

Индуктивная размерность I кубов по нормальной базе*

А. В. КАРАСЁВ

Университет Ниписсинга, Канада
e-mail: alexandr@nipissingu.ca

К. Л. КОЗЛОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: kkozlov@mech.math.msu.su

УДК 515.127

Ключевые слова: большая индуктивная размерность, нормальная база, индуктивная размерность I по нормальной базе, куб, дендрит.

Аннотация

Показано, что $\{1, \infty\}$ — множество возможных индуктивных размерностей I по нормальным базам отрезка $I = [0, 1]$, а $\{n, n+1, \dots, \infty\}$ — множество возможных индуктивных размерностей I по нормальным базам n -мерных кубов I^n при $n \geq 2$.

Abstract

A. V. Karashev, K. L. Kozlov, Base normal inductive dimension I of cubes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 113–124.

It is shown that $\{1, \infty\}$ is the set of possible base normal inductive dimensions I of the segment $I = [0, 1]$ and $\{n, n+1, \dots, \infty\}$ is the set of possible base normal inductive dimensions I of the n -dimensional cubes I^n for $n \geq 2$.

1. Введение и предварительные сведения

Одна из причин изучения размерностно-подобных инвариантов — их использование для получения оценок классических размерностей. В [12] продемонстрировано использование индуктивной размерности I по нормальной базе для получения оценки большой индуктивной размерности Ind произведения компактов. Размерностно-подобный инвариант I был введён С. Илиадисом [11], и в его определении используется понятие нормальной базы.

*Первый автор поддержан Советом по естественным наукам и исследованиям Канады, грант 257231-09, второй автор поддержан РФФИ, проект 15-01-05369.

Размерности компактов, которые определяются кратностью покрытий, элементами которых являются множества из дополнений до нормальных баз, совпадают [8]. Случай тихоновских пространств рассмотрен в [9]. Для индуктивных размерностей по нормальным базам ситуация иная. Индуктивные размерности по нормальным базам простых метризуемых компактов (дендритов) различны [6]. Вопросы о возможных значениях индуктивных размерностей I по нормальным базам отрезка $I = [0, 1]$ и n -мерных кубов I^n были поставлены в [6, вопрос 4.7] и [12, вопрос 4.3] соответственно. Эти пространства являются одними из простейших, и изучение индуктивных размерностных инвариантов (метризуемых) компактов разумно начинать именно с них. Перспективным направлением исследований может стать выяснение возможности использования индуктивной размерности по нормальной базе для характеристики определённых классов (метризуемых) компактов.

В настоящей статье показано, что индуктивными размерностями I по нормальным базам отрезка $I = [0, 1]$ являются $\{1, \infty\}$ (теорема 1), а n -мерного куба I^n при $n \geq 2 - \{n, n+1, \dots, \infty\}$ (теорема 2). Кроме того, показано, что

- индуктивные размерности I по нормальным базам линейно упорядоченного компакта J — это или $\{0\}$, или $\{1, \infty\}$ (теорема 1);
- для любого $n \in \mathbb{N}$ существует дендрит T_n , множество индуктивных размерностей I по нормальным базам которого содержит множество $\{1, \dots, n\} \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$ (предложение 2).

В предложении 1 предложен метод продолжения нормальной базы с замкнутого подмножества совершенно нормального пространства на всё пространство с естественной оценкой индуктивной размерности I пространства по продолженной нормальной базе.

Всю предварительную информацию о нормальных базах можно найти, например, в [3, 6, 12]. Мы напомним лишь определение индуктивной размерности I пространства по нормальной базе и некоторые уточняющие характеристики нормальных баз. Для семейства $\mathcal{F}$ подмножеств пространства X введём обозначение $\mathcal{F}^c = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$, для подмножества A пространства X введём обозначение $\mathcal{F}|_A = \{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$.

Нормальная база $\mathcal{F}$ на пространстве X называется *отделяющей*, если для любых дизъюнктивных замкнутых подмножеств G_1, G_2 пространства X существуют дизъюнктивные элементы F_1, F_2 из базы $\mathcal{F}$, такие что $G_1 \subset F_1$ и $G_2 \subset F_2$. Легко убедиться, что любая нормальная база на компакте является отделяющей [6]. Имея дело с отделяющей нормальной базой, можно использовать понятие *разделителя* для любой пары дизъюнктивных замкнутых множеств, а не только для пар множеств из базы. Это соглашение будет использоваться ниже.

Нормальная база $\mathcal{F}$ называется *мультипликативной*, если счётные пересечения элементов из $\mathcal{F}$ принадлежат $\mathcal{F}$ [3]. Нормальная база $\mathcal{F}$ на пространстве X называется *наследственно нормальной*, если $\mathcal{F}|_A$ является нормальной базой на произвольном подмножестве A пространства X [3, определение 4].

Наследственно нормальная база $\mathcal{F}$ на пространстве X называется *совершенно нормальной*, если любой элемент $O \in \mathcal{F}^c$ является счётным объединением элементов из $\mathcal{F}$ [3, определение 5].

Определение 1 [3, определение 2]. Пусть $\mathcal{F}$ — нормальная база на пространстве X . *Индуктивной размерностью I пространства X по нормальной базе $\mathcal{F}$* является неотрицательное целое число или -1 , обозначаемое $I(X, \mathcal{F})$ и определяемое по индукции:

- а) $I(X, \mathcal{F}) = -1$ в том и только том случае, если $X = \emptyset$;
- б) $I(X, \mathcal{F}) \leq n$, где n — неотрицательное целое число, в том и только том случае, если для любой пары (F_1, F_2) дизъюнктивных элементов базы $\mathcal{F}$ существует разделитель (G_1, G_2) пары (F_1, F_2) , такой что $I(G_1 \cap G_2, \mathcal{F}|_{G_1 \cap G_2}) < n$, или, что эквивалентно, существуют дизъюнктивные элементы O_1, O_2 из $\mathcal{F}^c$, такие что $F_1 \subset O_1, F_2 \subset O_2$ и $I(L, \mathcal{F}|_L) < n$, где $L = X \setminus (O_1 \cup O_2)$ (L называется $\mathcal{F}$ -перегородкой).

Полагаем $I(X, \mathcal{F}) = \infty$ в том и только том случае, если отношение $I(X, \mathcal{F}) \leq n$ не выполнено ни для какого неотрицательного целого числа.

Большая индуктивная размерность Ind нормального пространства X — это индуктивная размерность I пространства X по нормальной базе $\mathcal{Z}(X)$ всех замкнутых подмножеств X . Для любой нормальной базы $\mathcal{F}$ на компакте X всегда $\text{Ind } X \leq I(X, \mathcal{F})$ [3, предложение 4]. Множеством всех возможных индуктивных размерностей I нульмерного компакта является $\{0\}$ [6, следствие 4.3].

Предполагается, что все пространства тихоновские, отображения пространств непрерывные, используются обозначения и терминология из [5]. Гомеоморфность пространств X и Y обозначается $X \cong Y$. Пространство X с нормальной базой $\mathcal{F}$ обозначается $(X, \mathcal{F})$, обозначение $(X, \mathcal{F}) \cong (Y, \mathcal{F}')$ означает, что существует гомеоморфизм $h: X \rightarrow Y$, такой что $\{h(F): F \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}'$. Через $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, (a, b) , где $a < b$, мы обозначаем замкнутый интервал, полуинтервалы и открытый интервал линейно упорядоченного пространства J соответственно; $\{0\}$ — наименьший и $\{1\}$ — наибольший элемент линейно упорядоченного компакта J ; $I = [0, 1]$. Замыкание подмножества A в X обозначается через $\bar{A}$, граница A обозначается через $\text{Bd } A$.

2. Размерность линейно упорядоченных компактов

Лемма 1. Пусть для нормальной базы $\mathcal{F}$ на линейно упорядоченном компакте J выполнено $I(J, \mathcal{F}) < \infty$. Тогда для любых двух замкнутых дизъюнктивных подмножеств J между ними существует наследственно несвязная $\mathcal{F}$ -перегородка.

Доказательство. Используем индукцию по $n = I(J, \mathcal{F})$. Считаем, что все компакты непусты. Проверка базы индукции $n = 0$ основана на следующем факте. Линейно упорядоченное пространство сильно нульмерно в том и только том случае, если оно наследственно несвязно (см., например, [5, задача 6.3.2]).

Предположим, что утверждение леммы выполнено для любой нормальной базы $\mathcal{F}$ на произвольном линейно упорядоченном компакте J с $I(J, \mathcal{F}) \leq n$. Пусть $\mathcal{F}$ — нормальная база на некотором J с $I(J, \mathcal{F}) = n + 1$. Рассмотрим два дизъюнктивных непустых замкнутых подмножества F_1 и F_2 в J . Можем считать, что F_1 и F_2 являются конечными объединениями дизъюнктивных замкнутых интервалов (поскольку конечные объединения открытых интервалов образуют большую базу на J), поэтому множество $\overline{J \setminus (F_1 \cup F_2)}$ также является объединением конечного числа дизъюнктивных замкнутых интервалов:

$$\begin{aligned} \overline{J \setminus (F_1 \cup F_2)} = \\ = \bigcup \{[a_i, b_i] : i = 1, 2, \dots, m, \ b_i < a_{i+1} \text{ для каждого } i = 1, 2, \dots, m-1\}. \end{aligned}$$

Докажем существование наследственно несвязной $\mathcal{F}$ -перегородки между F_1 и F_2 индукцией по количеству интервалов m .

Проверим выполнение базы индукции, когда $m = 1$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $F_1 = [0, a_1]$ и $F_2 = [b_1, 1]$ (в случае когда $a_1 = 0$ или $b_1 = 1$, объединение дизъюнктивных замкнутых непустых подмножества F_1 и F_2 является замкнутым интервалом $[b_1, 1]$ или $[0, a_1]$ соответственно; объединяя замкнутые интервалы $[0, b_1]$ или $[a_1, 1]$ с одним из множеств F_1 или F_2 , получаем разделитель пары (F_1, F_2) из дизъюнктивных замкнутых множеств).

Пусть $L \subset [a_1, b_1]$ — $\mathcal{F}$ -перегородка между F_1 и F_2 , такая что $I(L, \mathcal{F}|_L) \leq n$. Если L не наследственно несвязна, то существует связный замкнутый интервал $[a, b] \subset L$. По теореме монотонности [6, теорема 4.8] $I([a, b], \mathcal{F}|_{[a, b]}) \leq n$. По индуктивному предположению (по n) существуют $C_1, C_2 \in \mathcal{F}$, такие что $(C_1 \cap [a, b], C_2 \cap [a, b])$ является разделителем пары $(\{a\}, \{b\})$ в замкнутом интервале $[a, b]$ и $C_1 \cap C_2 \cap [a, b]$ наследственно несвязно. Так как C_1, C_2 — замкнутые подмножества J и $a \notin C_2, b \notin C_1$, то существуют замкнутые интервалы $[a', b']$ и $[a'', b'']$, такие что $[a'', b''] \subset (a, b) \subset [a, b] \subset (a', b')$ и $[a', a''] \cap C_2 = \emptyset, [b'', b'] \cap C_1 = \emptyset$. Так как база $\mathcal{F}$ отделяющая, то существуют $D_1, D_2, D \in \mathcal{F}$, такие что $[a, b] \subset D \subset (a', b'), [0, a] \subset D_1, D_1 \cap [a'', 1] = \emptyset, [b, 1] \subset D_2, D_2 \cap [0, b''] = \emptyset$, и $C_1 \cap C_2 \cap [a, b] = C_1 \cap C_2 \cap D$. Положим $G_j = (C_j \cap D) \cup D_j, j = 1, 2$. Тогда (G_1, G_2) является $\mathcal{F}$ -разделителем пары (F_1, F_2) , таким что $G_1 \cap G_2 = C_1 \cap C_2 \cap D$, поэтому оно наследственно несвязно.

Предположим, что утверждение доказано для всех линейно упорядоченных компактов и всех целых чисел, меньших $m > 1$. Проверим случай m . Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $[0, a_1] \subset F_1$ и $[b_1, a_2] \subset F_2$ (если $a_1 = 0$ или $b_1 = 1$, или $[0, a_1], [b_1, a_2]$ принадлежат одному элементу пары (F_1, F_2) , или что-то подобное, то рассмотрение может быть легко сведено к рассмотрению случая $m - 1$). По предположению индукции (по m) существует наследственно несвязная $\mathcal{F}$ -перегородка B между $F_1 \setminus [0, a_1]$ и $F_2 \cup [0, a_2]$. Используя базу индукции ($m = 1$), получаем, что существует наследственно несвязная $\mathcal{F}$ -перегородка C между $[0, a_1]$ и $[b_1, 1]$. Очевидно, что $C \cap B = \emptyset$.

Легко проверить, что $C \cup B$ — наследственно несвязная $\mathcal{F}$ -перегородка между F_1 и F_2 . $\square$

Теорема 1. Для любой нормальной базы $\mathcal{F}$ на линейно упорядоченном компакте J имеем, что

- 1) $I(J, \mathcal{F}) = 0$ в том и только том случае, если компакт J наследственно несвязен;
- 2) $I(J, \mathcal{F}) = 1$ или $I(J, \mathcal{F}) = \infty$ в том и только том случае, если компакт J не наследственно несвязен.

В частности, для любой нормальной базы $\mathcal{F}$ на отрезке $[0, 1]$ или $I([0, 1], \mathcal{F}) = 1$, или $I([0, 1], \mathcal{F}) = \infty$.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из уже упоминавшейся эквивалентности сильной нульмерности и наследственной несвязности для линейно упорядоченных пространств и [6, следствие 4.3].

Если для нормальной базы $\mathcal{F}$ на не наследственно несвязном линейно упорядоченном компакте J $I(J, \mathcal{F}) < \infty$, то по лемме 1 $I(J, \mathcal{F}) = 1$.

Построим нормальную базу $\mathcal{F}$ на не наследственно несвязном линейно упорядоченном компакте J с $I(J, \mathcal{F}) = \infty$. Если для нормальной базы $\mathcal{F}$ на не наследственно несвязном линейно упорядоченном компакте J существует его компонента связности J' , такая что $I(J', \mathcal{F}|_{J'}) = \infty$, то по теореме монотонности [6, следствие 4.9] $I(J, \mathcal{F}|_J) = \infty$.

Пусть J' — нетривиальная компонента связности J , т. е. замкнутый интервал. Любой плотный в себе компакт является *разложимым* пространством [10]. Пусть Q_1, Q_2 — дизъюнктные плотные подмножества J' и $\{0\} \in Q_1, \{1\} \in Q_2$. Семейство $\mathcal{F}_{Q_1, Q_2}$ всевозможных конечных объединений элементов множества

$$\{[x, y]: x \in Q_1, y \in Q_2, x < y\}$$

является нормальной базой на J' , и $I(J', \mathcal{F}_{Q_1, Q_2}) = \infty$. Доказательство несложно и аналогично доказательству следствия 4.5 из [6] (см. также [6, пример 4.6]). Легко проверить, что минимальное кольцо замкнутых множеств, содержащее семейство

$$\{[x, y]: x \in Q_1 \cup (J \setminus J'), y \in Q_2 \cup (J \setminus J'), x < y\}$$

является нормальной базой $\mathcal{F}$ на J и $\mathcal{F}|_{J'} = \mathcal{F}_{Q_1, Q_2}$. Значит, на не наследственно несвязном линейно упорядоченном компакте существует нормальная база $\mathcal{F}$, для которой $I(J, \mathcal{F}) = \infty$. $\square$

Замечание 1. В теореме 1 условие компактности линейно упорядоченного пространства существенно. В [6, предложение 5.1] показано, что множеством возможных индуктивных размерностей I пространства рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по нормальным базам является $\{0\} \cup \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Вопрос 1. Для каких $n, m \in \mathbb{N}, n \leq m$, существует метризуемый компакт, множеством возможных индуктивных размерностей I которого является

- а) $\{n, \dots, m\}$;
- б) $\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\}$?

3. Размерность n -мерных кубов при $n \geq 2$

Предложение 1. Пусть A — замкнутое подмножество наследственно нормального пространства X , $\mathcal{F}(A)$ — нормальная база на A . Тогда минимальное кольцо $\mathcal{F}(X)$ замкнутых множеств, содержащее $\mathcal{F}(A)$ и семейство

$$\{F \in \mathcal{Z}(X) : F \cap A \in \mathcal{F}(A)\},$$

является нормальной базой на X .

Если X совершенно нормальное пространство и нормальная база $\mathcal{F}(X)$ является отделяющей, то

$$\begin{aligned} \max\{I(A, \mathcal{F}(A)), \text{Ind } F : F \in \mathcal{F}(X), F \cap A = \emptyset\} \leq \\ \leq I(X, \mathcal{F}(X)) \leq \max\{I(A, \mathcal{F}(A)), \text{Ind } X\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Возьмём замкнутое множество $F \subset X$. Если $F \cap A = \emptyset$, то $F \in \mathcal{F}(X)$. Если $F \subset A$, то F является пересечением элементов из семейства $\mathcal{F}(A)$ и, значит, из $\mathcal{F}(X)$. В оставшемся случае пусть

$$A \cap F = \bigcap \{F_\alpha \in \mathcal{F}(A) : \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Тогда

$$F = \bigcap \{F_\alpha \cup F \in \mathcal{F}(X) : \alpha \in \mathcal{A}\}.$$

Поэтому $\mathcal{F}(X)$ является базой замкнутых множеств в X .

Очевидно, что $\mathcal{F}(X)$ является разделяющим кольцом.

Для дизъюнктивных множеств $F_j \in \mathcal{F}(X)$, $j = 1, 2$, существует разделитель (T_1, T_2) пары $(A \cap F_1, A \cap F_2)$ в A . Множества $F_1 \cup (A \setminus T_2)$ и $F_2 \cup (A \setminus T_1)$ — дизъюнктивные замкнутые множества в $X \setminus (T_1 \cap T_2)$. Существуют дизъюнктивные и открытые в $X \setminus (T_1 \cap T_2)$ (значит, и в X) множества O_j , $j = 1, 2$, такие что $F_1 \cup (A \setminus T_2) \subset O_1$, $F_2 \cup (A \setminus T_1) \subset O_2$. Очевидно, что $O_j \in \mathcal{F}(X)^c$, $j = 1, 2$. Значит, $(X \setminus O_2, X \setminus O_1)$ — разделитель пары (F_1, F_2) и $\mathcal{F}(X)$ базово нормально. Доказано, что $\mathcal{F}(X)$ — нормальная база на X .

Первое неравенство очевидно следует из теоремы монотонности [3, предложение 5]. Для доказательства второго неравенства используем индукцию по

$$m = \max\{I(A, \mathcal{F}(A)), \text{Ind } X\}.$$

Для проверки базы индукции, $m = 0$, возьмём дизъюнктивные множества $F_j \in \mathcal{F}(X)$, $j = 1, 2$. Существует разделитель (T_1, T_2) пары $(F_1 \cap A, F_2 \cap A)$ в A , такой что $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Так как $T_j \in \mathcal{F}(X)$, $j = 1, 2$, и $T_1 \cap F_2 = \emptyset$, $T_2 \cap F_1 = \emptyset$, то множества $S_j = F_j \cup T_j \in \mathcal{F}(X)$, $j = 1, 2$, являются дизъюнктивной парой множеств в X и $A \subset S_1 \cup S_2$. Так как $\text{Ind } X = 0$, то существует разделитель (R_1, R_2) пары (S_1, S_2) в X , такой что $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Тогда $R_j \cap A = T_j$, $j = 1, 2$, и поэтому $R_j \in \mathcal{F}(X)$, $j = 1, 2$. Нами доказано, что $I(X, \mathcal{F}(X)) = 0$.

Пусть при $k < m$ второе неравенство выполнено. Возьмём дизъюнктивные множества $F_j \in \mathcal{F}(X)$, $j = 1, 2$. Существует разделитель (T_1, T_2) пары

$(F_1 \cap A, F_2 \cap A)$ в A , такой что $I(T_1 \cap T_2, \mathcal{F}(A)|_{T_1 \cap T_2}) < m$. Множества

$$S_j = (F_j \cup T_j) \setminus (T_1 \cap T_2) \in \mathcal{F}(X)|_{X \setminus (T_1 \cap T_2)}, \quad j = 1, 2,$$

являются дизъюнктивной парой множеств в $X \setminus (T_1 \cap T_2)$ и $A \setminus (T_1 \cap T_2) \subset S_1 \cup S_2$. Так как X совершенно нормально, то мультипликативная нормальная база $\mathcal{Z}(X)$ всех замкнутых подмножеств X совершенно нормальна. Поэтому $\mathcal{Z}(X)|_{X \setminus (T_1 \cap T_2)}$ — мультипликативная совершенно нормальная база на $X \setminus (T_1 \cap T_2)$ [3]. Кроме того (см., например, [1, гл. 7, § 3, теорема 5; 7, теорема 2.3.6]), $\text{Ind}(X \setminus (T_1 \cap T_2)) \leq \text{Ind } X$. Поэтому для пары (S_1, S_2) дизъюнктивных в $X \setminus (T_1 \cap T_2)$ множеств существует разделитель (R_1, R_2) в $X \setminus (T_1 \cap T_2)$, такой что $\text{Ind}(R_1 \cap R_2) < m$. Очевидно, что $\overline{R_j} \subset R_j \cup (T_1 \cap T_2)$, $j = 1, 2$. Поэтому $F_j \subset R_j \cup T_j \in \mathcal{F}(X)$, $j = 1, 2$. Значит, $(R_1 \cup T_1, R_2 \cup T_2)$ — разделитель пары (F_1, F_2) в X . Так как $R_1 \cap T_2 = \emptyset$, $R_2 \cap T_1 = \emptyset$, имеем

$$(R_1 \cup T_1) \cap (R_2 \cup T_2) = (R_1 \cap R_2) \cup (T_1 \cap T_2).$$

Очевидно, что $\mathcal{F}(X)|_{(R_1 \cap R_2) \cup (T_1 \cap T_2)}$ — минимальное кольцо, содержащее $\mathcal{F}(A)|_{T_1 \cap T_2}$ и

$$\{F \in \mathcal{Z}((R_1 \cap R_2) \cup (T_1 \cap T_2)) : F \cap (T_1 \cap T_2) \in \mathcal{F}(A)|_{T_1 \cap T_2}\},$$

и $\text{Ind}(R_1 \cap R_2) < m$, $I(T_1 \cap T_2, \mathcal{F}(A)|_{T_1 \cap T_2}) < m$. По [6, предложение 4.1] $\text{Ind}(T_1 \cap T_2) < m$, и $\text{Ind}((R_1 \cap R_2) \cup (T_1 \cap T_2)) < m$ по теореме суммы (см., например, [3, гл. 7, § 3, теорема 6; 7, теорема 2.3.8]). По индуктивному предположению

$$I((R_1 \cap R_2) \cup (T_1 \cap T_2), \mathcal{F}(X)|_{(R_1 \cap R_2) \cup (T_1 \cap T_2)}) < m,$$

и выполнение второго неравенства доказано. $\square$

В [6, предложение 4.10] для любого целого числа $n \geq 1$ построены метризуемый компакт T_n и нормальная база $\mathcal{F}_n$ на T_n , такие что $\text{Ind } T_n = 1$, $I(T_n, \mathcal{F}_n) = n$. К сожалению в описании правильной идеи есть недостаток. Ниже мы дадим правильное описание и усилим результат предложения 4.10 из [6].

Пространство T_n , $n \geq 1$, — подмножество куба I^n (более точно, прямоугольного параллелепипеда $[0, 1] \times [0, 1/2] \times \dots \times [0, 1/2^n]$), являющееся объединением счётного числа отрезков:

$$\begin{aligned} T_n = & \{(x_i)_{i=1}^n : x_1 \in [0, 1], x_2 = \dots = x_n = 0\} \cup \\ & \cup \left\{ \left\{ (x_i)_{i=1}^n : x_1 = \frac{k}{2^{m_1}}, x_2 \in \left[0, \frac{1}{2^{m_1}}\right], x_3 = \dots = x_n = 0 \right\} : \right. \\ & \left. m_1, k \in \mathbb{N}, k < 2^{m_1}, \frac{k}{2^{m_1}} - \text{несократимая дробь} \right\} \cup \\ & \cup \left\{ \left\{ (x_i)_{i=1}^n : x_1 = \frac{k_1}{2^{m_1}}, x_2 = \frac{k_2}{2^{m_1+m_2}}, x_3 \in \left[0, \frac{1}{2^{m_1+m_2}}\right], x_4 = \dots = x_n = 0 \right\} : \right. \\ & \left. m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}, k_j < 2^{m_j}, \frac{k_j}{2^{m_j}} - \text{несократимая дробь}, j = 1, 2 \right\} \cup \dots \cup \end{aligned}$$

$$\cup \left\{ \left\{ (x_i)_{i=1}^n : x_1 = \frac{k_1}{2^{m_1}}, \dots, x_{n-1} = \frac{k_{n-1}}{2^{m_1+\dots+m_{n-1}}}, x_n \in \left[0, \frac{1}{2^{m_1+\dots+m_{n-1}}} \right] \right\} : \right. \\ \left. m_j, k_j \in \mathbb{N}, k_j < 2^{m_j}, \frac{k_j}{2^{m_j}} - \text{несократимая дробь}, j = 1, \dots, n-1 \right\}.$$

Заметим, что $T_1 = I$ и T_2 — континуум «гребёнка», описанный в [4, гл. 6, § 49, VI].

Дадим наглядное описание пространств T_n , $n \geq 3$. Пространство T_3 можно получить из T_2 следующим образом: возьмём T_2 и для любых $m, k \in \mathbb{N}$, $k < 2^m$, $\frac{k}{2^m}$ — несократимая дробь, приклеим к «зубцу»

$$\left\{ (x_1, x_2) \in T_2 : x_1 = \frac{k}{2^m}, x_2 \in \left[0, \frac{1}{2^m} \right] \right\}$$

«основание» «гребёнки» T_2 , ужатой в 2^m раз. Пространство T_{n+1} , $n \geq 2$, получается из T_2 приклеиванием к «зубцу»

$$\left\{ (x_1, x_2) \in T_2 : x_1 = \frac{k}{2^m}, x_2 \in \left[0, \frac{1}{2^m} \right] \right\}$$

«гребёнки» T_2 «основания»

$$\{(x_i)_{i=1}^n \in T_{n-1} : x_1 \in [0, 1], x_2 = \dots = x_{n-1} = 0\}$$

«гребёнки» T_{n-1} , ужатой в 2^m раз.

Предложение 2. Для любого целого числа $n \geq 1$ метризуемый компакт T_n является дендритом, и для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, и $k = \infty$ существует нормальная база $\mathcal{F}_{n,k}$ на T_n , такая что $I(T_n, \mathcal{F}_{n,k}) = k$.

Доказательство. Для доказательства того, что пространства T_n , $n \in \mathbb{N}$, являются дендритами, нам необходимо проверить то, что они локально связны и не содержат окружности (простые замкнутые кривые). Установим локальную связность по индукции. Очевидно, что $T_1 = I$ является локально связным, и пусть T_k локально связно для всех $k < n$. Возьмём произвольную точку $p \in T_n$. Если p не принадлежит «основанию»

$$\{(x_i)_{i=1}^n \in T_n : x_1 \in [0, 1], x_2 = \dots = x_n = 0\}$$

пространства T_n , то существует её окрестность, пересекающая только один «зубец»

$$\left\{ (x_i)_{i=1}^n \in T_n : x_1 = \frac{k}{2^m}, x_2 > 0 \right\},$$

которому принадлежит точка p , и мы можем использовать предположение индукции. Иначе можно взять прямоугольную окрестность O точки p вида $J \times [0, p_1) \times \dots \times [0, p_n)$, где J является открытым интервалом (или полуинтервалом), содержащим проекцию точки p на первый сомножитель. Из определения T_n и выпуклости множества O сразу получаем, что эта окрестность линейна связна (достаточно использовать последовательность отрезков, которые соединяют произвольную точку q с её проекцией q_{n-1} на T_{n-1} , затем

отрезок, соединяющий q_{n-1} и её проекцию q_{n-2} на T_{n-2} , и т. д.). Так как окрестность O может быть выбрана произвольно малой, то локальная связность доказана.

Легко убедиться, что для двух различных точек $p, q \in T_n$, $n \in \mathbb{N}$, существует точка s , такая что точки p, q принадлежат различным компонентам $T_n \setminus \{s\}$. Если пространство T_n содержит окружность, то данное свойство не реализуется ни для какой пары точек на данной окружности. Значит, T_n — дендрит, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\mathcal{F}_d = \mathcal{F}_{Q_d, Q_d}$ — нормальная база на $[0, 1]$, являющаяся минимальным кольцом замкнутых множеств, содержащим семейство $\{[x, y] : x, y \in Q_d, x < y\}$, где Q_d — множество двоично-рациональных чисел, $\mathcal{F}_p = \mathcal{F}_{Q_1, Q_2}$ — нормальная база на $[0, 1]$, являющаяся минимальным кольцом замкнутых множеств, содержащим семейство $\{[x, y] : x \in Q_1, y \in Q_2, x < y\}$, где $Q_1 = \{0\} \cup \mathbb{P}$, $Q_2 = \mathbb{P} \cup \{1\}$ и $\mathbb{P}$ — множество иррациональных чисел (см. [6, примеры 2.3, 4.6]). Для $n, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, зададим нормальную базу $\mathcal{F}'_{n,k}$ на I^n :

$$\mathcal{F}'_{n,k} = \underbrace{\mathcal{F}_p \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_p}_{n-k \text{ экземпляров}} \otimes \underbrace{\mathcal{F}_d \otimes \dots \otimes \mathcal{F}_d}_{k \text{ экземпляров}}.$$

Положим $\mathcal{F}_{n,k} = \mathcal{F}'_{n,k}|_{T_n}$. Докажем, что

$$I(T_n, \mathcal{F}_{n,k}) = k.$$

Вначале рассмотрим случай $n = k$. Из [6, следствие 3.7] вытекает, что $I([0, 1]^n, \mathcal{F}'_{n,n}) = n$. Так как T_n — замкнутое подмножество $[0, 1]^n$, из [6, следствие 4.9] вытекает, что $I(T_n, \mathcal{F}_{n,n}) \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. Неравенство $I(T_n, \mathcal{F}_{n,n}) \geq n$, $n \in \mathbb{N}$, докажем по индукции. Очевидно, что $I(T_1 = [0, 1], \mathcal{F}_{1,1}) = 1$ (см. [6, пример 4.6(b)]). Кроме того, для любого бесконечного множества $F \in \mathcal{F}_{1,1}$ (которое на самом деле содержит отрезок) имеем $I(F, \mathcal{F}_{1,1}|_F) = 1$. Пусть неравенство $I(T_k, \mathcal{F}_{k,k}) \geq k$ выполнено для всех $k < n$. Тогда если рассмотреть одноточечные подмножества $\{0, \dots, 0\}$ и $\{1, 0, \dots, 0\} \in T_n$, то несложно показать, что любая $\mathcal{F}_{n,n}$ -перегородка между ними содержит множество вида $(\{q\} \times F_2 \times \dots \times F_n) \cap T_n$, где q — двоично-рациональное число, $F_j \in \mathcal{F}_{Q_d, Q_d}$ является отрезком, $j = 2, \dots, n$. Так как $(\{q\} \times F_2 \times \dots \times F_n) \cap T_n$ содержит копию T пространства T_{n-1} и, кроме того, $(T, \mathcal{F}_{n,n}|_T) \cong (T_{n-1}, \mathcal{F}_{n-1, n-1})$, то по предположению индукции

$$I((\{q\} \times F_2 \times \dots \times F_n) \cap T_n, \mathcal{F}_{n,n}|_{(\{q\} \times F_2 \times \dots \times F_n) \cap T_n}) \geq n - 1.$$

Тем самым $I(T_n, \mathcal{F}_{n,n}) = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Так как замкнутое подмножество

$$\begin{aligned} T = \bigcup \left\{ (x_i)_{i=1}^n \in T_n : x_1 = \frac{k_1}{2^{m_1}}, \dots, x_{n-k} = \frac{k_{n-k}}{2^{m_1 + \dots + m_{n-k}}}, \right. \\ \left. x_{n-k+1} \in \left[0, \frac{1}{2^{m_1 + \dots + m_{n-k}}} \right] : \right. \\ \left. m_j, k_j \in \mathbb{N}, k_j < 2^{m_j}, \frac{k_j}{2^{m_j}} \text{ — несократимая дробь, } j = 1, \dots, n-k \right\} \end{aligned}$$

пространства T_n гомеоморфно пространству T_k и, кроме того, $(T, \mathcal{F}_{n,k}|_T) \cong (T_k, \mathcal{F}_{k,k})$, то, принимая во внимание [6, следствие 4.9], имеем, что

$$I(T_n, \mathcal{F}_{n,k}) \geq k.$$

Индукцией по n покажем, что $I(T_n, \mathcal{F}_{n,k}) \leq k$ для $n \geq 2$, $k = 1, \dots, n$.

База индукции $n = 2$. Случай $k = 2$ доказан выше. В случае $k = 1$ возьмём два дизъюнктивных замкнутых подмножеств F_1 и F_2 пространства T_2 . Используя компактность «основания»

$$\{(x_1, x_2) \in T_2 : x_1 \in [0, 1], x_2 = 0\},$$

мы можем найти такие два прямоугольника $T_j \times [0, t] \in \mathcal{F}_{2,1}$, $j = 1, 2$, что $[0, 1] = T_1 \cup T_2$; $T_1 \cap T_2$ является конечным множеством иррациональных чисел; $t \in Q_d$; $F_2 \cap (T_1 \times [0, t]) = \emptyset$, $F_1 \cap (T_2 \times [0, t]) = \emptyset$.

Границей каждого прямоугольника $T_j \times [0, t]$, $j = 1, 2$, является конечное множество точек $\{x_1^j\} \times \{t\}, \dots, \{x_{k(j)}^j\} \times \{t\}$, $x_s^j \in Q_d$, и $\{y_1^j\} \times \{0\}, \dots, \{y_{m(j)}^j\} \times \{0\}$, $y_s^j \in \mathbb{P}$. На каждом множестве $(\{x_s^j\} \times [t, 1]) \cap T_2$ существует $\mathcal{F}_{2,1}|_{(\{x_s^j\} \times [t, 1]) \cap T_2}$ -перегородка P_s^j между $F_1 \cap ((\{x_s^j\} \times [t, 1]) \cap T_2)$ и $F_2 \cap ((\{x_s^j\} \times [t, 1]) \cap T_2)$, содержащая конечное множество точек из Q_d (мы добавляем точки $\{x_s^j\} \times \{t\}$ к F_j при построении перегородки). Поэтому можно найти нульмерную $\mathcal{F}_{2,1}$ -перегородку между F_1 и F_2 , содержащую конечное множество точек: подмножество, являющееся объединением P_s^j , $j = 1, 2$, $s = 1, \dots, k(j)$, и $\{y_s^j\} \times \{0\}$, $j = 1, 2$, $s = 1, \dots, m(j)$. Тем самым $I(T_2, \mathcal{F}_{2,1}) = 1$.

Предположим, что утверждение верно для всех $m < n$ и $k = 1, \dots, m$. Рассмотрим случай $m = n$. Случай $k = n$ доказан выше. Для остальных случаев ($k < n$) возьмём пару замкнутых подмножеств F_1 и F_2 в T_n . Используя компактность «основания»

$$\{(x_i)_{i=1}^n \in T_n : x_1 \in [0, 1], x_2 = \dots = x_n = 0\},$$

мы можем найти два прямоугольника $\Pi_j = T_j \times [0, t_2] \times \dots \times [0, t_n] \in \mathcal{F}_{n,k}$, $j = 1, 2$, таких что $[0, 1] = T_1 \cup T_2$; $T_1 \cap T_2$ является конечным множеством иррациональных чисел; $t_s \in \mathbb{P}$ для $2 \leq s < n - k$, $t_s \in Q_d$ для $s \geq n - k$; $F_2 \cap \Pi_1 = \emptyset$, $F_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$.

Граница каждого прямоугольника Π_j , $j = 1, 2$, является объединением $n - k$ конечного множества точек с $1, 2, \dots, n - k$ ненулевыми первыми координатами соответственно

$$\{t_1^j\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}, \dots, \{t_{m(j)}^j\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}, \quad \{t_s^j\} \in \mathbb{P}, \dots,$$

$$\{d_{1,1}^j\} \times \dots \times \{d_{1,n-k-1}^j\} \times \{t_{n-k}\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}, \dots,$$

$$\{d_{k(j),1}^j\} \times \dots \times \{d_{k(j),n-k-1}^j\} \times \{t_{n-k}\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}, \quad d_{l,s}^j \in Q_d,$$

$t_{n-k} \in \mathbb{P}$ — концевые точки сторон соответствующего прямоугольника Π_j , $j = 1, 2$,

и объединение $k - 1$ семейства конечных (возможно, пустых) попарно дизъюнктивных множеств

$$\begin{aligned}
T_{1,n-k+1}^j &= \\
&= (\{b_{1,1}^j\} \times \dots \times \{b_{1,n-k}^j\} \times \{t_{n-k+1}\} \times [0, t_{n-k+2}] \times \dots \times [0, t_n]) \cap T_n, \dots, \\
T_{n(j,n-k+1),n-k+1}^j &= \\
&= (\{b_{n(j,n-k+1),1}^j\} \times \dots \times \{b_{n(j,n-k+1),n-k}^j\} \times \\
&\quad \times \{t_{n-k+1}\} \times [0, t_{n-k+2}] \times \dots \times [0, t_n]) \cap T_n, \quad 0 < b_{s,l}^j < t_l, \quad b_{s,t}^j \in Q_d, \dots, \\
T_{1,n-1}^j &= (\{b_{1,1}^j\} \times \dots \times \{b_{1,n-2}^j\} \times \{t_{n-1}\} \times [0, t_n]) \cap T_n, \dots, \\
T_{n(j,n),n-1}^j &= (\{b_{n(j,n),1}^j\} \times \dots \times \{b_{n(j,n),n-2}^j\} \times \{t_{n-1}\} \times [0, t_n]) \cap T_n, \\
&\quad 0 < b_{s,l}^j < t_l, \quad b_{s,t}^j \in Q_d.
\end{aligned}$$

Заметим, что семейства всех точек и множества $T_{s,l}^j$, $l = n - k + 1, \dots, n - 1$, $s = 1, \dots, n(j, l)$, попарно дизъюнкты. Также очевидно, что каждое множество $T_{s,l}^j$, $l = n - k + 1, \dots, n - 1$, $s = 1, \dots, n(j, l)$, можно рассматривать как замкнутое подмножество T_{n-l} . Кроме того, ограничение нормальной базы $\mathcal{F}_{n,k}$ с T_n на $T_{s,l}^j$ совпадает с ограничением нормальной базы $\mathcal{F}_{n-l,n-l}$ с T_{n-l} на $T_{s,l}^j$, рассматриваемое как замкнутое подмножество T_{n-l} . Тем самым по индуктивному предположению $I(T_{s,l}^j, \mathcal{F}_{n,k}|_{T_{s,l}^j}) \leq k - 1$, $l = n - k + 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, n(j, l)$. Поэтому $I(\text{Bd } \Pi_j, \mathcal{F}|_{\Pi_j}) \leq k - 1$, $j = 1, 2$.

Дополнение до $\Pi_1 \cup \Pi_2$ в T_n принадлежит конечному объединению дизъюнктивных подмножеств

$$\begin{aligned}
S_{s,l}^j &= (\{c_{s,1}^j\} \times \dots \times \{c_{s,l-1}^j\} \times [t_l, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]) \cap T_n, \\
0 &< c_{s,l}^j < t_l, \quad c_{s,t}^j \in Q_d, \quad l = 2, \dots, n, \quad s = 1, \dots, i(j, l), \\
t_l &\in \mathbb{P} - \text{концевая точка соответствующей стороны прямоугольника } \Pi_j, \quad j = 1, 2.
\end{aligned}$$

Каждое множество $S_{s,l}^j$, $l = 2, \dots, n$, $s = 1, \dots, i(j, l)$, можно рассматривать как замкнутое подмножество T_{n-l+1} . Кроме того, ограничение нормальной базы $\mathcal{F}_{n,k}$ с T_n на $S_{s,l}^j$ совпадает с ограничением нормальной базы $\mathcal{F}_{n-l+1,v}$, где $v = k$, если $n - k \leq l - 1$, и $v = n - l + 1$ иначе, с T_{n-l+1} на $S_{s,l}^j$, рассматриваемое как замкнутое подмножество T_{n-l+1} . Тем самым по индуктивному предположению существует $\mathcal{F}_{n,k}|_{S_{s,l}^j}$ -перегородка между $F_1 \cap S_{s,l}^j$ и $F_2 \cap S_{s,l}^j$, индуктивная размерность I по нормальной базе которой не превосходит k (мы добавляем точки $\{c_{s,1}^j\} \times \dots \times \{c_{s,l-1}^j\} \times \{t_l\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ к F_j при построении перегородки).

Поэтому можно найти $\mathcal{F}_{n,k}$ -перегородку между F_1 и F_2 , которая является дизъюнктивным объединением точек (нульмерных множеств) и множеств размерности, не превосходящей k . Из этого следует, что $I(T_n, \mathcal{F}_{n,k}) \leq k$ для $n \geq 2$, $k = 1, \dots, n$.

В случае $k = \infty$ мы можем взять нормальную базу на «основании» «гребёнки» T_n , в которой её индуктивная размерность I бесконечна (см. теорему 1), и затем применить предложение 1. $\square$

Вопрос 2. Каковы всевозможные индуктивные размерности I по нормальным базам пространств T_n ?

Так как любой дендрит вложим в плоскость (см., например, [2, § 13, гл. 5]), из предложений 1, 2 и [6, предложение 4.1] вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, множество всевозможных индуктивных размерностей I по нормальным базам пространств I^n является множеством $\{k \in \mathbb{N}: k \geq n\} \cup \{\infty\}$.

Замечание 2. В [6, теорема 4.12] показано, что существует метризуемый компакт, множество возможных индуктивных размерностей I по нормальным базам которого есть $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Вопрос 3. Для каких $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, существует метризуемый компакт, возможные индуктивные размерности I по нормальным базам которого составляют множество $\{n, \dots, m\} \cup \{\infty\}$?

Пример отрезка I даёт положительный ответ на вопрос 3 в случае $n = m = 1$.

Учась на механико-математическом факультете университета, авторы статьи слушали обязательные и специальные курсы, читаемые А. Т. Фоменко. Благодарим Анатолия Тимофеевича за полученные знания.

Литература

- [1] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1973.
- [2] Борсук К. Теория ретрактов. — М.: Мир, 1971.
- [3] Георгиу Д., Илиадис С., Козлов К. Л. Индуктивная размерность пространства по нормальной базе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2009. — № 3. — С. 7–14.
- [4] Куратовский К. Топология. Т. II. — М.: Мир, 1969.
- [5] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
- [6] Chatyrko V. A., Iliadis S. D., Kozlov K. L. On the base dimension I for (compact) spaces // Questions Answers in Gen. Topology. — 2010. — Vol. 28, no. 2. — P. 173–185.
- [7] Engelking R. Theory of Dimensions. Finite and Infinite. — Heldermann, 1995. — (Sigma Ser. Pure Math.; Vol. 10).
- [8] Georgiou D., Iliadis S., Kozlov K. L. Covering dimension d by a normal base // Topology Appl. — 2011. — Vol. 158, no. 15. — P. 1990–1996.
- [9] Georgiou D., Iliadis S., Kozlov K. L. The covering dimension invariants // Topology Appl. — 2012. — Vol. 159, no. 9. — P. 2392–2403.
- [10] Hewitt E. A problem of set-theoretic topology // Duke Math. J. — 1943. — Vol. 10. — P. 309–333.
- [11] Iliadis S. D. Universal Spaces and Mappings. — Amsterdam: Elsevier, 2005. — (North-Holland Math. Stud.; Vol. 198).
- [12] Karashev A., Kozlov K. L. Computation of inductive dimensions of product of compacta // Topology Appl. — 2015. — Vol. 179. — P. 131–148.