О дифференциальных характеристических классах метрик и связностей*

Д. А. ТИМАШЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: timashev@mccme.ru

УДК 514.74+514.763+512.815.7

Ключевые слова: римановы и кэлеровы метрики, связности, струи, дифференциальные операции, характеристические классы, теоретико-инвариантная редукция.

Аннотация

Под дифференциальным характеристическим классом геометрической величины на гладком многообразии (например, римановой или кэлеровой метрики, связности и т. п.) мы понимаем замкнутую дифференциальную форму, компоненты которой выражаются через компоненты исходной геометрической величины и их частные производные по локальным координатам алгебраическими формулами, не зависящими от выбора координат, и класс когомологий которой не меняется при деформации заданной геометрической величины. В заметке даны короткое доказательство теоремы Гилки о характеристических классах римановых метрик методом теоретико-инвариантной редукции, развитым П. И. Кацыло и Д. А. Тимашёвым, и обобщение этого результата на кэлеровы метрики и линейные связности.

Abstract

D. A. Timashev, On differential characteristic classes of metrics and connections, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 167—183.

A differential characteristic class of a geometric quantity (e.g., Riemannian or Kähler metric, connection, etc.) on a smooth manifold is a closed differential form whose components are expressed in the components of the given geometric quantity and in their partial derivatives in local coordinates via algebraic formulas independent of the choice of coordinates, and whose cohomology class is stable under deformations of the given quantity. In this note, we present a short proof of the theorem of P. Gilkey on characteristic classes of Riemannian metrics, which is based on the method of invariant-theoretic reduction developed by P. I. Katsylo and D. A. Timashev, and generalize this result to Kähler metrics and connections.

*Работа поддержана грантом РФФИ 12-01-00704.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 2, с. 167—183.

Анатолию Тимофеевичу Фоменко к 70-летнему юбилею

Введение

Важные глобальные инварианты геометрических структур на многообразиях нередко задаются локальными формулами. В частности, интерес представляют *дифференциальные характеристические классы* геометрических структур, под которыми мы понимаем классы когомологий замкнутых дифференциальных форм, получаемых из данной геометрической структуры (например, метрики, связности, почти комплексной структуры или какого-либо сечения тензорного расслоения над данным многообразием) естественной (т. е. не зависящей от выбора локальных координат) дифференциальной операцией, которые не меняются при деформациях данной геометрической структуры.

В данной заметке мы сосредоточимся на дифференциальных характеристических классах метрик и связностей. Знаменитая теорема Гилки [7] утверждает, что все дифференциальные характеристические классы римановой метрики выражаются через классы Понтрягина. Этот результат позволил М. Атье, Р. Ботту и В. К. Патоди найти новое изящное доказательство теоремы Атьи—Зингера об индексе эллиптического псевдодифференциального оператора [4].

Наш подход к описанию дифференциальных характеристических классов основан на методе теоретико-инвариантной редукции, разработанном в [3]. Суть этого метода в применении к данной задаче заключается в следующем.

Рассмотрим на n-мерном многообразии M естественное расслоение $\mathcal{F} \to M$, т. е. расслоение, ассоциированное с главным расслоением кореперов некоторого порядка k (т. е. k-струй локальных систем координат) на M. Примером естественного расслоения является расслоение (p,q)-тензоров $\mathcal{T}^{p,q} = \mathcal{T}^{\otimes p} \otimes (\mathcal{T}^*)^{\otimes q}$, где $\mathcal{T} \to M$ — касательное расслоение. Геометрические структуры, которые обычно рассматриваются на многообразиях, — это сечения естественных расслоений, возможно удовлетворяющие некоторым дополнительным условиям дифференциального характера [3, 4.1].

Дифференциальный характеристический класс геометрических структур данного типа — это отображение D из пространства геометрических структур в дифференциальные формы некоторой степени m, обладающее следующими свойствами:

(A) компоненты формы $D\varphi$ в локальных координатах задаются алгебраическими выражениями от компонент геометрической величины φ и их частных производных по координатам до некоторого порядка l, причём эти выражения одинаковы во всех локальных системах координат;

(B) для любой геометрической структуры φ дифференциальная форма $D\varphi$ замкнута;

(C) при непрерывной деформации структуры φ класс когомологий $[D\varphi] \in \mathrm{H}^m(M)$ не изменяется.

Свойство (А) — это условие естественности, позволяющее склеивать полученные дифференциальные формы на разных локальных картах и определять дифференциальный характеристический класс данного типа на *любом* многообразии данной размерности n.

Таким образом, дифференциальный характеристический класс задаётся отображением расслоений $\mathcal{F}^{(l)} \to \Omega^m$, где $\mathcal{F}^{(l)} \to M$ — расслоение l-струй локальных сечений расслоения $\mathcal{F}$, а $\Omega^m = \bigwedge^m \mathcal{T}^*$ — расслоение внешних m-форм на M. Условие естественности (А) гарантирует, что это отображение полностью определяется отображением типичных слоёв $\delta\colon F^{(l)} \to \bigwedge^m(\mathbb{K}^n)^*$ (где $\mathbb{K}$ — основное поле, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), причём отображение δ должно быть перестановочно с действием структурной группы, осуществляющей преобразование локальных координат в расслоениях. Структурная группа расслоения $\mathcal{F}^{(l)}$ — это группа $\mathrm{GL}_n^{(k+l)}$ струй порядка $k+l$ локальных диффеоморфизмов пространства $\mathbb{K}^n$, сохраняющих начало координат. Она действует и в слоях расслоения Ω^m через свою фактор-группу $\mathrm{GL}_n^{(1)} \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. На самом деле имеет место разложение в полупрямое произведение $\mathrm{GL}_n^{(k+l)} = \mathrm{NGL}_n^{(k+l)} \rtimes \mathrm{GL}_n$, где $\mathrm{NGL}_n^{(k+l)}$ — подгруппа струй локальных диффеоморфизмов с тождественной матрицей Якоби в $0 \in \mathbb{K}^n$.

Таким образом, необходимо описать задаваемые алгебраическими формулами отображения $\delta\colon F^{(l)} \to \bigwedge^m(\mathbb{K}^n)^*$, инвариантные относительно действия группы $\mathrm{NGL}_n^{(k+l)}$ и эквивариантные относительно GL_n. Эта задача относится к теории представлений и инвариантов алгебраических групп. Дополнительно надо обеспечить выполнение условий (B) и (C). Это может вытекать из разных соображений. Довольно общий аргумент состоит в том, что условия (B) и (C) будут автоматически выполнены, если дифференциальная форма $D\varphi$ окажется обратным образом некоторой замкнутой дифференциальной формы на тотальном пространстве расслоения $\mathcal{F}$ (не зависящей от φ) при отображении $\varphi\colon M \to \mathcal{F}$ (свойство (C) вытекает из гомотопической инвариантности отображений в когомологиях).

В данной заметке мы докажем, что все дифференциальные характеристические классы римановых метрик выражаются через классы Понтрягина многообразия, а классы кэлеровых метрик и связностей — через классы Чжэня. Оригинальное доказательство П. Гилки [7] также базировалось на редукции к проблеме описания эквивариантных отображений пространств струй, однако для решения этой проблемы использовались весьма длинные и специфические вычисления в локальных координатах с изощрённой комбинаторикой. Другое доказательство для римановых метрик, предложенное М. Атьей, Р. Боттом и В. К. Патоди [4], уже основано на классической теории инвариантов. Единственное отличие нашего доказательства в том, что вместо инвариантов ортогональной группы мы рассматриваем инварианты полной линейной группы (что технически проще) и явно опираемся на теорию представлений. Однако именно оригинальное техническое доказательство П. Гилки было частично обобщено на кэлеров случай, и сам П. Гилки пишет [8, с. 214], что ему неизвестно более элегантное доказательство, базирующееся на теории инвариантов, как в римановом случае. Мы восполняем этот пробел, предлагая короткое доказательство, основанное на методе теоретико-инвариантной редукции. По нашему глубокому убеждению, активное использование идей групповой симметрии, в частности теории представлений и классической теории инвариантов, позволяет значительно упрощать вычисления и доказательства в дифференциальной геометрии, что и призвана продемонстрировать данная заметка.

1. Основные определения, обозначения и факты

Начнём с того, что зафиксируем основные обозначения и соглашения, используемые в данной статье. Здесь мы следуем статье [3].

Обозначим через $\mathbb{K}$ основное поле: либо поле вещественных чисел $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, либо поле комплексных чисел $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Мы рассматриваем произвольное $\mathbb{K}$-дифференцируемое (т. е. гладкое вещественное или комплексно-аналитическое) многообразие M размерности n над $\mathbb{K}$. Все расслоения, их сечения и прочие дифференциально-геометрические понятия будут рассматриваться на M.

Будем пользоваться стандартной символикой верхних и нижних индексов из тензорного исчисления и дифференциальной геометрии. В частности, будем систематически использовать правило суммирования Эйнштейна: в любой формуле по умолчанию подразумевается суммирование по каждой паре повторяющихся верхних и нижних индексов, где индексы суммирования изменяются от 1 до n.

Через $x=(x^1,\ldots,x^n)\colon U\to\mathbb{K}^n$ обозначим произвольную систему локальных координат на открытом подмножестве $U\subseteq M$. В каждой точке $z\in U$ для любого натурального k возникает k-струя отображения x, называемая корепером порядка k (в определении корепера порядка k мы считаем без ограничения общности, применяя при необходимости параллельный перенос, что система координат имеет центром точку z, т. е. $x(z)=0$). Замена координат $x\rightsquigarrow y$ (с центром в точке z) задаётся локальным диффеоморфизмом $y=g(x)$ окрестностей нуля в $\mathbb{K}^n$, оставляющим на месте начало координат. При этом соответствующий корепер преобразуется под действием k-струи диффеоморфизма g в 0.

Таким образом, кореперы порядка k образуют главное расслоение на многообразии M, структурной группой которого является группа $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ k-струй локальных диффеоморфизмов окрестностей $0\in\mathbb{K}^n$, сохраняющих 0. Это алгебраическая группа, изоморфная группе автоморфизмов алгебры усечённых многочленов $\mathbb{K}[x^1,\ldots,x^n]/(x^1,\ldots,x^n)^{k+1}$. Её элементы отождествляются с полиномиальными отображениями $\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ вида

$$x\mapsto g(x)=g_1(x)+g_2(x,x)+\ldots+g_k(x,\ldots,x),$$

где $g_l\in\mathbb{K}^n\otimes\mathrm{S}^l(\mathbb{K}^n)^*$ — симметрическое полилинейное отображение

$$\mathbb{K}^n\times\ldots\times\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$$

($l = 1, \ldots, k$), причём линейный оператор g_1 невырожден. Групповая операция на $\mathrm{GL}_n^{(k)}$ — композиция полиномиальных отображений с «забыванием» членов степени выше k. Имеет место разложение в полупрямое произведение $\mathrm{GL}_n^{(k)} = \mathrm{NGL}_n^{(k)} \rtimes \mathrm{GL}_n$, где подгруппа GL_n задаётся условиями $g_2 = \ldots = g_k = 0$, а $\mathrm{NGL}_n^{(k)}$ — условием $g_1(x) = x$.

Естественным расслоением порядка k над многообразием M называется любое расслоение $\mathcal{F} \to M$, ассоциированное с расслоением кореперов порядка k. Другими словами, $\mathcal{F}$ тривиализуется над локальными картами многообразия M, а функции перехода определяются действием k-струй замен локальных координат на типичный слой F. К примеру, касательное расслоение $\mathcal{T} \to M$ является естественным расслоением первого порядка и определяется тавтологическим действием группы $\mathrm{GL}_n^{(1)} = \mathrm{GL}_n$ на типичный слой $\mathbb{K}^n$. Сечения естественных расслоений называются геометрическими величинами на многообразии. Подробнее об этом см. в [1, гл. 6, § 1] и [3, 1.1].

Естественное расслоение $\mathcal{F}$ порядка k порождает серию естественных расслоений $\mathcal{F}^{(l)}$ (для всех натуральных l) порядков $k+l$, точками которых являются l-струи локальных сечений расслоения $\mathcal{F}$. Слои естественных расслоений, фигурирующих в данной заметке, являются векторными или аффинными пространствами или открытыми подмножествами в таковых. Поэтому слои расслоений струй имеют следующую структуру:

$$F^{(l)} = F \oplus \bigl(V \otimes (\mathbb{K}^n)^*\bigr) \oplus \bigl(V \otimes \mathrm{S}^2(\mathbb{K}^n)^*\bigr) \oplus \ldots \oplus \bigl(V \otimes \mathrm{S}^l(\mathbb{K}^n)^*\bigr),$$

где V — векторное пространство, ассоциированное с F; как правило, $V \subseteq (\mathbb{K}^n)^{\otimes p} \otimes (\mathbb{K}^{n*})^{\otimes q}$ — пространство тензоров определённого типа симметрии по группам индексов или прямая сумма таких пространств. Действие GL_n на $F^{(l)}$ сохраняет прямые слагаемые, действуя на каждом из них тензорным произведением представлений; структура действия $\mathrm{NGL}_n^{(k+l)}$ более сложна, подробности см. в [3, пример 1.5].

Как обсуждалось во введении, дифференциальный характеристический класс геометрических величин задаётся отображением естественных расслоений $\mathcal{F}^{(l)} \to \Omega^m$, которое в свою очередь определяется $\mathrm{GL}_n^{(k+l)}$-эквивариантным полиномиальным отображением типичных слоёв $\delta\colon F^{(l)} \to \bigwedge^m(\mathbb{K}^n)^*$. Такие отображения представляются в виде суммы отображений вида

$$\delta(\varphi) = \Delta(\varphi_0, \ldots, \varphi_0, \ldots, \varphi_l, \ldots, \varphi_l)/f(\varphi_0),$$

где

$$\Delta\colon \underbrace{V \times \ldots \times V}_{d_0} \times \ldots \times \underbrace{\bigl(V \otimes \mathrm{S}^l(\mathbb{K}^n)^*\bigr) \times \ldots \times \bigl(V \otimes \mathrm{S}^l(\mathbb{K}^n)^*\bigr)}_{d_l} \to \bigwedge\nolimits^m(\mathbb{K}^n)^* \text{ —}$$

полилинейное отображение, $\varphi = \varphi_0 + \ldots + \varphi_l$ — разложение струи $\varphi \in F^{(l)}$ по компонентам, а f — многочлен на V (как правило, однородный), не обращающийся в 0 на F. Условие GL_n-эквивариантности означает, что f — полуинвариантная функция веса $\det^d$ или $\det^{-d}$ ($d \geqslant 0$), а GL_n-модуль

$$V^{\otimes d_0} \otimes \bigl(V \otimes (\mathbb{K}^n)^*\bigr)^{\otimes d_1} \otimes \ldots \otimes \bigl(V \otimes \mathrm{S}^l(\mathbb{K}^n)^*\bigr)^{\otimes d_l}$$

содержит в своём разложении неприводимое слагаемое, изоморфное $\bigwedge^m(\mathbb{K}^n)^* \otimes \otimes \bigl(\bigwedge^n(\mathbb{K}^n)\bigr)^{\otimes d}$ или $\bigwedge^m(\mathbb{K}^n)^* \otimes \bigl(\bigwedge^n(\mathbb{K}^n)^*\bigr)^{\otimes d}$ соответственно, так что Δ индуцировано проекцией на это слагаемое. Классическая теория инвариантов [2, § 9] учит, что $\Delta(\varphi_0, \ldots, \varphi_0, \ldots, \varphi_l, \ldots, \varphi_l)$ является линейной комбинацией свёрток тензора $\varphi_0^{\otimes d_0} \otimes \varphi_1^{\otimes d_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_l^{\otimes d_l}$ по некоторым парам верхних и нижних индексов с последующим альтернированием [3, теорема 1.16]. Условие $\mathrm{NGL}_n^{(k+l)}$-инвариантности проверяется отдельно.

В заключение напомним некоторые понятия и факты из теории представлений (см., например, [5, часть III] или [3, 1.4]). Рациональным представлением группы GL_n называется конечномерное представление, матричные элементы которого являются рациональными функциями от матричных элементов на GL_n (в знаменателях которых может стоять лишь некоторая степень определителя матрицы). Все рациональные представления вполне приводимы, а неприводимые рациональные представления описываются следующим образом.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — некоторое разбиение, т. е. нестрого убывающая последовательность неотрицательных целых чисел (нули в конце обычно опускаются при записи, а фрагменты из s одинаковых чисел вида $d, \ldots, d$ записываются в виде степени d^s). Рассмотрим пространство тензоров $(\mathbb{K}^{n*})^{\otimes(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}$ (более традиционно брать $\mathbb{K}^n$ вместо $\mathbb{K}^{n*}$, но нам удобнее именно так). Тензорные сомножители можно расположить по клеткам диаграммы Юнга, отвечающей разбиению λ (она состоит из клеток, расположенных по строкам длин $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ сверху вниз и выровненных по левому краю). Применение сперва операции симметризации по каждой строке диаграммы Юнга, а потом альтернирования по каждому столбцу даёт в образе подпространство $\mathbb{S}^\lambda(\mathbb{K}^n)^* \subseteq (\mathbb{K}^{n*})^{\otimes(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)}$, называемое модулем Вейля. К примеру, $\mathrm{S}^m(\mathbb{K}^n)^* = \mathbb{S}^{(m)}(\mathbb{K}^n)^*$ и $\bigwedge^m(\mathbb{K}^n)^* = \mathbb{S}^{(1^m)}(\mathbb{K}^n)^*$.

Все неприводимые рациональные представления реализуются в GL_n-модулях вида $\mathbb{S}^\lambda(\mathbb{K}^n)^* \otimes (\bigwedge^n \mathbb{K}^n)^{\otimes d}$ ($d \geqslant 0$). Два таких модуля изоморфны тогда и только тогда, когда совпадают виртуальные разбиения $\bar\lambda = (\bar\lambda_1, \ldots, \bar\lambda_n)$, $\bar\lambda_i = \lambda_i - d$.

Тензорное произведение двух модулей Вейля разлагается в прямую сумму модулей Вейля по правилу Литтлвуда—Ричардсона [5, § 6.1]. Тензорное произведение на $\mathrm{S}^m(\mathbb{K}^n)^*$ или $\bigwedge^m(\mathbb{K}^n)^*$ вычисляется по более простым формулам Пьери [3, 1.4; 5, § 6.1].

2. Римановы метрики

В этом разделе мы опишем дифференциальные характеристические классы римановых метрик на многообразии. Проведём теоретико-инвариантную редукцию задачи. Основное поле здесь $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Римановы метрики на M — это сечения открытого подрасслоения

$$\mathcal{G} = (\mathrm{S}^2\mathcal{T}^*)^+ \subset \mathrm{S}^2\mathcal{T}^* \to M$$

(где верхний индекс «+» обозначает подмножество положительно определённых квадратичных форм). Типичный слой расслоения струй $\mathcal{G}^{(k)}$ имеет вид

$$G^{(k)} = \big(\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\big)^+ \oplus \big(\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes (\mathbb{R}^n)^*\big) \oplus \ldots \oplus \big(\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n)^*\big).$$

Наша задача — описать $\mathrm{GL}_n^{(k+1)}$-эквивариантные полиномиальные отображения $G^{(k)} \to \bigwedge^m(\mathbb{R}^n)^*$ с соблюдением дополнительных условий (B) и (C). Сильно упрощает задачу следующая лемма.

Лемма 1 [3, пример 4.9; 9, лемма 3.1]. *Действие* $\mathrm{NGL}_n^{(k+1)}$ *на* $G^{(k)}$ *индуцирует* GL_n*-эквивариантный диффеоморфизм* $G^{(k)} \simeq \mathrm{NGL}_n^{(k+1)} \times G_0^{(k)}$, *где*

$$G_0^{(k)} = \big(\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\big)^+ \oplus \operatorname{Ker}\mathrm{Sym}_3 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Ker}\mathrm{Sym}_{k+1} \subset G^{(k)},$$

$\mathrm{Sym}_{l+1}\colon \mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}^l(\mathbb{R}^n)^* \to (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathrm{S}^{l+1}(\mathbb{R}^n)^*$ *обозначает оператор симметризации по последним* $l+1$ *индексам* $(l = 2, \ldots, k)$. *Другими словами,* $G_0^{(k)}$ — *сечение для действия* $\mathrm{NGL}_n^{(k+1)}$ *на* $G^{(k)}$, *пересекающее каждую орбиту трансверсально в единственной точке.*

Доказательство. Пусть $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_k \in G^{(k)}$ — струя римановой метрики. Действуя на γ элементами $g \in \mathrm{NGL}_n^{k+1}$ с единственными ненулевыми компонентами g_1 и g_{l+1}, будем последовательно загонять в $\operatorname{Ker}\mathrm{Sym}_{l+1}$ компоненты γ_l $(l = 1, \ldots, k)$, причём g будет однозначно алгебраически определяться по γ.

Используя индукцию по l, мы можем без ограничения общности считать, что мы уже привели компоненты $\gamma_1, \ldots, \gamma_{k-1}$ к нужному виду. Действие локального диффеоморфизма g на метрику γ в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$(g \cdot \gamma)(x) = J^1_{g^{-1}(x)} g \cdot \gamma\big(g^{-1}(x)\big),$$

где $J^1_y g$ обозначает 1-струю (т. е. дифференциал или матрицу Якоби) отображения g в точке y, которая естественным образом действует на тензоры на касательном пространстве к y, переводя их в тензоры на касательном пространстве к $x = g(y)$. Переход к k-струям означает игнорирование в этой и аналогичных формулах членов степени выше k по x, которые мы будем обозначать многоточием. В нашей ситуации

$$\begin{aligned}
&g(x) = x + g_{k+1}(x, \ldots, x) + \ldots,\\
&g^{-1}(x) = x - g_{k+1}(x, \ldots, x) + \ldots,\\
&(J^1_{g^{-1}(x)} g)(\xi) = \xi + (k+1) g_{k+1}(x, \ldots, x, \xi) + \ldots \quad (\xi \in T_{g^{-1}(x)}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n),\\
&g \cdot \gamma = \gamma_0 + \ldots + \gamma_{k-1} + \gamma_k - 2(k+1)\,\mathrm{Sym}_2(\gamma_0 * g_{k+1}) + \ldots,
\end{aligned}$$

где $*$ обозначает свёртку любого из нижних индексов тензора $\gamma_0 \in \mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*$ с верхним индексом тензора $g_{k+1} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathrm{S}^{k+1}(\mathbb{R}^n)^*$, Sym_2 — симметризация по двум первым индексам. В координатах

$$(g\cdot\gamma)_{ij,j_1\dots j_l}=\gamma_{ij,j_1\dots j_l},\quad l=0,\dots,k-1,$$
$$(g\cdot\gamma)_{ij,j_1\dots j_k}=\gamma_{ij,j_1\dots j_k}-(k+1)(\gamma_{ip}g^p_{jj_1\dots j_k}+\gamma_{jp}g^p_{ij_1\dots j_k}),$$

где $\gamma_{ij,j_1\dots j_l}$ обозначает координату тензора $\gamma_l\in \mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes \mathrm{S}^l(\mathbb{R}^n)^*$.

Свёртка с γ_0 (опускание индекса) изоморфно отображает пространство $\mathbb{R}^n\otimes \mathrm{S}^{k+1}(\mathbb{R}^n)^*$ на $(\mathbb{R}^n)^*\otimes \mathrm{S}^{k+1}(\mathbb{R}^n)^*$, которое оператор Sym_2 инъективно отображает в $\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes \mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n)^*$. По формулам Пьери

$$(\mathbb{R}^n)^*\otimes \mathrm{S}^{k+1}(\mathbb{R}^n)^*\simeq \mathrm{S}^{k+2}(\mathbb{R}^n)^*\oplus \mathbb{S}^{(k+1,1)}(\mathbb{R}^n)^*,$$
$$\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes \mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n)^*\simeq \mathrm{S}^{k+2}(\mathbb{R}^n)^*\oplus \mathbb{S}^{(k+1,1)}(\mathbb{R}^n)^*\oplus \mathbb{S}^{(k,2)}(\mathbb{R}^n)^*,$$

причём $\mathbb{S}^{(k,2)}(\mathbb{R}^n)^*$ реализуется в $\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes \mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n)^*$ как $\operatorname{Ker}\mathrm{Sym}_{k+1}$, $\mathbb{S}^{(k+1,1)}(\mathbb{R}^n)^*$ реализуется в $(\mathbb{R}^n)^*\otimes \mathrm{S}^{k+1}(\mathbb{R}^n)^*$ как $\operatorname{Ker}\mathrm{Sym}_{k+2}$, а в $\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes \mathrm{S}^k(\mathbb{R}^n)^*$ как $\operatorname{Ker}\mathrm{Sym}_{k+2}\cap\operatorname{Im}\mathrm{Sym}_2$. Поэтому γ_k можно загнать в $\operatorname{Ker}\mathrm{Sym}_{k+1}$ с помощью единственного элемента g. □

Замечание 1 [3, пример 4.9; 9, замечание 3.1]. Привести струю метрики к нормальной форме из $G_0^{(k)}$ действием преобразования из $\mathrm{NGL}_n^{(k+1)}$ — это то же самое, что записать её в геодезических аффинных координатах с центром в данной точке (т. е. таких локальных координатах, в которых геодезические, исходящие из этой точки, являются прямыми) путём замены координат с тождественным дифференциалом в этой точке. В самом деле, в этих координатах геодезические имеют вид $x(t)=t\xi$ $(\xi\in\mathbb{R}^n)$, и уравнения геодезических $\ddot{x}^p+\Gamma^p_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j=0$ (где Γ^p_{ij} — символы Кристоффеля связности Леви-Чивита) приобретают вид $\Gamma^p_{ij}(t\xi)\xi^i\xi^j=0$ или $\Gamma_{q,ij}(t\xi)\xi^i\xi^j=0$ (после опускания верхнего индекса у символов Кристоффеля). Поскольку

$$\Gamma_{q,ij}(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\gamma_{qi}(x)}{\partial x^j}+\frac{\partial\gamma_{qj}(x)}{\partial x^i}-\frac{\partial\gamma_{ij}(x)}{\partial x^q}\right),$$

уравнения можно переписать в виде

$$\sum_{s=1}^{l}(\gamma_{qi,j_1,\dots,j_s=j,\dots,j_l}+\gamma_{qj,j_1,\dots,j_s=i,\dots,j_l}-\gamma_{ij,j_1,\dots,j_s=q,\dots,j_l})\times$$
$$\times t^{l-1}\xi^{j_1}\dots\xi^{j_{s-1}}\xi^{j_{s+1}}\dots\xi^{j_l}\cdot\xi^i\xi^j=0\quad\text{для всех}\quad l,q,t,\xi$$

или $(2l+2)\,\mathrm{Sym}_{l+1}\gamma_l-(l+2)\,\mathrm{Sym}_{l+2}\gamma_l=0$, что, ввиду вышеописанного разложения для $\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes \mathrm{S}^l(\mathbb{R}^n)^*$ равносильно $\mathrm{Sym}_{l+1}\gamma_l=0$.

Замечание 2 [4, утверждение 2.11; 9, замечание 3.1]. Альтернирование по парам индексов $\{1,3\}$ и $\{2,4\}$ изоморфно отображает пространство $\operatorname{Ker}\mathrm{Sym}_3\subset \mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\otimes \mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*$ на $\mathbb{S}^{(2,2)}(\mathbb{R}^n)^*$. При этом γ_2 переходит в ковариантный тензор Римана ρ метрики γ в начале координат. В самом деле,

$$\rho_{ij,pq}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\gamma_{iq}}{\partial x^j\partial x^p}+\frac{\partial^2\gamma_{jp}}{\partial x^i\partial x^q}-\frac{\partial^2\gamma_{ip}}{\partial x^j\partial x^q}-\frac{\partial^2\gamma_{jq}}{\partial x^i\partial x^p}\right)+\gamma^{rs}(\Gamma_{r,iq}\Gamma_{s,jp}-\Gamma_{r,jq}\Gamma_{s,ip}),$$

откуда получаем, что $\rho_{ij,pq}(0) = \gamma_{iq,jp} + \gamma_{jp,iq} - \gamma_{ip,jq} - \gamma_{jq,ip}$, поскольку для $\gamma \in G_0^{(k)}$ символы Кристоффеля в начале координат обращаются в 0. Можно также показать, что остальные γ_l выражаются через тензор Римана и его ковариантные дифференциалы.

Лемма 1 сводит вопрос к описанию GL_n-эквивариантных полиномиальных отображений $\delta\colon G_0^{(k)} \to \bigwedge^m(\mathbb{R}^n)^*$. Такое отображение представляется в виде суммы отображений вида

$$\delta(\gamma) = \Delta(\gamma_0 \otimes \ldots \otimes \gamma_0 \otimes \gamma_2 \otimes \ldots \otimes \gamma_2 \otimes \ldots \otimes \gamma_k \otimes \ldots \otimes \gamma_k)/(\det \gamma_0)^{d_0^*},$$

где

$$\Delta\colon \left(\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\right)^{\otimes d_0} \otimes \left(\mathbb{S}^{(2,2)}(\mathbb{R}^n)^*\right)^{\otimes d_2} \otimes \ldots \otimes \left(\mathbb{S}^{(k,2)}(\mathbb{R}^n)^*\right)^{\otimes d_k} \to \bigwedge^m(\mathbb{R}^n)^* -$$

линейное отображение. Можно избавиться от знаменателей, рассмотрев двойственный к γ_0 тензор $\gamma_0^* \in (\mathrm{S}^2\mathbb{R}^n)^+$ и представив искомое отображение в виде суммы отображений вида

$$\delta(\gamma) = \Delta(\gamma_0^* \otimes \ldots \otimes \gamma_0^* \otimes \gamma_0 \otimes \ldots \otimes \gamma_0 \otimes \ldots \otimes \gamma_k \otimes \ldots \otimes \gamma_k), \tag{1}$$

где

$$\Delta\colon (\mathrm{S}^2\mathbb{R}^n)^{\otimes d_0^*} \otimes \left(\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\right)^{\otimes d_0} \otimes \ldots \otimes \left(\mathbb{S}^{(k,2)}(\mathbb{R}^n)^*\right)^{\otimes d_k} \to \bigwedge^m(\mathbb{R}^n)^* - \tag{2}$$

линейное GL_n-эквивариантное отображение.

Отображение (1) однородно по γ степени $-d_0^* + d_0 + d_2 + \ldots + d_k$. Из условия (C) легко следует, что все однородные компоненты m-формы $\delta(\gamma)$ тоже задают замкнутые дифференциальные формы, причём когомологичные нулю при ненулевой степени однородности. Поэтому можно считать, что δ является суммой отображений (1) с условием

$$-d_0^* + d_0 + d_2 + \ldots + d_k = 0. \tag{3}$$

Эквивариантность относительно действия подгруппы скалярных матриц из GL_n даёт ещё одно условие:

$$-2d_0^* + 2d_0 + 4d_2 + \ldots + (k+2)d_k = m. \tag{4}$$

Из (3) и (4) получаем, что

$$2d_2 + \ldots + kd_k = m, \tag{5}$$

$$d_0 + d_2 + \ldots + d_k = d_0^*. \tag{6}$$

Однако правило Литтлвуда—Ричардсона показывает, что всякий неприводимый подмодуль $\mathbb{S}^\lambda(\mathbb{R}^n)^*$ в GL_n-модуле

$$(\mathrm{S}^2\mathbb{R}^n)^{\otimes d_0^*} \otimes \left(\mathrm{S}^2(\mathbb{R}^n)^*\right)^{\otimes d_0} \otimes \left(\mathbb{S}^{(2,2)}(\mathbb{R}^n)^*\right)^{\otimes d_2} \otimes \ldots \otimes \left(\mathbb{S}^{(k,2)}(\mathbb{R}^n)^*\right)^{\otimes d_k}$$

имеет $\lambda_i = 0$ при $i > d_0 + 2d_2 + \ldots + 2d_k$, откуда следует, что

$$d_0 + 2d_2 + \ldots + 2d_k \geqslant m. \tag{7}$$

Отображение (1) является линейной комбинацией свёрток тензора

$$(\gamma_0^*)^{\otimes d_0^*} \otimes \gamma_0^{\otimes d_0} \otimes \gamma_2^{\otimes d_2} \otimes \ldots \otimes \gamma_k^{\otimes d_k}$$

с последующим альтернированием. Значит, в каждой свёртке у каждого экземпляра γ_0 один из нижних индексов нужно свернуть с верхним индексом какого-то γ_0^* (иначе свёрнутый тензор убивается альтернированием). Но $\gamma_0 * \gamma_0^*$ — единичный оператор (тензор Кронекера). Поэтому от γ_0 можно вообще избавиться, считая $d_0 = 0$. Тогда из (5) и (7) вытекает, что $d_3 = \ldots = d_k = 0$ (при $k > 2$), а из (6) — что $d_0^* = d_2 = m/2$ (стало быть, m должно быть чётным).

Итак, отображение δ — линейная комбинация полных свёрток тензора $(\gamma_0^*)^{\otimes l} \otimes \gamma_2^{\otimes l}$ ($l = m/2$) с последующим альтернированием оставшихся $m = 2l$ нижних индексов. Удобно тензор γ_2 заменить на эквивалентный ему (см. замечание 2) ковариантный тензор Римана ρ. Опишем возможные схемы таких свёрток.

Во-первых, от каждого экземпляра ρ должно остаться ровно два несвёрнутых индекса (при наличии трёх несвёрнутых индексов j, p, q альтернирование по ним даст 0 ввиду первого тождества Бьянки $\rho_{ij,pq} + \rho_{ip,qj} + \rho_{iq,jp} = 0$). Два оставшихся индекса сворачиваются с верхними индексами разных экземпляров γ_0^*: свёртка с одним и тем же экземпляром даёт $\gamma^{ij}\rho_{ij,pq} = \gamma^{ij}\rho_{pq,ij} = 0$ (в силу симметрии γ_0^* и косой симметрии ρ по первой и последней парам индексов) или симметрический тензор Риччи $\rho_{jq} = \gamma^{ip}\rho_{ij,pq}$, обнуляемый альтернированием. Наконец, первое тождество Бьянки в сочетании с косой симметрией $\rho_{iq,jp} = -\rho_{iq,pj}$ позволяет обойтись свёртками, в которых участвуют первые два индекса ρ. Таким образом, свёртка представляется в виде тензорного произведения свёрток вида

$$\gamma^{i_1 j_1}\rho_{j_1 i_2, p_1 q_1}\gamma^{i_2 j_2}\rho_{j_2 i_3, p_2 q_2} \cdots \gamma^{i_{l-1} j_{l-1}}\rho_{j_{l-1} i_l, p_{l-1} q_{l-1}}\gamma^{i_l j_l}\rho_{j_l i_1, p_l q_l} = \\ = R^{i_1}_{i_2, p_1 q_1} R^{i_2}_{i_3, p_2 q_2} \cdots R^{i_{l-1}}_{i_l, p_{l-1} q_{l-1}} R^{i_l}_{i_1, p_l q_l}, \quad (8)$$

где $R = \rho * \gamma_0^*$ — обычный тензор Римана. Альтернирование свёртки (8) симметрично относительно перестановок пар индексов (p_s, q_s), а с другой стороны после записи сомножителей в обратном порядке и транспозиций в парах индексов (i_s, j_s) у γ_0^* и (j_s, i_{s+1}), (j_l, i_1) у ρ умножается на $(-1)^l$ ввиду симметрии γ_0^* и косой симметрии ρ по первым двум индексам. Поэтому у дающей ненулевой вклад свёртки (8) l должно быть чётным.

Следовательно, всякий дифференциальный характеристический класс метрики γ является многочленом в алгебре дифференциальных форм от выражений вида

$$D\gamma = R^{i_1}_{i_2, p_1 q_1} R^{i_2}_{i_3, p_2 q_2} \cdots R^{i_{l-1}}_{i_l, p_{l-1} q_{l-1}} R^{i_l}_{i_1, p_l q_l} \times \\ \times dx^{p_1} \wedge dx^{q_1} \wedge dx^{p_2} \wedge dx^{q_2} \wedge \ldots \wedge dx^{p_{l-1}} \wedge dx^{q_{l-1}} \wedge dx^{p_l} \wedge dx^{q_l} = \\ = \operatorname{tr}\Bigl(\underbrace{R \wedge \ldots \wedge R}_{l}\Bigr), \quad (9)$$

где тензор Римана R понимается как операторнозначная дифференциальная 2-форма. Условие (B) для форм вида (9) вытекает из того, что в противном случае $d(D\gamma)$ была бы ненулевой формой степени $2l+1$, удовлетворяющей условию (A), а таких форм нечётной степени не существует, как мы видели выше.

Другой способ проверить сразу оба свойства (B) и (C) состоит в следующем. Рассмотрим связность Леви-Чивита ∇ метрики γ. Она является сечением естественного расслоения линейных связностей $\mathcal{C} \to M$, так что имеет место коммутативная диаграмма расслоений и их сечений

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[dr] & \mathcal{G}^{(1)} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[dl] \\
& M \arrow[ul, dashed, "\gamma"] \arrow[u, dashed, bend left, "J^1\gamma"] \arrow[ur, dashed, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}.$$

В локальных координатах рассмотрим операторнозначную 1-форму связности $\theta = \theta_i\,dx^i$, $\theta_i = \nabla(\partial_i) = \Gamma^p_{ij}\,\partial_p \otimes dx^j$, где $\partial_i = \partial/\partial x_i$ — базисные векторные поля. Ковариантный дифференциал имеет вид $\nabla = d + \theta$, $R = d\theta + \theta \wedge \theta$ — тензор кривизны. Справедливо второе тождество Бьянки $\nabla R = 0$, или

$$dR = d\theta \wedge \theta - \theta \wedge d\theta = R \wedge \theta - \theta \wedge R.$$

Отсюда получаем, что

$$d\,\operatorname{tr}(R \wedge \ldots \wedge R) = \operatorname{tr}\left(\sum_{s=1}^{l} R \wedge \ldots \wedge \underset{l}{dR} \wedge \ldots \wedge R\right) =$$
$$= \operatorname{tr}(R \wedge \ldots \wedge R \wedge \theta - \theta \wedge R \wedge \ldots \wedge R) = 0.$$

Форму $D\gamma$ можно рассматривать как обратный образ замкнутой дифференциальной формы $\omega = \operatorname{tr}(R \wedge \ldots \wedge R)$ на тотальном пространстве $\mathcal{C}$ (где локальными координатами являются x^i и Γ^p_{ij}) при отображении ∇, откуда и следуют условия (B), (C).

Заметим, что формы (9) выражаются через дифференциальные формы, задающие классы Понтрягина [1, гл. 8, 15.4] (которые отличаются от форм (9) тем, что вместо следов степеней оператора R вычисляются коэффициенты его характеристического многочлена), и обратно. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1 (ср. [4, теорема 1; 7; 8, 2.5]). *Все дифференциальные характеристические классы римановых метрик на многообразии представляются в виде многочленов от классов Понтрягина.*

3. Кэлеровы метрики

Теперь от римановых метрик перейдём к кэлеровым метрикам. Основным полем здесь будет $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Теоретико-инвариантная редукция задачи описания дифференциальных характеристических классов кэлеровых метрик и её решение осуществляются по той же схеме, что и в разделе 2, поэтому мы позволим себе опускать излишние подробности.

Рассмотрим расслоение эрмитовых квадратичных форм $\mathcal{H} \subset \mathcal{T}^* \otimes \overline{\mathcal{T}^*}$ на комплексном многообразии M (здесь $\overline{\mathcal{T}^*} \to M$ обозначает кокасательное расслоение с сопряжённой комплексной структурой). Типичный слой расслоения k-струй

$$H^{(k)} \subset \bigoplus_{0\leqslant p+q\leqslant k} \bigl((\mathbb{C}^n)^* \otimes (\overline{\mathbb{C}^n})^*\bigr) \otimes \bigl(\mathrm{S}^p(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathrm{S}^q(\overline{\mathbb{C}^n})^*\bigr)$$

состоит из струй

$$\varkappa = \sum_{p,q} \varkappa_{p,q},$$

удовлетворяющих условию эрмитовости $\overline{\varkappa_{p,q}} = \varkappa_{q,p}$.

Кэлеровы метрики характеризуются среди эрмитовых метрик $\varkappa(z) = \varkappa_{ij}(z)\,dz^i \otimes d\overline{z^j}$ условием замкнутости $(1,1)$-формы $\varkappa_{ij}(z)\,dz^i \wedge d\overline{z^j}$ (здесь и далее $z^1, \dots, z^n$ — голоморфные локальные координаты на M). Внешний дифференциал на M представляется в виде суммы голоморфного и антиголоморфного дифференциалов:

$$d = \partial + \bar{\partial},$$

где

$$\partial = \sum_i dz_i \wedge \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad \bar{\partial} = \sum_i d\overline{z_i} \wedge \frac{\bar{\partial}}{\partial \overline{z_i}}.$$

На пространстве струй они действуют следующим образом:

$$\partial\colon \bigl((\mathbb{C}^n)^* \otimes (\overline{\mathbb{C}^n})^*\bigr) \otimes \bigl(\mathrm{S}^p(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathrm{S}^q(\overline{\mathbb{C}^n})^*\bigr) \to \\ \to \bigl(\textstyle\bigwedge^2(\mathbb{C}^n)^* \otimes (\overline{\mathbb{C}^n})^*\bigr) \otimes \bigl(\mathrm{S}^{p-1}(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathrm{S}^q(\overline{\mathbb{C}^n})^*\bigr) -$$

альтернирование по первым двум «голоморфным» индексам, а

$$\bar{\partial}\colon \bigl((\mathbb{C}^n)^* \otimes (\overline{\mathbb{C}^n})^*\bigr) \otimes \bigl(\mathrm{S}^p(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathrm{S}^q(\overline{\mathbb{C}^n})^*\bigr) \to \\ \to \bigl((\mathbb{C}^n)^* \otimes \textstyle\bigwedge^2(\overline{\mathbb{C}^n})^*\bigr) \otimes \bigl(\mathrm{S}^p(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathrm{S}^{q-1}(\overline{\mathbb{C}^n})^*\bigr) -$$

альтернирование по первым двум «антиголоморфным» индексам (ср. [3, пример 1.14]). Из разложений по формулам Пьери

$$(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathrm{S}^p(\mathbb{C}^n)^* \simeq \mathrm{S}^{p+1}(\mathbb{C}^n)^* \oplus \mathbb{S}^{(p,1)}(\mathbb{C}^n)^*$$

получаем, что ядром оператора альтернирования является $\mathrm{S}^{p+1}(\mathbb{C}^n)^*$; аналогично в комплексно-сопряжённом случае. Следовательно, пространство k-струй кэлеровых метрик

$$K^{(k)} \subset \bigoplus_{0\leqslant p+q\leqslant k} \mathrm{S}^{p+1}(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathrm{S}^{q+1}(\overline{\mathbb{C}^n})^*$$

состоит из струй, удовлетворяющих условиям эрмитовости и положительности: $\varkappa_{0,0}$ — положительно определённая эрмитова квадратичная форма.

Аналогом леммы 1 служит следующая лемма.

Лемма 2. *Действие* $\mathrm{NGL}_n^{(k+1)}$ *на* $K^{(k)}$ *индуцирует* GL_n*-эквивариантный диффеоморфизм*

$$K^{(k)} \simeq \mathrm{NGL}_n^{(k+1)} \times K_0^{(k)},$$

где

$$K_0^{(k)} = K^{(k)} \cap \Bigg((\mathbb{C}^n)^* \otimes (\overline{\mathbb{C}^n})^* \oplus \bigoplus_{\substack{p,q>0 \\ p+q\leqslant k}} \mathrm{S}^{p+1}(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathrm{S}^{q+1}(\overline{\mathbb{C}^n})^* \Bigg).$$

Доказательство. Действуя как в лемме 1, будем последовательно обнулять все компоненты $\varkappa_{p,0} \in \mathrm{S}^{p+1}(\mathbb{C}^n)^* \otimes (\overline{\mathbb{C}^n})^*$ однозначно определённым преобразованием $g \in \mathrm{NGL}_n^{(k+1)}$. Эрмитова симметрия гарантирует, что при этом и $\varkappa_{0,q}$ обратятся в 0.

На k-м шаге индукции действие преобразования $g(z) = z + g_{k+1}(z, \ldots, z)$ на струю

$$\varkappa = \sum_{p,q} \varkappa_{p,q}$$

меняет только компоненты $\varkappa_{k,0}$ и $\varkappa_{0,k}$, причём $(g \cdot \varkappa)_{k,0} = \varkappa_{k,0} - (k+1)\varkappa_{0,0} * g_{k+1}$, где $*$ обозначает свёртку «голоморфного» нижнего индекса $\varkappa_{0,0}$ с верхним индексом g_{k+1}. Свёртка с $\varkappa_{0,0}$ изоморфно отображает $\mathbb{C}^n \otimes \mathrm{S}^{k+1}(\mathbb{C}^n)^*$ на $\mathrm{S}^{k+1}(\mathbb{C}^n)^* \otimes (\overline{\mathbb{C}^n})^*$, поэтому $\varkappa_{k,0}$ можно обнулить с помощью однозначно определённого g_{k+1}. □

Таким образом, задача сводится к описанию GL_n-эквивариантных полиномиальных отображений $\delta\colon K_0^{(k)} \to \bigwedge^l(\mathbb{C}^n)^* \otimes \bigwedge^m(\overline{\mathbb{C}^n})^*$ (с соблюдением дополнительных условий (B) и (C)). Отметим, что группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ действует на $K_0^{(k)}$ как вещественная, а не комплексная группа Ли. Но поскольку мы интересуемся полиномиальными отображениями, можно комплексифицировать ситуацию, получая полиномиальные отображения

$$\delta\colon \big((\mathbb{C}^n)^* \otimes (\overline{\mathbb{C}^n})^*\big)^{\mathrm{reg}} \oplus \bigoplus_{\substack{p,q>0 \\ p+q\leqslant k}} \mathrm{S}^{p+1}(\mathbb{C}^n)^* \otimes \mathrm{S}^{q+1}(\overline{\mathbb{C}^n})^* \to \bigwedge\nolimits^l(\mathbb{C}^n)^* \otimes \bigwedge\nolimits^m(\overline{\mathbb{C}^n})^*$$

(где reg обозначает плотное открытое подмножество тензоров максимального ранга), эквивариантные относительно действия группы $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n) \times \mathrm{GL}(\overline{\mathbb{C}^n}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Такое отображение можно представить в виде линейной комбинации отображений вида

$$\delta(\varkappa) = \Delta(\varkappa_{0,0}^* \otimes \ldots \otimes \varkappa_{0,0}^* \otimes \varkappa_{0,0} \otimes \ldots \otimes \varkappa_{0,0} \otimes \ldots \otimes \varkappa_{p,q} \otimes \ldots \otimes \varkappa_{p,q} \otimes \ldots),$$

где $\varkappa_{0,0}^* \in (\mathbb{C}^n \otimes \overline{\mathbb{C}^n})^{\mathrm{reg}}$ — двойственный к $\varkappa_{0,0}$ тензор,

$$\Delta\colon \big(\mathbb{C}^n\otimes\overline{\mathbb{C}^n}\big)^{\otimes d^*_{0,0}}\otimes\big((\mathbb{C}^n)^*\otimes(\overline{\mathbb{C}^n})^*\big)^{\otimes d_{0,0}}\otimes \\ \otimes\bigotimes_{\substack{p,q>0\\ p+q\leqslant k}}\big(\mathrm{S}^{p+1}(\mathbb{C}^n)^*\otimes\mathrm{S}^{q+1}(\overline{\mathbb{C}^n})^*\big)^{\otimes d_{p,q}}\to\textstyle\bigwedge^l(\mathbb{C}^n)^*\otimes\bigwedge^m(\overline{\mathbb{C}^n})^*\ -$$

линейное отображение, задаваемое свёрткой всех верхних индексов с некоторыми нижними индексами и последующим альтернированием (отдельно по «голоморфным» и «антиголоморфным» индексам).

Рассуждая как в разделе 2, получаем уравнения

$$-d^*_{0,0}+d_{0,0}+\ldots+d_{p,q}+\ldots=0, \tag{10}$$

$$-d^*_{0,0}+d_{0,0}+\ldots+(p+1)d_{p,q}+\ldots=l, \tag{11}$$

$$-d^*_{0,0}+d_{0,0}+\ldots+(q+1)d_{p,q}+\ldots=m \tag{12}$$

из однородности степени 0 отображения δ и его эквивариантности относительно подгрупп скалярных операторов в $\mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ и $\mathrm{GL}(\overline{\mathbb{C}^n})$. Переписываем (10)—(12) в виде

$$d_{0,0}+\sum_{\substack{p,q>0\\ p+q\leqslant k}}d_{p,q}=d^*_{0,0},\qquad \sum_{\substack{p,q>0\\ p+q\leqslant k}}pd_{p,q}=l,\qquad \sum_{\substack{p,q>0\\ p+q\leqslant k}}qd_{p,q}=m. \tag{13}$$

Из формул Пьери следует, что неприводимые подмодули $\mathbb{S}^\lambda(\mathbb{C}^n)^*\otimes\mathbb{S}^\mu(\overline{\mathbb{C}^n})^*$ в $(\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_n)$-модуле

$$\big(\mathbb{C}^n\otimes\overline{\mathbb{C}^n}\big)^{\otimes d^*_{0,0}}\otimes\big((\mathbb{C}^n)^*\otimes(\overline{\mathbb{C}^n})^*\big)^{\otimes d_{0,0}}\otimes\bigotimes_{\substack{p,q>0\\ p+q\leqslant k}}\big(\mathrm{S}^{p+1}(\mathbb{C}^n)^*\otimes\mathrm{S}^{q+1}(\overline{\mathbb{C}^n})^*\big)^{\otimes d_{p,q}}$$

имеют $\lambda_i=\mu_j=0$ при $i,j>\sum\limits_{p,q}d_{p,q}$, откуда получаем, что $\sum\limits_{p,q}d_{p,q}\geqslant l,m$. Как и в разделе 2, можно считать $d_{0,0}=0$, откуда следует, что $d_{p,q}=0$ при $p+q>2$, $d^*_{0,0}=d_{1,1}=l=m$.

Определим схему свёртки, задающей отображение δ. У каждого экземпляра $\varkappa_{1,1}$ ровно один из «голоморфных» индексов должен быть свёрнут с верхним «голоморфным» индексом одного из $\varkappa^*_{0,0}$ (иначе у одного из $\varkappa_{1,1}$ останутся два несвёрнутых «голоморфных» индекса и свёртка обнулится альтернированием по этим двум индексам); аналогично для «антиголоморфных» индексов. Поэтому свёртка представляется в виде тензорного произведения свёрток вида

$$\varkappa^{i_1|j_1}\varkappa_{i_2p_1|j_1q_1}\varkappa^{i_2|j_2}\varkappa_{i_3p_2|j_2q_2}\cdots\varkappa^{i_{l-1}|j_{l-1}}\varkappa_{i_lp_{l-1}|j_{l-1}q_{l-1}}\varkappa^{i_l|j_l}\varkappa_{i_1p_l|j_lq_l}, \tag{14}$$

где $\varkappa_{i_0\ldots i_p|j_0\ldots j_q}$ обозначает координату тензора $\varkappa_{p,q}$, а вертикальная черта отделяет «голоморфные» индексы от «антиголоморфных».

Форма кривизны метрики $\varkappa$ имеет вид

$$R=R^i_{j,p|q}(\partial_i\otimes dz^j)\otimes(dz^p\wedge d\overline{z^q}),$$

где

$$R^i_{j,p|q}=\frac{\partial\Gamma^i_{pj}}{\partial\overline{z^q}},$$

а

$$\Gamma^i_{pj} = \varkappa^{i|s} \frac{\partial \varkappa_{p|s}}{\partial z^j} -$$

символы Кристоффеля канонической эрмитовой связности. Если струя метрики лежит в $K_0^{(k)}$, то символы Кристоффеля в начале координат обращаются в 0 и $R^i_{j,p|q}(0) = \varkappa^{i|s}\varkappa_{jp|sq}$. Поэтому свёртка (14) равна

$$R^{i_1}_{i_2,p_1|q_1} R^{i_2}_{i_3,p_2|q_2} \cdots R^{i_{l-1}}_{i_l,p_{l-1}|q_{l-1}} R^{i_l}_{i_1,p_l|q_l},$$

а соответствующий ей дифференциальный характеристический класс имеет вид

$$D\gamma = \operatorname{tr}\Bigl(\underbrace{R\wedge\ldots\wedge R}_{l}\Bigr). \tag{15}$$

Свойства (B) и (C) проверяются так же, как и в разделе 2. Заметим, что формы (15) выражаются через дифференциальные формы, задающие классы Чжэня [1, гл. 8, 15.4] (которые связаны с формами (15) так же, как классы Понтрягина с формами (9)), и обратно. В итоге получена следующая теорема.

Теорема 2 (ср. [6; 8, 3.6.9]). *Все дифференциальные характеристические классы кэлеровых метрик на комплексном многообразии представляются в виде многочленов от классов Чжэня.*

4. Связности

От метрик перейдём к произвольным линейным связностям в касательном расслоении к многообразию M и опишем их дифференциальные характеристические классы.

Расслоение связностей $\mathcal{C} \to M$ является естественным аффинным расслоением второго порядка, ассоциированным с векторным расслоением $\mathcal{T}^{1,2} \to M$ [3, пример 1.12]. Локальными координатами в $\mathcal{C}$ являются локальные координаты x^i на M и символы Кристоффеля Γ^p_{ij}, т. е. координаты формы связности $\theta = \theta_i\,dx^i$, $\theta_i = \Gamma^p_{ij}\,\partial_p \otimes dx^j$. Оператор ковариантного дифференцирования в локальных координатах равен $\nabla = d+\theta$, а действие локального диффеоморфизма g на связность в окрестности $0 \in \mathbb{K}^n$ вычисляется по формуле $\nabla \mapsto J^1 g \circ \nabla \circ J^1 g^{-1}$ или, в координатах, $g \cdot \theta = \tilde\theta$ с символами Кристоффеля

$$\tilde\Gamma^p_{ij}(x) = \frac{\partial g^p}{\partial x^q}\bigl(h(x)\bigr)\frac{\partial^2 h^q}{\partial x^i \partial x^j}(x) + \frac{\partial g^p}{\partial x^q}\bigl(h(x)\bigr)\Gamma^q_{rs}\bigl(h(x)\bigr)\frac{\partial h^r}{\partial x^i}(x)\frac{\partial h^s}{\partial x^j}(x),$$

где $h = g^{-1}$.

На пространстве k-струй связностей

$$C^{(k)} = \bigl(\mathbb{K}^n \otimes (\mathbb{K}^{n*})^{\otimes 2}\bigr) \oplus \bigl(\mathbb{K}^n \otimes (\mathbb{K}^{n*})^{\otimes 2} \otimes (\mathbb{K}^n)^*\bigr) \oplus \ldots \oplus \bigl(\mathbb{K}^n \otimes (\mathbb{K}^{n*})^{\otimes 2} \otimes \mathrm{S}^k(\mathbb{K}^n)^*\bigr)$$

действует группа $\mathrm{GL}_n^{(k+2)}$. Рассмотрим действие преобразований $g \in \mathrm{NGL}_n^{(k+2)}$ с единственными ненулевыми компонентами g_1 и g_{k+2}:

$$
\begin{aligned}
&g(x) = x + g_{k+2}(x,\dots,x) + \dots,\\
&h(x) = x - g_{k+2}(x,\dots,x) + \dots,\\
&\tilde{\theta}(x)(\xi,\eta) = \theta(x)(\xi,\eta) - (k+1)(k+2)g_{k+2}(x,\dots,x,\xi,\eta) + \dots\\
&\quad (\xi,\eta \in T_x\mathbb{K}^n = \mathbb{K}^n),\\
&g\cdot\theta = \theta - (k+1)(k+2)g_{k+2}.
\end{aligned}
$$

Как в лемме 1, отсюда мы получаем следующий факт.

Лемма 3 [9, лемма 5.2]. *Действие* $\mathrm{NGL}_n^{(k+2)}$ *на* $C^{(k)}$ *индуцирует* GL_n*-эквивариантный диффеоморфизм* $C^{(k)} \simeq \mathrm{NGL}_n^{(k+2)} \times C_0^{(k)}$, *где*

$$C_0^{(k)} = \operatorname{Ker}\operatorname{Sym}_2 \oplus \operatorname{Ker}\operatorname{Sym}_3 \oplus \dots \oplus \operatorname{Ker}\operatorname{Sym}_{k+2} \subset C^{(k)},$$

а

$$\operatorname{Sym}_{p+2}\colon \mathbb{K}^n \otimes (\mathbb{K}^{n*})^{\otimes 2} \otimes \mathrm{S}^p(\mathbb{K}^n)^* \to \mathbb{K}^n \otimes \mathrm{S}^{p+2}(\mathbb{K}^n)^* \text{ —}$$

симметризация по нижним индексам.

Остаётся описать GL_n-эквивариантные полиномиальные отображения $\delta\colon C_0^{(k)} \to \bigwedge^m(\mathbb{K}^n)^*$, для которых выполняются условия (B) и (C).

Заметим, что имеет место разложение $\mathcal{C} = \mathcal{S} \oplus (\mathcal{T} \otimes \Omega^2)$, где $\mathcal{S} \to M$ — расслоение симметрических связностей, а второе слагаемое состоит из тензоров кручения (для струи связности $\theta = \theta_0 + \ldots + \theta_k \in C_0^{(k)}$ значение тензора кручения в начале координат равно θ_0). Из условия (C) следует, что все однородные по $\mathcal{T}\otimes\Omega^2$ компоненты дифференциального характеристического класса, задаваемого отображением δ, тоже являются дифференциальными характеристическими классами, причём компоненты положительной степени задают нулевые классы когомологий. Поэтому нетривиальные дифференциальные характеристические классы зависят только от симметрической части связности, и можно в наших рассмотрениях заменить $\mathcal{C}$ на $\mathcal{S}$, считая все тензоры θ_p симметричными по первым двум нижним индексам. В частности, $\theta_0 = 0$ при $\theta \in S_0^{(k)} = S^{(k)} \cap C_0^{(k)}$.

Как и выше, вопрос сводится к отображениям вида

$$\delta(\theta) = \Delta(\theta_1 \otimes \ldots \otimes \theta_1 \otimes \ldots \otimes \theta_k \otimes \ldots \otimes \theta_k),$$

где

$$\Delta\colon \bigotimes_{p=1}^{k} \bigl(\mathbb{K}^n \otimes \mathrm{S}^2(\mathbb{K}^n)^* \otimes \mathrm{S}^p(\mathbb{K}^n)^*\bigr)^{\otimes d_p} \to \bigwedge\nolimits^m(\mathbb{K}^n)^* \text{ —}$$

линейное отображение, задаваемое свёрткой всех верхних индексов с некоторыми нижними индексами и последующим альтернированием. Заметим, что у каждого экземпляра θ_p должно остаться не более чем по одному несвёрнутому индексу из первых двух и из последних p нижних индексов (иначе альтернирование обнулит эту свёртку). Поэтому $d_2 = \ldots = d_k = 0$, $d_1 = m/2$, и наша свёртка представляется в виде произведения свёрток вида

$$\Gamma^{i_1}_{i_2p_1,q_1}\Gamma^{i_2}_{i_3p_2,q_2}\cdots\Gamma^{i_{l-1}}_{i_lp_{l-1},q_{l-1}}\Gamma^{i_l}_{i_1p_l,q_l}, \tag{16}$$

где $\Gamma^i_{jp,q}$ обозначает координату тензора θ_1. Альтернируя сперва по каждой паре индексов (p_s, q_s), получаем из (16) свёртку

$$R^{i_1}_{i_2,p_1q_1} R^{i_2}_{i_3,p_2q_2} \cdots R^{i_{l-1}}_{i_l,p_{l-1}q_{l-1}} R^{i_l}_{i_1,p_lq_l},$$

где $R^i_{j,pq} = \Gamma^i_{jq,p} - \Gamma^i_{jp,q}$ — координаты в 0 тензора кривизны R. Поэтому дифференциальный характеристический класс, отвечающий свёртке (16), равен

$$\operatorname{tr}\Bigl(\underbrace{R \wedge \ldots \wedge R}_{l}\Bigr). \tag{17}$$

Свойства (B) и (C) проверяются как выше. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Все дифференциальные характеристические классы линейных связностей на многообразии представляются в виде многочленов от форм вида* (17).

Литература

[1] Алексеевский Д. В., Виноградов А. М., Лычагин В. В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1988. — Т. 28.

[2] Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1989. — Т. 55. — С. 137—309.

[3] Кацыло П. И., Тимашёв Д. А. Естественные дифференциальные операции на многообразиях: алгебраический подход // Матем. сб. — 2008. — Т. 199, № 10. — С. 63—86.

[4] Atiyah M., Bott R., Patodi V. K. On the heat equation and the index theorem // Invent. Math. — 1973. — Vol. 19. — P. 279—330.

[5] Fulton W., Harris J. Representation Theory: A First Course. — New York: Springer, 1991. — (Grad. Texts Math.; Vol. 129).

[6] Gilkey P. B. Curvature and the eigenvalues of the Dolbeault complex for Kaehler manifolds // Adv. Math. — 1973. — Vol. 11. — P. 311—325.

[7] Gilkey P. B. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian for elliptic complexes // Adv. Math. — 1973. — Vol. 10. — P. 344—382.

[8] Gilkey P. B. Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah—Singer Index Theorem. — Wilmington: Publish or Perish, 1984. — (Math. Lect. Ser.; Vol. 11.)

[9] Katsylo P. I. On curvatures of sections of tensor bundles // Amer. Math. Soc. Transl. (2) — 2005. — Vol. 213. — P. 129—140.