Транзитивные алгеброиды Ли. Категорная точка зрения*

А. С. МИЩЕНКО
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: asmish-prof@yandex.ru

СЯОЮЙ ЛИ
Харбинский технологический институт, Китай
e-mail: lixiaoyu2005@gmail.com

УДК 512.554.35+515.145.27+515.164.3

Ключевые слова: транзитивный алгеброид Ли, каплинг, препятствие Маккензи, обратный образ.

Аннотация

В работе доказывается функториальность операции обратного образа для транзитивных алгеброидов Ли, а также функториальность всех объектов, необходимых для построения транзитивных алгеброидов Ли по Маккензи: расслоений L конечномерных алгебр Ли, ковариантных связностей дериваций ∇, ассоциированных дифференциальных двумерных форм Ω со значениями в расслоении L, каплингов и препятствий Маккензи. На основе полученной функториальности может быть построен финальный объект для структуры транзитивного предалгеброида Ли и универсального класса когомологий, индуцирующего препятствие Маккензи.

Abstract

A. S. Mishchenko, Xiaoyu Li, Transitive Lie algebroids. Categorical point of view, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 133—156.

In this paper, the functorial property of the inverse image for transitive Lie algebroids is proved and also there is proved the functorial property for all objects that are necessary for building transitive Lie algebroids due to K. Mackenzie—bundles L of finite-dimensional Lie algebras, covariant connections of derivations ∇, associated differential 2-dimensional forms Ω with values in the bundle L, couplings, and the Mackenzie obstructions. On the base of the functorial properties, a final object for the structure of transitive Lie prealgebroid and for the universal cohomology class inducing the Mackenzie obstruction can be constructed.

Под алгеброидом Ли мы будем понимать конечномерное векторное расслоение $E \to M$ над гладким многообразием M вместе с его гомоморфизмом $a\colon E \to TM$ в касательное расслоение TM, называемым анкором, причём пространство $\Gamma^\infty(E)$ гладких сечений снабжено дополнительной структурой,

*Работа частично поддержана грантом РФФИ № 14-01-00007.

коммутаторной скобкой $\{\bullet, \bullet\}$, которая удовлетворяет естественным свойствам структуры бесконечномерной алгебры Ли, а также тождеству Ньютона—Лейбница по отношению к операции умножения сечения на гладкую функцию. Анкор при этом индуцирует гомоморфизм алгебры Ли $\Gamma^\infty(E)$ в алгебру Ли $\Gamma^\infty(TM)$ векторных полей на многообразии M. Примерами алгеброидов Ли служит само касательное расслоение TM, расслоение $\mathcal{D}(L)$ всех ковариантных дифференцирований гладких сечений $\Gamma^\infty(L)$ любого конечномерного векторного расслоения L над гладким многообразием M, а также касательное расслоение произвольного гладкого слоения $\mathcal{F}$ на многообразии M без особых точек. В случае когда анкор a является послойно сюръективным отображением, алгеброид Ли называется транзитивным.

Транзитивные алгеброиды Ли обладают специфическими свойствами, позволяющими смотреть на транзитивные алгеброиды Ли как на элементы объектов гомотопического функтора. Грубо говоря, каждый транзитивный алгеброид Ли может описываться в виде векторного расслоения над касательным расслоением к многообразию, которое оснащено дополнительной структурой.

Транзитивные алгеброиды Ли детально исследовались в [6]. В частности, там показано, что гладкие отображения многообразий порождают обратный образ транзитивных алгеброидов Ли, который зависит только от гомотопического класса отображения. Из этого наблюдения вытекает, что классификация транзитивных алгеброидов Ли сводится к построению финальных объектов для каждой фиксированной конечномерной алгебры Ли g, присоединённой к транзитивному алгеброиду Ли, а сама классификация является гомотопической. Хотя это естественное наблюдение очевидно, само построение финальных объектов до сих пор не было проведено.

Мы доказываем (см. [2, 4, 5]), что гомотопическая классификация сводится к построению финального пространства в виде классифицирующего пространства BG, где G — группа $\mathbf{Aut}(g)$ всех автоморфизмов присоединённой алгебры Ли g с более тонкой, чем классическая, топологией. В частности, такой подход позволяет решить один из существенных вопросов для классификации транзитивных алгеброидов Ли, а именно описать все каплинги между касательным расслоением к многообразию и векторному расслоению конечномерных алгебр Ли, которые являются базовым объектом при классификации транзитивных алгеброидов Ли в смысле Маккензи. Другая проблема, которая при этом естественно возникает, — это конкретное вычисление препятствия Маккензи в виде трёхмерного класса когомологий для существования транзитивного алгеброида Ли, которую мы планируем решить хотя бы частично.

В настоящей работе предполагается построить функториальным образом все необходимые для описания транзитивных алгеброидов Ли объекты. Это обратные образы расслоений конечномерных алгебр Ли, ковариантные связности дериваций ∇, дифференциальные формы Ω со значениями в расслоении L, каплинги и препятствия Маккензи. Расчёты препятствия Маккензи в терминах когомологий классифицирующего пространства будут изложены в другой работе.

1. Постановка задачи

В соответствии с определениями из [6] под алгебраическим алгеброидом Ли мы будем понимать конечномерное векторное расслоение E над многообразием M вместе с дополнительной структурой в пространстве гладких сечений $\Gamma^\infty(M, E)$ расслоения E. Эта структура является коммутаторной скобкой $\{\bullet, \bullet\}$ на бесконечномерном пространстве сечений $\Gamma^\infty(M, E)$.

Коммутаторная скобка $\{\bullet, \bullet\}$ задаёт на пространстве $\Gamma^\infty(M, E)$ структуру бесконечной алгебры Ли. Другими словами, коммутаторная скобка удовлетворяет следующим условиям.

1. Косая коммутативность: для любых двух сечений $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma^\infty(E)$ имеет место соотношение
$$\{\sigma_1, \sigma_2\} = -\{\sigma_2, \sigma_1\} \in \Gamma^\infty(E). \tag{1}$$
2. Билинейность: для трёх сечений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Gamma^\infty(E)$ и пары чисел λ_1, λ_2 имеет место соотношение
$$\{\lambda_1\sigma_1 + \lambda_2\sigma_2, \sigma_3\} = \lambda_1\{\sigma_1, \sigma_3\} + \lambda_2\{\sigma_2, \sigma_3\}. \tag{2}$$
3. Тождество Якоби: для трёх сечений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \Gamma^\infty(E)$ имеет место соотношение
$$\big\{\sigma_1, \{\sigma_2, \sigma_3\}\big\} + \big\{\sigma_3, \{\sigma_1, \sigma_2\}\big\} + \big\{\sigma_2, \{\sigma_3, \sigma_1\}\big\} = 0. \tag{3}$$

Тождество Якоби полезно интерпретировать как правило Лейбница по отношению к операции коммутирования $\{\bullet, \bullet\}$. Вообще, если задана двуместная операция типа $\langle\bullet, \bullet\rangle\colon E_1 \times E_2 \to E_3$, то операция $A_i\colon E_i \to E_i$ называется операцией дифференцирования или деривацией по отношению к двуместной операции $\langle\bullet, \bullet\rangle$, если выполнено правило Лейбница
$$A_3\langle u, v\rangle = \langle A_1 u, v\rangle + \langle u, A_2 v\rangle, \quad u \in E_1, \quad v \in E_2.$$
В частности, оператор взятия коммутаторной скобки
$$A_{\sigma_1}(\sigma_2) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$$
ввиду тождества Якоби (3) является деривацией по отношению к двуместной операции $\{\bullet, \bullet\}$:
$$A_{\sigma_1}(\{\sigma_2, \sigma_3\}) = \{A_{\sigma_1}(\sigma_2), \sigma_3\} + \{\sigma_2, A_{\sigma_1}(\sigma_3)\}$$
или
$$\big\{\sigma_1, \{\sigma_2, \sigma_3\}\big\} = \big\{\{\sigma_1, \sigma_2\}, \sigma_3\big\} + \big\{\sigma_2, \{\sigma_1, \sigma_3\}\big\}.$$

Наконец, ещё одно условие определяет правило Лейбница для коммутаторной скобки $\{\bullet, \bullet\}$ по отношению к другой двуместной операции — операции умножения сечения $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$ на гладкую функцию $f \in C^\infty(M)$. Для этого каждому сечению $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$ ставится в соответствие операция
$$a(\sigma)\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$

таким образом, что

$$A_{\sigma_1}(f\sigma_2) = a(\sigma_1)(f)\sigma_2 + f \cdot A_{\sigma_1}(\sigma_2),$$

что даёт дополнительное условие на коммутаторную скобку.

4. Правило Лейбница для умножения сечения σ_2 на функцию f:

$$\{\sigma_1, f\sigma_2\} = a(\sigma_1)(f) \cdot \sigma_2 + f \cdot \{\sigma_1, \sigma_2\}. \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что операция $a(\sigma)$ является операцией дифференцирования в пространстве гладких функций, значит, операция $a(\sigma)$ является векторным полем, т. е. сечением касательного расслоения TM, $a(\sigma) \in \Gamma^\infty(TM)$. Более того, соответствие a является послойным гомоморфизмом расслоением

$$a\colon E \to TM,$$

причём гомоморфизм a индуцирует гомоморфизм алгебр Ли

$$a\colon \Gamma^\infty(E) \to \Gamma^\infty(TM), \quad a\{\sigma_1, \sigma_2\} = [a(\sigma_1), a(\sigma_2)].$$

Гомоморфизм $a(\sigma) \in \Gamma^\infty(TM)$ называется *анкором* алгеброида Ли. Таким образом, алгеброид Ли задаётся при помощи коммутативной диаграммы и коммутаторной скобки

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{a} & TM \\ {\scriptstyle p_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_T} \\ M & \longrightarrow & M \end{array} ;\ \{\bullet, \bullet\} \right\}$$

которые удовлетворяют перечисленным условиям (1)—(4) (см. [6, определение 3.3.1; 7, определение 1.1.1]).

В случае когда анкор a является послойным эпиморфизмом, соответствующий алгеброид Ли называется транзитивным алгеброидом Ли. Именно этот случай и будет предметом наших исследований. Для транзитивного алгеброида Ли имеет место так называемая точная последовательность Атьи

$$0 \to L \to E \xrightarrow{a} TM \to 0, \tag{5}$$

у которой ядро анкора $\ker(a)$ образует конечномерное расслоение $L = \ker(a)$, называемое присоединённым расслоением транзитивного алгеброида Ли $\mathcal{A}$. Можно проверить, пользуясь свойствами (1)—(4), что расслоение L является локально тривиальным расслоением, слой которого изоморфен некоторой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а структурная группа является группой $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. [6, определение 3.3.8, теорема 6.5.1]). Всякое локально тривиальной расслоение (безотносительно к алгеброиду Ли), слой которого изоморфен некоторой конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а структурная группа является группой $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, называется расслоением конечномерных алгебр Ли. Так что присоединённое расслоение транзитивного алгеброида Ли $\mathcal{A}$ — расслоение конечномерных алгебр Ли.

Из точности последовательности Атьи (5) следует, что расслоение E расщепляется в прямую сумму двух векторных расслоений, а именно касательного расслоения TM и присоединённого расслоения L,

$$E \approx L \oplus TM,$$

при помощи произвольно выбранного расщепления $\lambda\colon TM \to E$, $a \cdot \lambda = \mathbf{Id}$,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] & E \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\approx"] & TM \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\lambda"'] & 0\,. \\ & & L \oplus TM & & \end{tikzcd}$$

Тогда всякое сечение $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$ представляется в виде пары сечений

$$\sigma = (u, X), \quad u \in \Gamma^\infty(L), \quad X \in \Gamma^\infty(TM),$$
$$X = a(\sigma), \quad u = \sigma - \lambda\big(a(\sigma)\big),$$

где $X \in \Gamma^\infty(TM)$ есть не что иное, как обыкновенное векторное поле на многообразии M.

Коммутаторная скобка для пары сечений $\sigma_1 = (u_1, X_1)$, $\sigma_2 = (u_2, X_2)$ может быть записана формально в виде

$$\{\sigma_1, \sigma_2\} = \{(u_1, X_1), (u_2, X_2)\} = \\ = ([u_1, u_2] + \nabla_{X_1}(u_2) - \nabla_{X_2}(u_1) + \Omega(X_1, X_2), [X_1, X_2]). \quad (6)$$

В правой части записи (6) первое слагаемое $[u_1, u_2]$ является послойным коммутатором двух сечений u_1 и u_2. Операция

$$\nabla_X\colon \Gamma^\infty(L) \to \Gamma^\infty(L)$$

является ковариантным градиентом послойных дифференцирований сечений, которые подчиняются правилу Лейбница по отношению к двуместной операции коммутирования сечений:

$$\begin{cases} \nabla_X(u) = \{\lambda(X), u\}, \quad u \in \Gamma^\infty(L), \\ \nabla_X(f \cdot u) = X(f) \cdot u + f \cdot \nabla_X(u), \quad u \in \Gamma^\infty(L), \quad f \in C^\infty(M), \\ \nabla_X([u_1, u_2]) = [\nabla_X(u_1), u_2] + [u_1, \nabla_X(u_2)], \quad u_1, u_2 \in \Gamma^\infty(L). \end{cases} \quad (7)$$

Такой ковариантный градиент ∇ будем называть линейной связностью дериваций в расслоении L конечномерных алгебр Ли. Наконец, последнее слагаемое

$$\Omega(X_1, X_2) \in \Gamma^\infty(L)$$

является классической двумерной дифференциальной формой, но со значениями в слоях расслоения L,

$$\Omega(X_1, X_2) = \{\lambda(X_1), \lambda(X_2)\} - \lambda([X_1, X_2]). \quad (8)$$

Применяя условия (1)—(4) к правой части формулы (6), получаем два соотношения на операцию ∇ и форму Ω.

1.1. Два соотношения на операцию ∇ и форму Ω

Тензор кривизны R^∇ ковариантного градиента ∇

Через R^∇ обозначим так называемый тензор кривизны ковариантного градиента ∇, который определяется универсальной формулой

$$R^\nabla_{X_1,X_2} = [\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}] - \nabla_{[X_1,X_2]}, \tag{9}$$

где X_1, X_2 — два произвольных векторных поля.

Оператор

$$R^\nabla_{X_1,X_2} \colon \Gamma^\infty(L) \to \Gamma^\infty(L)$$

в действительности является гомоморфизмом векторного расслоения L, поскольку для любого сечения $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$ и любой функции $f \in C^\infty(M)$ выполнено условие

$$R^\nabla_{X_1,X_2}(f \cdot \sigma) = f \cdot R^\nabla_{X_1,X_2}(\sigma).$$

Более того, этот гомоморфизм можно интерпретировать как гомоморфизм

$$R^\nabla \colon \Lambda^2(TM) \to \mathbf{Hom}(L, L),$$

который в силу (7) в каждой точке $x \in M$ удовлетворяет условию

$$R^\nabla_{X_1,X_2}([u_1, u_2]) = [R^\nabla_{X_1,X_2}(u_1), u_2] + [u_1, R^\nabla_{X1,X_2}(u_2)]$$

для пары векторных полей X_1, X_2 и пары векторов $u_1, u_2 \in L_x$. Другими словами, гомоморфизм R^∇ в действительности отображает расслоение $\Lambda^2(TM)$ в расслоение $\mathbf{Der}(L) \subset \mathbf{Hom}(L, L)$ послойных дериваций по отношению к послойной коммутаторной скобке в расслоении L:

$$R^\nabla \colon \Lambda^2(TM) \to \mathbf{Der}(L).$$

Ковариантный дифференциал d^∇ формы по отношению к ковариантному градиенту ∇

По определению для двумерной формы $\Omega(X_1, X_2) \in \Gamma^\infty(L)$ со значениями в слоях расслоения L её дифференциал $d^\nabla\Omega$ по отношению к ковариантному градиенту ∇ задаётся по универсальной формуле

$$\begin{aligned} &d^\nabla\Omega(X_1, X_2, X_3) = \\ &= \nabla_{X_1}\big(\Omega(X_2, X_3)\big) + \nabla_{X_2}\big(\Omega(X_3, X_1)\big) + \nabla_{X_3}\big(\Omega(X_1, X_2)\big) - \\ &- \Omega([X_1, X_2], X_3) - \Omega([X_2, X_3], X_1) - \Omega([X_3, X_1], X_2), \end{aligned} \tag{10}$$

где X_1, X_2, X_3 — три произвольных векторных поля.

Два соотношения между ковариантным градиентом ∇ и формой Ω

Ковариантный градиент ∇ и форма Ω, которые задаются при помощи расщепления транзитивного алгеброида Ли по формулам (9) и (10), удовлетворяют следующим двум соотношениям:

1) для двух векторных полей X_1, X_2 и сечения $u \in \Gamma^\infty(L)$ имеет место соотношение
$$R^\nabla(X_1, X_2)(u) = -[u, \Omega(X_1, X_2)]; \tag{11}$$
2) для трёх векторных полей X_1, X_2, X_3 имеем соотношение
$$d^\nabla \Omega(X_1, X_2, X_3) = 0. \tag{12}$$

2. Построение транзитивного алгеброида Ли

Рассмотрим конструкции, которые позволяют описывать транзитивные алгеброиды Ли в виде некоторого набора данных, таких что гладкие отображения многообразий порождают функториальные свойства этого набора данных. Набор данных, описывающих транзитивный алгеброид Ли, следующий. Рассматривается гладкое многообразие M и конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$. Фиксируется векторное расслоение L над многообразием M со структурной группой $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (которое называется расслоением конечномерных алгебр Ли). Фиксируется линейная ковариантная связность ∇ в расслоении L с условием выполнения закона Лейбница по отношению к послойной операции коммутирования и дифференциальная форма Ω размерности 2 со значениями в слоях расслоения L. Набор данных $\mathcal{C} = \{L, \nabla, \Omega\}$ назовём структурой транзитивного предалгеброида Ли (или каплингом), если выполнено следующее условие между ∇ и Ω:
$$R^\nabla(X_1, X_2)(u) = -[u, \Omega(X_1, X_2)] \tag{13}$$
для произвольного сечения $u \in \Gamma^\infty(L)$ и произвольных векторных полей X_1, X_2.

Структура транзитивного предалгеброида Ли $\mathcal{C} = \{L, \nabla, \Omega\}$ позволяет разбить задачу классификации транзитивных алгеброидов Ли на две части: классификацию предалгеброидов Ли и вычисление условия (12)
$$d^\nabla \Omega(X_1, X_2, X_3) = 0,$$
которое описывается в виде тривиальности когомологического препятствия Маккензи $[d^\nabla \Omega] \in H^3(M; ZL)$:
$$[d^\nabla \Omega] = 0 \in H^3(M; ZL).$$

Начнём с описания структуры транзитивного предалгеброида Ли $\mathcal{C} = \{L, \nabla, \Omega\}$.

2.1. Транзитивные предалгеброиды Ли и каплинги

С каждым расслоением L конечномерных алгебр Ли можно связать алгеброид $\mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L) \xrightarrow{a} TM$ всех ковариантных градиентов в расслоении L, являющихся деривациями по отношению к послойной операции коммутирования, в точной последовательности Атьи которого

$$0 \to \mathbf{Der}(L) \to \mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L) \xrightarrow{a} TM \to 0$$

первый член $\mathbf{Der}(L)$ является расслоением послойных дериваций расслоения L.

Расслоение $\mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L)$ строится как объединение слоёв, когда каждый слой $\mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L)_x$ в точке $x \in M$ состоит из всех ковариантных дериваций (D, X) сечений расслоения L в точке $x \in M$. Слой расслоения $\mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L)_x$ имеет конечную размерность, поскольку он включён в точную последовательность

$$0 \to \mathbf{Der}(L_x) \to \mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L)_x \to T_x M \to 0,$$

а ядро $\mathbf{Der}(L_x)$ состоит из операторов вида $(D, 0)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &D([u_1, u_2]) = [D(u_1), u_2(x)] + [u_1(x), D(u_2)], \quad u_1, u_2 \in \Gamma(L),\\ &D(f \cdot u) = f(x) \cdot D(u), \quad u \in \Gamma(L), \quad f \in \mathcal{C}^\infty(M), \end{aligned}$$

т. е. состоящих из эндоморфизмов конечномерной алгебры Ли L_x.

Сечения $\Gamma^\infty(\mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L)$, таким образом, это такие пары (D, X), где $D\colon \Gamma^\infty(L) \to \Gamma^\infty(L)$ — оператор дифференцирования, X — векторное поле на многообразии M, удовлетворяющие условию Лейбница по отношению к двум операциям: умножению сечения на функцию и послойному коммутатору двух сечений:

$$\begin{aligned} &D(f \cdot u) = f \cdot D(u) + X(f) \cdot u, \quad f \in C^\infty(M), \quad u \in \Gamma^\infty(L),\\ &D([u_1, u_2]) = [D(u_1), u_2] + [u_1, D(u_2)], \quad u_1, u_2 \in \Gamma^\infty(L). \end{aligned}$$

Коммутаторная скобка $\{\bullet, \bullet\}$ в алгеброиде Ли $\mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L)$ задаётся по формуле

$$\{(D_1), (X_1), (D_2), (X_2)\} = ([D_1, D_2], [X_1, X_2]).$$

Тогда линейная связность дериваций ∇ есть гомоморфизм

$$\nabla\colon TM \to \mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L),$$

обратный к анкору, т. е. расщепляющий точную последовательность Атьи

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbf{Der}(L) \arrow[r, "j"] & \mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L) \arrow[r, "a"] & TM \arrow[l, bend right, "\nabla"'] \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Точная последовательность Атьи вместе с расщепляющим ковариантным градиентом ∇ включается в следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & ZL \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"] & ZL \arrow[d, "i"] & & \\
 & L \arrow[r, "="] \arrow[d, "\mathrm{ad}"] & L \arrow[d, "\mathrm{ad}"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Der}(L) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\natural^0"] & \mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\natural"] & TM \arrow[r] \arrow[d, "="] \arrow[l, bend right, "\nabla"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Out}(L) \arrow[r, "\bar{j}"] \arrow[d] & \mathcal{D}_{\mathrm{Out}}(L) \arrow[r, "\bar{a}"] \arrow[d] & TM \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, bend right, "\Xi"'] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}.$$

Здесь ZL — это расслоение центров расслоения L, $\mathcal{D}_{\mathrm{Out}}(L)$ — транзитивный алгеброид, получающийся факторизацией гомоморфизма ad,

$$\mathcal{D}_{\mathrm{Out}}(L) = \mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L)/\mathbf{Im}(\mathrm{ad}),$$

а $\Xi = \natural \cdot \nabla$ можно трактовать как ковариантный градиент в алгеброиде $\mathcal{D}_{\mathrm{Out}}(L)$. Определение тензора кривизны R^{∇} записывается в виде коммутаторной операции

$$R^{\nabla}_{X_1,X_2} = [\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}] - \nabla_{[X_1,X_2]}.$$

Его можно переписать в терминах операции $\{\bullet, \bullet\}$:

$$\nabla_X = (\nabla_X, X),$$
$$(R^{\nabla}_{X_1,X_2}, 0) = \{(\nabla_{X_1}, X_1), (\nabla_{X_2}, X_2)\} - (\nabla_{[X_1,X_2]}, [X_1, X_2]).$$

Поэтому эта формула естественно обобщается на случай расщепления произвольного транзитивного алгеброида Ли. В частности, для тензора кривизны ковариантного градиента Ξ имеем

$$R^{\Xi}(X_1, X_2) = \{\Xi_{X_1}, \Xi_{X_2}\} - \Xi_{[X_1,X_2]}.$$

Всё это означает, что тензоры кривизны R^∇ и R^Ξ включаются в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "\mathrm{ad}"] & \\
\mathbf{Der}(L) \arrow[d, "\natural^0"] & \Lambda^2 TM \arrow[l, "R^\nabla"'] \arrow[d, "="] \\
\mathbf{Out}(L) \arrow[d] & \Lambda^2 TM \arrow[l, "R^\Xi"'] \\
0 &
\end{tikzcd}.$$

Поскольку в структуре транзитивного предалгеброида Ли выполняется соотношение на ковариантный градиент ∇ и дифференциальную форму Ω, имеем

$$R^\nabla(X_1, X_2)(u) = -[u, \Omega(X_1, X_2)],$$

т. е.

$$R^\nabla = \mathrm{ad} \cdot \Omega.$$

Получаем условие $R^\Xi = 0$. Это условие означает, что ковариантный градиент

$$TM \xrightarrow{\Xi} \mathcal{D}_{\mathrm{Out}}(L)$$

является гомоморфизмом алгеброидов Ли. Согласно К. Маккензи, ковариантный градиент Ξ называется каплингом между касательным расслоением TM и расслоением алгебр Ли L.

По каждому каплингу Ξ можно восстановить структуру транзитивного предалгеброида Ли ∇ и Ω, хотя и не однозначно. Именно, поскольку гомоморфизм $\natural$ является эпиморфизмом, для каплинга Ξ существует его поднятие в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}_{\mathrm{Der}}(L) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\natural"] & TM \arrow[r] \arrow[d, "="] \arrow[l, bend right, "\nabla"'] & 0 \\
\mathcal{D}_{\mathrm{Out}}(L) \arrow[r, "\bar{a}"] \arrow[d] & TM \arrow[r] \arrow[d] \arrow[l, bend right, "\Xi"'] & 0 \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}.$$

Поскольку тензор кривизны R^{Ξ} равен нулю, то существует поднятие Ω в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "\mathrm{ad}"] & \\
\mathbf{Der}(L) \arrow[d, "\natural^0"] & \Lambda^2 TM \arrow[l, "R^{\nabla}"'] \arrow[ul, "\Omega"'] \\
0 &
\end{tikzcd},$$

так что выполнено соотношение на структуру транзитивного предалгеброида Ли $R^{\nabla} = \mathrm{ad} \cdot \Omega$.

2.2. Вычисление препятствия Маккензи для структуры транзитивного предалгеброида Ли

Осталось проверить выполнение второго соотношения $d^{\nabla}\Omega = 0$ для получения транзитивного алгеброида Ли. Заметим прежде всего, что дифференциал формы Ω коммутирует с дифференциалом тензора кривизны R^{∇}, который можно интерпретировать как дифференциальную форму $R^{\nabla} \colon \Lambda^2 TM \to \mathbf{Der}(L)$. В расслоении $\mathbf{Der}(L)$ имеется ковариантная связность ∇^{der}, продолжающая связность ∇ по естественной формуле

$$\nabla_X\bigl(\varphi(u)\bigr) = \nabla_X^{\mathrm{der}}(\varphi)(u) + \varphi\bigl(\nabla_X(u)\bigr).$$

Тогда следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
ZL \arrow[d, "i"] & \\
L \arrow[d, "\mathrm{ad}"] & \\
\mathbf{Der}(L) \arrow[d, "\natural^0"] & \Lambda^3 TM \arrow[l, "d^{\nabla^{\mathrm{der}}}(R^{\nabla})"'] \arrow[ul, "d^{\nabla}\Omega"'] \\
0 &
\end{tikzcd}.$$

Предложение 1. *Имеет место тождество*

$$d^{\nabla^{\mathrm{der}}}(R^{\nabla}) = 0.$$

Это тождество является, по существу, вторым (или дифференциальным) тождеством Бьянки (см. [1, теорема 5.3]). Поэтому гомоморфизм $d^{\nabla}\Omega$ поднимается до гомоморфизма $d^{\nabla}\Omega \to ZL$:

$$\begin{tikzcd} ZL \arrow[d, "i"] & \\ L \arrow[d] & \Lambda^3 TM \arrow[l, "d^\nabla(\Omega)"'] \arrow[ul, "d^\nabla(\Omega)"'] \\ 0 & \end{tikzcd} .$$

Можно проверить, что

$$d^\nabla d^\nabla(\Omega) = d^{\nabla^{ZL}} d^\nabla(\Omega) = 0,$$

что означает, что форма $d^\nabla(\Omega)$ замкнута и, следовательно, задаёт трёхмерный класс когомологий

$$[d^\nabla(\Omega)] \in H^3(M; ZL).$$

Класс когомологий $\mathrm{Obs}(\Xi, \nabla, \Omega) = [d^\nabla(\Omega)]$ называется препятствием Маккензи.

Теорема 1 [6, теорема 7.2.12]. *Препятствие Маккензи $[d^\nabla(\Omega)]$ зависит только от каплинга $[\Xi]$,*

$$\mathrm{Obs}(\Xi, \nabla, \Omega) = \mathrm{Obs}(\Xi).$$

Препятствие Маккензи $\mathrm{Obs}(\Xi) \in H^3(M; ZL)$ равно нулю тогда и только тогда, когда существуют накрытия ∇ и Ω, для которых имеет место тождество $d^\nabla(\Omega) = 0$. Другими словами, структура транзитивного предалгеброида Ли реализует транзитивный алгеброид Ли тогда и только тогда, когда препятствие Маккензи $\mathrm{Obs}(\Xi) \in H^3(M; ZL)$ равно нулю.

3. Функториальные свойства построения транзитивного алгеброида Ли

К. Маккензи показал, что для построения (и классификации) транзитивных алгеброидов Ли требуется

— зафиксировать конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{g}$, векторное расслоение L конечномерных алгебр Ли со структурной группой $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$;

— выбрать некоторый каплинг Ξ между касательным расслоением TM и расслоением L;

— построить препятствие Маккензи $\mathrm{Obs}(\Xi)$ как трёхмерный класс когомологий в группе когомологий $H^3(M; ZL)$ с локальной системой коэффициентов, задаваемой плоским расслоением ZL, со слоями, изоморфными центру $Z\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$, $\mathrm{Obs}(\Xi) \in H^3(M; ZL)$.

При условии тривиальности препятствия Маккензи выбранный каплинг допускает реализацию в виде структуры транзитивного предалгеброида Ли, которая уже является алгеброидом Ли. Вопрос о том, для каких расслоений конечномерных алгебр Ли существует каплинг, а также сколько различных каплингов существует при их наличии, в книге К. Маккензи, как и в других работах по теории транзитивных алгеброидов Ли, не обсуждается. Не обсуждается также вопрос об условиях на каплинг, при которых препятствие Маккензи становится тривиальным. Поэтому для дальнейшей классификации транзитивных алгеброидов Ли необходимо решить следующие две задачи.

1. Описать в разумных терминах те условия, которые необходимо наложить на расслоение конечномерных алгебр Ли, чтобы данное расслоение допускало каплинг с касательным расслоением TM, а также описать множество всех каплингов между данным расслоением конечномерных алгебр Ли и касательным расслоением.
2. Решить проблему о тривиальности препятствия Маккензи для конкретного каплинга.

Ключевым соображением для решения этих двух задач является использование наблюдения К. Маккензи, заключающегося в существовании обратного образа для транзитивного алгеброида Ли, порождаемого гладким отображением многообразий. Конструкция обратного образа транзитивного алгеброида Ли может быть распространена до обратных образов структур транзитивных предалгеброидов Ли, что позволяет построить функториальные объекты: каплинги, структуры транзитивных предалгеброидов Ли, препятствия Маккензи.

Ранее в [2] было показано, что множество $\mathrm{Coup}_{\mathfrak{g}}(M)$ всех каплингов между касательным расслоением TM и некоторым расслоением конечномерных алгебр Ли L находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех локально тривиальных структур расслоения L со структурной группой $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})^{\delta}$, которая получается из группы $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})$ всех автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при помощи изменения топологии таким образом, чтобы в подгруппе $\mathbf{Inn}(\mathfrak{g})$ внутренних автоморфизмов топология осталась неизменной, а в фактор-группе $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})/\,\mathbf{Inn}(\mathfrak{g})$ получилась дискретная топология. Это, в частности, означает, что функториальность каплингов через обратный образ ковариантных связностей в расслоении L совпадает с функториальностью локально тривиальных структур в расслоении L со структурной группой $\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})^{\delta}$, которые описываются при помощи множества $[M, B_{\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})^{\delta}}]$ гомотопных классов отображений многообразия M в классифицирующее пространство $B_{\mathbf{Aut}(\mathfrak{g})^{\delta}}$.

3.1. Функториальные свойства структуры транзитивного предалгеброида Ли

Если $f\colon M_1 \to M_2$ — гладкое отображение, L_2 — расслоение конечномерных алгебр Ли на многообразии M_2, ∇_2 — линейная связность дериваций в расслоении L_2, Ω_2 — дифференциальная форма на многообразии M_2 со значениями в расслоении L_2, удовлетворяющие условиям структуры транзитивного предалгеброида Ли

$$R^{\nabla_2}(Y_1, Y_2)(u_2) = -[u_2, \Omega_2(Y_1, Y_2)], \quad Y_1, Y_2 \in \Gamma^{\infty}(TM), \quad u_2 \in \Gamma^{\infty}(L_2),$$

то можно построить обратный образ $L_1 = f^*(L_2)$ расслоения L_2, обратный образ $\nabla_1 = f^*(\nabla_2)$ линейной связности дериваций ∇_2 в расслоении L_1, прообраз $\Omega_1 = f^*(\Omega_2)$ дифференциальной формы Ω_2, такие что сохраняется условие для структуры транзитивного предалгеброида Ли

$$R^{\nabla_1}(X_1, X_2)(u_1) = -[u_1, \Omega_1(X_1, X_2)], \quad X_1, X_2 \in \Gamma^\infty(TM), \quad u_1 \in \Gamma^\infty(L_1).$$

3.2. Функториальное свойство препятствия Маккензи

Используя функториальные свойства транзитивного предалгеброида Ли, получаем функториальность для препятствия Маккензи. Именно, пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — гладкое отображение, L_2 — расслоение конечномерных алгебр Ли на многообразии M_2, ∇_2 — линейная связность дериваций в расслоении L_2, Ω_2 — дифференциальная форма на многообразии M_2 со значениями в расслоении L_2, которые удовлетворяют условиям структуры транзитивного предалгеброида Ли

$$R^{\nabla_2}(Y_1, Y_2)(u_2) = -[u_2, \Omega_2(Y_1, Y_2)], \quad Y_1, Y_2 \in \Gamma^\infty(TM), \quad u_2 \in \Gamma^\infty(L_2).$$

Пусть $L_1 = f^*(L_2)$ — обратный образ расслоения L_2, $\nabla_1 = f^*(\nabla_2)$ — обратный образ линейной связности дериваций ∇_2 в расслоении L_1, $\Omega_1 = f^*(\Omega_2)$ — прообраз дифференциальной формы Ω_2. Пусть $f^*\colon H^3(M; ZL_2) \to H^3(M; ZL_1)$ — естественный гомоморфизм, порождённый отображением f.

Теорема 2. *Имеет место следующая функториальность препятствия Маккензи*:

$$\mathrm{Obs}(\Xi_1, \nabla_1, \Omega_1) = f^*\big(\mathrm{Obs}(\Xi_2, \nabla_2, \Omega_2)\big) \in H^3(M; ZL_1).$$

4. Обратный образ

На многообразии M транзитивный алгеброид Ли задаётся расслоением $A \to M$, анкором $a\colon A \to TM$ и коммутаторной скобкой $\{\bullet, \bullet\}$ в пространстве $\Gamma^\infty(M, A)$ всех гладких сечений. Если расслоение A представлено в виде прямой суммы векторных расслоений $A = L \oplus TM$, то всякое сечение $\sigma \in \Gamma^\infty(M, A)$ однозначно задаётся в виде пары сечений

$$\sigma = (u, X), \quad X = a(\sigma) \in \Gamma^\infty(TM), \quad u = \sigma - \lambda(X) \in \Gamma^\infty(L),$$

а коммутаторная скобка задаётся по формуле

$$\{(\sigma_1, X_1), (\sigma_2, X_2)\} = ([u_1, u_2] + \nabla_{X_1}(u_2) - \nabla_{X_2}(u_1) + \Omega(X_1, X_2), [X_1, X_2])$$

для подходящим образом выбранных ковариантной связности ∇ и дифференциальной 2-формы Ω, которые должны удовлетворять ряду соотношений. Поэтому обратный образ транзитивного алгеброида Ли можно задавать в терминах этого расщепления. Именно, обратный образ транзитивного алгеброида Ли можно определять при помощи разложения расслоения алгеброида в прямую сумму

$$E \approx L \oplus TM$$

и описания алгеброида в виде набора данных: расслоения конечномерных алгебр Ли L, ковариантной связности дериваций ∇, дифференциальной формы Ω, связанных условиями (11) и (12). Для построения обратного образа транзитивного алгеброида Ли достаточно построить обратный образ расслоения конечномерных алгебр Ли L, обратный образ ковариантной связности ∇ и обратный образ дифференциальной формы Ω.

Более точно, пусть

$$0 \to L \to A \xrightarrow{a} TM \to 0 —$$

точная последовательность Атьи,

$$\lambda\colon TM \to A —$$

расщепляющее отображение, $1 = a \cdot \lambda\colon TM \to TM$. Пусть $f\colon M_1 \to M_2$ — гладкое отображение двух многообразий,

$$0 \to L_2 \to A_2 \xrightarrow{a_2} TM_2 \to 0 —$$

последовательность Атьи для алгеброида A_2 над многообразием M_2, и пусть

$$\lambda_2\colon TM_2 \to A_2 —$$

расщепляющее отображение, $1 = a_2 \cdot \lambda_2\colon TM_2 \to TM_2$. Тогда обратный образ

$$0 \to L_1 \to A_1 \xrightarrow{a} TM_1 \to 0$$

можно строить следующим образом:

$$A_1 \overset{\mathrm{def}}{=} L_1 \oplus TM_1,$$

$$L_1 \overset{\mathrm{def}}{=} f^*(L_2),$$

$a_1\colon A_1 \to TM_1$ — проекция на вторую координату,

$\lambda_1\colon TM_1 \to A_1$ — вложение на вторую координату.

Ковариантная связность ∇^1 в расслоении L_1 строится как обратный образ ковариантной связности ∇^2 в расслоении L_2. 2-форма Ω_1 есть обратный образ формы Ω_2:

$$\Omega_1 = f^*(\Omega_2).$$

Осталось только определить, что такое обратный образ ковариантной связности, и проверить выполнение всех свойств для ∇^1 и Ω_1.

4.1. Обратный образ ковариантной связности в обратном образе векторного расслоения

Дано отображение $f\colon M_1 \to M_2$ двух многообразий и векторное расслоение L_2 над многообразием M_2. Другими словами, геометрически задана проекция

$$p_2\colon L_2 \to M_2.$$

Обратный образ

$$L_1 = f^*(L_2)$$

строится как подпространство

$$L_1 \subset L_2 \times M_1,$$

состоящее из всех пар $(u,x) \in L_2 \times M_1$, удовлетворяющих условию

$$p_2(u) = f(x).$$

При этом проекция $p_1\colon L_1 \to M_2$ — это проекция на второе слагаемое:

$$p_1(u,x) = x.$$

Получается коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "f^\natural"] \arrow[d, "p_1"] & L_2 \arrow[d, "p_2"'] \\ M_1 \arrow[r, "f"'] & M_2 \end{tikzcd},$$

где $f^\natural$ — это проекция на первое слагаемое,

$$f^\natural(u,x) = u.$$

Отображение $f^\natural$ является послойным изоморфизмом, что и характеризует расслоение L_1 как обратный образ расслоения L_2.

Пусть задана ковариантная связность ∇^2 в расслоении L_2,

$$\nabla^2_X\colon \Gamma^\infty(L_2) \to \Gamma^\infty(L_2).$$

Обратный образ

$$\nabla^1 = f^*(\nabla^2)$$

ковариантной связности ∇^2 нужно задать как оператор

$$\nabla^1_X\colon \Gamma^\infty(L_1) \to \Gamma^\infty(L_1).$$

Если сечение $u_1 \in \Gamma^\infty(L_1)$, $u_1\colon M_1 \to L_1$, имеет специальный вид

$$f^\natural\bigl(u_1(x)\bigr) = u_2\bigl(f(x)\bigr), \quad x \in M_1,$$

т. е.

$$u_1(x) = (f^\natural)^{-1}\Bigl(u_2\bigl(f(x)\bigr)\Bigr), \quad x \in M_1, \tag{14}$$

для некоторого сечения $u_2 \in \Gamma^\infty(L_2)$, то определяем значение оператора ∇^1 в каждой точке $x \in M_1$ по формуле

$$\nabla^1_X(u_1)(x) = (f^\natural_x)^{-1}\bigl(\nabla^2_{df(X(x))}(u_2)\bigr). \tag{15}$$

Формула (15) требует определения ковариантной производной для линейной связности, когда касательный вектор $Y_0 = df\bigl(X(x)\bigr)$ задан в одной точке

$y = f(x)$. Такое определение получается, если мы продолжим касательный вектор Y_0 до некоторого векторного поля Y на всём многообразии M_2 и положим

$$\nabla^2_{Y_0}(u_2) = \nabla^2_Y(u_2)(y).$$

Определение не зависит от продолжения Y.

В случае произвольного сечения u_1 следует рассмотреть разложение сечения u_1 в линейную комбинацию по специальным сечениям,

$$u_1(x) = \sum_i \varphi_i(x) \cdot u_2^i\big(f(x)\big),$$

и применить правило Лейбница к ковариантной производной.

Остаётся только проверить, что линейная связность ∇^1 определена корректно, т. е. не зависит от выбора линейной комбинации. Другими словами, если

$$\sum_i \varphi_i(x) \cdot u_2^i\big(f(x)\big) = 0,$$

то в каждой точке $x \in M_1$ выполнено равенство

$$\nabla^1_X\left(\sum_i \varphi_i(x) \cdot u_2^i\big(f(x)\big)\right) = \sum_i \nabla^1_X\Big(\varphi_i(x) \cdot u_2^i\big(f(x)\big)\Big) = 0,$$

т. е.

$$\sum_i X(\varphi_i) \cdot u_2^i\big(f(x)\big) + \sum_i \varphi_i(x) \cdot \nabla^1_X\Big(u_2^i\big(f(x)\big)\Big) = 0.$$

Сечения специального вида можно разложить по базису:

$$u_2^i(y) = \sum_k \psi_k^i(y) \cdot e^k(y).$$

Тогда

$$\sum_i \varphi_i(x) \cdot \left(\sum_k \psi_k^i\big(f(x)\big) \cdot e^k\big(f(x)\big)\right) = 0,$$

т. е.

$$\sum_k \cdot \left(\sum_i \varphi_i(x)\psi_k^i\big(f(x)\big)\right) \cdot e^k\big(f(x)\big) = 0.$$

Значит, для каждого значения k получаем тождество

$$\sum_i \varphi_i(x)\psi_k^i\big(f(x)\big) = 0,$$

т. е. нужно проверить, что

$$\nabla^1_X\left(\sum_i \varphi_i(x)\psi_k^i\big(f(x)\big) \cdot e^k\big(f(x)\big)\right) = 0.$$

Вычисляем:

$$\begin{aligned}
&\nabla^1_X\Bigl(\sum_i \varphi_i(x)(f^\natural_x)^{-1}\Bigl(\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\cdot e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\Bigr) = \\
&\quad= \sum_i \nabla^1_X\varphi_i(x)\cdot(f^\natural_x)^{-1}\Bigl(\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\cdot e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) + \\
&\quad+ \sum_i\Bigl(\varphi_i(x)(f^\natural_x)^{-1}\Bigl(\nabla^2_{df(X(x))}\Bigl(\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\cdot e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\Bigr)\Bigr) = \\
&\quad= \sum_i \nabla^1_X\varphi_i(x)\cdot(f^\natural_x)^{-1}\Bigl(\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\cdot e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) + \\
&\quad+ \sum_i\Bigl(\varphi_i(x)(f^\natural_x)^{-1}\Bigl(\nabla^2_{df(X(x))}\Bigl(\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\cdot e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\Bigr) + \\
&\quad+ \sum_i\Bigl(\varphi_i(x)(f^\natural_x)^{-1}\Bigl(\Bigl(\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\cdot\nabla^2_{df(X(x))}e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\Bigr) = \\
&\quad= \sum_i \nabla^1_X\varphi_i(x)\cdot(f^\natural_x)^{-1}\Bigl(\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\cdot e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) + \\
&\quad+ \sum_i\Bigl(\varphi_i(x)\nabla^1_X\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\cdot(f^\natural_x)^{-1}e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) + \\
&\quad+ \Bigl(\sum_i\varphi_i(x)\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)(f^\natural_x)^{-1}\Bigl(\nabla^2_{df(X(x))}e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) = \\
&\quad= \sum_i \nabla^1_X\varphi_i(x)\cdot(f^\natural_x)^{-1}\Bigl(\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\cdot e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) + \\
&\quad+ \sum_i\Bigl(\varphi_i(x)\nabla^1_X\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\cdot(f^\natural_x)^{-1}e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) = \\
&\quad= \sum_i \nabla^1_X\varphi_i(x)\cdot\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)(f^\natural_x)^{-1}\Bigl(\cdot e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) + \\
&\quad+ \sum_i\Bigl(\varphi_i(x)\nabla^1_X\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\cdot(f^\natural_x)^{-1}e^k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr) = \\
&\quad= \Bigl(\sum_i \nabla^1_X\varphi_i(x)\cdot\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr) + \sum_i\varphi_i(x)\nabla^1_X\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\cdot(f^\natural_x)^{-1}e^k\bigl(f(x)\bigr) = \\
&\quad= \nabla^1_X\Bigl(\sum_i\varphi_i(x)\cdot\psi^i_k\bigl(f(x)\bigr)\Bigr)\cdot(f^\natural_x)^{-1}e^k\bigl(f(x)\bigr) = 0.
\end{aligned}$$

4.2. Обратный образ дифференциала дифференциальной формы

Пусть дано отображение $f\colon M_1 \to M_2$ многообразия M_1 в многообразие M_2, векторное расслоение L_2 над многообразием M_2 и его обратный образ

$L_1 = f^*(L_2)$. Пусть заданы связности ∇_1, ∇_2 в расслоениях L_1, L_2 соответственно, причём $\nabla_2 = f^*(\nabla_2)$. Пусть задана дифференциальная форма ω_2 на многообразии M_2 со значением в слоях расслоения L_2. Отображение f индуцирует обратный образ $\omega_1 = f^*(\omega_2)$ формы ω_2 по следующей формуле:

$$\omega_1\big(X_1(x), X_2(x), \ldots, X_k(x)\big) = \\ = (f^\natural)^{-1}\Big(\omega_2\Big(df\big(X_1(x)\big), df\big(X_2(x)\big), \ldots, df\big(X_k(x)\big)\Big)\Big). \quad (16)$$

Пусть $\nabla_1 = f^*(\nabla_2)$ — обратный образ ковариантной связности ∇_2 в расслоении L_2.

Теорема 3. *Дифференциал d^∇ коммутирует с операцией обратного образа, т. е.*

$$d^{\nabla_1}\big(f^*(\omega_2)\big) = f^*(d^{\nabla_2}\omega_2). \quad (17)$$

4.3. Обратный образ тензора кривизны ковариантной связности в обратном образе векторного расслоения

Тензор кривизны, ассоциированный со связностью ∇, — это гомоморфизм

$$R^\nabla \colon \Lambda^2 TM \to \mathbf{Hom}(L, L),$$

который задаётся по формуле

$$R^\nabla(X_1, X_2)(u) = [\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}](u) - \nabla_{[X_1,X_2]}(u), \quad u \in \Gamma^\infty(L), \quad X_1, X_2 \in \Gamma^\infty(TM). \quad (18)$$

Заметим, что формула (18) для определения тензора кривизны корректно определена, т. е. зависит в каждой точке $x_0 \in M$ только от значения векторных полей X_1, X_2 в этой точке. Действительно, пусть $X_1' = X_1 + \varphi(x)Y$ — другое векторное поле, причём $\varphi(x_0) = 0$. Надо показать, что в точке $x_0 \in M$ имеет место равенство

$$R^\nabla(X_1, X_2)(u)_{|x=x_0} = R^\nabla(X_1', X_2)(u)_{|x=x_0}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} R^\nabla(X_1', X_2)(u) &= [\nabla_{X_1'}, \nabla_{X_2}](u) - \nabla_{[X_1',X_2]}(u) = \\ &= [\nabla_{X_1+\varphi(x)Y}, \nabla_{X_2}](u) - \nabla_{[X_1+\varphi(x)Y,X_2]}(u) = \\ &= [\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}](u) - \nabla_{[X_1,X_2]}(u) + [\nabla_{\varphi(x)Y}, \nabla_{X_2}](u) - \nabla_{[\varphi(x)Y,X_2]}(u) = \\ &= [\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}](u) - \nabla_{[X_1,X_2]}(u) + \varphi(x)[\nabla_Y, \nabla_{X_2}](u) - \varphi(x)\nabla_{[Y,X_2]}(u) + \\ &+ X_2(\varphi)\nabla_Y(u) - X_2(\varphi)\nabla_Y(u) = \\ &= [\nabla_{X_1}, \nabla_{X_2}](u) - \nabla_{[X_1,X_2]}(u) + \varphi(x)[\nabla_Y, \nabla_{X_2}](u) - \varphi(x)\nabla_{[Y,X_2]}(u) = \\ &= R^\nabla(X_1, X_2)(u) + \varphi(x)R^\nabla(Y, X_2)(u). \end{aligned}$$

Отсюда следует требуемое равенство. Это означает, что тензор кривизны можно понимать как классическую дифференциальную форму степени два со значениями в расслоении $\mathbf{Hom}(L, L)$. Поэтому имеет место естественная теорема об обратном образе тензора кривизны. Именно, пусть дано отображение $f\colon M_1 \to M_2$ многообразия M_1 в многообразие M_2 и коммутативная диаграмма векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} L_1 & \xrightarrow{f^\natural} & L_2 \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & {\scriptstyle p_2}\downarrow \\ M_1 & \xrightarrow[f]{} & M_2 \end{array}, \tag{19}$$

в которой гомоморфизм $f^\natural$ является послойным изоморфизмом, т. е. расслоение L_1 является обратным образом расслоения L_2, $L_1 = f^*(L_2)$. Пусть задана ковариантная связность ∇^2 в расслоении L_2,

$$\nabla_X^2 \colon \Gamma^\infty(L_2) \to \Gamma^\infty(L_2),$$

и обратный образ $\nabla^1 = f^*(\nabla^2)$ связности ∇^2.

Теорема 4. *Тензоры кривизны R^{∇^1} и R^{∇^2} связаны условием обратного образа дифференциальных форм*:

$$R^{\nabla^1} = f^*(R^{\nabla^2}).$$

Последнему равенству следует придать смысл, поскольку значения тензоров кривизны R^{∇^1} и R^{∇^2} принимаются в различных расслоениях $\mathbf{Hom}(L_1, L_1)$ и $\mathbf{Hom}(L_2, L_2)$. Для этого нужно по диаграмме (19) построить новую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Hom}(L_1, L_1) & \xrightarrow{f^{H\natural}} & \mathbf{Hom}(L_2, L_2) \\ \downarrow{\scriptstyle p_1} & & {\scriptstyle p_2}\downarrow \\ M_1 & \xrightarrow[f]{} & M_2 \end{array}, \tag{20}$$

где $f^\natural$ всё также является послойным изоморфизмом, т. е.

$$\mathbf{Hom}(L_1, L_1) = f*\big(\mathbf{Hom}(L_2, L_2)\big).$$

Тогда равенство $R^{\nabla^1} = f^*(R^{\nabla^2})$ в теореме 4 понимается следующим образом: в каждой точке $x \in M_1$ имеет место равенство

$$f^\natural\Big(R^{\nabla^1}\big(X_1(x), X_2(x)\big)\Big) = R^{\nabla^2}\Big(df\big(X_1(x)\big), df\big(X_2(x)\big)\Big),$$

или

$$R^{\nabla^1}\big(X_1(x), X_2(x)\big) = (f^{H\natural})^{-1}\bigg(R^{\nabla^2}\Big(df\big(X_1(x)\big), df\big(X_2(x)\big)\Big)\bigg). \tag{21}$$

Диаграмма (20) строится на основании (19) следующим образом. Всякий гомоморфизм $\varphi_2\colon L_2 \to L_2$ задаёт диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& L_1 \arrow[rr, "f^\natural"] \arrow[ddl, "p_1"] & & L_2 \arrow[ddl, "p_2"] \\
L_1 \arrow[ur] \arrow[rr, "f^\natural"] \arrow[d, "p_1"'] & & L_2 \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[d, "p_2"'] & \\
M_1 \arrow[rr, "f"'] & & M_2 &
\end{tikzcd}.$$

Поскольку гомоморфизм $f^\natural$ является послойным изоморфизмом, полагаем

$$\varphi_1 = f^{H\natural}(\varphi_2) = (f^\natural)^{-1}\cdot\varphi_2\cdot f^\natural: \tag{22}$$

$$\begin{tikzcd}
& L_1 \arrow[rr, "f^\natural"] \arrow[ddl, "p_1"] & & L_2 \arrow[ddl, "p_2"] \\
L_1 \arrow[ur, "\varphi_1=f^{H\natural}(\varphi_2)=(f^\natural)^{-1}\cdot\varphi_2\cdot f^\natural"] \arrow[rr, "f^\natural"] \arrow[d, "p_1"'] & & L_2 \arrow[ur, "\varphi_2"] \arrow[d, "p_2"'] & \\
M_1 \arrow[rr, "f"'] & & M_2 &
\end{tikzcd}.$$

Проверку равенства (21) будем проводить для любого сечения $u_1 \in \Gamma^\infty(L_1)$, точнее, для любого базисного элемента, который имеет специальный вид (14):

$$u_1(x) = (f^\natural)^{-1}\Big(u_2\big(f(x)\big)\Big), \quad x \in M_1. \tag{23}$$

Таким образом, следует доказать равенство (для любой точки $x \in M_2$)

$$R^{\nabla^1}\big(X_1(x), X_2(x)\big)\big(u_1(x)\big) = (f^{H\natural})^{-1}\Big(R^{\nabla^2}\Big(df\big(X_1(x)\big), df\big(X_2(x)\big)\Big)(u_2)\Big). \tag{24}$$

Учитывая (14) и (22), получаем

$$\begin{aligned}
&R^{\nabla^1}\big(X_1(x), X_2(x)\big)\big(u_1(x)\big) = \\
&\quad = (f^\natural)^{-1}\left(R^{\nabla^2}\Big(df\big(X_1(x)\big), df\big(X_2(x)\big)\Big)\right) f^\natural\big(u_1(x)\big) = \\
&\quad = (f^\natural)^{-1}\left(R^{\nabla^2}\Big(df\big(X_1(x)\big), df\big(X_2(x)\big)\Big)\Big(u_2\big(f(x)\big)\Big)\right).
\end{aligned} \tag{25}$$

Рассмотрим теперь левую часть равенства (26). Получаем

$$R^{\nabla^1}\big(X_1(x), X_2(x)\big)\big(u_1(x)\big) = R^{\nabla^1}\big(X_1(x), X_2(x)\big)\left((f^\natural)^{-1}\Big(u_2\big(f(x)\big)\Big)\right) =$$

$$= \big([\nabla^1_{X_1}, \nabla^1_{X_2}] - \nabla^1_{[X_1,X_2]}\big)\left((f^\natural)^{-1}\Big(u_2\big(f(x)\big)\Big)\right) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \big((\nabla^1_{X_1}\nabla^1_{X_2} - \nabla^1_{X_2}\nabla^1_{X_1}) - \nabla^1_{[X_1,X_2]}\big)\Big((f^\natural)^{-1}\Big(u_2\big(f(x)\big)\Big)\Big) = \\
&= \nabla^1_{X_1}\bigg(\nabla^1_{X_2}\Big((f^\natural)^{-1}u_2\big(f(x)\big)\Big)\bigg) - \nabla^1_{X_2}\bigg(\nabla^1_{X_1}\Big((f^\natural)^{-1}u_2\big(f(x)\big)\Big)\bigg) - \\
&- \nabla^1_{[X_1,X_2]}(f^\natural)^{-1}\Big(u_2\big(f(x)\big)\Big) = \\
&= \nabla^1_{X_1}\Big(\big((f^\natural)^{-1}\nabla^2_{df(X_2(x))}u_2\big)\Big) - \nabla^1_{X_2}\Big(\big((f^\natural)^{-1}\nabla^2_{df(X_1(x))}u_2\big)\Big) - \\
&- (f^\natural)^{-1}\nabla^2_{df([X_1,X_2](x))}(u_2) = \\
&= (f^\natural)^{-1}\nabla^2_{df(X_1(x))}\Big(\big(\nabla^2_{df(X_2(x))}u_2\big)\Big) - (f^\natural)^{-1}\nabla^2_{df(X_2(x))}\Big(\big(\nabla^2_{df(X_1(x))}u_2\big)\Big) - \\
&- (f^\natural)^{-1}\nabla^2_{df([X_1,X_2](x))}(u_2).
\end{aligned} \tag{26}
$$

Поскольку формула (18) для определения тензора кривизны зависит в каждой точке $x_0 \in M$ только от значения векторных полей X_1, X_2 в этой точке, то без ограничения общности векторные поля X_1, X_2 можно выбрать коммутирующими, а их образы в точке $y = f(x) \in M_2$ тоже можно продолжить до коммутирующих векторных полей Y_1, Y_2 на многообразии M_2. Тогда в предыдущей формуле получается

$$
\begin{aligned}
&R^{\nabla^1}\big(X_1(x), X_2(x)\big)\big(u_1(x)\big) = \\
&\quad = (f^\natural)^{-1}\big(\nabla^2_{Y_1(y)}\big((\nabla^2_{Y_2(y)}u_2)\big) - \nabla^2_{Y_2(y)}\big((\nabla^2_{Y_1(y)}u_2)\big) - \nabla^2_{[Y_1,Y_2](y))}(u_2)\big) = \\
&\quad = (f^\natural)^{-1}\big(R^{\nabla^2}\big(Y_1(y), Y_2(y)\big)(u_2)\big),
\end{aligned} \tag{27}
$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 4, в частности, вытекает, что если на многообразии M_2 между связностью ∇^2 и дифференциальной формой Ω_2 выполняется условие, которое возникает при задании транзитивного алгеброида Ли, а именно

$$
R^{\nabla^2}(Y_1, Y_2)(u_2) = [u_2, \Omega_2(Y_1, Y_2)],
$$

то это же условие выполняется и для обратного образа расслоения, связности и дифференциальной формы при гладком отображении многообразий.

5. Дополнение: вычислительные формулы

В этом разделе изложены определения и формулы, общие для различных объектов, таких как ковариантные связности в расслоениях, дифференциальные формы и др. Все рутинные вычисления мы опускаем и оставляем только окончательные результаты.

5.1. Дифференциал d^{∇} для дифференциальных форм

Приведём формулы для дифференциальных форм малых размерностей.

1. Нульмерные формы, т. е. функции $u \in \Gamma^\infty(L)$:
$$d^\nabla u(X) = \nabla_X(u).$$
2. Одномерные формы $\omega\colon TM \to L$:
$$d^\nabla \omega(X_1, X_2) = \nabla_{X_1}\big(\omega(X_2)\big) - \nabla_{X_2}\big(\omega(X_1)\big) - \omega([X_1, X_2]).$$
3. Двумерные формы $\Omega\colon \Lambda^2(TM) \to L$:
$$\begin{aligned} &d^\nabla \Omega(X_1, X_2, X_3) = \\ &\quad = \nabla_{X_1}\big(\Omega(X_2, X_3)\big) + \nabla_{X_2}\big(\Omega(X_3, X_1)\big) + \nabla_{X_3}\big(\Omega(X_1, X_2)\big) - \\ &\quad - \Omega([X_1, X_2], X_3) - \Omega([X_2, X_3], X_1) - \Omega([X_3, X_1], X_2). \end{aligned}$$
4. Трёхмерные формы $\Omega\colon \Lambda^3(TM) \to L$:
$$\begin{aligned} &d^\nabla \Omega(X_1, X_2, X_3, X_4) = \\ &\quad = \nabla_{X_1}\big(\Omega(X_2, X_3, X_4)\big) - \nabla_{X_2}\big(\Omega(X_3, X_4, X_1)\big) + \\ &\quad + \nabla_{X_3}\big(\Omega(X_4, X_1, X_2)\big) - \nabla_{X_4}\big(\Omega(X_1, X_2, X_3)\big) - \\ &\quad - \Omega([X_1, X_2], X_3, X_4) + \Omega([X_1, X_3], X_2, X_4) - \Omega([X_1, X_4], X_2, X_3) + \\ &\quad + \Omega([X_2, X_3], X_4, X_1) + \Omega([X_2, X_4], X_1, X_3) - \Omega([X_3, X_4], X_1, X_2). \end{aligned}$$

5.2. Вычисления для квадрата дифференциала d^∇ для форм

1. Нульмерные формы, т. е. функции $u \in \Gamma^\infty(L)$:
$$d^\nabla\left(d^\nabla u\right)(X_1, X_2) = R^\nabla(X_1, X_2)(u).$$
2. Одномерные формы $\omega\colon TM \to L$:
$$\begin{aligned} &d^\nabla(d^\nabla \omega)(X_1, X_2, X_3) = \\ &\quad = R^\nabla(X_1, X_2)\big(\omega(X_3)\big) + R^\nabla(X_2, X_3)\big(\omega(X_1)\big) + R^\nabla(X_3, X_1)\big(\omega(X_2)\big). \end{aligned}$$
3. Двумерные формы $\Omega\colon \Lambda^2(TM) \to L$:
$$\begin{aligned} &d^\nabla(d^\nabla \Omega)(X_1, X_2, X_3, X_4) = \\ &\quad = R^\nabla(X_1, X_2)\big(\Omega(X_3, X_4)\big) + R^\nabla(X_1, X_3)\big(\Omega(X_4, X_2)\big) + \\ &\quad + R^\nabla(X_1, X_4)\big(\Omega(X_2, X_3)\big) + R^\nabla(X_2, X_3)\big(\Omega(X_1, X_4)\big) + \\ &\quad + R^\nabla(X_2, X_4)\big(\Omega(X_3, X_1)\big) + R^\nabla(X_3, X_4)\big(\Omega(X_1, X_2)\big). \end{aligned}$$

5.3. Вычисление дифференциала для тензора кривизны

Тензор кривизны понимается как отображение
$$R^\nabla\colon \Lambda^2(TM) \to \mathbf{Der}(L), \quad R^\nabla(X_1, X_2) = [\nabla_{X_1}, \nabla_{X_1}] - \nabla_{[X_1, X_2]}.$$

Другими словами, это форма со значениями в расслоении $\mathbf{Der}(L)$. Его дифференциал $d^{\nabla^{\mathrm{Der}}}$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} d^{\nabla^{\mathrm{Der}}}&(R^{\nabla})(X_1, X_2, X_3) = \\ &= \nabla^{\mathrm{Der}}_{X_1}\big(R^{\nabla}(X_2, X_3)\big) + (\text{циклические перестановки}) - \\ &- R^{\nabla}([X_1, X_2], X_3) - (\text{циклические перестановки}). \end{aligned}$$

Значение ковариантного градиента $\nabla^{\mathrm{Der}}_{X_1}\big(R^{\nabla}(X_2, X_3)\big)$ считаем по формуле

$$\nabla^{\mathrm{Der}}_{X_1}\big(R^{\nabla}(X_2, X_3)\big)(u) = \nabla_{X_1}\big(R^{\nabla}(X_2, X_3)(u)\big) - R^{\nabla}(X_2, X_3)(\nabla_{X_1}u).$$

Вычисления дают

$$d^{\nabla^{\mathrm{Der}}}(R^{\nabla})(X_1, X_2, X_3)(u) = 0.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 5. $d^{\nabla^{\mathrm{Der}}}(R^{\nabla}) = 0$.

Литература

[1] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.

[2] Ли Сяою, Мищенко А. С. Классификация каплингов для транзитивных алгеброидов Ли // Докл. РАН. — 2015. — Т. 460, № 5. — С. 517—519.

[3] Li Xiaoyu, Mishchenko A. S. Comparison of categorical characteristic classes of transitive Lie algebroid with Chern—Weil homomorphism. — 2012. — `arXiv:1208.6564v1`.

[4] Li Xiaoyu, Mishchenko A. S. Description of coupling in the category of transitive Lie algebroids. — 2013. — `arXiv:1310.5824`.

[5] Li Xiaoyu, Mishchenko A. S. The existence of coupling in the category of transitive Lie algebroid. — 2013. — `arXiv:1306.5449`.

[6] Mackenzie K. C. H. General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.

[7] Kubarski J. The Chern—Weil homomorphism of regular Lie algebroids // Publ. Depart. Math., Univ. Claude Bernard — Lyon-1. — 1991. — P. 4—63.

[8] Mishchenko A. S. Transitive Lie algebroids — categorical point of view. — 2010. — `arXiv:1006.4839v1`.

[9] Mishchenko A. S. Characteristic classes of transitive Lie algebroids. Categorical point of view. — 2011. — `arXiv:1111.6823v1`.