О числе нетривиальных проективных преобразований замкнутых многообразий

В. С. МАТВЕЕВ
Йенский университет
им. Фридриха Шиллера, Германия
e-mail: vladimir.matveev@uni-jena.de

УДК 514.7

Ключевые слова: проективные преобразования, изометрии, замкнутые римановы многообразия.

Аннотация

Мы покажем, что для любого замкнутого риманова многообразия множество смежных классов группы проективных преобразований по группе изометрий содержит не более двух элементов, за исключением тех случаев, когда метрика имеет постоянную положительную секционную кривизну или любое проективное преобразование является аффинным преобразованием.

Abstract

V. S. Matveev, On the number of nontrivial projective transformations of closed manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 125—131.

We show that for a closed Riemannian manifold the quotient of the group of projective transformations by the group of isometries contains at most two elements unless the metric has constant positive sectional curvature or every projective transformation is an affine transformation.

Посвящается Анатолию Тимофеевичу Фоменко
по случаю его семидесятилетия

Пусть (M, g) — гладкое замкнутое риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$. Под *проективным преобразованием* (M, g) мы понимаем диффеоморфизм $\varphi\colon M \to M$, переводящий геодезические, рассматриваемые как непараметризованные кривые, в геодезические. Проективные преобразования (M, g) естественным образом образуют группу, которую мы обозначаем через Proj. Группа изометрий многообразия (M, g), которую мы обозначаем через Iso, образует подгруппу группы Proj. Следующая теорема, являющаяся основным результатом нашей статьи, отвечает на следующий естественный вопрос: насколько бо́льшим может быть множество смежных классов $\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}$?

Теорема 1. *Пусть (M, g) — гладкое связное замкнутое риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$. Предположим, что $|\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}| > 2$. Тогда либо g является* *метрикой постоянной положительной секционной кривизны, либо любое проективное преобразование является аффинным преобразованием, т. е. сохраняет связность Леви-Чивита метрики g.*

Другими словами, если связное замкнутое риманово многообразие размерности не меньше 2, секционная кривизна которого не является положительной константой, допускает два неаффинных проективных преобразования φ и ψ, то их композиция $\varphi \circ \psi$ — изометрия.

Возможны оба варианта, описанных в теореме 1. Хорошо известно (см., например, [7, пример 2]), что для стандартной сферы $(S^n, g_{\mathrm{standard}})$ имеет место равенство

$$\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso} = \mathrm{SL}(n+1, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(n+1, \mathbb{R}),$$

поэтому множество $\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}$ состоит из бесконечного числа элементов.

Заметим, однако, что для некоторых факторов нечётномерных сфер постоянной положительной секционной кривизны $|\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}| = 1$. Это следует из [6, теорема 1] и конкретного трёхмерного примера, описанного в [10, § 1.4], который может быть обобщён на случай произвольной нечётной размерности.

Напомним также пример 4 из [7], для которого $|\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}| = \infty$, но каждое проективное преобразование является аффинным преобразованием. Рассмотрим стандартный тор $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, где действие группы $\mathbb{Z}^2$ порождается стандартными сдвигами

$$(x, y) \mapsto (x+1, y), \quad (x, y) \mapsto (x, y+1)$$

вдоль стандартных базисных векторов. Обозначим через g метрику на T^2, которая индуцируется стандартной плоской метрикой на $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим далее стандартное действие $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ на $\mathbb{R}^2$. Оно индуцирует эффективное действие $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ на T^2, которое, очевидно, сохраняет связность Леви-Чивита g. Отсюда следует, что $|\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}| = \infty$. Заметим, что этот двумерный и плоский пример несложно распространить на неплоские многообразия больших размерностей путём взятия прямых произведений с компактными многообразиями.

Построим теперь пример замкнутого риманова многообразия произвольной размерности $n \geqslant 2$, для которого $\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}$ содержит ровно два элемента, но которое при этом не допускает аффинных неизометричных преобразований. Двумерная версия этого примера описана в [9, § 1.3] и в [7, пример 4]. Рассмотрим прямое произведение $S^1 \times M \times S^1$, где S^1 — окружность, а M является произвольным замкнутым связным многообразием размерности $n-2$. Обозначим через x и z стандартные циклические координаты на первой и второй S^1; мы предполагаем, что $x, z \in (\mathbb{R} \mod 1)$. Обозначим через $y^1, \ldots, y^{n-2}$ локальные координаты на многообразии M. Возьмём произвольную риманову метрику

$$g = \sum g_{ij} dy^i dy^j$$

на M и гладкую непостоянную 1-периодическую функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такую что $f > 1$.

Рассмотрим следующую метрику на $S^1 \times M \times S^1$:

$$\left(f(x) - \frac{1}{f(z)}\right)(f(x)-1)\,dx^2 + (f(x)-1)\left(1 - \frac{1}{f(z)}\right)\sum g_{ij}dy^i dy^j + \\ + \left(f(x) - \frac{1}{f(z)}\right)\left(1 - \frac{1}{f(z)}\right)dz^2.$$

Рассмотрим диффеоморфизм $\varphi\colon S^1 \times M \times S^1$, заданный формулой

$$\varphi(x,y,z) = (z,y,x),$$

где y обозначает точку на M. Этот диффеоморфизм порождает на многообразии метрику

$$\left(f(x) - \frac{1}{f(z)}\right)(f(x)-1)\frac{f(z)}{f(x)^2}\,dx^2 + \\ + (f(x)-1)\left(1 - \frac{1}{f(z)}\right)\frac{f(z)}{f(x)}\sum g_{ij}\,dy^i\,dy^j + \\ + \left(f(x) - \frac{1}{f(z)}\right)\left(1 - \frac{1}{f(z)}\right)\frac{f(z)^2}{f(x)}\,dz^2,$$

которая по теореме Леви-Чивита [5] проективно эквивалентна вышеуказанной метрике (т. е. у этих метрик одни и те же геодезические), и следовательно, диффеоморфизм φ является проективным преобразованием.

Замечание 1. Диффеоморфизм $\varphi\colon (x,y,z) \mapsto (z,y,x)$, используемый в примере выше, неориентируемый. Можно легко изменить пример так, чтобы проективное преобразование стало ориентируемым. Действительно, в размерностях не меньше 3 можно всегда выбрать (M,g) так, чтобы оно допускало меняющую ориентацию изометрию $\alpha\colon M \to M$, и вместо диффеоморфизма φ рассмотреть диффеоморфизм $(x,y,z) \mapsto (z,\alpha(y),x)$. Та же самая идея работает и в размерности 2: можно взять чётную функцию f и заменить диффеоморфизм φ на его суперпозицию с меняющей ориентацию симметрией $(x,y,z) \mapsto (-x,y,z)$.

Следующий частный случай теоремы 1 принадлежит А. Зегибу (см. [11], где также перечислены некоторые предыдущие результаты в этом направлении). Краткий обзор и историю проблемы можно также прочитать во введениях к [9] и [7]. А. Зегиб [11, теорема 1.3] доказал теорему 1 при более сильном предположении $|\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}| > 2n$. На самом деле наше доказательство в целом повторяет доказательство А. Зегиба и основано на его результатах и идеях; мы чётко укажем на дополнительное соображение, позволившее нам улучшить его результат.

Замечание 2. Теорема 1 останется верной, если заменить замкнутость (многообразия (M,g)) полнотой. Доказательство этого усиленного утверждения основывается на некоторых нетривиальных идеях и вычислениях, которые предлагаются в [1] и будут опубликованы в этой работе или позднее.

Доказательство теоремы 1. В течение всего доказательства этой теоремы мы будем предполагать, что (M, g) является замкнутым связным римановым многообразием размерности не меньше 2, допускающим по крайней мере одно проективное преобразование, не являющееся аффинным преобразованием. Также будем считать, что рассматриваемое многообразие не является многообразием постоянной положительной секционной кривизны. Наша цель состоит в том, чтобы показать, что $|\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}| \leqslant 2$.

Рассмотрим уравнение метризации из [2, теорема 2.2]. Поскольку точная формула этого уравнения не является для нас важной, мы не будем вводить его в этой работе, отсылая читателя к [2] за деталями. Вместо этого мы перечислим здесь свойства этого уравнения и его решений, которые будут использованы нами при доказательстве теоремы.

I. Уравнение метризации является (однородной) системой линейных уравнений в частных производных, поэтому пространство решений этого уравнения, которое мы обозначим через Sol, является векторным пространством. При наших предположениях $\dim \mathrm{Sol} = 2$. Действительно, для замкнутых римановых многообразий, не являющихся многообразиями постоянной положительной секционной кривизны, $\dim \mathrm{Sol} \leqslant 2$, как показано в [8, теорема 2] (см. также [9, теорема 16; 3, теорема 1; 10, следствие 5.2]; в двумерном случае это также следует из [4]). Так как мы предположили существование нетривиального аффинного преобразования, то $\dim \mathrm{Sol} \geqslant 2$, следовательно, $\dim \mathrm{Sol} = 2$.

II. В локальной системе координат решения уравнения метризации можно рассматривать как симметричные матрицы (как геометрические объекты они являются взвешенными симметричными $(2,0)$-тензорами; в частности, их обратные образы корректно определены), компоненты которых являются функциями координат. Невырожденные (т. е. с нигде не обращающимся в ноль определителем) решения $\bar\sigma^{ij}$ соответствуют метрикам $\bar g$ (произвольной сигнатуры), проективно эквивалентным g (т. е. имеющим те же геодезические, что и g). Соответствие при этом задаётся формулой
$$\bar\sigma^{ij} = \bar g^{-1}\,|\det \bar g|^{\frac{1}{n+1}}, \quad \bar g^{-1} := \det|\bar\sigma|\ \bar\sigma^{ij}. \tag{1}$$
Из формулы видно, что положительно определённым $\bar\sigma^{ij}$ соответствуют положительно определённые, т. е. римановы, метрики.

III. Метризационные уравнения проективно-инвариантны, поэтому для любого проективного преобразования φ обратный образ решения $\varphi^*\sigma$ тоже является решением.

Пусть φ — проективное преобразование. Возьмём базис σ, $\bar\sigma$ в Sol и рассмотрим обратные образы $\varphi^*\sigma$, $\varphi^*\bar\sigma$. Они также принадлежат Sol и поэтому являются линейными комбинациями базисных решений σ и $\bar\sigma$; обозначим коэффициенты их разложений следующим образом:
$$\begin{pmatrix}\varphi^*\sigma\\ \varphi^*\bar\sigma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma\\ \bar\sigma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\sigma + b\bar\sigma\\ c\sigma + d\bar\sigma\end{pmatrix}.$$

Матрицу

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

мы будем обозначать через A или A_φ. Отображение $\varphi \mapsto A_\varphi$ из Proj в $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ является двумерным представлением Proj, так как композиции $\psi \circ \varphi$ двух проективных преобразований соответствует произведение матриц A_ψ и A_φ, взятых в обратном порядке:

$$\psi \circ \varphi \mapsto A_\varphi A_\psi.$$

Легко убедиться, что если $A_\varphi = \mathrm{id}$, то φ — изометрия.

В [11] было показано, что в наших предположениях если A_φ имеет вещественные собственные значения, отличные от ± 1, то φ — изометрия. Этот результат является нетривиальным, использует замкнутость многообразия и имеет для нас огромное значение, так как в дальнейшем мы можем считать, что матрицы A_φ (соответствующие неизометричным проективным преобразованиям φ) имеют невещественные собственные значения.

Рассмотрим теперь случай, когда матрица $A = A_\varphi$ имеет комплексно-сопряжённые невещественные собственные значения. Тогда в подходящем базисе в Sol, предполагая, что φ не является изометрией, можно считать, что матрица A имеет один из следующих двух видов:

$$A = C\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad A = C\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $C > 0$. В первом случае $\det A > 0$, а во втором $\det A < 0$. Более того, без ограничения общности можно считать, что в первом случае базис σ, $\bar\sigma$ выбран так, что метрика g соответствует базисному решению σ.

Покажем, что первый случай невозможен, за исключением разве что случая $\alpha = 0 \mod \pi$, который всё равно противоречит нашим предположениям, поскольку при этом

$$C\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \pm\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

и следовательно, φ — гомотетия и ввиду компактности многообразия M изометрия. Именно это соображение пропустил А. Зегиб в своей работе.

Для того чтобы это показать, возьмём произвольную точку $p \in M$ и выберем в T_pM такой базис, что

$$\sigma = \mathrm{diag}(1,\ldots,1), \quad \bar\sigma = \mathrm{diag}(s_1,\ldots,s_n).$$

Существование такого базиса очевидно, так как g положительно определённая.

Рассмотрим

$$\varphi^*\sigma,\ (\varphi\circ\varphi)^*\sigma = \varphi^*\big(\varphi^*(\sigma)\big),$$
$$(\varphi\circ\varphi\circ\varphi)^*\sigma = \varphi^*\Big(\varphi^*\big(\varphi^*(\sigma)\big)\Big),\ldots,\underbrace{(\varphi\circ\ldots\circ\varphi)^*}_{k\ \text{раз}}\sigma,\ldots.$$

Так как матрица, соответствующая суперпозиции

$$\underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k \text{ раз}},$$

равна

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix},$$

мы получаем, что в нашей точке p матрица

$$\underbrace{(\varphi \circ \ldots \circ \varphi)^*}_{k \text{ раз}} \sigma$$

имеет вид

$$C^k(\cos k\alpha\sigma + \sin k\alpha\bar{\sigma}) = C^k \operatorname{diag}\bigl(\cos k\alpha + s_1 \sin k\alpha, \ldots, \cos k\alpha + s_n \sin k\alpha\bigr). \quad (3)$$

Нам потребуется следующая простая лемма.

Лемма 1. *Предположим, что для всех* $k \in \mathbb{N}$ *выполнено* $\cos k\alpha + s \sin k\alpha > 0$. *Тогда* $\alpha = 0 \mod 2\pi$.

Доказательство. Заметим сначала, что $\cos k\alpha + s\sin k\alpha$ совпадает с первой координатой $k\alpha$-поворота вектора

$$\begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$$

вокруг начала координат. Если

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

то набор точек $\mathbb{R}^2$ вида

$$\begin{pmatrix} \cos k\alpha & \sin k\alpha \\ -\sin k\alpha & \cos k\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ s \end{pmatrix}$$

либо образует всюду плотное подмножество окружности с центром в начале координат, либо совпадает с множеством вершин правильного (возможно, вырожденного, т. е. имеющего только две вершины) многоугольника, содержащего начало координат. В обоих случаях существует такая точка, что его первая координата неположительна, и мы получаем противоречие. Лемма 1 доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 1. Объединяя лемму 1 и (3), мы видим, что если $\alpha \neq 0 \mod 2\pi$, то существует k, для которого (диагональная) матрица $(\varphi \circ \ldots \circ \varphi)^*\sigma$ имеет неположительный диагональный элемент и, следовательно, не является положительно определённой матрицей. Но σ соответствует метрике, поэтому она положительно определённая во всех точках многообразия. Естественно, её обратный образ также должен быть положительно определённым. Полученное противоречие показывает, что первый случай невозможен.

Итак, мы показали, что для всякого проективного преобразования φ, не являющегося изометрией, матрица A_φ имеет тот же вид, что и вторая матрица в (2), в частности, её определитель отрицателен. Отсюда следует, что суперпозиция $\varphi \circ \psi$ двух таких (неизометричных) проективных преобразований φ и ψ является изометрией, так как произведение двух матриц A_ψ и A_φ с отрицательными определителями имеет положительный определитель. Таким образом, все проективные преобразования, которые не являются изометриями, лежат в одном классе эквивалентности в $\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}$, а значит, число элементов в $\mathrm{Proj}/\mathrm{Iso}$ не превосходит 2. Теорема 1 доказана. $\square$

Литература

[1] Calderbank D. , Eastwood M., Matveev V. S., Neusser K. C-projective geometry: background and open problems. — In preparation.

[2] Eastwood M., Matveev V. S. Metric connections in projective differential geometry // Symmetries and Overdetermined Systems of Partial Differential Equations. — New York: Springer, 2007. — (IMA Vol. Math. Appl., Vol. 144). — P. 339—351.

[3] Kiosak V., Matveev V. S. Proof of the projective Lichnerowicz conjecture for pseudo-Riemannian metrics with degree of mobility greater than two // Comm. Math. Phys. — 2010. — Vol. 297, no. 2. — P. 401—426.

[4] Kiyohara K. Compact Liouville surfaces // J. Math. Soc. Japan. — 1991. — Vol. 43. — P. 555—591.

[5] Levi-Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche // Ann. Mat. Pura Appl. (1867—1897). — 1896. — Vol. 24, no. 1. — P. 255—300.

[6] Matveev V. S. Three-dimensional manifolds having metrics with the same geodesics // Topology. — 2003. — Vol. 42, no. 6. — P. 1371—1395.

[7] Matveev V. S. Beltrami problem, Lichnerowicz—Obata conjecture and applications of integrable systems in differential geometry // Tr. Semin. Vektorn. Tenzorn. Anal. — 2005. — Vol. 26. — P. 214—238.

[8] Matveev V. S. On degree of mobility for complete metrics // Adv. Stud. Pure Math. — 2006. — Vol. 43. — P. 221—250.

[9] Matveev V. S. Proof of projective Lichnerowicz—Obata conjecture // J. Differ. Geom. — 2007. — Vol. 75. — P. 459—502.

[10] Matveev V. S., Mounoud P. Gallot—Tanno theorem for closed incomplete pseudo-Riemannian manifolds and applications // Ann. Glob. Anal. Geom. — 2010. — Vol. 38. — P. 259—271.

[11] Zeghib A. On discrete projective transformation groups of Riemannian manifolds.— `arXiv:1304.6812v1`.