Возьмём теперь $\gamma > 0$ настолько малым, что $\mathcal{O}_\gamma^m \subseteq N$, где $\mathcal{O}_\gamma^m$ — ограниченная γ-окрестность Q_m, такая что $\Sigma|_{\bar{\mathcal{O}}_\gamma^m}$ аппроксимируемо. Выбор такой окрестности $\mathcal{O}_\gamma^m$ возможен благодаря первому утверждению предложения 2.4 и первому утверждению предложения 2.1. □

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{O}_\gamma^m$ выбрано в соответствии с леммой* 3.1. *Тогда если $\varepsilon > 0$ достаточно мало и $\sigma_\varepsilon \in a\big(\Sigma|_{\bar{\mathcal{O}}_\gamma^m}, \varepsilon\big)$, то $F(x) \bar{\in} G_m(x)$ для $x \in \partial\mathcal{O}_\gamma^m$.*

Утверждение леммы следует из предложения 2.4.

Итак, пусть $\mathcal{O}_\gamma^m$ — окрестность множества Q_m, содержащаяся в N, на которой сужение $\Sigma|_{\bar{\mathcal{O}}_\gamma^m}$ аппроксимируемо, и пусть для достаточно малого $\varepsilon > 0$ $\sigma_\varepsilon \in a\big(\Sigma|_{\bar{\mathcal{O}}_\gamma^m}, \varepsilon\big)$ — такая аппроксимация, что

$$F(x) - \varphi\sigma_\varepsilon(x) \neq 0, \quad x \in \partial Q_\gamma^m.$$

Определение 3.1. Ориентированную степень $\mathrm{Deg}(F - G_m, \bar{U}, 0)$ отображения $F - G_m$ относительно точки нуль определим равенством

$$\mathrm{Deg}(F - G_m, \bar{U}, 0) = d\,(F - \varphi\sigma_\varepsilon, \bar{\mathcal{O}}_\gamma^m, 0),$$

где $d\,(F - \varphi\sigma_\varepsilon, \bar{\mathcal{O}}_\gamma^m, 0)$ — обобщённая степень конечномерного отображения $F - \varphi\sigma_\varepsilon\colon \bar{\mathcal{O}}_\gamma^m \to E_2^n$, которая представляет собой класс оснащённых бордизмов тройки (W^k, i, τ_W), где $W^k = h_\varepsilon^{-1}(0)$ и h_ε — C^∞-гладкая достаточно близкая аппроксимация отображения $F - \varphi\sigma_\varepsilon\colon \bar{\mathcal{O}}_\gamma^m \to E_2^n$, для которой 0 — регулярное значение.

Замечание. Отметим, что степень $\mathrm{Deg}(F - G_m, \bar{U}, 0)$ является элементом $\mathcal{F}_k(U_\Phi)$ — группы $\mathrm{GL_c}$-оснащённых бордизмов фредгольмовой структуры U_Φ.

Лемма 3.3. *Пусть $\sigma_\varepsilon, \sigma'_\varepsilon \in a(\Sigma|_{\bar{\mathcal{O}}_\gamma^m}, \varepsilon)$ — две аппроксимации. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$*

$$d\,(F - \varphi\sigma_\varepsilon, \bar{\mathcal{O}}_\gamma^m, 0) = d\,(F - \varphi\sigma'_\varepsilon, \bar{\mathcal{O}}_\gamma^m, 0).$$

Доказательство. Выберем окрестность N', такую что $Q \subset N' \subset \bar{N}' \subset \mathcal{O}_\gamma^m$ и $\bar{N}'$ — ANR-пространство. Тогда согласно утверждению 1 предложения 2.1 и предложению 2.2 можно выбрать $\varepsilon > 0$ достаточно малым, таким что $\sigma_\varepsilon|_{\bar{N}'}$ и $\sigma'_\varepsilon|_{\bar{N}'}$ — это δ_0-аппроксимации $\Sigma|_{N'}$ и

$$F(x) - \varphi\sigma_\varepsilon(x) \neq 0, \quad x \in \bar{\mathcal{O}}_\gamma^m \setminus N', \tag{3.1}$$

$$F(x) - \varphi\sigma'_\varepsilon(x) \neq 0, \quad x \in \bar{\mathcal{O}}_\gamma^m \setminus N'. \tag{3.2}$$

Так как $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то существует отображение $\eta\colon \bar{N}' \times [0,1] \to Z$ со следующими свойствами:

1) $\eta(\cdot, 0) = \sigma_\varepsilon|_{\bar{N}'}$, $\eta(\cdot, 1) = \sigma'_\varepsilon|_{\bar{N}'}$;
2) $\eta(\lambda, \cdot) \in a(\Sigma|_{\bar{N}'}, \delta_1)$ для каждого $\lambda \in [0,1]$, где δ_1 достаточно мало;
3) $F(x) - \varphi\eta(x, \lambda) \neq 0$, $x \in \partial N'$, для всех $\lambda \in [0,1]$.

По гомотопическому свойству обобщённой степени отображений конечномерных пространств мы имеем

$$d\,(F - \varphi\sigma_\varepsilon, \bar{N}', 0) = d\,(F - \varphi\sigma'_\varepsilon, \bar{N}', 0).$$

Кроме того,

$$d\,(F - \varphi\sigma_\varepsilon, \bar{\mathcal{O}}_\gamma^m, 0) = d\,(F - \varphi\sigma_\varepsilon, \bar{N}', 0)$$

и

$$d\,(F-\varphi\sigma'_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^m_\gamma,0)=d\,(F-\varphi\sigma'_\varepsilon,\bar{N}',0).$$

Из последних трёх неравенств и следует утверждение леммы. □

Если $\mathcal{O}^m_{\gamma'}\subset\mathcal{O}^m_\gamma$, то имеем равенство

$$d\,(F-\varphi\sigma'_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^m_{\gamma'},0)=d\,(F-\varphi\sigma'_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^m_\gamma,0),$$

где $\varepsilon>0$ достаточно мало. Это следует из первого утверждения предложения 2.1, предложения 2.2 и свойства аддитивности обобщённой конечномерной степени.

Наконец, чтобы закончить вопрос о корректности введённой степени, выберем два трансверсальных подпространства E^{n_0} и E^{n_1} для сужения $f|_{\mathcal{O}}$, где $\mathcal{O}$ — некоторая окрестность множества Q_m. Вначале предположим, что $E^{n_0}\subseteq E^{n_1}$. Кроме того, будем предполагать, что $G_m(\bar{U})\subseteq E^{n_0}\subseteq E^{n_1}$. Тогда по нашей конструкции мы получаем два многообразия M^{n_0} и M^{n_1}, $M^{n_0}\subseteq M^{n_1}$, и две окрестности $\mathcal{O}^{n_0}_\gamma\subseteq M^{n_0}$, $\mathcal{O}^{n_1}_\gamma\subseteq M^{n_1}$, $\mathcal{O}^{n_0}_\gamma\subseteq\mathcal{O}^{n_1}_\gamma$, где $\gamma>0$ достаточно мало.

Тогда для достаточно малого $\varepsilon>0$ обобщённые конечномерные степени $d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_1}_\gamma,0)$ и $d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_0}_\gamma,0)$ определены, и по свойству сужения конечномерной степени [15] имеем

$$d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_1}_\gamma,0)=d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_0}_\gamma,0),$$

что и даёт корректность определения степени в этом случае. Если же нет включения $E^{n_0}\subseteq E^{n_1}$, то введём третье пространство $E^{n_2}=E^{n_0}+E^{n_1}$ и обозначим через $d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_2}_\gamma,0)$, $d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_1}_\gamma,0)$, $d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_0}_\gamma,0)$ конечномерные степени, определяемые с помощью пространств E^{n_2}, E^{n_1}, E^{n_0} соответственно. Тогда

$$d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_2}_\gamma,0)=d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_1}_\gamma,0),$$
$$d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_2}_\gamma,0)=d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_0}_\gamma,0),$$

откуда следует, что

$$d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_1}_\gamma,0)=d\,(F-\varphi\sigma_\varepsilon,\bar{\mathcal{O}}^{n_0}_\gamma,0).$$

что и завершает доказательство корректности определения степени $\mathrm{Deg}(F-G_m,\bar{U},0)$.

Приведём свойство гомотопической инвариантности построенной степени. Для этого дадим следующее определение.

Определение 3.2. Пусть имеются два отображения вида $F_0-G_0\colon\bar{U}\to E_2$ и $F_1-G_1\colon\bar{U}\to E_2$, где F_i, $i=0,1$, удовлетворяют условию (h_1), а $G_i=\varphi_i\Sigma_i$, $i=0,1$, принадлежат $CJ(\bar{U},E_2)$ и являются конечномерными мультиотображениями, при этом предполагается выполнение условия $F_i(x)\bar{\in}G_i(x)$, $x\in\partial U$. Эти отображения называются гомотопными (обозначение $F_0-G_0\sim F_1-G_1$), если существует отображение $F_*-G_*\colon\bar{U}\times[0,1]\to E_2$, в котором $F_*\colon\bar{U}\times[0,1]\to E_2$ — собственное непрерывное отображение, такое что $F_*\in\Phi_{k+1}(U\times[0,1],E_2)$ и

фредгольмовы структуры на U, индуцированные отображениями $F_*|_{U\times\{t\}}$ из тривиальной фредгольмовой структуры на E_2, одинаковы для всех $t \in [0,1]$, а G_* имеет вид $G_*(x,\lambda) = \varphi_*(\Sigma_*(x,\lambda),\lambda)$, где $\Sigma_* \in J(\bar U \times [0,1], Z)$, $\varphi_*\colon Z\times[0,1] \to E_2$ — непрерывное отображение, $F_*|_{\bar U\times\{i\}} = F_i$, $\Sigma_*|_{\bar U\times\{i\}} = \Sigma_i$, $\varphi_*|_{\bar U\times\{i\}} = \varphi_i$, $i = 0,1$, и выполнено условие $F_*(x,t)\bar\in G_*(x,t)$ для $x \in \partial U$ и всех $t \in [0,1]$. Отображение $F_* - G_*$ называется гомотопией, соединяющей отображения $F_0 - G_0$ и $F_1 - G_1$.

Теорема 3.1 (свойство гомотопической инвариантности). *Если* $F_0 - G_0 \sim \sim F_1 - G_1$, *то*

$$\operatorname{Deg}(F_0 - G_0, \bar U, 0) = \operatorname{Deg}(F_1 - G_1, \bar U, 0).$$

Доказательство. Пусть $F_* - G_*$ — гомотопия, соединяющая отображения $F_0 - G_0$ и $F_1 - G_1$. Пусть $\mathcal{O}_{*\gamma} \subset U \times [0,1]$ — достаточно малая окрестность множества $Q_* = \{(x,\lambda)\colon F_*(x,\lambda) \in G_*(x,\lambda)\}$.

Выберем $\sigma_{*\varepsilon} \in a(\Sigma_*|_{\bar{\mathcal{O}}_{*\gamma}}, \varepsilon)$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Используя предложения 2.1 и 2.2, можно добиться того, что отображение $\varphi_* \circ \sigma_{*\varepsilon}\colon \bar{\mathcal{O}}_{*\gamma} \to E_2$, $\varphi_* \circ \sigma_{*\varepsilon}(x,\lambda) = \varphi_*(\sigma_{*\varepsilon}(x,\lambda),\lambda)$, является δ'-аппроксимацией при $G_*|_{\bar{\mathcal{O}}_{*\gamma}}$ для достаточно малых δ' и

$$F_*(x,\lambda) \notin \varphi_*\sigma_{*\varepsilon}(x,\lambda), \quad x \in \partial\mathcal{O}, \quad \lambda \in [0,1].$$

Кроме того, $\varphi_* \circ \sigma_{*\varepsilon}|_{\bar{\mathcal{O}}^i_\gamma}$, где $\mathcal{O}^i_\gamma = \mathcal{O} \times \{i\}$, $i = 0,1$, есть δ''-аппроксимация для $G_i|_{\bar{\mathcal{O}}^i_\gamma}$, $i = 0,1$, где $\delta'' > 0$ также достаточно мало.

Обозначим $\sigma_i = \sigma_{*\varepsilon}|_{\bar{\mathcal{O}}^i_\gamma}$, $\varphi_*(y,i) = \varphi_i(y)$, $y \in U$, $i = 0,1$. Имеем

$$d\,(F_0 - \varphi_0 \circ \sigma_0, \bar{\mathcal{O}}^0_\gamma, 0) = d\,(F_1 - \varphi_1 \circ \sigma_1, \bar{\mathcal{O}}^1_\gamma, 0),$$

что и доказывает теорему. □

Отметим ещё одно свойство построенной степени, доказательство которого стандартно.

Свойство аддитивная зависимость степени от области. Пусть U_0 и U_1 — два непересекающихся открытых подмножества ограниченного открытого множества $U \subseteq E_1$, и пусть дано отображение $F - G_m\colon U \to E_2$, где F удовлетворяет условию (h_1), G_m — конечномерное мультиотображение, удовлетворяющее условию (h_2), и выполнено условие

$$F(x) \notin G_m(x), \quad x \in \bar U \setminus (U_0 \cup U_1).$$

Тогда

$$\operatorname{Deg}(F - G_m, \bar U, 0) = \operatorname{Deg}(F - G_m, \bar U_0, 0) + \operatorname{Deg}(F - G_m, \bar U_1, 0).$$

Теперь мы готовы ввести степень для отображений вида $F - G\colon \bar U \to E$ при условии, что для F и G выполнены условия (h_1)—(h_3). Для этого отметим, что из условий собственности отображения F и компактности отображения G вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Предположим, что выполнены условия* (h_1), (h_2) *и* $\Lambda\colon \bar{U} \to K(E_2)$ *— мультиотображение, определённое по формуле*

$$\Lambda(y) = F(y) - G(y).$$

Тогда для каждого замкнутого подмножества $T \subseteq \bar{U}$ *множество* $\Lambda(T)$ *замкнуто.*

Из предложения 3.1 следует, что если выполнены условия (h_1)—(h_3), то существует $\delta > 0$, такое что

$$B_\delta(0) \cap \Lambda(\partial U) = \varnothing, \tag{3.3}$$

где $B_\delta(0) \subseteq E_2$ — δ-окрестность точки $0 \in E_2$. Теперь возьмём непрерывное отображение $P_\delta\colon \overline{G(\bar{U})} \to E^m$, где $E^m \subseteq E_2$ — конечномерное подпространство, для которого выполнено

$$\|P_\delta(v) - v\| < \delta \quad \text{для всех} \quad v \in \overline{G(\bar{U})}. \tag{3.4}$$

В качестве P_δ можно выбрать проектор Шаудера.

Теперь, если G имеет представление $G = \varphi \circ \Sigma$, рассмотрим конечномерное мультиотображение $G_m = P_\delta \circ \varphi \circ \Sigma$. Из (3.3), (3.4) следует, что F, G_m и $F - G_m$ удовлетворяют условиям (h_1)—(h_3) и, следовательно, определена степень $\mathrm{Deg}(F - G_m, \bar{U}, 0)$. Положим по определению

$$\mathrm{Deg}(F - G, \bar{U}, 0) = \mathrm{Deg}(F - G_m, \bar{U}, 0),$$

где $G_m = P_\delta \circ \varphi \circ \Sigma$ и отображение P_δ удовлетворяет условию (3.4).

Для доказательства корректности этого определения достаточно показать, что если даны два отображения $P_\delta^0, P_\delta^1\colon \overline{G(\bar{U})} \to E_2^m$, удовлетворяющие (3.4), то имеет место равенство

$$\mathrm{Deg}(F - G_m^0, \bar{U}, 0) = \mathrm{Deg}(F - G_m^1, \bar{U}, 0), \tag{3.5}$$

где $G_m^k = P_\delta^k \circ \varphi \circ \Sigma$, $i = 0, 1$. (То, что для обоих отображений P_δ^0, P_δ^1 взяли одно и тоже конечномерное пространство E_2^m, очевидно, не ограничивает общности рассуждений, этого можно добиться всегда.) Рассмотрим теперь гомотопию $H\colon \bar{U} \times [0,1] \to E_2$, $H(x,t) = F - G_*$, где $G_*(x,\lambda) = \varphi_*\big(\Sigma(x,\lambda)\big)$ и $\varphi_*(z,\lambda) = (1-\lambda)P_\delta^0\varphi(z) + \lambda P_\delta^1\varphi(z)$. Тогда из теоремы 3.1 следует (3.5). Конечно, имеет место и основное свойство степени. Если $\mathrm{Deg}(F - G, \bar{U}, 0) \neq 0$, то существует $x \in U$, такое что $F(x) \in G(x)$.

Определение гомотопии для класса отображений вида $F - G$ совершенно аналогично определению гомотопии для класса отображений вида $F - G_m$. Оба отмеченных выше свойства степени $\mathrm{Deg}(F - G_m, \bar{U}, 0)$ имеют место и для степени $\mathrm{Deg}(F - G, \bar{U}, 0)$.

4. Об одной задаче оптимального управления для класса обыкновенных дифференциальных уравнений с условием Хопфа на границе

На основе теории степени многозначных возмущений $\Phi_1 C^1$-отображений в этом разделе устанавливается существование оптимального управления для одной краевой задачи из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким же методом с использованием другой теории степени удалось доказать существование оптимального управления с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных растворов полимеров как с полной производной в реологическом соотношении [16], так и с объективной производной [3].

Вначале введём необходимые обозначения и дадим описание задачи.

Для пары функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, заданных на отрезке $[0,1]$, рассмотрим систему из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$f_i\bigl(x_1''(t), x_2''(t)\bigr) - g_i\bigl(t, x_1(t), x_2(t), x_1'(t), x_2'(t)\bigr) = q_i(t), \quad i = 1, 2, \tag{4.1}$$

с краевыми условиями

$$h_j\bigl(x_1(0), x_2(0), x_1'(1), x_2'(1)\bigr) = c_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{4.2}$$

где про нелинейные функции $f_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g_i\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ и $h_j\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q_i\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ пока будем предполагать, что они непрерывны, и c_1, c_2, c_3 — некоторые числа, а позже наложим дополнительные условия.

Предположим, что функции $x_i(t)$ два раза непрерывно дифференцируемы, тогда в левых частях равенств (4.1), (4.2) стоят непрерывные функции. Определим отображения

$$\begin{aligned}
&F\colon C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \to C([0,1],\mathbb{R}^2),\\
&\quad F(x_1,x_2) = \bigl(f_1(x_1'',x_2''), f_2(x_1'',x_2'')\bigr) - (q_1,q_2),\\
&G\colon C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \to C([0,1],\mathbb{R}^2),\\
&\quad G(x_1,x_2) = \bigl(g_1(t,x_1,x_2,x_1',x_2'), g_2(t,x_1,x_2,x_1',x_2')\bigr),\\
&H\colon C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3,\\
&\quad H(x_1,x_2) = \bigl(h_1\bigl(x_1(0),x_2(0),x_1'(1),x_2'(1)\bigr),\, h_2(\ldots),\, h_3(\ldots)\bigr).
\end{aligned}$$

Рассмотрим отображение

$$L = (F - G, H - \boldsymbol{c})\colon C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \to C([0,1],\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^3,$$

где $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $q = (q_1, q_2)$. Тогда краевая задача (4.1), (4.2) эквивалентна операторному уравнению

$$L(x) = (q, 0). \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Пусть функции* $f_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, *имеют непрерывные частные производные первого порядка и якобиан*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля во всех точках пространства $\mathbb{R}^2$. *Тогда отображение* $F\colon C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \to C([0,1],\mathbb{R}^2)$ *фредгольмово,* $\operatorname{ind} F = 4$, *и собственно на ограниченных множествах пространства* $C^2([0,1],\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Отображение F представляет собой суперпозицию линейного непрерывного отображения

$$\Phi\colon C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \to C([0,1],\mathbb{R}^2), \quad \Phi(x_1, x_2) = (x_1'', x_2''),$$

и отображения

$$\tilde{F}\colon C([0,1],\mathbb{R}^2) \to C([0,1],\mathbb{R}^2), \quad \tilde{F}(x_1, x_2) = \big(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\big).$$

Линейное отображение Φ ограниченное и, следовательно, непрерывное, образ совпадает со всем пространством, а ядро состоит из пар линейных функций $x_1(t) = a_1 + b_1 t$, $x_2(t) = a_2 + b_2 t$ (см. [6, п. 4.1, примеры 1 и 2]). Поэтому Φ — линейное фредгольмово отображение индекса 4.

Отображение $\tilde{F}$ дифференцируемо, его производная Фреше в точке $\big(x_1(t), x_2(t)\big) \in C([0,1],\mathbb{R}^2)$ — линейный оператор в пространстве $C([0,1],\mathbb{R}^2)$, который на паре функций $\big(h_1(t), h_2(t)\big) \in C([0,1],\mathbb{R}^2)$ равен

$$D\,\tilde{F}_{(x_1(t),x_2(t))}\big(h_1(t), h_2(t)\big) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\big(x_1(t), x_2(t)\big) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\big(x_1(t), x_2(t)\big) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\big(x_1(t), x_2(t)\big) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\big(x_1(t), x_2(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\mathrm{M}(n)$ множество квадратных матриц порядка n и через $\mathrm{GL}(n)$ подмножество обратимых матриц. Тогда матрица

$$a(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\big(x_1(t), x_2(t)\big) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\big(x_1(t), x_2(t)\big) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\big(x_1(t), x_2(t)\big) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\big(x_1(t), x_2(t)\big) \end{pmatrix}$$

представляет собой элемент пространства $C\big([0,1],\mathrm{M}(2)\big)$, поскольку по условию частные производные функций f_1, f_2 непрерывны. Таким образом, оператор $D\,\tilde{F}_{(x_1(t),x_2(t))}$ — это оператор умножения на матричнозначную функцию $a(t)$:

$$D\,\tilde{F}_{(x_1(t),x_2(t))}\colon C([0,1],\mathbb{R}^2) \to C([0,1],\mathbb{R}^2), \quad x(t) \mapsto a(t)x(t),$$

где матрица $a(t)$ умножается на столбец

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

Отображение $D\,\tilde{F}_{(x_1(t),x_2(t))}$ линейно и непрерывно.

Поскольку определитель матрицы $a(t)$ отличен от нуля при всех t, то матричная функция $a(t)$ представляет собой элемент пространства $C\big([0,1],\mathrm{GL}(2)\big)$. Тогда оператор $D\hat{F}_{x_1,x_2}$ принадлежит $\mathrm{GL}\big(C([0,1],\mathbb{R}^2)\big)$ и, значит, является фредгольмовым оператором индекса 0.

Таким образом, отображение F — нелинейное фредгольмово отображение индекса 4. Отображение F собственно на ограниченных множествах пространства $C^2([0,1],\mathbb{R}^2)$ [2, теорема 1]. Теорема доказана. □

Лемма 4.1. *Если отображение $g\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$, $g = (g_1, g_2)$, непрерывно, то отображение*

$$G\colon C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \to C([0,1],\mathbb{R}^2),$$
$$G(x_1,x_2) = \big(g_1(t,x_1,x_2,x_1',x_2'), g_2(t,x_1,x_2,x_1',x_2')\big),$$

является компактным непрерывным отображением.

Доказательство. Поскольку отображение G зависит только от $x(t)$ и $x'(t)$, то его можно представить в виде суперпозиции двух отображений:

$$C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \xrightarrow{i} C^1([0,1],\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\tilde{G}} C([0,1],\mathbb{R}^2),$$

где i — вложение, а $\tilde{G}$ определяется тем же равенством, что и G.

Лемма следует из того, что первое отображение i — непрерывный компактный линейный оператор, а отображение $\tilde{G}$ непрерывно. Действительно, из непрерывности отображения g вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что из условия

$$\begin{cases} |t - t_0| < \delta, \\ \|x - x_0\|_{\mathbb{R}^2} < \delta, \\ \|p - p_0\|_{\mathbb{R}^2} < \delta \end{cases} \tag{4.4}$$

вытекает, что

$$|g(t,x,p) - g(t_0,x_0,p_0)| < \varepsilon.$$

Пусть теперь

$$\|x(t) - x_0(t)\|_{C^1([0,1],\mathbb{R}^2)} = \max_{t\in[0,1]} \|x(t) - x_0(t)\|_{\mathbb{R}^2} + \max_{t\in[0,1]} \|x'(t) - x_0'(t)\|_{\mathbb{R}^2} < \delta,$$

тогда из (4.4) вытекает, что

$$\big\|\tilde{G}\big(x(t)\big) - \tilde{G}\big(x_0(t)\big)\big\|_{C([0,1],\mathbb{R}^2)} = \max_{t\in[0,1]} \big\|g\big(t,x(t),x'(t)\big) - g\big(t,x_0(t),x_0'(t)\big)\big\|_{\mathbb{R}^2} < \varepsilon.$$

Лемма доказана. □

Теорема 4.2. *Пусть* $g = (g_1, g_2)\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ — *непрерывное отображение,* $f = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — *непрерывно дифференцируемое отображение. Предположим, что найдутся такие положительные числа* M, K, μ, *что*

1) $\|g(y)\|_2 + \|q(t)\|_2 \leqslant M$ *для* $y \in \mathbb{R}^5$, $t \in [0,1]$;
2) *из условия* $\|x\|_2 \geqslant K$ *вытекает, что* $\|f(x)\|_2 > M$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^2$;
3) *отображение* $\hat{H}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\hat{H} = (h_1, h_2, h_3)$, *удовлетворяет условию* $\|\hat{H}(x)\|_3 \geqslant (1/\mu)\|x\|_4$.

Тогда на границе шара $B_r(0)$ *пространства* $C^2([0,1], \mathbb{R}^2)$, *где*

$$r = K + 2\mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

нет решений уравнения (4.3).

Доказательство. Из условий 1) и 2) вытекает, что если $\big(x_1(t), x_2(t)\big)$ — решение системы (4.1), (4.2), то $\|x''(t)\|_2 = \max(|x_1''(t)|, |x_2''(t)|) < K$ для всех $t \in [0,1]$. Из краевых условий (4.2) вытекает, что

$$\|\hat{H}(x)\|_3 = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

откуда следует, что

$$|x_i(0)| \leqslant \mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, \quad |x_i'(1)| \leqslant \mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, \quad i = 1, 2.$$

По теореме о среднем $x_i'(t) = x_i'(1) + x_i''(\theta)(t-1)$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, и следовательно,

$$|x_i'(t)| < K + \mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Аналогично $x_i(t) = x_i(0) + x_i'(\theta_1)t$, где $0 \leqslant \theta_1 \leqslant 1$, откуда следует, что

$$|x_i(t)| < K + 2\mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Таким образом, при выполнении условий теоремы для любого решения задачи (4.1), (4.2) выполняется оценка

$$\|x(t)\|_{C^2} = \max_{t\in[0,1]}(\|x(t)\|_2, \|x'(t)\|_2, \|x''(t)\|_2) < K + 2\mu\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}.$$

Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь многозначное отображение

$$\Psi\colon C^2([0,1], \mathbb{R}^2) \to C([0,1], \mathbb{R}^2)$$

в качестве функции управления. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ_1) отображение Ψ имеет непустые компактные выпуклые значения;
(Ψ_2) отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно;
(Ψ_3) отображение Ψ глобально ограниченное, т. е. существует константа $C > 0$, такая что $\|\Psi(x)\|_{C([0,1],\mathbb{R}^2)} \leqslant C$.

Определение 4.1. Пара $(x,q) \in C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \times C([0,1],\mathbb{R}^2)$ называется решением задачи управления с обратной связью, если она удовлетворяет (4.1), (4.2) и

$$q \in \Psi(x). \tag{4.5}$$

Положим $\hat{G}_c(x) = (G(x) - \Psi(x), c)$. Получим многозначное отображение $\hat{G}_c(x)\colon C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \to C([0,1],\mathbb{R}^2)$. Так как Ψ имеет непустые компактные выпуклые значения, то очевидно, что $\hat{G}_c(x)$ так же действует в подмножество непустых выпуклых компактных подмножеств пространства $C([0,1],\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^3$. При этом оператор $\hat{G}_c(x)$ является компактным.

Пусть $\hat{F}\colon C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \to C([0,1],\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^3$ — отображение, заданное по формуле $\hat{F} = \big(F(x), H(x)\big)$. Тогда проблема разрешимости краевой задачи (4.1), (4.2) с условием (4.5) можно заменить на эквивалентную задачу разрешимости операторного включения

$$\hat{F}(x) \in \hat{G}_c(x). \tag{4.6}$$

Теорема 4.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.2. Предположим, что, кроме того, выполняются следующие условия*:

1) *из условия* $\|x\|_2 < r = K + 2\mu\sqrt[4]{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ *вытекает, что* $\det Df(x) \neq 0$;
2) $\|f(0,0)\|_2 \leqslant M$;
3) *неориентированная степень* $\deg_2\big(f, \mathcal{B}_r, f(0,0)\big)$ *конечномерного отображения* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *на шаре* $\mathcal{B}_r = \{x \in \mathbb{R}^2\colon \|x\|_2 \leqslant r\}$ *пространства* $\mathbb{R}^2$ *равна* $1 \pmod 2$.

Тогда существует решение задачи (4.1), (4.2) *в пространстве* $C^2([0,1],\mathbb{R}^2)$.

Доказательство. Из теорем 4.1, 4.2 и леммы 4.1 вытекает, что определена степень отображения L на шаре $B_r(0)$ пространства $C^2([0,1],\mathbb{R}^2)$ относительно фредгольмовой структуры $B_\Phi = B_r(0)_\Phi$, индуцированной отображением L. Напомним, что L представляет собой компактное возмущение фредгольмова отображения индекса 1.

Для вычисления степени $d(L, B_\Phi, 0)$ проведём серию допустимых гомотопий.

Зададим гомотопию

$$L_\lambda\colon C^2([0,1],\mathbb{R}^2) \times [0,1] \to C([0,1],\mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^3$$

формулой

$$L_\lambda(x_1,x_2) = (F(x_1,x_2) - \lambda G(x_1,x_2) - \lambda q - (1-\lambda)F(0,0), H(x_1,x_2) - c).$$

Эта гомотопия отвечает ограниченному той же константой M изменению правой части системы (4.1):

$$\|\lambda g(t,x_1,x_2,x_1',x_2') - \lambda q(t) + (1 - \lambda f(0,0)\|_2 \leqslant \lambda\|g - q\|_2 + (1-\lambda)\|f(0,0)\|_2 \leqslant M,$$

поэтому сохраняется априорная оценка $\|x\|_{C^2} < r$ для любого решения x уравнения $L_\lambda(x) = 0$. Таким образом, гомотопия L_λ невырожденна на $\partial B_r(0)$.

Гомотопия L_λ меняет только компактную часть отображения, следовательно, не меняет индуцированную структуру B_Φ на $B_r(0) \subset C^2([0,1]), \mathbb{R}^2)$. Поэтому

$$\mathrm{Deg}(L_0, B_\Psi, 0) = \mathrm{Deg}(L_1, B_\Psi, 0).$$

Чтобы не усложнять запись, будем обозначать полученное в результате гомотопии отображение буквой L, а отображение $H - \boldsymbol{c}$ обозначим H. Будем считать, что

$$L(x) = \big(F(x), H(x)\big),$$

где $F(0) = 0$, $H(0) = 0$.

Заметим, что пространство $C([0,1], \mathbb{R}^2)$ имеет базис Шаудера [12, с. 3], следовательно, обладает свойством конечномерной аппроксимации.

Из доказательства теоремы 4.1 видно, что отображение F представляет собой суперпозицию $F = \hat{F} \circ \Phi$, где $\hat{F}$ — локальный диффеоморфизм, а Φ — линейный оператор, поэтому для любого x ядро и образ оператора $D\,F(x)$ совпадают с ядром и образом оператора Φ. Точнее, ядро $\mathrm{Ker}\, D\,F(x)$ четырёхмерно и совпадает с подпространством, состоящим из пар линейных функций:

$$E^4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}\, D\,F(x) = \big\{\big(x_1(t), x_2(t)\big) \colon x_i(t) = a_i + tb_i,\ i = 1,2\big\},$$

образ $\mathrm{Im}\, D\,F(x)$ совпадает со всем пространством $C([0,1], \mathbb{R}^2)$.

В качестве дополнительного пространства к ядру E^4 в $C^2([0,1], \mathbb{R}^2)$ выберем подпространство

$$E^{\infty-4} = \big\{\big(x_1(t), x_2(t)\big) \colon x_i(0) = 0,\ x_i'(1) = 0,\ i = 1,2\big\}.$$

Подпространство $E^{\infty-4}$, очевидно, замкнуто и является дополнительным к E^4, поскольку для любой вектор-функции $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ можно записать разложение в ряд Тейлора

$$x(t) = x(0) + x'(0)t + \int\limits_0^t (t-s)x''(s)\,ds$$

с остаточным членом в интегральной форме [9]. Положим

$$u_1 = x(0) + x'(1), \quad u_2 = [x'(0) - x'(1)]t + \int\limits_0^1 (t-s)x''(s)\,ds.$$

Тогда $u_1 \in E^4$, $u_2 \in E^{\infty-4}$, поскольку

$$u_2(0) = 0, \quad u_2'(t) = x'(0) - x'(1) + \int\limits_0^t x''(s)\,ds, \quad u_2'(1) = 0.$$

Таким образом, мы получили разложение пространства $C^2([0,1], \mathbb{R}^2)$ в топологическую прямую сумму $E^4 \oplus E^{\infty-4} \simeq E^4 \times E^{\infty-4}$. Теперь каждый элемент $x(t)$ пространства $C^2([0,1], \mathbb{R}^2)$ можно записать в виде пары $x(t) = (u_1, u_2)$,

где $u_1 \in E^4$, $u_2 \in E^{\infty-4}$. Заметим теперь, что отображение $L = (F, H)$ можно записать в виде $L(x) = L(u_1, u_2) = \big(F(u_2), H(u_1)\big)$, поскольку значение отображения F зависит только от вторых производных функции $x(t)$, а H зависит только от значений функции $x(t)$ в нуле и её первых производных в единице. Таким образом,

$$L(x) = L(u_1, u_2) = \big(F(u_2), H(u_1)\big).$$

Отображение F, суженное на подпространство $E^{\infty-4}$, представляет собой локальный диффеоморфизм, поскольку

$$D\,F(x)|_{E^{\infty-4}} \colon E^{\infty-4} \to C([0,1], \mathbb{R}^2) -$$

линейный изоморфизм для каждого x. Отображение

$$F \colon C^2([0,1], \mathbb{R}^2) \to C([0,1], \mathbb{R}^2)$$

собственно на ограниченных множествах пространства $C^2([0,1], \mathbb{R}^2)$, подпространство $E^{\infty-4}$ замкнуто, поэтому сужение F на ограниченные подмножества подпространства $E^{\infty-4}$ также собственно. Из априорной оценки известно, что решения уравнения $L(x) = 0$ лежат в шаре пространства $C^2([0,1], \mathbb{R}^2)$ радиуса r, поэтому в ограниченном множестве $E^{\infty-4} \cap B_r(0)$ лежит только конечное число изолированных точек из $F^{-1}(0)$.

Если $x(t) \in B_r(0) \in C^2([0,1], \mathbb{R}^2)$, то $\|x\|_{C^2} < r$, следовательно, $\|x(t)\|_2 < r$ для любого $t \in [0,1]$. По условию справедливо $\deg_2(f, \mathcal{B}_r, 0) = 1 \pmod 2$ (напомним, что мы уже сделали сдвиг, поэтому $f(0,0) = 0$), поэтому для отображения $f \colon \mathcal{B}_r \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ прообраз регулярного значения 0 (все значения регулярные в силу условия 1)) состоит из нечётного числа точек, скажем $f^{-1}(0) = \{b^0, b^1, \ldots, b^{2k}\}$. Тогда

$$x(t) \in F^{-1}(0) \iff \begin{cases} x_1''(t) = b_1^i, \\ x_2''(t) = b_2^i, \end{cases} \tag{4.7}$$

для некоторой точки $b^i \in f^{-1}(0)$ с координатами (b_1^i, b_2^i) в $\mathbb{R}^2$. Решая систему (4.7), получаем

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1^1 + \alpha_1^2 t + \dfrac{b_1^i t^2}{2}, \\ x_2(t) = \alpha_2^1 + \alpha_2^2 t + \dfrac{b_2^i t^2}{2}, \end{cases} \tag{4.8}$$

где α_1^1, α_1^2, α_2^1, α_2^2 — произвольные константы.

При каждом $i = 0, \ldots, 2k$ множество вектор-функций $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$, удовлетворяющих системе (4.8), представляет собой аффинную плоскость E_i^4, полученную сдвигом на постоянный вектор $(b_1^i t^2/2, b_1^i t^2/2)$. Проекция вектор-функции (4.8) на подпространство $E^{\infty-4}$ есть $(b_1^i t^2/2, b_1^i t^2/2)$.

Таким образом, если рассматривать отображение F из $C^2([0,1]), \mathbb{R}^2)$ в $C([0,1]), \mathbb{R}^2)$, то $F^{-1}(0)$ — набор из $2k+1$ аффинной плоскости, а если рассматривать F из $E^{\infty-4}$ в $C([0,1]), \mathbb{R}^2)$, то $F^{-1}(0)$ состоит из $2k+1$ точки.

Обратимся теперь к отображению L. Выберем в подпространстве E^4 базис, состоящий из вектор-функций $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (t,0)$, $e_3 = (0,1)$, $e_4 = (0,t)$. Тогда вектор-функция $x(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t, \beta_1 + \beta_2 t) \in E^4$ раскладывается по базису следующим образом:

$$x(t) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \beta_1 e_3 + \beta_2 e_4,$$

так что числа α_1, α_2, β_1, β_2 являются координатами вектор-функции $x(t)$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4.

Запишем теперь отображение $H\colon E^4 \to \mathbb{R}^3$ в координатах α_1, α_2, β_1, β_2 имеет вид $H(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = h(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) - \boldsymbol{c}$, где $h\colon E^4 \to \mathbb{R}^3$ — отображение Хопфа.

Таким образом, из [11] следует, что для отображения

$$L(x) = L(u_1, u_2) = \big(F(u_2), H(u_1)\big)$$

имеем $\mathrm{Deg}(L, B_\Phi, 0) = 1 \in F_1(B_\Phi) \simeq \mathbb{Z}_2$. Отсюда в свою очередь следует разрешимость уравнения $L(x) = 0$. Теорема доказана. □

Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество над функцией

$$(x, q) \in C^2([0,1], \mathbb{R}^2) \times C([0,1], \mathbb{R}^2),$$

где x является решением задачи (4.1), (4.2) при условии, что для пары (x, q) выполнено включение (4.5).

Совершенно аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 4.3, но уже с использованием степени многозначных компактных возмущений фредгольмовых отображений индекса один, доказывается что множество $\mathfrak{N}$ не пусто.

Теорема 4.4. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 4.3 *и отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ_1)—(Ψ_3). *Пусть* $Y\colon \mathfrak{N} \to \mathbb{R}^1$ — *полунепрерывный снизу функционал. Тогда существует такая пара* (x^*, q^*), *что* x^* *является решением краевой задачи* (4.1), (4.2) *с условием* $q \in \Psi(x^*)$ *и имеет место равенство*

$$Y(x^*, q^*) = \inf_{(x,q)\in\mathfrak{N}} Y(x, q).$$

Доказательство. Для пары $(x, q) \in \mathfrak{N}$ имеем $q = L(x)$. Поэтому задачу минимизации функционала $\tilde{Y}(x) = Y(x, q)\colon \mathfrak{N} \to \mathbb{R}^1$, где $\mathfrak{N}$ — множество решений включения (4.6). Отметим, что функционал $\tilde{Y}$ полунепрерывен снизу. Для решения задачи минимизации достаточно применить следующее обобщение теоремы Вейерштрасса.

Теорема 4.5. *Полунепрерывный снизу функционал, определённый на компактном множестве, ограничен снизу на этом множестве и достигает на нём своей точной нижней границы.*

Остаётся показать, что множество решений $\mathfrak{N}$ компактно. Так как для любого $x \in \mathfrak{N}$ по определению имеем $\hat{F}(x) \in \hat{G}_0(x)$, то $\hat{F}(\mathfrak{N}) \subseteq G(\mathfrak{N})$.

В силу априорной оценки множество $\mathfrak{N}$ ограниченно в $C^2([0,1], \mathbb{R}^2)$, и поскольку отображение $\hat{G}$ компактно, то $\hat{G}(\mathfrak{N})$ относительно компактно

в $C([0,1],\mathbb{R}^2)$ как образ ограниченного множества. В силу собственности отображения $\hat{F}$ множество $\mathfrak{N}$ также относительно компактно. Покажем замкнутость $\mathfrak{N}$. Отметим, что из того что $\hat{G}$ полунепрерывно сверху и действует в семейство непустых замкнутых подмножеств, следует, что оно замкнуто (см. [1]).

Пусть $x_n \to x$, $x_n \in \mathfrak{N}$. Тогда $\hat{F}(x_n) \in \hat{G}(x_n)$, но отображение $\hat{G}$ замкнуто, а $\hat{F}$ непрерывно, и следовательно, $\hat{F}(x) \in \hat{G}(x)$, т. е. $x \in \mathfrak{N}$. Таким образом, $\mathfrak{N}$ компактно. Теорема доказана. □

Литература

[1] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: КомКнига, 2005.

[2] Дмитриенко В. Т. К вопросу собственности одного класса дифференциальных операторов // Уравнения на многообразиях. Новое в глобальном анализе. — Воронеж: Воронежский ун-т, 1982. — С. 105—108.

[3] Звягин А. В. Задача оптимального управления с обратной связью для математической модели движения слабо концентрированных водных полимерных растворов с объективной производной // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 4. — С. 807—825.

[4] Звягин В. Г. Об ориентированной степени одного класса возмущений фредгольмовых отображений и бифуркации решений нелинейной краевой задачи с некомпактными возмущениями // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, № 12. — С. 1740—1768.

[5] Звягин В. Г. Об ориентированной степени многозначных возмущений фредгольмовых отображений положительного индекса // Докл. РАН. — 2014. — Т. 457, № 4. — С. 388—390.

[6] Звягин В. Г., Ратинер Н. М. Ориентированная степень фредгольмовых отображений. Метод конечномерной редукции // СМФН. — 2012. — Т. 44. — С. 3—171.

[7] Манкрс Дж. Элементарная дифференциальная топология // Дж. Милнор, Дж. Сташеф. Характеристические классы. — М.: Мир, 1979. — С. 270—359.

[8] Мышкис А. Д. Обобщения теоремы о точке покоя динамической системы внутри замкнутой траектории // Матем. сб. — 1954. — Т. 34, № 3. — С. 525—540.

[9] Шварц Л. Анализ. Т. 2. — М.: Мир, 1972.

[10] Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. — (Math. Its Appl.; Vol. 495).

[11] Górniewicz L., Granas A., Kryszewski W. On the homotopy method in the fixed point index theory of multi-valued mappings of compact absolute neighborhood retracts // J. Math. Analysis Appl. — 1991. — Vol. 161, no. 2. — P. 457—473.

[12] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. I. Sequence Spaces. — Berlin: Springer, 1977. — (Ergebn. Math. ihrer Grenzgeb.; Vol. 92).

[13] Obukhovskii V., Zecca P., Zvyagin V. An oriented index for nonlinear Fredholm inclusions with nonconvex-valued perturbations // Abstr. Appl. Analysis. — 2006. — Vol. 2006. — P. 1—21.

[14] Obukhovskii V., Zvyagin V., Zecca P. On coincidence index for multivalued perturbations of nonlinear Fredholm maps and some applications // Abstr. Appl. Analysis. — 2002. — Vol. 7, no. 6. — P. 295—322.

[15] Zvyagin V. G., Ratiner N. M. Oriented degree of Fredholm maps of nonnegative index, and its applications to global bifurcation of solutions // Global Analysis — Studies and Applications. — Berlin: Springer, 1992. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1520.) — P. 111—137.

[16] Zvyagin V., Turbin M. Optimal feedback control in the mathematical model of low concentrated aqueous polymer solutions // J. Optim. Theory Appl. — 2011. — Vol. 148, no. 1. — P. 146—163.