О вложениях топологических групп

С. ИЛИАДИС
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: s.d.iliadis@gmail.com

УДК 515.12+512.546

Ключевые слова: топологическая группа, вложения топологических групп, насыщенный класс пространств, непрерывно содержащее пространство.

Аннотация

Проблема существования универсальных элементов в классе всех топологических групп веса не больше $\tau \neq \omega$ остаётся открытой. В работе доказывается, что для многих классов топологических групп существуют так называемые непрерывно содержащие пространства. Пусть $\mathbb{S}$ — насыщенный класс вполне регулярных пространств веса не больше τ и $\mathbb{G}$ — подкласс его элементов, являющихся топологическими группами. Тогда существует элемент $\mathrm{T} \in \mathbb{S}$, обладающий следующим свойством: для любого $G \in \mathbb{T}$ существует такой гомеоморфизм h_{T}^{G} группы G в T, что если точки $x, y \in \mathrm{T}$ принадлежат множеству $h_{\mathrm{T}}^{H}(H)$ для некоторого $H \in \mathbb{G}$, то для любой окрестности U точки xy в T существуют такие окрестности V и W соответственно точек x и y в T, что для любого $G \in \mathbb{G}$ справедливо соотношение

$$\big(V \cap h_{\mathrm{T}}^{G}(G)\big)\big(W \cap h_{\mathrm{T}}^{G}(G)\big)^{-1} \subset U \cap h_{\mathrm{T}}^{G}(G).$$

В этом случае говорят, что T является непрерывно содержащим пространством для класса $\mathbb{G}$. Напомним, что в качестве класса $\mathbb{S}$ можно рассмотреть, например, следующие классы вполне регулярных пространств: n-мерные пространства, счётномерные пространства, сильно счётномерные пространства, локально конечномерные пространства. Следовательно, во всех этих классах существуют непрерывно содержащие пространства для соответствующих подклассов топологических групп. В работе также сформулированы некоторые открытые проблемы.

Abstract

S. Iliadis, On embeddings of topological groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 105—112.

The problem of the existence of universal elements in the class of all topological groups of weight $\leqslant \tau \neq \omega$ remains open. In this paper, it is proved that for many classes of topological groups there are so-called continuously containing spaces. Let $\mathbb{S}$ be a saturated class of completely regular spaces of weight $\leqslant \tau$ and $\mathbb{G}$ be the subclass of elements of $\mathbb{S}$ that are topological groups. Then there exists an element $\mathrm{T} \in \mathbb{S}$ having the following property: for every $G \in \mathbb{T}$, there exists a homeomorphism h_{T}^{G} of G into T such that if the points x, y of T belong to the set $h_{\mathrm{T}}^{H}(H)$ for some $H \in \mathbb{G}$, then for every open neighbourhood U of xy in T there are open neighbourhoods V and W of x and y in T, respectively, such that for every $G \in \mathbb{G}$ we have

$$\big(V \cap h_{\mathrm{T}}^{G}(G)\big)\big(W \cap h_{\mathrm{T}}^{G}(G)\big)^{-1} \subset U \cap h_{\mathrm{T}}^{G}(G).$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 2, с. 105—112.
© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

In this case, we say that T is a continuously containing space for the class $\mathbb{G}$. We recall that as the class $\mathbb{S}$ we can consider, for example, the following classes of completely regular spaces: n-dimensional spaces, countable-dimensional spaces, strongly countable-dimensional spaces, locally finite-dimensional spaces. Therefore, in all these classes there are elements that are continuously containing spaces for the corresponding subclasses consisting of topological groups. In this paper, some open problems are considered.

1. Введение и предварительные сведения

1.1. Введение

Пусть $\mathbb{G}$ — класс топологических групп. Говорят, что топологическая группа T *универсальна* в этом классе, если $T \in \mathbb{G}$ и для любой группы $G \in \mathbb{G}$ в группе T найдётся подгруппа H, топологически изоморфная G.

В. В. Успенский [1, 4] доказал, что в классе всех сепарабельных метризуемых топологических групп есть универсальный элемент. Это группа всех автогомеоморфизмов гильбертова куба в равномерной топологии. С. А. Шкарин доказал (см. [2]), что в классе всех сепарабельных метризуемых топологических абелевых групп тоже есть универсальный элемент. Однако проблема существования универсального элемента в классе всех топологических групп данного несчётного веса остаётся открытой [4, вопрос 2].

В этой заметке, используя метод построения так называемых содержащих пространств [3], мы строим пространство веса τ, *непрерывно содержащее* (см. определение ниже) гомеоморфные образы всех топологических групп веса, не превосходящего τ.

1.2. Обозначения

Мы рассматриваем ординал как множество всех меньших ординалов, а кардинал — как наименьший ординал той же мощности. Таким образом, для ординалов δ и τ отношения $\delta \in \tau + 1$ и $\delta \leqslant \tau$ эквивалентны. Первый бесконечный кардинал мы обозначаем через ω. Через τ мы обозначаем *фиксированный бесконечный кардинал*. Элементы кардинала (множества ординалов) τ обозначаются буквами δ, ε и η. Символ $\mathcal{F}$ используется для обозначения семейства всех непустых подмножеств кардинала τ. Элементы семейства $\mathcal{F}$ обозначаются буквами s и t. Знак $\equiv$ в отношении означает, что одна из частей (или обе части) этого отношения представляет собой вводимое обозначение.

1.3. Предварительные сведения

Пусть $\mathbf{G}$ — произвольное семейство пространств.

Понятие базы семейства G

Индексированное множество

$$\mathbf{B} \equiv \big\{\{U_\delta^X : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{G}\big\}, \tag{1.1}$$

где $\{U_i^X : i \in \omega\}$ — индексированная база открытых подмножеств пространства $X \in \mathbf{G}$, называется *базой* семейства $\mathbf{G}$. Пусть

$$\mathbf{B}_1 \equiv \big\{\{U_\delta^{1,X} : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{G}\big\}, \quad \mathbf{B}_2 \equiv \big\{\{U_\delta^{2,X} : \delta \in \tau\} : X \in \mathbf{G}\big\} -$$

две базы $\mathbf{G}$. Мы говорим, что база $\mathbf{B}_2$ является *расширением* базы $\mathbf{B}_1$, если существует отображение φ кардинала τ в себя, при котором $U_{\varphi(\delta)}^{2,X} = U_\delta^{1,X}$ для любых $X \in \mathbf{G}$ и $\delta \in \tau$.

Допустимые семейства отношений эквивалентности

Индексированное семейство

$$\mathrm{R} \equiv \{\sim^s : s \in \mathcal{F}\}, \tag{1.2}$$

где $\sim^s$ — отношение эквивалентности на $\mathbf{G}$, называется *допустимым*, если

а) для каждого $s \in \mathcal{F}$ число классов эквивалентности отношения $\sim^s$ не превосходит τ;

б) $\sim^t \subset \sim^s$, если $s \subset t \in \mathcal{F}$.

Через $\mathrm{C}(\sim^s)$ мы обозначаем множество всех классов эквивалентности отношения $\sim^s$, а через $\mathrm{C}(\mathrm{R})$ — множество $\bigcup\{\mathrm{C}(\sim^s) : s \in \mathcal{F}\}$.

Мы называем допустимое семейство $\mathrm{R}_1 \equiv \{\sim_1^s : s \in \mathcal{F}\}$ *финальным измельчением* допустимого семейства $\mathrm{R}_2 \equiv \{\sim_2^s : s \in \mathcal{F}\}$, если для любого $s \in \mathcal{F}$ найдётся $t \in \mathcal{F}$, для которого $\sim_1^t \subset \sim_2^s$.

B-допустимое семейство отношений эквивалентности

Пусть (1.1) — база семейства $\mathbf{G}$. Для каждого $s \in \mathcal{F}$ обозначим через $\sim_{\mathbf{B}}^s$ отношение эквивалентности на $\mathbf{G}$, определённое следующим образом: два элемента $X, Y \in \mathbf{G}$ $\sim_{\mathbf{B}}^s$-эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм i алгебры A_s^X подмножеств множества X, порождённой семейством $\{U_\varepsilon^X : \varepsilon \in s\}$, на алгебру A_s^Y подмножеств Y, порождённую семейством $\{U_\varepsilon^Y : \varepsilon \in s\}$, при котором $i(U_\varepsilon^X) = U_\varepsilon^Y$ для любого $\varepsilon \in s$. Легко убедиться, что индексированное семейство $\mathrm{R}_{\mathbf{B}} \equiv \{\sim_{\mathbf{B}}^s : s \in \mathcal{F}\}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{G}$ допустимо.

Допустимое семейство R называется $\mathbf{B}$-*допустимым*, если R — финальное измельчение семейства $\mathrm{R}_{\mathbf{B}}$. Очевидно, всякое финальное измельчение $\mathbf{B}$-допустимого семейства само $\mathbf{B}$-допустимо.

Множество $\mathbf{T}(\mathbf{B},\mathbf{R})$

Пусть (1.1) — база семейства $\mathbf{G}$, и пусть (1.2) — $\mathbf{B}$-допустимое семейство отношений эквивалентности на $\mathbf{G}$. На множестве всех пар (x, X), где $x \in X \in \mathbf{G}$, рассмотрим отношение эквивалентности $\sim_{\mathrm{R}}^{\mathbf{B}}$, определённое следующим образом: две пары (x, X) и (y, Y) $\sim_{\mathrm{R}}^{\mathbf{B}}$-эквивалентны тогда и только тогда, когда

а) $X \sim^s Y$ для любого $s \in \mathcal{F}$;
б) $x \in U_\varepsilon^X$ для некоторого $\varepsilon \in \tau$, если и только если $y \in U_\varepsilon^Y$ для того же ε.

Мы обозначаем множество всех классов $\sim_{\mathrm{R}}^{\mathbf{B}}$-эквивалентности через $\mathrm{T}(\mathbf{B}, \mathrm{R})$.

Содержащее пространство $\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}(\mathbf{B},\mathbf{R})$

На множестве $\mathrm{T} \equiv \mathrm{T}(\mathbf{B}, \mathrm{R})$ мы вводим топологию, порождённую базой

$$\mathrm{B}^{\mathrm{T}} \equiv \{U_\delta^{\mathrm{T}}(\mathbf{H})\colon \delta \in \tau,\ \mathbf{H} \in \mathrm{C}(\mathrm{R})\},$$

где множество $U_\delta^{\mathrm{T}}(\mathbf{H})$ состоит из всех классов эквивалентности $\mathbf{a} \in \mathrm{T}$, содержащих пару (x, X) элементов $x \in U_\delta^X$ и $X \in \mathbf{H}$; мы называем B^{T} *стандартной* базой этой топологии.

Для каждого $X \in \mathbf{G}$ определим отображение $i_{\mathrm{T}}^X\colon X \to \mathrm{T}$ по правилу $i_{\mathrm{T}}^X(x) = \mathbf{a}$, где $x \in X$ и $\mathbf{a}$ — элемент множества T, содержащий пару (x, X). Это отображение является топологическим вложением пространства X в T; мы называем его *естественным*.

Заметим, что из определения элементов базы $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ и естественного вложения элементов семейства $\mathbf{G}$ в T вытекает равенство

$$i_{\mathrm{T}}^X(X) \cap U_\delta^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) = i_{\mathrm{T}}^X(U_\delta^X) \tag{1.3}$$

для любых $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\mathrm{R})$, $X \in \mathbf{H}$ и $\delta \in \tau$.

Насыщенные классы пространств

Скажем, что класс $\mathbb{S}$ пространств *насыщен*, если для любого индексированного набора $\mathbf{G}$ элементов семейства $\mathbb{G}$ существует база $\mathbf{B}_0$, обладающая следующим свойством: для любого расширения $\mathbf{B}$ базы $\mathbf{B}_0$ найдётся такое $\mathbf{B}$-допустимое семейство $\mathrm{R}^{\mathbf{B}}$ отношений эквивалентности на $\mathbf{G}$, что для всякого допустимого семейства R отношений эквивалентности на $\mathbf{G}$, являющегося финальным измельчением $\mathrm{R}^{\mathbf{B}}$, содержащее пространство $\mathrm{T}(\mathbf{B}, \mathrm{R})$ принадлежит классу $\mathbb{S}$.

Классы всех пространств веса не больше τ, класс всех регулярных пространств веса не больше τ и класс всех вполне регулярных пространств веса не больше τ являются насыщенными классами (см. [3]).

2. Основной результат

2.1. Определение. Пусть T — топологическое пространство, и пусть $\mathcal{G}$ — набор подмножеств T, каждый элемент которого с индуцированной топологией является топологической группой. Мы будем говорить, что набор $\mathcal{G}$ *непрерывен*, если выполнены следующие условия.

1. Для любых двух точек x и y в пространстве T, принадлежащих элементу набора $\mathcal{G}$, и любой окрестности U точки xy в T найдутся такие окрестности V и W в T точек x и y соответственно, что для каждого $G \in \mathcal{G}$ имеет место включение
$$(V \cap G)(W \cap G) \subset U \cap G.$$
(Предполагается, что произведение двух множеств пусто тогда и только тогда, когда один из сомножителей пуст.)
2. Для любой точки x в пространстве T, принадлежащей элементу набора $\mathcal{G}$, и любой окрестности U точки x^{-1} в T существует такая окрестность V точки x в T, что
$$(V \cap G)^{-1} \subset U \cap G$$
для всякого $G \in \mathcal{G}$.

2.2. Определение. Пусть $\mathbb{G}$ — класс топологических групп. Скажем, что топологическое пространство T является *непрерывно содержащим пространством для* $\mathbb{G}$, если для любого $G \in \mathbb{G}$ существует топологическое вложение h_X^G пространства G в X (а значит, подмножество $h_X^G(G)$ пространства X с индуцированной топологией является топологической группой), при котором набор
$$\mathcal{G} \equiv \{h_G(G) \colon G \in \mathbb{G}\}$$
подмножеств T непрерывен.

2.3. Теорема. *Пусть $\mathbb{G}$ — подкласс всех топологических групп в насыщенном классе $\mathbb{S}$ пространств веса, не превосходящего τ. Класс $\mathbb{S}$ содержит элемент, являющийся непрерывно содержащим пространством для $\mathbb{G}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{G}$ — множество элементов набора $\mathbb{G}$ с тем свойством, что для всякого $G \in \mathbb{G}$ существует гомеоморфизм h_X^G пространства G на элемент X множества $\mathbf{G}$. Для $G \in \mathbb{G}$ мы фиксируем такое пространство X и гомеоморфизм h_X^G.

Поскольку класс $\mathbf{S}$ насыщен, для множества $\mathbf{G}$, рассматриваемого как семейство топологических пространств, найдутся база
$$\mathbf{B} \equiv \{B^X \equiv \{U_\delta^X \colon \delta \in \tau\} \colon X \in \mathbf{G}\}$$
и $\mathbf{B}$-допустимое семейство
$$\mathrm{R}^{\mathbf{B}} \equiv \{\sim_{\mathbf{M}}^s \colon s \in \mathcal{F}\}$$
отношений эквивалентности на $\mathbf{G}$, такие что для всякого допустимого семейства
$$\mathrm{R} \equiv \{\sim^s \colon s \in \mathcal{F}\}$$

отношений эквивалентности на $\mathbf{G}$, являющегося финальным измельчением семейства $\mathrm{R}^{\mathbf{B}}$, содержащее пространство $\mathrm{T}(\mathbf{B},\mathrm{R})$ принадлежит классу $\mathbb{S}$.

Теперь возьмём семейство $\mathrm{R} = \{\sim^s\colon s \in \mathcal{F}\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

а) R является финальным измельчением семейства $\mathrm{R}^{\mathbf{B}}$;

б) для каждого $s \in \mathcal{F}$ из того, что $X \sim^s Y$ для $X, Y \in \mathbf{G}$, вытекает равносильность включений
$$(U_\delta^X)(U_\delta^X) \subset U_\eta^X, \quad (U_\delta^Y)(U_\delta^X) \subset U_\eta^Y$$
для любых $\delta, \varepsilon, \eta \in s$;

в) для каждого $s \in \mathcal{F}$ из того, что $X \sim^s Y$ для $X, Y \in \mathbf{G}$, вытекает равносильность включений
$$(U_\delta^X)^{-1} \subset U_\varepsilon^X, \quad (U_\delta^Y)^{-1} \subset U_\varepsilon^Y$$
для любых $\delta, \varepsilon \in s$.

Мы докажем, что содержащее пространство $\mathrm{T} \equiv \mathrm{T}(\mathbf{B},\mathrm{R})$ является непрерывно содержащим для $\mathbb{G}$. Из выбора базы $\mathbf{B}$ для $\mathbf{G}$ и семейства R отношений эквивалентности на $\mathbf{G}$ вытекает, что это пространство принадлежит классу $\mathbb{S}$. Для каждого $G \in \mathbb{G}$ зафиксируем пространство $X \in \mathbf{G}$ и гомеоморфизм h_X^G группы G на X. Существование такого пространства и такого гомеоморфизма следует из выбора набора $\mathbf{G}$. Для $G = X \in \mathbf{G}$ мы предполагаем, что h_X^G — тождественное отображение. Рассмотрим набор $\{(i_{\mathrm{T}}^X \circ h_X^G)(G)\colon G \in \mathbb{G}\}$ подмножеств T. Нам надо доказать, что этот набор непрерывен. Как легко убедиться, достаточно проверить, что набор $\mathcal{G} \equiv \{i_{\mathrm{T}}^X(X)\colon X \in \mathbf{G}\}$ непрерывен.

Возьмём две точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в элементе $i_{\mathrm{T}}^X(X)$ набора $\mathcal{G}$. Существуют точки x и y в X, для которых $i_{\mathrm{T}}^X(x) = \mathbf{a}$ и $i_{\mathrm{T}}^X(y) = \mathbf{b}$, т. е. $(x, X) \in \mathbf{a}$ и $(y, X) \in \mathbf{b}$. Пусть $\mathbf{c} = i_{\mathrm{T}}^X(z)$, где $z = xy$, т. е. $(z, X) \in \mathbf{c}$. Рассмотрим произвольную окрестность $U_\eta^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}) \in \mathrm{B}^{\mathrm{T}}$ точки $\mathbf{c}$ в T, где $\eta \in \tau$ и $\mathbf{H} \in \mathrm{C}(\sim^s)$ для некоторого $s \in \mathcal{F}$. Множество U_η^X является окрестностью точки $z = xy$ в X. Найдутся $\delta, \varepsilon \in \tau$, для которых U_δ^X и U_ε^X являются соответственно окрестностями точек x и y в X, причём
$$U_\delta^X U_\varepsilon^X \subset U_\eta^X. \tag{2.1}$$
Рассмотрим элемент t семейства $\mathcal{F}$, для которого $\{\delta, \varepsilon, \eta\} \cup s \subset t$. Обозначим элемент семейства $\mathrm{C}(\sim^t)$, содержащий X, через $\mathbf{L}$. Поскольку $s \subset t$, имеем $\mathbf{L} \subset \mathbf{H}$, и следовательно, $U_\eta^{\mathrm{T}}(\mathbf{L}) \subset U_\eta^{\mathrm{T}}(\mathbf{H})$. Заметим, что $U_\delta^{\mathrm{T}}(\mathbf{L})$ и $U_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\mathbf{L})$ являются окрестностями в T точек $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно. Поскольку $\delta, \varepsilon, \eta \in t$, по определению семейства R (см. условие б)) из включения (2.1) вытекает, что для любого $Y \in \mathbf{L}$ имеем $U_\delta^Y U_\varepsilon^Y \subset U_\eta^Y$, и следовательно,
$$i_{\mathrm{T}}^Y(U_\delta^Y) i_{\mathrm{T}}^Y(U_\varepsilon^Y) \subset i_{\mathrm{T}}^Y(U_\eta^Y). \tag{2.2}$$
Из (1.3) следует, что
$$h_{\mathrm{T}}^Y(U_\delta^Y) = i_{\mathrm{T}}^Y(Y) \cap U_\delta^{\mathrm{T}}(\mathbf{L}), \quad i_{\mathrm{T}}^Y(U_\varepsilon^Y) = i_{\mathrm{T}}^Y(Y) \cap U_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\mathbf{L}), \quad i_{\mathrm{T}}^Y(U_\eta^Y) = i_{\mathrm{T}}^Y(Y) \cap U_\eta^{\mathrm{T}}(\mathbf{L}),$$

откуда ввиду включения (2.2) получаем

$$\big(i_{\mathrm{T}}^{Y}(Y)\cap U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{L})\big)\big(i_{\mathrm{T}}^{Y}(Y)\cap U_{\varepsilon}^{\mathrm{T}}(\mathbf{L})\big)=i_{\mathrm{T}}^{Y}(Y)\cap U_{\eta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{L})\subset i_{\mathrm{T}}^{Y}(Y)\cap U_{\eta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}),$$

что и доказывает выполнение условия 1 в определении непрерывности.

Выполнение второго условия непрерывности доказывается аналогично. Возьмём точку $\mathbf{a}$ в $i_{\mathrm{T}}^{X}(X)\in\mathcal{G}$ и точку x в X, для которых $i_{\mathrm{T}}^{X}(x)=\mathbf{a}$, т. е. $(x,X)\in\mathbf{a}$. Предположим, что $\mathbf{a}^{-1}=i_{\mathrm{T}}^{X}(x^{-1})$, т. е. $(x^{-1},X)\in\mathbf{a}^{-1}$, и рассмотрим произвольную окрестность $U_{\eta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H})$ точки $\mathbf{a}^{-1}\in\mathrm{T}$, где $\eta\in\tau$ и $\mathbf{H}\in\mathrm{C}(\sim^{s})$ для некоторого $s\in\mathcal{F}$. У точки x найдётся окрестность U_{δ}^{X} в X, для которой $(U_{\delta}^{X})^{-1}\subset U_{\eta}^{X}$. Возьмём $t=\{\delta\}\cup s\in\mathcal{F}$ и $X\in\mathbf{L}\in\mathrm{C}(\sim^{s})$. Имеем $U_{\eta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{L})\subset U_{\eta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H})$, причём $U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{L})$ является окрестностью точки $\mathbf{a}$ в T. Поскольку $\delta,\eta\in s$, из определения семейства R (см. условие в)) вытекает, что $(U_{\delta}^{Y})^{-1}\subset U_{\eta}^{Y}$ для любого $Y\in\mathbf{L}$. Значит,

$$\big(i_{\mathrm{T}}^{Y}(U_{\delta}^{Y})\big)^{-1}\subset i_{\mathrm{T}}^{Y}(U_{\eta}^{Y}).$$

Из этого включения следует включение

$$\big(i_{\mathrm{T}}^{Y}(Y)\cap U_{\delta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{L})\big)^{-1}\subset i_{\mathrm{T}}^{Y}(Y)\cap U_{\eta}^{\mathrm{T}}(\mathbf{H}),$$

которое доказывает второе условие непрерывности, а вместе с ним и теорему. □

Следствие 2.4 вытекает из того, что все рассматриваемые в нём классы насыщенны.

2.4. Следствие. *Существует вполне регулярное пространство веса τ, которое является непрерывно содержащим пространством для класса всех топологических групп веса не больше τ.* □

Следствие 2.5 вытекает из того, что все рассматриваемые в нем классы пространств насыщенны (см. [3]).

2.5. Следствие. *Каждый из следующих классов содержит элемент, являющийся непрерывно содержащим пространством для подкласса всех принадлежащих этому классу топологических групп (во всех случаях под размерностью подразумевается малая индуктивная размерность):*

1) *класс всех вполне регулярных n-мерных пространств веса не больше τ, $n\in\omega$;*
2) *класс всех вполне регулярных счётномерных пространств веса не больше τ;*
3) *класс всех вполне регулярных сильно счётномерных пространств веса не больше τ;*
4) *класс всех вполне регулярных локально конечномерных пространств веса не больше τ;*
5) *класс всех вполне регулярных пространств веса не больше τ размерности* ind, *равной бесконечному ординалу $\alpha\in\tau^{+}$.* □

2.6. Некоторые проблемы.

1. Существуют ли универсальные элементы в классе всех n-мерных топологических групп со счётной базой?
2. Существуют ли универсальные элементы в классе всех счётномерных топологических групп со счётной базой?
3. Существуют ли универсальные элементы в классе всех сильно счётномерных топологических групп со счётной базой?
4. Существуют ли универсальные элементы в классе всех локально конечномерных топологических групп со счётной базой?
5. Существуют ли универсальные элементы в классе всех топологических групп со счётной базой размерности ind, равной бесконечному ординалу $\alpha \in \omega^+$?
6. Существуют ли универсальные элементы в подклассе всех элементов класса (i), которые сами являются топологическими группами, где $i = 1, 2, 3, 4, 5$ и $\tau \neq \omega$?

Литература

[1] Успенский В. В. Универсальная топологическая группа со счётной базой // Функц. анализ и его прил. — 1986. — Т. 20, № 2. — С. 86—87.

[2] Шкарин С. А. Об универсальных абелевых топологических группах // Матем. сб. — 1999. — Т. 190, № 7. — С. 127—144.

[3] Iliadis S. D. Universal Spaces and Mappings. — Amsterdam: Elsevier Science, 2005. — (North-Holland Math. Stud., Vol. 198).

[4] Uspenskij V. V. On the group of isometries of the Urysohn universal metric space // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1990. — Vol. 31, no. 1. — P. 181—182.