О двух геометрических задачах, возникающих в математической физике*

А. Г. СЕРГЕЕВ
Математический институт
им. В. А. Стеклова
e-mail: sergeev@mi.ras.ru

УДК 514.83

Ключевые слова: геометрическое квантование, твисторы, адиабатический предел, уравнения Гинзбурга—Ландау, уравнения Зайберга—Виттена.

Аннотация

В статье рассматриваются две математические задачи, которые можно отнести к категории, указанной в названии. Первая связана с геометрическим квантованием, и речь в ней идёт о твисторном подходе к квантованию теории гладких струн. Другая задача связана с описанием адиабатического предела в уравнениях Гинзбурга—Ландау и Зайберга—Виттена.

Abstract

A. G. Sergeev, On two geometric problems arising in mathematical physics, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 157—166.

We consider two mathematical problems that can be ascribed to the category pointed out in the title. The first one relates to the geometric quantization and deals with the twistor approach to the quantization of smooth strings. The second one concerns the adiabatic limit in the Ginzburg—Landau and Seiberg—Witten equations.

1. Геометрическое квантование и твисторы

Ещё на заре квантовой физики один из её основателей Вернер Гейзенберг, получив своё знаменитое уравнение

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

связывающее операторы координаты и импульса, пришёл, по словам Дирака, в отчаяние, впервые столкнувшись с некоммутирующими физическими величинами. Однако именно это уравнение и его формальное сходство со скобкой Пуассона функций координаты и импульса в классической механике привели Дирака к его известному определению квантования.

*При подготовке этой работы автор пользовался частичной финансовой поддержкой гранта РФФИ 13-01-00622, программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-2928.2012.1) и программы Президиума РАН «Нелинейная динамика».

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 2, с. 157—166.

Напомню это определение. Классическая (механическая) система задаётся своим фазовым пространством (математически, симплектическим многообразием) и алгеброй наблюдаемых (математически, алгеброй Ли функций на фазовом пространстве относительно скобки Пуассона). Квантование классической системы заключается в том, что каждой наблюдаемой ставится в соответствие оператор в гильбертовом пространстве квантования так, что скобка Пуассона наблюдаемых переходит в коммутатор отвечающих им операторов.

С математической точки зрения квантование есть неприводимое представление алгебры наблюдаемых в пространстве квантования. Иными словами, каждой наблюдаемой функции f из алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ ставится в соответствие (вообще говоря, неограниченный) самосопряжённый оператор $r(f)$, действующий в гильбертовом пространстве H. При этом

$$r\colon \{f,g\} \mapsto \frac{h}{i}[r(f), r(g)]$$

для любых наблюдаемых $f, g \in \mathcal{A}$. Кроме того, требуется, чтобы все операторы $r(f)$ имели общую область определения, плотную в H, и функция, тождественно равная 1, переходила в тождественный оператор.

Начнём с самого простого примера квантования, в котором фазовое пространство — $(2n)$-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ и стандартной симплектической формой

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j.$$

В качестве алгебры наблюдаемых на этом пространстве возьмём алгебру Гейзенберга $\mathcal{A}$, порождаемую координатными функциями p_j, q_j и единицей 1, удовлетворяющими стандартным коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &\{p_j, p_k\} = \{q_j, q_k\} = 0, \\ &\{p_j, q_k\} = i\delta_{jk} \quad \text{для} \quad j, k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Выберем в качестве пространства квантования пространство $H = L^2(\mathbb{R}^{2n})$ и зададим представление r в пространстве H формулой

$$r(p_j) = -i\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad r(q_j) = q_j + i\frac{\partial}{\partial p_j}.$$

Операторы этого представления корректно определены на подпространстве $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ гладких финитных функций и допускают самосопряжённые замыкания в пространстве H.

Однако указанное представление приводимо, поскольку операторы

$$i\frac{\partial}{\partial p_j}, \quad p_j + i\frac{\partial}{\partial q_j}$$

коммутируют со всеми операторами $r(p_j)$, $r(q_j)$, не будучи скалярными. Тем не менее можно добиться неприводимости представления алгебры $\mathcal{A}$, задаваемого

приведёнными выше формулами, ограничивая его на подпространство H, состоящее из функций, зависящих только от координат (q_j). Тогда оно сведётся к хорошо известному представлению Гейзенберга в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n_{(q)}, d^n q)$, задаваемому формулами

$$r(p_j) = -i\frac{\partial}{\partial q_j}, \quad r(q_j) = q_j.$$

Аналогичным образом можно построить двойственное представление Гейзенберга в пространстве $L^2(\mathbb{R}^n_{(p)}, d^n p)$ функций, зависящих только от импульсов (p_j).

Физическое объяснение приводимости рассмотренного представления r в пространстве $H = L^2(\mathbb{R}^{2n})$ состоит в том, что согласно принципу неопределённости Гейзенберга «физическое» пространство квантования не должно содержать функций, зависящих от какой-либо пары канонических переменных (p_j, q_j) одновременно, как это имеет место в пространстве H.

Рассмотрим комплексную интерпретацию приведённого примера квантования, восходящую к В. Фоку. Для этого отождествим пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с комплексным пространством $\mathbb{C}^n$, вводя комплексные координаты

$$z_j = \frac{p_j + iq_j}{\sqrt{2}}, \quad \bar{z}_j = \frac{p_j - iq_j}{\sqrt{2}}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

В указанных координатах симплектическая форма записывается в виде

$$\omega = i\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\bar{z}_j.$$

Возьмём в качестве алгебры наблюдаемых $\mathcal{A}$ алгебру Гейзенберга, порождаемую координатными функциями z_j, $\bar{z}_j$ и единицей 1. Скобка Пуассона в этой алгебре задаётся соотношениями

$$\begin{aligned} &\{z_j, z_k\} = \{\bar{z}_j, \bar{z}_k\} = 0, \\ &\{z_j, z_k\} = i\delta_{jk} \quad \text{для } j, k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Если выбрать в качестве пространства квантования гильбертово пространство $L^2(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2})$ и задать представление алгебры наблюдаемых комплексными аналогами формул, приведённых выше, то это представление окажется снова приводимым, поскольку введённое пространство содержит функции, зависящие одновременно от пар $(z_j, \bar{z}_j)$ канонических переменных.

Поэтому естественно ограничить указанное представление на подпространство

$$F(\mathbb{C}^n) = L^2_{\mathcal{O}}(\mathbb{C}^n, e^{-|z|^2/2}),$$

состоящее из голоморфных (иначе говоря, зависящих только от (z_j)) квадратично интегрируемых функций на $\mathbb{C}^n$ с гауссовым весом $e^{-|z|^2/2}$. Оно будет задаваться формулами

$$r(z_j) = z_j, \quad r(\bar{z}_j) = \frac{\partial}{\partial z_j}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

которые, очевидно, оставляют пространство $F(\mathbb{C}^n)$ инвариантным. Нетрудно показать, что построенное представление алгебры Гейзенберга в пространстве $F(\mathbb{C}^n)$ уже является неприводимым.

Вся эта конструкция проходит и для более общих кэлеровых фазовых пространств (M, ω), наделённых, помимо симплектической формы ω, ещё и совместимой с ней комплексной структурой J_0, вплоть до последнего момента, когда нужно ограничивать представление на фоковское пространство $F(M, J_0)$ квадратично интегрируемых функций (или, более общим образом, сечений расслоения предквантования), голоморфных относительно указанной комплексной структуры. В общем случае операторы представления не сохраняют это пространство, поскольку «меняют» комплексную структуру J_0 фазового пространства M. Причина в том, что, в отличие от симплектической структуры ω, являющейся неотъемлемым атрибутом само́й классической системы, комплексная структура J_0 привнесена в неё как бы «извне», «руками», и потому не сохраняется под действием операторов квантования. (Подробное обсуждение геометрического квантования см. в [2, 10, 14, 22—24, 29, 30].)

Выход из этой, казалось бы, тупиковой ситуации подсказывается теорией твисторов. Вместо того чтобы фиксировать какую-либо конкретную комплексную структуру J_0 на фазовом пространстве M, рассмотрим их все одновременно или, иначе говоря, перейдём к твисторному пространству $\pi\colon Z \to M$ всех комплексных структур на фазовом пространстве (совместимых с его симплектической структурой). Это пространство Z, в отличие от исходного фазового пространства, уже обладает канонической почти комплексной структурой $\mathcal{J}$, введённой М. Ф. Атьей, И. М. Зингером и Н. Дж. Хитчиным.

В терминах твисторного пространства исходная задача квантования может быть переформулирована следующим образом (см. [10, 22]). Каждой точке твисторного пространства (т. е. комплексной структуре J на фазовом пространстве M) отвечает своё фоковское пространство $F(M, J)$, так что вместо одного фоковского пространства мы получаем целое голоморфное расслоение

$$\mathcal{F} \to Z, \quad F(M, J) \mapsto J,$$

таких пространств над твисторным пространством Z. Квантование в этих терминах означает, что мы можем указать естественный способ отождествления слоёв данного голоморфного расслоения, позволяющий построить представление алгебры наблюдаемых в фоковском пространстве $F(M, J_0)$, отвечающем исходной комплексной структуре J_0. Указанное отождествление слоёв фоковского расслоения задаётся плоской связностью на этом расслоении.

Покажем, как приведённая идея работает, на примере теории струн. Здесь уже само фазовое пространство бесконечномерно и совпадает с пространством петель в d-мерном векторном пространстве $\mathbb{R}^d$, т. е. его точками являются гладкие отображения единичной окружности $S^1 \to \mathbb{R}^d$ (с фиксированным началом в $\mathbb{R}^d$).

Хотя это и кажется удивительным на первый взгляд, указанное бесконечномерное многообразие обладает комплексной структурой. Действительно, ка-

сательный вектор к данному многообразию — это снова гладкое отображение в $\mathbb{R}^d$. Поэтому, задавая его рядом Фурье (с нулевым свободным членом), можно определить действие оператора комплексной структуры на заданном векторе, умножая коэффициенты Фурье с отрицательными номерами на i, а коэффициенты Фурье с положительными номерами на $-i$.

«Нефизичность» построенной комплексной структуры означает в данном случае, что она зависит от выбора параметризации на петлях. Иными словами, если мы сменим параметризацию с помощью какого-либо диффеоморфизма единичной окружности, то изменится и комплексная структура, если только этот диффеоморфизм не совпадает с вращением. (Подробнее о пространствах петель групп Ли см. [9, 10, 22].)

Следуя сформулированной выше твисторной идее, рассмотрим все комплексные структуры на пространстве петель, параметризуемые точками многообразия

$$\mathcal{S} = \{\text{диффеоморфизмы окружности } S^1\}/\{\text{вращения}\}.$$

А. А. Кириллов показал (см. [3, 4]), что это многообразие можно отождествить с пространством однолистных аналитических функций в единичном круге, гладких вплоть до границы. (При этом возникает волнующая параллель между теорией струн и классической теорией однолистных аналитических функций в круге.)

Вообще говоря, пространство $\mathcal{S}$ правильно рассматривать как шар в некотором бесконечномерном пространстве; если в его определении вместо всевозможных диффеоморфизмов окружности ограничиться дробно-линейными, то мы получим настоящий единичный круг. Группа диффеоморфизмов окружности играет для $\mathcal{S}$ ту же роль, что и группа дробно-линейных автоморфизмов для круга. В частности, $\mathcal{S}$ обладает инвариантной метрикой, аналогичной метрике Пуанкаре в единичном круге. Как известно, последняя (в подходящей нормировке) является метрикой постоянной отрицательной кривизны $-1/4$. Удивительно, что инвариантная метрика на $\mathcal{S}$ также обладает конечной кривизной Риччи. Эта кривизна в подходящем базисе задаётся бесконечной диагональной матрицей с элементами вида

$$-\frac{26}{12}\,n^3 + \text{член, линейный по } n, \text{ где } n \text{ — целое число,}$$

на диагонали (эта замечательная формула найдена физиками М. Бовиком и С. Радживом [12, 13]).

Мы не стали сокращать дробь перед n^3, поскольку число 26, стоящее в числителе этой дроби, появляется в условии квантования. А именно, сформулированная выше задача твисторного квантования теории струн разрешима, если размерность d пространства, в котором «живут» струны, равна 26 (см. [10, 22]).

2. Адиабатический предел в уравнениях Гинзбурга—Ландау и Зайберга—Виттена

Другой пример физической комплексной задачи заимствован нами из теории сверхпроводимости (см. [5]).

Представим себе идеальный сверхпроводник в виде части трёхмерного пространства, заключённой между двумя горизонтальными (т. е. параллельными плоскости (x, y)) плоскостями в пространстве $\mathbb{R}^3$. Свойства сверхпроводимости проявляются, как известно, только при очень низких температурах (порядка нескольких градусов Кельвина). При этом внешнее магнитное поле (которое мы будем считать параллельным оси (z)) выталкивается из сверхпроводника согласно эффекту Мейснера.

Если повышать уровень внешнего магнитного поля, то после некоторого критического порога сверхпроводимость начнёт разрушаться. При этом тело сверхпроводника в направлении внешнего магнитного поля начнут пробивать трубки (называемые трубками тока), параллельные оси (z). В центре этих трубок (вдоль так называемых абрикосовских нитей) проводимость является нормальной, а в остальной их части она имеет смешанный характер (иначе говоря, там присутствуют как нормальная, так и сверхпроводящая фазы). За пределами трубок сохраняется сверхпроводимость. При дальнейшем повышении уровня внешнего магнитного поля число трубок и их диаметр возрастают, заполняя в итоге всё пространство между плоскостями и превращая сверхпроводник в обычный проводник.

Для математического описания этой физической ситуации рассмотрим сечение исходного сверхпроводника горизонтальной плоскостью $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$ с координатами (x_1, x_2). Предположим далее, что всюду на этой плоскости имеет место смешанная проводимость, а сверхпроводимость сохраняется только на бесконечности. Указанная физическая модель описывается лагранжианом Гинзбурга—Ландау, имеющим следующий вид:

$$\mathcal{L}(A, \Phi) = |F_A|^2 + |d_A\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4}(1 - |\Phi|^2)^2.$$

Здесь A обозначает электромагнитный вектор-потенциал, задающийся 1-формой $A = A_1\,dx_1 + A_2\,dx_2$ на $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$ с гладкими чисто мнимыми коэффициентами. Внешняя производная этой формы

$$F_A = dA = \sum_{i,j=1}^{2} F_{ij}\,dx_i \wedge dx_j = 2F_{12}\,dx_1 \wedge dx_2$$

с коэффициентами

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad \partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j},$$

отвечает напряжённости электромагнитного поля, так что член $|F_A|^2$ совпадает с лагранжианом Максвелла.

Переменная Φ задаётся гладкой комплекснозначной функцией $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ на $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$, называемой иначе полем Хиггса или параметром порядка. Она описывает сверхпроводящую фазу или, иными словами, скалярное поле, взаимодействующее с электромагнитным полем A. Указанное взаимодействие определяется членом

$$d_A\Phi = d\Phi + A\Phi = \sum_{i=1}^{2}(\partial_i + A_i)\Phi\, dx_i.$$

Нули функции Φ отвечают центрам трубок, и в этих точках имеется нормальная проводимость, тогда как на бесконечности, где $|\Phi| \to 1$, сохраняется чистая сверхпроводимость.

Главная специфика лагранжиана Ландау—Гинзбурга определяется членом

$$\frac{\lambda}{4}\,(1 - |\Phi|^2)^2$$

с параметром $\lambda > 0$. С физической точки зрения этот член описывает «самодействие» скалярного поля Φ.

Начнём исследование приведённой задачи с так называемого автодуального статического случая, в котором $\lambda = 1$. Потенциальная энергия рассматриваемой физической модели задаётся интегралом от лагранжиана по плоскости $\mathbb{R}^2_{(x_1,x_2)}$, которую удобно отождествить с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$ с координатой $z = x_1 + ix_2$.

Решения указанной модели, минимизирующие потенциальную энергию, называются вихрями, поскольку они устроены следующим образом. Функция Φ имеет конечное число нулей (возможно, кратных), в окрестности которых она ведёт себя как «гидродинамический вихрь»: при обходе вокруг нуля аргумент Φ изменяется на целое число, кратное 2π. При этом все вихри закручены в одну и ту же сторону и общее их число пропорционально потенциальной энергии.

Более того, согласно теореме Таубса по любому конечному набору точек (с кратностями) на комплексной плоскости можно построить «вихревое» решение (A, Φ), минимизирующее потенциальную энергию, для которого функция Φ имеет нули только в заданных точках и с заданной кратностью (см. [15,21,25]). Таким образом, пространство вихревых решений с заданным вихревым числом N (равным числу нулей Φ с учётом кратности) с точностью до естественной (так называемой калибровочной) эквивалентности можно отождествить с множеством наборов из N точек (с учётом кратности) на комплексной плоскости. Ставя в соответствие каждому такому набору комплексный полином N-й степени (со старшим коэффициентом единица), имеющий нули в заданных точках, мы видим, что указанное множество можно также отождествить с N-мерным комплексным пространством $\mathbb{C}^N$.

В отличие от статической задачи, допускающей, как мы видели, полное решение, рассчитывать на что-либо подобное в динамической задаче не приходится. Можно, однако, получить её приближённые решения, исходя из следующей идеи, принадлежащей Н. С. Мэнтону (см. [16]).

Каждое решение динамической задачи представляет собой кривую $\big(A(t), \Phi(t)\big)$ в пространстве пар (A, Φ), заданных с точностью до упомянутой выше калибровочной эквивалентности. Удобно представлять себе указанное пространство пар в виде «оврага», дно которого совпадает с пространством статических решений (так что каждая точка на дне есть статическое решение), а решение динамической задачи — в виде траектории шарика, катающегося по стенкам оврага. Если уменьшать скорость шарика, то его траектория будет прижиматься к дну оврага и в пределе превратится в точку на дне.

Однако если ввести на каждой траектории «медленное время», замедляя течение времени параллельно с замедлением шарика, то в пределе таких «масштабированных» траекторий получим уже не точку, а кривую, лежащую на дне оврага, которая является геодезической пространства статических решений относительно метрики, задаваемой кинетической энергией системы (см. [7, 8]). Конечно, эти кривые не могут быть решениями исходной динамической задачи, поскольку каждая точка на такой кривой является статическим решением. Однако они приближённо описывают динамические решения, обладающие малой кинетической энергией.

Нахождение указанных кривых сводится к решению уравнения Эйлера для геодезических на пространстве статических решений, наделённом кинетической метрикой. Поведение таких геодезических позволяет получить вполне конкретные выводы о поведении реальных вихрей. Например, можно показать, что два вихря, движущиеся навстречу друг другу по прямой, соединяющей их центры, после лобового соударения разлетятся под прямым углом по отношению к линии движения (см. [6, 11]).

Вихревые уравнения, как выяснилось в последнее время, тесно связаны с уравнениями Зайберга—Виттена, вызвавшими настоящий бум в топологии гладких четырёхмерных многообразий (см. [17, 18, 21]). Уравнения Зайберга—Виттена, как и «прорвавшиеся» в четырёхмерную топологию до этого уравнения Янга—Миллса, являются предельными случаями более общей суперсимметричной теории Янга—Миллса (см. [19, 20]). Заметим, что, в отличие от конформно-инвариантных уравнений Янга—Миллса, уравнения Зайберга—Виттена не инвариантны относительно изменения масштаба, что составляет одну из главных особенностей этих уравнений. Поэтому для того чтобы извлечь «полезную информацию» из уравнений Зайберга—Виттена, в них вводится параметр масштаба r, который затем устремляется к бесконечности.

К. Г. Таубс показал (см. [26]), что решение уравнений Зайберга—Виттена на четырёхмерном симплектическом многообразии, задаваемое парой комплексных функций, будет вести себя следующим образом. Одна из функций будет стремиться к тождественному нулю, а нули другой будут аппроксимировать некоторую цепь, составленную из псевдоголоморфных кривых C_k с кратностями m_k (псевдоголоморфность понимается относительно комплексной структуры, совместимой с симплектической структурой многообразия).

Одновременно исходное уравнение Зайберга—Виттена будет редуцироваться к семейству вихревых уравнений, заданных в комплексных плоскостях, нор-

мальных к кривым C_k. Цепь $\sum m_k C_k$ можно рассматривать как комплексный аналог абрикосовских нитей.

Обратно, для того чтобы можно было восстановить решение уравнений Зайберга—Виттена по цепи $\sum m_k C_k$, семейство вихревых решений в нормальных плоскостях должно удовлетворять нелинейному $\bar{\partial}$-уравнению (см. [21, 27, 28]), которое можно рассматривать как комплексный аналог уравнения Эйлера для геодезических с «комплексным временем» (см. [21]).

Интересно, что даже одномерный аналог вихревых уравнений, рассмотренный А. В. Домриным (см. [1]), оказался содержательным. Его можно получить, взяв гладкие пути в единичном круге с концами на единичной окружности, являющиеся экстремумами потенциальной энергии с тем же λ-членом, что и в случае вихревых уравнений. Если устремить параметр масштаба λ к бесконечности, то предельные экстремальные пути будут концентрироваться на окружности. Эти траектории могут быть либо гладкими, либо разрывными.

Гладкие предельные траектории соединяют концевые точки, возможно наматываясь несколько раз на окружность. Разрывные траектории, которые и представляют собой одномерные аналоги вихрей, описываются точкой, которая сначала движется по окружности, затем проскакивает в диаметрально противоположную точку и вновь продолжает движение по дуге до концевой точки. (Конечно, их траектории также могут наматываться несколько раз на окружность.)

Эти траектории напоминают «резкие качения» волчка: при малой скорости вращения волчок иногда резко падает почти до горизонтальной плоскости, а затем так же резко встаёт.

Литература

[1] Домрин А. В. Аналоги вихрей Гинзбурга—Ландау // Теор. и матем. физ. — 2000. — Т. 124, № 1. — С. 18—35.

[2] Кириллов А. А. Геометрическое квантование // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1985. — Т. 4. — С. 141—178.

[3] Кириллов А. А. Кэлерова структура на K-орбитах группы диффеоморфизмов окружности // Функц. анализ и его прил. — 1987. — Т. 21, № 2. — С. 42—45.

[4] Кириллов А. А., Юрьев Д. В. Кэлерова геометрия бесконечномерного однородного пространства $M = \mathrm{Diff}_+(S^1)/\mathrm{Rot}(S^1)$ // Функц. анализ и его прил. — 1987. — Т. 21, № 4. — С. 35—46.

[5] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 9. Статистическая физика. Часть 2. — М.: Физматлит, 2000.

[6] Пальвелев Р. В. Рассеяние вихрей в абелевой модели Хиггса // Теор. и матем. физ. — 2008. — Т. 156, № 1. — С. 77—91.

[7] Пальвелев Р. В. Обоснование адиабатического принципа в абелевой модели Хиггса // Тр. ММО. — 2011. — Т. 72. — С. 281—314.

[8] Пальвелев Р. В., Сергеев А. Г. Обоснование адиабатического предела для гиперболических уравнений Гинзбурга—Ландау // Тр. МИАН. — 2012. — Т. 277. — С. 199—214.

[9] Прессли А., Сигал Г. Группы петель. — М.: Мир, 1990.

[10] Сергеев А. Г. Геометрическое квантование пространств петель. — М.: МИАН, 2009.

[11] Сергеев А. Г., Чечин С. В. Рассеяние медленно движущихся вихрей в абелевой $(2+1)$-мерной модели Хиггса // Теор. и матем. физ. — 1990. — Т. 85, № 3. — С. 397—411.

[12] Bowick M. J., Lahiri A. The Ricci curvature of Diff $S^1/\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ // J. Math. Phys. — 1988. — Vol. 29. — P. 1979—1981.

[13] Bowick M. J., Rajeev S. G. The holomorphic geometry of closed bosonic string theory and Diff S^1/S^1 // Nuclear Phys. B. — 1987. — Vol. 293 . — P. 348—384.

[14] Guillemin V., Sternberg S. Geometric Asymptotics. — Providence: Amer. Math. Soc., 1977.

[15] Jaffe A., Taubes C.H. Vortices and Monopoles. — Boston: Birkhäuser, 1980.

[16] Manton N. S. A remark on the scattering of BPS monopoles // Phys. Lett. B. — 1982. — Vol. 110. — P. 54—56.

[17] Morgan J. W. The Seiberg—Witten Equations and Applications to the Topology of Smooth Four-Manifolds. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1996.

[18] Salamon D. Spin geometry and Seiberg—Witten invariants: Preprint. — Univ. of Warwick, 1996.

[19] Seiberg N., Witten E. Electro-magnetic duality, monopole condensation and confinement in $N=2$ supersymmetric Yang—Mills theory // Nuclear Phys. B. — 1994. — Vol. 426. — P. 19—52.

[20] Seiberg N., Witten E. Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N=2$ supersymmetric Yang—Mills theory // Nuclear Phys. B. — 1994. — Vol. 426. — P. 581—640.

[21] Sergeev A. G. Vortices and Seiberg—Witten Equations. — Nagoya: Nagoya Univ., 2002.

[22] Sergeev A. Kähler Geometry of Loop Spaces. — Singapore: World Scientific, 2010.

[23] Souriau J.-M. Structure des Systémes Dynamiques. — Paris: Dunod, 1970.

[24] Sniatycki J. Geometric Quantization and Quantum Mechanics. — Berlin: Springer, 1980.

[25] Taubes C. H. Arbitrary N-vortex solutions to the first-order Ginzburg—Landau equations // Comm. Math. Phys. — 1980. — Vol. 72. — P. 277—292.

[26] Taubes C. H. SW $\Rightarrow$ Gr: From the Seiberg—Witten equations to pseudo-holomorphic curves // J. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 9. — P. 845—918.

[27] Taubes C. H. Gr $\Rightarrow$ SW: From pseudo-holomorphic curves to Seiberg—Witten solutions // J. Differential Geom. — 1999. — Vol. 51. — P. 203—334.

[28] Taubes C. H. Gr = SW: Counting curves and connections // J. Differential Geom. — 1999. — Vol. 52. — P. 453—609.

[29] Tuynman G. M. Geometric Quantization. — Amsterdam: CWI Syllabus, 1985.

[30] Woodhouse N. M. J. Geometric Quantization. — Oxford: Clarendon Press, 1992.