Минимальные остовные деревья на бесконечных множествах

А. О. ИВАНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: aoiva@mech.math.msu.su

А. А. ТУЖИЛИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: tuz@mech.math.msu.su

УДК 519.176+514.77+519.168

Ключевые слова: минимальные остовные деревья, бесконечные графы, метрические пространства, расстояния между множествами.

Аннотация

В работе изучаются минимальные остовные деревья на бесконечных множествах вершин. Получен критерий минимальности остовного дерева конечной длины, обобщающий классический результат для конечных множеств. Дано аналитическое описание множества всех бесконечных метрических пространств, для которых существуют минимальные остовные деревья. Получено достаточное условие существования минимального остовного дерева в терминах достижимости расстояния между элементами разбиения метрического пространства. Кроме того, вводится понятие локально минимального остовного дерева, изучаются свойства таких деревьев и их связь с (глобально) минимальными остовными деревьями.

Abstract

A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, Minimal spanning trees on infinite sets, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 89—103.

Minimal spanning trees on infinite vertex sets are investigated. A criterion for minimality of a spanning tree having a finite length is obtained, which generalizes the corresponding classical result for finite sets. It is given an analytic description of the set of all infinite metric spaces which a minimal spanning tree exists for. A sufficient condition for a minimal spanning tree existence is obtained in terms of distance achievability between elements of a partition of the metric space under consideration. Besides, a concept of a locally minimal spanning tree is introduced, several properties of such trees are described, and relations of those trees with (globally) minimal spanning trees are investigated.

© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Введение

Построение минимального остовного дерева, соединяющего данное конечное множество точек метрического пространства, является классической задачей комбинаторной оптимизации и дискретной геометрии, имеющей самые разнообразные практические применения (см., например, [6]). С комбинаторной точки зрения эта задача сводится к поиску минимального остовного дерева во взвешенном графе, и в таком виде она была решена алгоритмически в начале прошлого века [4]. Наличие полиномиальных и легко описываемых алгоритмов построения решения, таких, как алгоритм Краскала и Прима, к сожалению, не даёт почти никакой информации об устройстве минимальных остовных деревьев. Изучение геометрии минимальных остовных деревьев позволило в некоторых важных случаях, прежде всего в случае евклидовой плоскости, ускорить алгоритм их построения [7].

В последнее время всё больший интерес вызывают аналогичные объекты для бесконечных метрических пространств. Много работ посвящено обобщениям понятия минимального остовного дерева на случай счётных подмножеств метрического пространства или взвешенных графов со счётными множествами вершин и рёбер, порождённых тем или иным случайным процессом (см., например, [2, 3]). В [2] на счётном подмножестве M метрического пространства с помощью аналога алгоритма Прима строится некоторый остовный лес (который для случая конечного M является минимальным остовным деревом) и изучаются его усреднённые топологические и метрические свойства, такие, как средняя степень вершины и асимптотическое поведение длины. В [3] аналог минимального остовного дерева определяется для некоторого естественного класса взвешенных графов в других терминах, а именно с помощью так называемого *правила перехода через ручей*: выбираются те и только те рёбра, вершины которых нельзя соединить путём, состоящим из рёбер меньшего веса. В работе показывается, что в сделанных предположениях составленный из всех таких рёбер граф является лесом, а также изучается структура этого леса (количество так называемых топологических концов и бесконечных кластеров).

Хорошей мотивацией изучения бесконечных минимальных остовных деревьев является до сих пор не решённая гипотеза Гилберта—Поллака [5], а также тот факт, что наилучшая оценка на отношение Штейнера трёхмерного евклидова пространства достигается в пределе (на бесконечном множестве) [8]. В [1] авторы поставили следующий естественный вопрос: описать бесконечные метрические пространства, которые являются вершинами остовных деревьев конечной длины (такие пространства авторы назвали хорошими). В качестве ответа авторы [1] предложили некоторый интегральный критерий. На самом деле найденная интегральная формула вычисляет точную нижнюю грань длин деревьев, затягивающих данное метрическое пространство, в частности, она даёт длину минимального остовного дерева при условии, что такое дерево существует. Однако остался невыясненным следующий вопрос: какие бесконечные метрические пространства затягиваются минимальными остовными деревьями. Легко построить пример хорошего пространства, которое нельзя затянуть минимальным остовным деревом: достаточно взять последовательность $1/n$, $n \in \mathbb{N}$, вместе с её предельной точкой 0. В данной статье мы существенно продвинемся в решении этой задачи.

Хорошо известно, что остовное дерево на конечном подмножестве M метрического пространства является минимальным, если и только если на каждом его ребре достигается расстояние между соответствующими компонентами множества M. Мы обобщим этот критерий на случай бесконечных подмножеств метрического пространства (теорема 1). Затем мы приведём ещё один критерий минимальности остовного дерева T, основанный на сравнении исходной метрики ρ с построенной по T и ρ специальной метрикой ρ^T_∞ (теорема 2). В качестве следствия мы дадим аналитическое описание множества всех бесконечных метрических пространств, для которых существуют минимальные остовные деревья (следствие 3.3). В качестве примера использования теоремы 2 мы покажем, что любое дерево с не более чем счётным числом рёбер изоморфно некоторому минимальному остовному (пример 3). Мы получим достаточное условие существования минимального остовного дерева в терминах достижимости расстояния между элементами разбиения метрического пространства (теорема 3). В заключительном разделе мы введём понятие локально минимального остовного дерева, изучим свойства таких деревьев и их связь с минимальными остовными деревьями (теорема 4 и следствие 5.1).

1. Графы на конечных и бесконечных множествах

Мы будем рассматривать (простые) графы с *произвольными, не обязательно конечными*, множествами вершин.

Итак, пусть V — произвольное множество, $V^{(2)}$ — семейство двухэлементных подмножеств V и $E \subset V^{(2)}$. *Графом* будем называть каждую пару $G = (V, E)$ таких множеств. Как всегда, элементы множества V называются *вершинами*, а элементы множества E — *рёбрами* графа G. Если множества вершин или рёбер графа G не заданы явно, то для них используют обозначения $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Двухэлементные множества вида $\{v, w\}$ будем для краткости обозначать через vw. Если $vw \in E$, то вершины v и w называются *смежными* или *соседними*, также говорят, что такие вершины *соединены ребром*. Более общо, если $V_1, V_2 \subset V$, $v_i \in V_i$ и $v_1v_2 \in E$, то говорят, что v_1v_2 *соединяет* V_1 *и* V_2. Если $v \in e \in E$, то говорят, что вершина v и ребро e *инцидентны*, также говорят, что v — *вершина ребра* e или что *ребро* e *выходит из вершины* v. Мощность множества рёбер, инцидентных вершине v, называется *степенью вершины* v и обозначается через $\deg(v)$.

Конечная последовательность вершин $v = v_0, v_1, \ldots, v_n = w$, в которой $v_{i-1}v_i \in E$ при каждом i, называется *маршрутом, соединяющим* v *и* w. Если $v = w$, то маршрут называется *замкнутым* или *циклическим*, если же $v \neq w$, то маршрут называется *незамкнутым*. Незамкнутый маршрут, в котором все вершины различны, называется *путём*; замкнутый маршрут, в котором все рёбра различны, называется *циклом*. Если каждая пара вершин графа соединяется некоторым маршрутом, то граф называется *связным*. Если граф не содержит циклов, то он называется *лесом*; связный лес называется *деревом*. Легко убедиться, что каждая пара вершин v и w произвольного дерева T соединяется единственным путём. Такой путь в T мы будем обозначать через $T[v,w]$.

Мы будем пользоваться рядом операций на графах. Пусть $G=(V,E)$ — произвольный граф и $E'\subset V^{(2)}$. Тогда графы $(V,E\setminus E')$ и $(V,E\cup E')$ будем обозначать через $G\setminus E'$ и $G\cup E'$ соответственно; будем говорить, что первый из этих графов получен из G *выкидыванием рёбер семейства* E', а второй — *добавлением рёбер семейства* E'. Если $E'=\{e\}$, то графы $G\setminus\{e\}$ и $G\cup\{e\}$ будем для краткости обозначать соответственно через $G\setminus e$ и $G\cup e$. Пусть $E'\subset E$ и $F'\subset V^{(2)}$. Тогда граф $(G\setminus E')\cup F'$ обозначим через $G[E'\to F']$. Если $E'=\{e\}$ и $F'=\{f\}$, то граф $G[\{e\}\to\{f\}]$ для краткости будем обозначать через $G[e\to f]$.

Если $G_1=(V_1,E_1)$ и $G_2=(V_2,E_2)$, то граф $(V_1\cup V_2,E_1\cup E_2)$ будем обозначать через $G_1\cup G_2$ и называть *объединением графов* G_1 *и* G_2. Если при этом $V_1\cap V_2=\varnothing$, то $G_1\cup G_2$ обозначим через $G_1\sqcup G_2$ и будем называть *несвязным объединением графов* G_1 *и* G_2.

Пусть $G=(V,E)$ — произвольный граф. Граф $G'=(V',E')$ называется *подграфом графа* G, и этот факт записывается как $G'\subset G$, если $V'\subset V$ и $E'\subset E$. Свойство одного графа быть подграфом другого является отношением порядка, и именно это отношение мы будем иметь в виду, когда будем говорить про *максимальные* или *минимальные подграфы по включению*. Максимальный по включению связный подграф графа G называется *связной компонентой графа* G. Каждый граф единственным образом представляется в виде несвязного объединения своих связных компонент; в частности, каждый лес G однозначно раскладывается в несвязное объединение своих максимальных поддеревьев, которые называются *деревьями леса* G. В частности, если $T=(V,E)$ — дерево и $E'\subset E$, то граф $T\setminus E'$ является лесом с деревьями $T_i=(V_i,E_i)$. При этом $\{V_i\}$ является разбиением множества V. Это разбиение мы будем обозначать через $\mathcal{P}_T(E')$. Если $E'=\{e\}$, то разбиение $\mathcal{P}_T(\{e\})$ для краткости обозначим через $\mathcal{P}_T(e)$. Заметим также, что $\{E_i\}\cup\{E'\}$ является разбиением множества E.

Замечание 1.1. В дальнейшем мы иногда будем рассматривать пути и циклы как соответствующие подграфы. В этом смысле мы будем использовать обозначения $V(\gamma)$, $E(\gamma)$, $V(C)$, $E(C)$ для множеств вершин и рёбер пути γ и цикла C соответственно.

В следующем утверждении соберём нужные нам свойства деревьев.

Утверждение 1.2. *Пусть $T=(V,E)$ — произвольное дерево.*

1. *Если $E'\subset E$ и $\mathcal{P}_T(E')=\{V_i\}$, то мощность множества $\{V_i\}$ на 1 больше мощности множества E'. Кроме того, каждая пара V_i, V_j соединяется не*

более чем одним ребром из E, и если такое ребро существует, то оно лежит в E'. В частности, если $E' = \{e\}$, то $\mathcal{P}_T(e) = \{V_1, V_2\}$ и множества V_1 и V_2 соединяются единственным ребром дерева T, а именно ребром e.

2. *Если $V = W_1 \sqcup W_2$, $w_i \in W_i$, то существует ребро $f \in E(T[w_1, w_2])$, соединяющее W_1 и W_2. При этом если $\{W_1, W_2\} = \mathcal{P}_T(e)$ для некоторого ребра $e \in E$, то ребро f единственно и равно e.*
3. *Пусть $v, w \in V$, $v \neq w$ и $e \in E$. Тогда граф $T[e \to vw]$ является деревом, если и только если $e \in E(T[v, w])$.*
4. *Если $\{V_1, V_2\} = \mathcal{P}_T(e)$ для некоторого $e \in E$ и $v_i \in V_i$, то $e \in E(T[v_1, v_2])$.*
5. *В предположениях предыдущего пункта положим $S = T[e \to v_1v_2]$. Тогда $\mathcal{P}_S(v_1v_2) = \mathcal{P}_T(e)$.*

2. Метрические графы, минимальные остовные деревья

Для произвольного множества M через $\mathcal{D}(M)$ будем обозначать множество всех метрик на M. На $\mathcal{D}(M)$ имеется естественный частичный порядок: если $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{D}(M)$, то будем писать $\rho_1 \leqslant \rho_2$, если для любых x, $y \in M$ выполняется $\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y)$.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф и $\rho \in \mathcal{D}(V)$. Тогда для каждого ребра $e = vw \in E$ определена его *длина* $\rho(e)$ по формуле $\rho(e) = \rho(v, w)$; величина

$$\rho(G) = \sum_{e \in E} \rho(e)$$

называется *длиной графа G* (в метрике ρ).

Пусть теперь $T = (V, E)$ — некоторое дерево и $\rho \in \mathcal{D}(V)$. Ребро $e \in E$ назовём *точным* (относительно метрики ρ), если $\rho(e) = \rho(V_1, V_2)$, где $\{V_1, V_2\} = \mathcal{P}_T(e)$.

Пусть M — произвольное множество. Обозначим через $\mathcal{T}(M)$ семейство всех деревьев с множеством вершин M. Пусть $\rho \in \mathcal{D}(M)$. Величина

$$\mathrm{mst}(M, \rho) = \inf_{T \in \mathcal{T}(M)} \rho(T)$$

называется *длиной минимального остовного дерева*, а дерево $T \in \mathcal{T}(M)$, для которого $\rho(T) = \mathrm{mst}(M, \rho) < \infty$, — *минимальным остовным деревом на* (M, ρ). Множество всех минимальных остовных деревьев на (M, ρ) обозначим через $\mathrm{MST}(M, \rho)$. Заметим, что множество $\mathrm{MST}(M, \rho)$ может быть пустым и длина минимального остовного дерева определена даже при отсутствии минимальных остовных деревьев. Положим

$$\mathcal{D}_{\mathrm{mst}}(M) = \{\rho \in \mathcal{D}(M) \mid \mathrm{MST}(M, \rho) \neq \varnothing\}.$$

Одна из наших задач — описать метрики из $\mathcal{D}_{\rm mst}(M)$. Метрическое пространство (M,ρ) называется *хорошим*, если $\mathrm{mst}(M,\rho)<\infty$ (см. [1]). По определению все метрики из $\mathcal{D}_{\rm mst}(M)$ хорошие. Несложно показать, что у хорошего пространства (M,ρ) множество M не более чем счётное.

Утверждение 2.1. *Пусть (M,ρ) — произвольное метрическое пространство и $T=(M,E)\in\mathrm{MST}(M,\rho)$. Тогда*

1) *для любых $v,w\in M$ и любого $e\in T[v,w]$ выполняется $\rho(e)\leqslant\rho(v,w)$;*
2) *для каждого $e\in E$, $\{M_1,M_2\}=\mathcal{P}_T(e)$ имеем $\rho(e)=\rho(M_1,M_2)$, т. е. каждое ребро минимального остовного дерева точное;*
3) *если $M=M_1'\sqcup M_2'$, $v_i\in M_i'$ и $\rho(v_1,v_2)=\rho(M_1',M_2')$, то существует $T'=(M,E')\in\mathrm{MST}(M,\rho)$, для которого $v_1v_2\in E'$;*
4) *если в условии предыдущего пункта потребовать, чтобы пара v_1v_2 была определена однозначно, то $v_1v_2\in E'$ для каждого $T'=(M,E')\in\in\mathrm{MST}(M,\rho)$, в частности для $T'=T$.*

Доказательство. Докажем пункт 1). По пункту 3 утверждения 1.2 граф $T[e\to vw]$ является остовным деревом, поэтому $\rho(T[e\to vw])\geqslant\rho(T)$, откуда $\rho(v,w)\geqslant\rho(e)$.

Докажем пункт 2). Выберем произвольные $v_i\in M_i$. Тогда по пункту 4 утверждения 1.2 $e\in E(T[v_1,v_2])$. Осталось применить пункт 1) настоящего утверждения.

Докажем пункт 3). По пункту 2 утверждения 1.2 существует ребро $f\in E(T[v_1,v_2])$, соединяющее M_1' и M_2'. Но тогда $\rho(v_1,v_2)\leqslant\rho(f)$. По пункту 1) настоящего утверждения имеет место и обратное неравенство, поэтому $\rho(f)==\rho(v_1,v_2)$. По пункту 3 утверждения 1.2 граф $T[f\to v_1v_2]$ является остовным деревом, причём, как было только что показано, $\rho(T[f\to v_1v_2])=\rho(T)$, поэтому $T[f\to v_1v_2]\in\mathrm{MST}(M,\rho)$.

Докажем пункт 4). В обозначениях предыдущего пункта $\rho(f)=\rho(v_1,v_2)$. В силу однозначности пары v_1v_2 имеем $f=v_1v_2$, поэтому $v_1v_2\in E$. Так как T было выбрано произвольно, получаем требуемое. $\square$

Пусть A и B — два непустых подмножества метрического пространства (M,ρ). Говорят, что расстояние между A и B *достигается на ab*, если существуют такие $a\in A$ и $b\in B$, что $\rho(a,b)=\rho(A,B)$.

Приведём некоторые примеры, демонстрирующие, как можно использовать утверждение 2.1 для доказательства несуществования минимальных остовных деревьев.

Пример 1. Пусть

$$M=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{0\}\subset[0,1]$$

со стандартной функцией расстояния $\rho(x,y)=|x-y|$. Покажем, что $\mathrm{MST}(M,\rho)=\varnothing$.

Предположим противное, т. е. пусть существует $T = (M, E) \in \mathrm{MST}(M, \rho)$. Заметим, что для каждого разбиения M на $M_1' = \{1/k\}_{k \leqslant n}$ и $M_2' = \{0\} \cup \cup \{1/k\}_{k>n}$, $k \in \mathbb{N}$, пара $\{1/n, 1/(n+1)\}$ единственная, на которой достигается расстояние между M_1' и M_2'. По пункту 4) утверждения 2.1 эта пара является ребром дерева T.

Пусть $e \in E$ — произвольное ребро, выходящее из 0, и $\{M_1, M_2\} = \mathcal{P}_T(e)$, причём $1 \in M_1$. Так как каждое $1/n$ соединено в T путём с 1, не проходящим через e, заключаем, что $\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M_1$, поэтому M_2 состоит не более чем из 0. Так как оба M_i непусты, имеем $M_1 = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $M_2 = \{0\}$.

По пункту 2) утверждения 2.1 ребро e точное, однако $\rho(M_1, M_2) = 0$, противоречие.

Пример 2. Пусть

$$M = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [-1, 1]$$

со стандартной функцией расстояния $\rho(x, y) = |x - y|$. Покажем, что тогда $\mathrm{MST}(M, \rho) = \varnothing$.

Снова предположим противное, т. е. пусть существует $T = (V, E) \in \in \mathrm{MST}(M, \rho)$. Положим $M_1 = \{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $M_2 = \{-1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Тогда $M = M_1 \sqcup M_2$. Как и в примере 1, показываем, что каждая пара $\{1/n, 1/(n+1)\}$ (а также каждая пара $\{-1/n, -1/(n+1)\}$) является ребром T, поэтому если e — произвольное ребро дерева T, соединяющее M_1 и M_2, то $\mathcal{P}_T(e) = \{M_1, M_2\}$. Однако снова ребро e должно быть точным, но $\rho(M_1, M_2) = 0$, противоречие.

Сформулируем теперь результат, обобщающий оба приведённых выше примера.

Утверждение 2.2. *Пусть (M, ρ) — метрическое пространство, причём множество M бесконечно. Предположим, что существуют такие $x, y \in M$, что $\rho(x, y) = \mathrm{mst}(M, \rho)$. Тогда $\mathrm{MST}(M, \rho) = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть существует $T = = (M, E) \in \mathrm{MST}(M, \rho)$. Рассмотрим путь $\gamma = T[x, y]$. Тогда $\rho(T) > \rho(\gamma)$, так как M бесконечно. С другой стороны, $\rho(\gamma) \geqslant \rho(x, y) = \mathrm{mst}(M, \rho) = \rho(T)$, противоречие. □

Обозначим через $G_{\min}(M, \rho)$ граф (M, E), где $vw \in E$, если и только если для некоторого разбиения $\{M', M''\}$ множества M на непустые подмножества расстояние между этими подмножествами достигается на vw.

Утверждение 2.3. *Предположим, что $\mathrm{MST}(M, \rho) \neq \varnothing$. Тогда граф $G_{\min}(M, \rho)$ связный.*

Доказательство. Действительно, пусть $T \in \mathrm{MST}(M, \rho)$. Тогда по пункту 2) утверждения 2.1 $T \subset G_{\min}(M, \rho)$. □

Замечание 2.4. Утверждение, обратное к утверждению 2.3, места не имеет. Совсем просто построить пример множества, не являющегося хорошим: достаточно рассмотреть счётное множество M и задать на нём функцию расстояния ρ, равную 1 на любой паре различных точек из M. Тогда для любой точки $m \in M$ расстояние между $\{m\}$ и $M \setminus \{m\}$ равно единице, поэтому граф $G_{\min}(M,\rho)$ — это полный граф на M. При этом метрическое пространство (M,ρ) не является хорошим, поэтому $\mathrm{MST}(M,\rho)=\varnothing$.

Построим также пример хорошего метрического пространства с тем же свойством. Положим
$$N=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{0\}\subset[0,1].$$
Пусть $M=\{x\}\sqcup N$. Определим метрику ρ на M, положив её равной обычной евклидовой метрике на N и $\rho(x,t)=1$ при всех $t\in N$. Тогда $\rho(x,N)=1$, поэтому все $\{x,t\}$, $t\in N$, являются рёбрами графа $G_{\min}(M,\rho)$, так что этот граф связен.

Покажем, что $\mathrm{MST}(M,\rho)=\varnothing$. Предположим противное, т. е. пусть существует $T=(M,E)\in\mathrm{MST}(M,\rho)$. Положим $M_1'=\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $M_2'=\{0,x\}$. Рассуждения, аналогичные приведённым при разборе примера 1, показывают, что если ребро $e\in E$ соединяет M_1' и M_2' и $\mathcal{P}_T(e)=\{M_1,M_2\}$, $1\in M_1$, то $M_1\supset M_1'$. Поэтому или $M_2=\{0,x\}$, или $M_2=\{0\}$, или $M_2=\{x\}$. Однако случаи $M_2=\{0,x\}$ и $M_2=\{0\}$ не могут реализоваться, так как для них $\rho(M_1,M_2)=0$, что противоречит пункту 2) утверждения 2.1. В частности, $0x\notin E$. Таким образом, остаётся рассмотреть случай, когда $M_2=\{x\}$, $M_1=N$, и x соединён единственным ребром (а именно ребром e) с некоторым $1/n$.

Рассмотрим теперь $M_1''=\{1/n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{x\}$ и $M_2''=\{0\}$, и пусть ребро $e'\in E$ соединяет M_1'' и M_2''. Так как любые две точки из M_1'' соединены путём в T, не проходящим через e', имеем, что $\mathcal{P}_T(e')=\{M_1'',M_2''\}$, однако $\rho(M_1'',M_2'')=0$, снова противоречие с пунктом 2) утверждения 2.1. Таким образом, $\mathrm{MST}(M,\rho)=\varnothing$.

Утверждение 2.5. *Если $\mathrm{MST}(M,\rho)\neq\varnothing$, то для любого разбиения $\{M_1',M_2'\}$ множества M, такого что $\rho(M_1',M_2')>0$, расстояние между M_1' и M_2' достигается.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть существует $T = (M,E)\in\mathrm{MST}(M,\rho)$. Тогда длины всех рёбер дерева T, соединяющих M_1' и M_2', больше $\rho(M_1',M_2')$. Так как длина дерева T конечна, таких рёбер конечное число. Обозначим их через $e_1,\dots,e_k$.

По определению расстояния между M_1' и M_2' существуют такие $v_i\in M_i'$, что $\rho(v_1,v_2)<\rho(e_i)$ при всех $i=1,\dots,k$. По пункту 2 утверждения 1.2 некоторое ребро e_i содержится в $E(T[v_1,v_2])$. По пункту 3 того же утверждения граф $T[e_i\to v_1v_2]$ — остовное дерево, однако $\rho(T[e_i\to v_1v_2])<\rho(T)$, противоречие. $\square$

Теорема 1. *Пусть $T = (M, E)$ — произвольное дерево и $\rho \in \mathcal{D}(M)$. Предположим, что $\rho(T) < \infty$. Тогда $T \in \mathrm{MST}(M, \rho)$, если и только если все рёбра дерева T точные.*

Доказательство. Пусть сначала $T \in \mathrm{MST}(M, \rho)$. Тогда все рёбра дерева T точны по пункту 2) утверждения 2.1.

Пусть теперь все рёбра дерева T точные. Докажем, что $T \in \mathrm{MST}(M, \rho)$. Предположим противное, т. е. что $T \notin \mathrm{MST}(M, \rho)$. Тогда существует дерево $T' = (M, E')$, такое что $\rho(T') < \rho(T)$. Положим $\varepsilon = \rho(T) - \rho(T')$, тогда $\varepsilon > 0$.

Так как T и T' — различные деревья с одним и тем же множеством вершин, существует $e_1 \in E \setminus E'$. Положим $\mathcal{P}_T(e_1) = \{M_1, M_2\}$, и пусть $e_1 = v_1v_2$, $v_i \in M_i$. По пункту 2 утверждения 1.2 существует ребро $e_1' \in E(T'[v_1, v_2])$, соединяющее M_1 и M_2. Так как $e_1' \neq e_1$, имеем $e_1' \notin E$ в силу того же пункта того же утверждения. По условию ребро e_1 является точным, поэтому $\rho(e_1) = \rho(M_1, M_2) \leqslant \rho(e_1')$. По пункту 3 утверждения 1.2 граф $T_1' = T'[e_1' \to e_1]$ является деревом. Так как $\rho(e_1) \leqslant \rho(e_1')$, имеем, что $\rho(T_1') \leqslant \rho(T')$. Отметим, что T_1' содержит по крайней мере одно ребро дерева T.

Так как $\rho(T_1') < \rho(T)$, имеем $T_1' \neq T$, так что эту процедуру можно повторять. Покажем, что в дереве T_m', полученном на m-м шаге, содержится не менее m рёбер дерева T. Для этого достаточно проверить, что на каждом шаге мы выбираем новое ребро дерева T и при этом не выбрасываем из соответствующего T_i' уже добавленные рёбра дерева T.

Предположим противное, т. е. что для некоторого i сформулированное утверждение не выполнено. Будем считать, что i — первый номер, для которого утверждение не имеет места, так что $e_1, \ldots, e_{i-1}$ — различные рёбра дерева T и все они лежат в дереве T_{i-1}'. Отметим, что ребро e_i не может совпасть с некоторым e_j, $j < i$, так как по построению e_i не содержится во множестве рёбер дерева T_{i-1}'. Осталось показать, что выбранное для замены ребро e_i' также не содержится среди e_j, $j < i$. Так как e_i' соединяет множества разбиения $\mathcal{P}_T(e_i)$, а по пункту 1 утверждения 1.2 эти множества соединяются единственным ребром дерева T, а именно ребром e_i, имеем, что $e_i' \neq e_j$, $j < i$, что и требовалось.

Итак, продолжая описанную выше процедуру, на m-м шаге мы построим дерево T_m', содержащее не менее m рёбер из дерева T, такое что $\rho(T) - \rho(T_m') \geqslant \varepsilon$. Ясно, что величина $\rho(T) - \rho(T_m')$ не превосходит суммы длин оставшихся рёбер дерева T. С другой стороны, поскольку длина дерева T конечна, найдётся такое натуральное N, что для любого $m > N$ сумма длин оставшихся рёбер дерева T будет меньше ε. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Утверждение 2.6. *Пусть $T = (M, E) \in \mathrm{MST}(M, \rho)$ и $v \in M$. Тогда $\deg v = \infty$, если и только если $\rho(v, M \setminus \{v\}) = 0$.*

Доказательство. Пусть сначала $\deg v = \infty$. Если $\rho(v, M \setminus \{v\}) > 0$, то $\rho(T) = \infty$, противоречие.

Пусть теперь $\rho(v, M \setminus \{v\}) = 0$. Докажем, что $\deg v = \infty$. Предположим противное, т. е. что $\deg v < \infty$. Тогда существует последовательность $v_1, v_2, \ldots$

вершин $v_i \in M$, такая что последовательность чисел $\rho(v, v_i)$ монотонно стремится к 0.

Пусть $w_1, \ldots, w_n$ — все вершины дерева T, смежные с v. Положим $d_i = \rho(v, w_i)$ и $d = \min\{d_i\} > 0$. Тогда существует v_k, для которой $\rho(v, v_k) < d$, в частности, вершина v_k не смежна с v.

Заметим, что путь $T[v, v_k]$ содержит некоторое ребро vw_i. По пункту 3 утверждения 1.2 граф $T[vw_i \to vv_k]$ — остовное дерево, причём в силу сказанного выше более короткое, чем T, противоречие. $\square$

Утверждение 2.6 можно обобщить следующим образом.

Утверждение 2.7. *Пусть $T = (M, E) \in \mathrm{MST}(M, \rho)$ и $M = M_1 \sqcup M_2$ — некоторое разбиение множества M. Тогда M_1 и M_2 соединены в T бесконечным набором рёбер, если и только если $\rho(M_1, M_2) = 0$.*

Доказательство. Если M_1 и M_2 соединены в T бесконечным набором рёбер, но $\rho(M_1, M_2) > 0$, то $\rho(T) = \infty$, противоречие.

Обратно, пусть $\rho(M_1, M_2) = 0$ и M_1 и M_2 соединены в T конечным набором рёбер, скажем $e_1, \ldots, e_k$. Ясно, что длины этих рёбер отделены от нуля, поэтому найдётся пара точек $v_i \in M_i$, $i = 1, 2$, такая что $\rho(v_1, v_2) < \rho(e_j)$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Заметим, что путь $T[v_1, v_2]$ содержит одно из рёбер e_j. Для этого j граф $T[e_j \to v_1v_2]$ — остовное дерево (пункт 3 утверждения 1.2), причём в силу сказанного выше более короткое, чем T, противоречие. $\square$

3. Взвешенные графы и порождённые ими метрики

Пусть $G = (M, E)$ — произвольный граф. Каждая функция $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$ со значениями во множестве $\mathbb{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел называется *весовой функцией*. Тройка $G = (M, E, \omega)$ называется *взвешенным графом*. Через $\mathcal{TW}(M)$ будем обозначать множество всех взвешенных деревьев (M, E, ω) с *положительными* весовыми функциями ω, для которых $\omega(T) < \infty$. Если $\rho \in \mathcal{D}(M)$, то на каждом дереве $T = (M, E)$ индуцируется весовая функция $\omega(vw) = \rho(v, w)$. Если $(M, E) \in \mathrm{MST}(M, \rho)$, то иногда мы также будем писать $(M, E, \rho) \in \mathrm{MST}(M, \rho)$.

Для каждого взвешенного дерева $T = (M, E, \omega) \in \mathcal{TW}(M)$ определим две метрики $\rho_1^T, \rho_\infty^T \in \mathcal{D}(M)$ следующими формулами (мы считаем, что $\max(\varnothing) = 0$):

$$\rho_1^T(v, w) = \sum_{e \in E(T[v,w])} \omega(e), \quad \rho_\infty^T(v, w) = \max\{\omega(e) \mid e \in E(T[v, w])\}.$$

Легко убедиться, что $\rho_\infty^T \leqslant \rho_1^T$, поэтому определено множество $\mathcal{D}_T(M) \subset \mathcal{D}(M)$, состоящее из всех метрик ρ, для которых $\rho_\infty^T \leqslant \rho \leqslant \rho_1^T$.

Замечание 3.1. Отметим, что для любого $e \in E$ числа $\rho(e)$ одинаковы для всех $\rho \in \mathcal{D}_T(M)$.

Теорема 2. *Пусть (M,ρ) — метрическое пространство и $T = (M,E,\rho) \in \mathcal{TW}(M)$. Тогда $T \in \mathrm{MST}(M,\rho)$, если и только если $\rho_\infty^T \leqslant \rho$.*

Доказательство. Пусть сначала $T \in \mathrm{MST}(M,\rho)$. Рассмотрим произвольные $x, y \in M$. Тогда если $x = y$ или $xy \in E$, то $\rho_\infty^T(x,y) = \rho(x,y)$. Пусть теперь $xy \notin E$. Тогда в силу утверждения 1.2 для любого $e \in E(T[x,y])$ имеем $\rho(e) \leqslant \rho(x,y)$, поэтому $\rho_\infty^T(x,y) \leqslant \rho(x,y)$.

Обратно, предположим, что $\rho_\infty^T(x,y) \leqslant \rho(x,y)$ для любых $x, y \in V$. Рассмотрим произвольное ребро $e = vw \in T$ и положим $\mathcal{P}_T(e) = \{V_1, V_2\}$. Тогда для любых $v_i \in V_i$ имеем $\rho(v_1,v_2) \geqslant \rho_\infty^T(v_1,v_2) \geqslant \rho(v,w) = \rho(e)$, где первое неравенство справедливо по нашему предположению, а второе — так как ребро vw принадлежит пути $T[v_1,v_2]$. Поэтому e — точное ребро. Осталось применить теорему 1. $\square$

Замечание 3.2. Из неравенства треугольника мгновенно заключаем, что $\rho \leqslant \rho_1^T$ для любого $T = (M,E,\rho)$.

Следствие 3.3. *Пусть M — произвольное множество. Тогда*

$$\mathcal{D}_{\mathrm{mst}}(M) = \bigcup_{T \in \mathcal{TW}(M)} \mathcal{D}_T(M).$$

Доказательство. Пусть $\rho \in \mathcal{D}_{\mathrm{mst}}(M)$ и $T = (M,E,\rho) \in \mathrm{MST}(M,\rho)$. Тогда по теореме 2 $\rho \geqslant \rho_\infty^T$. Так как всегда $\rho \leqslant \rho_1^T$, имеем $\rho \in \mathcal{D}_T(M)$, поэтому левая часть доказываемого равенства содержится в его правой части.

Обратно, пусть $\rho \in \mathcal{D}_T(M)$ для некоторого взвешенного дерева $T = (M,E,\omega) \in \mathcal{TW}(M)$. Тогда $\rho|_E = \omega$, следовательно, взвешенное дерево $S = (M,E,\rho)$ совпадает с T, и значит, $\rho_\infty^T = \rho_\infty^S$. Поэтому $\rho \geqslant \rho_\infty^S$, и по теореме 2 имеем, что $T \in \mathrm{MST}(M,\rho)$, так что $\rho \in \mathcal{D}_{\mathrm{mst}}(M)$. $\square$

Пример 3. Пусть (M,E) — произвольное дерево со счётным множеством рёбер $E = \{e_n\}$ и $\{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел, для которой $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n < \infty$. Положим $\omega(e_n) = \omega_n$, $n \in \mathbb{N}$, и пусть $T = (M,E,\omega)$ — соответствующее взвешенное дерево. Так как $\rho_\infty^T \leqslant \rho_1^T$, то по теореме 2 заключаем, что $T \in \mathrm{MST}(M,\rho_1^T)$. Аналогичные построения могут быть проведены и для деревьев с конечным числом рёбер. Таким образом, *каждое дерево с не более чем счётным числом рёбер изоморфно некоторому минимальному остовному дереву*.

4. Достаточное условие существования минимального остовного дерева

Лемма 4.1. *Пусть $T = (M,E)$ — дерево, $\rho \in \mathcal{D}(M)$ и $f \in E$ — точное ребро относительно метрики ρ. Пусть $e \in E$, $e \neq f$ и $\mathcal{P}_T(e) = \{M_1, M_2\}$, причём*

$\rho(M_1, M_2) = \rho(m_1, m_2)$ для некоторых точек $m_i \in M_i$. Тогда ребро f будет точным и в дереве $S = T[e \to m_1 m_2]$.

Доказательство. Пусть $G_i = (V_i, E_i)$, $i = 1, 2, 3,$ — деревья леса $T \setminus \{e, f\}$. Без ограничения общности предположим, что ребро e соединяет множества V_1 и V_2, а ребро f — множества V_2 и V_3. Тогда $M_1 = V_1$, $M_2 = V_2 \cup V_3$, $\mathcal{P}_T(f) = \{V_1 \cup V_2, V_3\}$. Имеются две возможности.

1. $m_2 \in V_2$. Тогда $\mathcal{P}_T(f) = \mathcal{P}_S(f)$, поэтому ребро f остаётся точным.

2. $m_2 \in V_3$. Тогда $\mathcal{P}_S(f) = \{V_1 \cup V_3, V_2\}$. Мы должны показать, что для произвольных вершин $x \in V_1 \cup V_3$ и $y \in V_2$ выполняется $\rho(x, y) \geqslant \rho(f)$.

Пусть $x \in V_3$. Тогда
$$\rho(x, y) \geqslant \rho(V_3, V_2) \geqslant \rho(V_3, V_1 \cup V_2) = \rho(f).$$
Пусть теперь $x \in V_1$. Тогда
$$\rho(x, y) \geqslant \rho(M_1, M_2) = \rho(m_1, m_2) \geqslant \rho(V_3, V_1 \cup V_2) = \rho(f). \qquad \square$$

Теорема 3. *Пусть (M, ρ) — хорошее метрическое пространство. Предположим, что для любого разбиения множества M на непустые подмножества M_1 и M_2 расстояние между этими подмножествами достигается. Тогда на M существует минимальное остовное дерево.*

Доказательство. Так как M хорошее, то существует дерево $G = (M, E)$ конечной длины. Занумеруем произвольно рёбра дерева G. Тогда $E = \{e_1, \dots\}$. Построим деревья G_i следующим образом.

Если ребро e_1 точное, то положим $e'_1 = e_1$ и $G_1 = G$. Если же ребро e_1 не является точным, то рассмотрим разбиение $\mathcal{P}_G(e_1) = \{M_1, M_2\}$, найдём пару точек $m_j \in M_j$, $j = 1, 2$, на которых достигается расстояние между M_1 и M_2, и положим $G_1 = G[e_1 \to m_1 m_2]$. Так как $\rho(m_1 m_2) < \rho(e_1)$, дерево G_1 короче дерева G. Положим $e'_1 = m_1 m_2$. По определению точек m_i ребро e'_1 точное. Таким образом, мы получили дерево G_1, которое не длиннее дерева G и у которого первое ребро e'_1 точное.

Если G_{i-1} — дерево на M с множеством рёбер $\{e'_1, \dots, e'_{i-1}, e_i, \dots\}$, причём рёбра $e'_1, \dots, e'_{i-1}$ точные, то проделаем ту же операцию для ребра e_i. А именно, если ребро e_i точное, то положим $e'_i = e_i$ и $G_i = G_{i-1}$. Если же ребро e_i не является точным, то рассмотрим разбиение $\mathcal{P}_{G_{i-1}}(e_i) = \{M_1, M_2\}$, найдём пару точек $m_j \in M_j$, $j = 1, 2$, на которых достигается расстояние между M_1 и M_2, и положим $G_i = G_{i-1}[e_i \to m_1 m_2]$. Так как $\rho(m_1 m_2) < \rho(e_i)$, дерево G_i короче дерева G_{i-1}. Положим $e'_i = m_1 m_2$. По определению точек m_i ребро e'_i точное. Кроме того, по лемме 4.1 рёбра $e'_1, \dots, e'_{i-1}$ также являются точными в G_i. Таким образом, мы получили дерево G_i, которое не длиннее дерева G и у которого первые i рёбер точные.

Отметим, что на каждом (i-м) шаге описанного выше процесса мы не меняем штрихованные рёбра e'_p, $p < i$, поэтому рёбра $e'_1, \dots, e'_p$ содержатся в каждом дереве G_i, $i \geqslant p$.

Итак, для каждого i мы определили пару e'_i точек множества M. Положим $E' = \{e'_i\}$ и рассмотрим граф $G' = (M, E')$. Покажем, что G' — дерево.

1. Граф G' не содержит циклов. Действительно, если граф G' содержит цикл, то этот цикл состоит из конечного числа рёбер $e'_{i_1}, \ldots, e'_{i_k}$, которые в силу сделанного выше замечания все содержатся в дереве G_j, где $j = \max\limits_p i_p$, противоречие.

2. Граф G' является связным. Предположим, что это не так, и пусть $M = M_1 \sqcup M_2$ — такое разбиение множества M, что M_1 и M_2 не соединяются рёбрами из E'. По предположению расстояние между M_1 и M_2 достигается и, значит, положительно. Так как граф G связный, множества M_1 и M_2 соединяются некоторыми рёбрами из E, и, поскольку расстояние между M_1 и M_2 положительно, таких рёбер конечное число (иначе длина дерева G была бы бесконечна). Пусть этими рёбрами являются $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$. Положим $j = \max\limits_p i_p$ и рассмотрим дерево G_j. Так как граф G_j связный, существует ребро $f \in E(G_j)$, соединяющее M_1 и M_2. Напомним, что $E(G_j) = \{e'_1, \ldots, e'_j, e_{j+1}, \ldots\}$. Так как $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ — полный набор рёбер дерева G, соединяющих M_1 и M_2, ребро f не может совпадать ни с одним из e_p, $p > j$, поэтому f совпадает с некоторым e'_q, $q \leqslant j$, и, значит, лежит в E', противоречие.

Итак, G' — дерево. Его длина конечна, так как не превосходит длины дерева G. Каждое ребро дерева G' является точным. Из теоремы 1 вытекает, что G' — минимальное остовное дерево. Теорема доказана. $\square$

Замечание 4.2. Достаточное условие теоремы 3 не является необходимым. В качестве примера рассмотрим метрическое пространство M, состоящее из всех вершин взвешенного дерева T, рёбра e_k которого имеют вес $1/k^2$, $k = 1, \ldots$, и стыкуются в единственной общей вершине m, а остальные вершины имеют степень 1. Функцию расстояния определим равной весу путей в построенном дереве, соединяющих соответствующие вершины. Тогда дерево T минимальное остовное, но расстояние между $M_1 = \{m\}$ и $M_2 = M \setminus \{m\}$ равно нулю и не достигается.

Следующий ещё более простой пример показывает, что достаточное условие теоремы 3 не является необходимым, даже если ограничиться рассмотрением минимальных остовных деревьев, степени вершин которых конечны. В качестве M возьмём последовательность

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$$

со стандартным расстоянием. Тогда дерево $T = (M, E)$, где

$$E = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

будет минимальным остовным по теореме 1. Осталось заметить, что степени всех вершин этого дерева не превосходят 2, но для множеств

$$M_1 = \left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad M_2 = \left\{\frac{1}{2n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}},$$

образующих разбиение M, имеем $\rho(M_1, M_2) = 0$, поэтому $\rho(M_1, M_2)$ не достигается.

5. Локально минимальные остовные деревья

В данном разделе мы обобщим понятие минимального остовного дерева. Пусть (M, ρ) — метрическое пространство. Дерево $T = (M, E)$ назовём *локально минимальным остовным деревом*, если для любой пары его вершин m и m' все рёбра пути $T[m, m']$ не длиннее, чем расстояние между m и m'. Это означает, что такое дерево нельзя укоротить с помощью следующей «локальной» операции: добавить новое короткое ребро и выкинуть более длинное из возникшего при этом добавлении цикла. Из пункта 1) утверждения 2.1 вытекает, что любое минимальное остовное дерево является локально минимальным остовным.

Теорема 4. *Пусть (M, ρ) — метрическое пространство. Дерево $T = (M, E)$ является локально минимальным остовным, если и только если все его рёбра точные.*

Доказательство. Пусть T — локально минимальное остовное дерево, $e = m_1m_2$ — его ребро, $\mathcal{P}_T(M) = \{M_1, M_2\}$ и $m_i \in M_i$, $i = 1, 2$. Возьмём любую пару точек $v_i \in M_i$, $i = 1, 2$. По пункту 4 утверждения 1.2 путь $T[v_1, v_2]$ содержит ребро e. Тогда по определению локальной минимальности $\rho(m_1, m_2) \leqslant \rho(v_1, v_2)$, поэтому $\rho(m_1, m_2) = \rho(M_1, M_2)$, что и требовалось.

Обратно, пусть все рёбра дерева T точные. Возьмём произвольную пару вершин m_1 и m_2 из M, рассмотрим путь $T[m_1, m_2]$, и пусть $e \in E(T[m_1, m_2])$. Заметим, что вершины m_1 и m_2 лежат в разных компонентах разбиения $\mathcal{P}_T(e)$, поэтому $\rho(e) \leqslant \rho(m_1, m_2)$, что в силу произвольности выбора m_i и означает локальную минимальность дерева T. $\square$

Из теорем 1 и 4 получаем следующий результат.

Следствие 5.1. *Локально минимальное остовное дерево конечной длинны является минимальным остовным деревом.*

6. Поздравления и благодарности

Авторы поздравляют своего Учителя академика А. Т. Фоменко с юбилеем и пользуются случаем снова поблагодарить его за постоянное внимание к их работе.

Работа частично поддержана РФФИ, проект 13-01-00664а, а также программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ Российской Федерации, проект НШ-581.2014.1.

Литература

[1] Иванов А. О., Никонов И. М., Тужилин А. А. Множества, допускающие соединение графами конечной длины // Мат. сб. — 2005. — Т. 196, № 6. — С. 71—110.

[2] Aldous D., Steele J. M. Asymptotics for Euclidean minimal spanning trees on random points // Probab. Theory Relat. Fields. — 1992. — Vol. 92. — P. 247—258.

[3] Alexander K. S. Percolation and minimal spanning forests in infinite graphs // Ann. Probab. — 1995. — Vol. 23, no. 1. — P. 87—104.

[4] Borůvka O. O jistém problému minimálním // Práce Mor. Prírodoved. Spol. v Brne (Acta Soc. Sci. Nat. Moravicae). — 1926. — Vol. 3. — P. 37—58.

[5] Ivanov A., Tuzhilin A. The Steiner ratio Gilbert—Pollak conjecture is still open // Algorithmica. — 2012. — Vol. 62, no. 1-2, 630—632.

[6] Preparata F. P., Shamos M. I. Computational Geometry, an Introduction. — Berlin: Springer, 1985.

[7] Shamos M. I. Computational Geometry: Ph. D. Thesis. — Yale Univ., 1978.

[8] Smith W. D., Smith J. M. On the Steiner ratio in 3-space // J. Combin. Theory A. — 1995. — Vol. 65. — P. 301—322.