

Топологический атлас волчка Ковалевской в двойном поле

М. П. ХАРЛАМОВ

*Российская академия народного хозяйства
и государственной службы*
e-mail: mikeh@inbox.ru

П. Е. РЯБОВ

*Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации*
e-mail: orelryabov@mail.ru

УДК 514.853+517.938.5+531.38

Ключевые слова: интегрируемые гамильтоновы системы, отображение момента, изоэнергетические диаграммы, сетевые топологические инварианты, классификация.

Аннотация

В работе выполнен грубый топологический анализ вполне интегрируемой системы с тремя степенями свободы, описывающей движение волчка Ковалевской в двойном поле. Эта система не приводится к семейству систем с двумя степенями свободы. Введено понятие топологического атласа неприводимой системы. Для волчка Ковалевской в двойном поле выполнен полный топологический анализ критических подсистем с двумя степенями свободы, вычислены типы всех критических точек. Дана параметрическая классификация оснащённых изоэнергетических диаграмм исходного отображения момента с указанием всех камер, семейств регулярных 3-торов и 4-атомов их бифуркаций. На основе идей А. Т. Фоменко определён упрощённый сетевой изоэнергетический инвариант. Построены все такие инварианты. Исходя из них, для всех параметрически устойчивых случаев определено количество критических периодических решений всех типов, установлены круговые молекулы невырожденных особенностей ранга 1.

Abstract

M. P. Kharlamov, P. E. Ryabov, Topological atlas of the Kovalevskaya top in a double field, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 2, pp. 185–230.

The article contains the rough topological analysis of the completely integrable system with three degrees of freedom corresponding to the motion of the Kovalevskaya top in a double field. This system is not reducible to a family of systems with two degrees of freedom. We introduce the notion of a topological atlas of an irreducible system. For the Kovalevskaya top in a double field, we complete the topological analysis of all critical subsystems with two degrees of freedom and calculate the types of all critical points. We present the parametric classification of the equipped iso-energy diagrams of the initial momentum map pointing out all chambers, families of 3-tori, and 4-atoms of their bifurcations. Basing on the ideas of A. T. Fomenko, we define the simplified net iso-energy invariant. All such invariants are constructed. Using them, we establish, for all parametrically stable cases, the number of critical periodic solutions of all types and the loop molecules of all nondegenerate rank 1 singularities.

1. Введение

В [16] С. Смейл сформулировал в современном виде задачу топологического анализа механических систем с первыми интегралами и разработал методы её решения для класса систем, в которых интегралы, дополнительные к квадратичному по скоростям интегралу энергии, являются следствием наличия групп симметрий, действующих на конфигурационном пространстве. В частности, эти интегралы линейны по скоростям. М. П. Харламов [27–31] предложил метод исследования топологии интегрируемых систем с нелинейными интегралами и выполнил топологический анализ классических интегрируемых задач динамики твёрдого тела. В работах Л. М. Лермана, Я. Л. Уманского [11, 54] развита теория особенностей интегральных отображений вполне интегрируемых гамильтоновых систем, получены базовые результаты по топологической структуре окрестностей особенностей, которые теперь называют невырожденными. Новое понимание топологии интегрируемых гамильтоновых систем и глобальные методы её описания в терминах инвариантов предложены А. Т. Фоменко [20, 21, 23]. На основе этих идей в последующих работах А. Т. Фоменко, его учеников и коллег создана теория топологической классификации. Отметим некоторые важные для этого направления работы А. Т. Фоменко, Х. Цишанга, А. В. Болсинова, С. В. Матвеева, Н. Т. Зунга, А. А. Ошемкова [2, 26, 40, 55, 64] и подробное изложение этой теории в [5].

Теория топологических инвариантов интегрируемых систем со многими степенями свободы была построена в работах А. Т. Фоменко [23, 24, 45]. В этой теории введено новое понятие меченых сетей. В работах Н. Т. Зунга [9], Л. С. Поляковой [56], А. В. Кузнецова [10] и Е. Н. Селивановой [15] вычислены меченые сети для некоторых важных физических интегрируемых систем со многими степенями свободы (цепочки Тоды, системы трёхточечных вихрей, геодезические потоки на многомерных сферах и торах). Исследования по топологии интегрируемых систем на многомерных многообразиях содержатся в работах А. В. Болсинова [41, 44]. В работах Ю. А. Браилова [6, 43] приведены результаты топологического анализа интегрируемой системы с тремя степенями свободы, которая представляет собой аналог твёрдого тела на алгебре Ли $\mathfrak{su}(3)$.

В цитированной выше работе С. Смейл в качестве примера рассматривал задачу n тел из небесной механики. После этого долгое время одним из основных источников примеров интегрируемых систем с двумя степенями свободы являлась задача о движении твёрдого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле вместе с её обобщениями на некоторые коалгебры Ли. Эта задача и сегодня остаётся важным объектом приложения новых идей и генератором новых интегрируемых систем (см., например, работы [17–19, 58–62] и приведённые в них ссылки). В классической постановке задача динамики твёрдого тела описывается механической системой с гироскопическими силами на группе $SO(3)$ с S^1 -симметрией. Отказ от осесимметричных сил приводит к системам с тремя степенями свободы без возможности глобального пониже-

ния порядка. Задачей такого типа является обобщение классического случая интегрируемости С. В. Ковалевской на движение гиростата в двойном силовом поле. Полная интегрируемость этой системы доказана в [39, 57, 59] путём последовательного обобщения классических интегралов. В настоящей работе эта система рассматривается при отсутствии гиросtatического момента. Этот случай принято называть волчком Ковалевской в двойном поле. Предложено полное исследование трёхмерной топологии системы, частично анонсированное в [37]. Предполагаются известные определения и факты, связанные с особенностями отображения момента и бифуркациями в случае многих степеней свободы [5, 21, 23, 42].

Структура настоящей работы основана на идее топологического атласа неприводимой системы с тремя степенями свободы, зависящей от некоторого набора физических параметров [36, 49]. В этом случае грубый изоэнергетический инвариант уже не является одномерным графом, а может быть представлен в виде так называемой оснащённой изоэнергетической диаграммы — бифуркационной диаграммы ограничения отображения момента на уровень энергии, стратифицированной рангом отображения и типами критических точек в прообразе. Более того, необходимо в понятие оснащённой диаграммы включить и её оболочку, т. е. дополнить её двумерными камерами, на которые она разбивает плоскость пары дополнительных интегралов, с указанием количества регулярных торов в камерах и способа объединения этих торов в так называемые семейства. Для этого необходима полная классификация изоэнергетических диаграмм и анализ их эволюции в зависимости от параметров системы.

На первом этапе выполняется стратификация фазового пространства критическими подсистемами, образованными множеством критических точек в прообразах гладких поверхностей, несущих бифуркационную диаграмму Σ полного отображения момента в трёхмерном пространстве. Критические подсистемы имеют не более двух степеней свободы, и к ним применим весь накопленный опыт топологического анализа. В частности, вычисляются бифуркационные диаграммы критических подсистем, типы точек ранга 0 и 1, критических *внутри* подсистем, и соответствующие атомы двумерных бифуркаций. В то же время уравнения фазовых пространств критических подсистем позволяют явно вычислить *внешний* тип любой точки критической подсистемы, в частности всех точек ранга 2. Комбинируя эту информацию, получаем полную классификацию критических точек по их типам в исходной системе с тремя степенями свободы.

Пусть c — вектор физических параметров, H — гамильтониан системы. В нерезонансной системе при отсутствии экзотических бифуркаций (с так называемыми расщепляющимися атомами) сечения бифуркационной диаграммы Σ плоскостями постоянного значения $H = h$ перестраиваются в тех случаях, когда выполняется одно из следующих условий:

- а) на изоэнергетическое многообразие $H_h = \{H = h\}$ попадают точки ранга 0 и вырожденные точки ранга 1;

- б) гамильтониан имеет экстремум на семействе вырожденных критических точек ранга 2.

При заданном векторе параметров этим условиям удовлетворяет лишь конечное число точек. Записывая в них зависимости $h = h(c)$, получаем набор поверхностей в пространстве параметров (c, h) , разделяющих различные неэквивалентные параметрически устойчивые изоэнергетические диаграммы. Таким образом, для получения *топологического атласа* необходимо построить совокупность разделяющих поверхностей и для каждой области дополнения к разделяющему множеству в пространстве (c, h) указать соответствующую оснащённую изоэнергетическую диаграмму. Дальнейшее сопоставление этих диаграмм позволяет завершить и задачу описания строения семейств регулярных торов.

Опыт исследования интегрируемых систем, даже в случае двух степеней свободы, показывает, что бифуркационные диаграммы и порождённые ими камеры, как правило, имеют ряд специфических особенностей, связанных с возникновением «сверхмалых» областей. Одним из решений этой проблемы является переход от реальных форм диаграмм к сетевым топологическим инвариантам А. Т. Фоменко [24]. В применении к конкретным системам этот инвариант целесообразно рассматривать в упрощённом виде. Считая оболочку изоэнергетической диаграммы — образ изоэнергетического многообразия под действием отображения момента, зависящий от h и c — двумерным клеточным комплексом, для неразделяющих значений (c, h) оснастим все 1-клетки обозначением соответствующего 4-атома, а 2-клетки (камеры) снабдим числом — количеством торов Лиувилля в прообразе точки. Результат — ещё одна из возможных форм грубого изоэнергетического топологического инварианта системы. Переход к сопряжённому комплексу делает этот инвариант более наглядным. В нём 0-клетки снабжены натуральными числами (количество 3-торов), 1-клетки — обозначением атомов, 2-клетки представляют критические замкнутые орбиты (критические движения из точек ранга 1). Добавляя 0-клетку с числом 0, представляющую камеру с пустыми интегральными многообразиями, превратим сопряжённый комплекс в клеточное разбиение двумерной сферы. Этот оснащённый комплекс называем упрощённым сетевым инвариантом ограничения системы на изоэнергетический уровень.

Имея весь набор упрощённых сетевых инвариантов, анализируем атомы на границе каждой 2-клетки. Это даёт полную информацию об устойчивости соответствующих замкнутых орбит и определяет соответствующую круговую молекулу (в грубом смысле). Для невырожденных орбит малой сложности с учётом наличия соответствующей классификации [5] можно установить и тонкую топологию круговой молекулы.

Результат перечисленных исследований можно назвать *полным топологическим атласом* интегрируемой системы. Ниже такой атлас построен для волчка Ковалевской в двойном поле.

2. Уравнения и интегралы.

Понятие критической подсистемы

Задача о движении волчка Ковалевской в двойном поле описывается системой уравнений [39]

$$\begin{aligned} 2\dot{\omega}_1 &= \omega_2\omega_3 + \beta_3, & \dot{\alpha}_1 &= \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, & \dot{\beta}_1 &= \beta_2\omega_3 - \omega_2\beta_3, \\ 2\dot{\omega}_2 &= -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, & \dot{\alpha}_2 &= \omega_1\alpha_3 - \omega_3\alpha_1, & \dot{\beta}_2 &= \omega_1\beta_3 - \omega_3\beta_1, \\ \dot{\omega}_3 &= \alpha_2 - \beta_1, & \dot{\alpha}_3 &= \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, & \dot{\beta}_3 &= \beta_1\omega_2 - \beta_2\omega_1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь ω — вектор мгновенной угловой скорости. Постоянные в инерциальном пространстве векторы α , β характеризуют действие силовых полей. Обозначения выберем так, чтобы выполнялось неравенство $|\alpha| \geq |\beta|$. Как показано в [33], без ограничения общности силовые поля можно считать взаимно ортогональными. Тогда геометрические интегралы системы (2.1) запишутся в виде ($a \geq b \geq 0$)

$$|\alpha|^2 = a^2, \quad |\beta|^2 = b^2, \quad \alpha \cdot \beta = 0. \quad (2.2)$$

Перенесём на пространство $\mathbb{R}^9(\omega, \alpha, \beta)$ введённую в [39] скобку Ли—Пуассона коалгебры Ли

$$\epsilon(3, 2)^* = \{(\mathbf{M}, \alpha, \beta)\},$$

используя компоненты кинетического момента

$$M_1 = 2\omega_1, \quad M_2 = 2\omega_2, \quad M_3 = \omega_3.$$

Система (2.1) примет вид $\dot{x} = \{H, x\}$, где x — любая из координат,

$$H = \frac{1}{2}(2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 + \omega_3^2) - \alpha_1 - \beta_2. \quad (2.3)$$

Функциями Казимира для скобки Ли—Пуассона являются левые части уравнений (2.2). Поэтому векторное поле (2.1), ограниченное на заданное этими уравнениями шестимерное подмногообразие \mathcal{P}^6 в $\mathbb{R}^9(\omega, \alpha, \beta)$, является гамильтоновой системой с тремя степенями свободы.

При $b = 0$ система (2.1) описывает случай С. В. Ковалевской движения твёрдого тела в поле силы тяжести, а при $a = b$ — случай Х. М. Яхья [59]. Эти предельные задачи обладают группой симметрий и редуцируются к семействам интегрируемых систем с двумя степенями свободы (конфигурационное пространство — сфера). Классический случай Ковалевской изучен в [3, 29, 30]. Случай Яхья и его обобщения рассматривались в [7, 53]. Глобальный подход к классификации интегрируемых систем на двумерной сфере, порождённых задачами динамики твёрдого тела с осесимметричным потенциалом, реализован в [1, 4, 25]. Далее рассматривается случай $a > b > 0$, не приводимый к двум степеням свободы.

Найденные в [39, 57] первые интегралы системы (2.1)

$$\begin{aligned}
 K &= (\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2)^2 + (2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1)^2, \\
 G &= \left[\omega_1\alpha_1 + \omega_2\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3\omega_3 \right]^2 + \left[\omega_1\beta_1 + \omega_2\beta_2 + \frac{1}{2}\beta_3\omega_3 \right]^2 + \\
 &+ \omega_3 \left[(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\omega_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\omega_2 + \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\omega_3 \right] - \\
 &- \alpha_1 b^2 - \beta_2 a^2
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

вместе с H образуют на \mathcal{P}^6 полный инволютивный набор. Соответствующее отображение момента $\mathcal{F}: \mathcal{P}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ определим, полагая

$$\mathcal{F}(x) = (G(x), K(x), H(x)).$$

Пусть \mathcal{K} — множество критических точек отображения момента, т. е. точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(x) < 3$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{K}) \subset \mathbb{R}^3$ называется *бифуркационной диаграммой*. Множество \mathcal{K} стратифицировано рангом отображения момента $\mathcal{K} = \mathcal{K}^0 \cup \mathcal{K}^1 \cup \mathcal{K}^2$. Здесь

$$\mathcal{K}^r = \{x \in \mathcal{P}^6 \mid \text{rank } d\mathcal{F}(x) = r\}.$$

В соответствии с этим и диаграмма Σ становится клеточным комплексом $\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2$. С другой стороны, на практике бифуркационные диаграммы описываются в терминах некоторых поверхностей в пространстве констант первых интегралов. Уравнения этих поверхностей (неявные или параметрические) зачастую можно получить, даже не вычисляя самих критических точек, как дискриминантные множества некоторых многочленов (например, исходя из особенностей алгебраических кривых, ассоциированных с представлениями Лакса). Такие поверхности будем обозначать через Π_i и записывать представление $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$, где $\Sigma_i = \Sigma \cap \Pi_i$. Смысл этого представления в том, что критическое множество \mathcal{K} оказывается объединением естественным образом возникающих инвариантных множеств $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{F}^{-1}(\Pi_i)$. Если поверхность Π_i записана регулярным уравнением

$$\phi_i(g, k, h) = 0, \tag{2.5}$$

то \mathcal{M}_i определится как множество критических точек интеграла $\phi_i(G, K, H)$, лежащих на его нулевом уровне, а вычисленные в точке \mathcal{M}_i компоненты градиента функции ϕ_i в подстановке значений интегралов G, K, H дадут коэффициенты равной нулю линейной комбинации дифференциалов dG, dK, dH . В точке трансверсального пересечения двух поверхностей Π_i и Π_j получим две независимые равные нулю комбинации, поэтому в точках соответствующего пересечения $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j$ ранг \mathcal{F} равен 1. Очевидно, что точки трансверсального пересечения трёх поверхностей (углы бифуркационной диаграммы) оказываются порождёнными точками с условием $\text{rank } \mathcal{F} = 0$. Множества \mathcal{M}_i с индуцированной на них динамикой далее называем *критическими подсистемами*.

Критические подсистемы и уравнения поверхностей Π_i в рассматриваемой задаче найдены в [32, 39, 46]. Подробное описание стратификации критического множества по рангу отображения момента изложено в [34]. Там же в виде явных неравенств для постоянной энергии указаны области существования движений на поверхностях Π_i — множества Σ_i , составляющие бифуркационную диаграмму. Как следствие этих неравенств построено множество в пространстве параметров, разделяющее различные виды сечений диаграммы Σ плоскостями постоянной энергии, т. е. виды бифуркационных диаграмм отображения $G \times K$, ограниченного на изоэнергетические поверхности $\{H = h\} \subset \mathcal{P}^6$. Критические подсистемы оказываются интегрируемыми почти всюду гамильтоновыми системами с числом степеней свободы, меньшим трёх. Для них, в свою очередь, определено индуцированное отображение момента. Бифуркационная диаграмма Σ_i^* для отображения $\mathcal{F}|_{\mathcal{M}_i}$ очевидным образом отождествляется с подмножеством объединения нульмерного и одномерного остовов множества Σ_i . Здесь стратификацию Σ_i естественно вводить геометрически, исходя из существующих пересечений вида $\Sigma_i \cap \Sigma_j$. При этом в одномерный остов Σ_i^1 могут попасть и точки касания двух поверхностей, в прообразе которых ранг $\mathcal{F}|_{\mathcal{M}_i}$ не падает и которые, следовательно, формально не входят в Σ_i^* . Конечно, соответствующие точки множества \mathcal{K} окажутся *вырожденными* критическими точками для \mathcal{F} , но подсистема \mathcal{M}_i может этого не почувствовать. Описание диаграмм Σ_i^* и бифуркаций внутри критических подсистем получено в [38, 48, 51, 63]. Классификация точек множества \mathcal{K} по отношению ко всей исходной системе с тремя степенями свободы на \mathcal{P}^6 выполнена в [14]. В двух следующих разделах приводится краткое изложение необходимых сведений из цитированных работ.

3. Описание критических подсистем и классов особенностей

В этом разделе излагаются результаты, относящиеся к нахождению критического множества отображения момента и классификации критических точек по их рангу.

Для компактного описания критических подсистем воспользуемся заменой переменных [32]

$$\begin{aligned} x_1 &= (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), & x_2 &= (\alpha_1 - \beta_2) - i(\alpha_2 + \beta_1), \\ y_1 &= (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), & y_2 &= (\alpha_1 + \beta_2) - i(\alpha_2 - \beta_1), \\ z_1 &= \alpha_3 + i\beta_3, & z_2 &= \alpha_3 - i\beta_3, \\ w_1 &= \omega_1 + i\omega_2, & w_2 &= \omega_1 - i\omega_2, & w_3 &= \omega_3. \end{aligned}$$

Введём следующие функции:

$$Z_1 = w_1^2 + x_1, \quad Z_2 = w_2^2 + x_2,$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= \sqrt{x_1 x_2} w_3 - \frac{x_2 z_1 w_1 + x_1 z_2 w_2}{\sqrt{x_1 x_2}}, \quad F_2 = \frac{x_2}{x_1} Z_1 - \frac{x_1}{x_2} Z_2, \\
R_1 &= \frac{w_2 x_1 + w_1 y_2 + w_3 z_1}{w_1} - \frac{w_1 x_2 + w_2 y_1 + w_3 z_2}{w_2}, \\
R_2 &= (w_2 z_1 + w_1 z_2) w_3^2 + \left[\frac{w_2 z_1^2}{w_1} + \frac{w_1 z_2^2}{w_2} + w_1 w_2 (y_1 + y_2) + x_1 w_2^2 + x_2 w_1^2 \right] w_3 + \\
&\quad + \frac{w_2^2 x_1 z_1}{w_1} + \frac{w_1^2 x_2 z_2}{w_2} + x_1 z_2 w_2 + x_2 z_1 w_1 + (w_1 z_2 - w_2 z_1)(y_1 - y_2).
\end{aligned}$$

Определим параметры $p > r > 0$, полагая $p^2 = a^2 + b^2$ и $r^2 = a^2 - b^2$. Далее они используются наравне с a, b там, где это удобно для сокращения записи.

Теорема 1 [46]. Критическое множество отображения \mathcal{F} состоит из четырёх критических подсистем \mathcal{M}_i ($i = 1, \dots, 4$), заданных в \mathcal{P}^6 следующими системами уравнений:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1: & Z_1 = 0, \quad Z_2 = 0, \\
\mathcal{M}_2: & F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \\
\mathcal{M}_3: & R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \\
\mathcal{M}_4: & w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = 0.
\end{aligned}$$

\mathcal{F} -образы множеств \mathcal{M}_i , обозначаемые соответственно через Π_i , в пространстве $\mathbb{R}^3(h, k, g)$ постоянных интегралов H, K, G записываются следующими системами уравнений:

$$\begin{aligned}
\Pi_1: & \begin{cases} k = 0, \\ g = \frac{1}{2} p^2 h - \frac{1}{4} f^2; \end{cases} & \Pi_2: & \begin{cases} k = r^4 m^2, \\ g = \frac{1}{2} (p^2 h - r^4 m); \end{cases} \\
\Pi_3: & \begin{cases} k = 3s^2 - 4hs + p^2 + h^2 - \frac{a^2 b^2}{s^2}, \\ g = -s^3 + hs^2 + \frac{a^2 b^2}{s}; \end{cases} & \Pi_4: & \begin{cases} k = (a \mp b)^2, \\ g = \pm abh. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь через f, m, s обозначены постоянные частных интегралов F, M, S в соответствующих подсистемах $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$:

$$\begin{aligned}
F &= w_1 w_2 w_3 + z_2 w_1 + z_1 w_2, \\
M &= \frac{1}{2r^2} \left(\frac{x_2}{x_1} Z_1 + \frac{x_1}{x_2} Z_2 \right), \\
S &= -\frac{1}{4} \left(\frac{y_2 w_1 + x_1 w_2 + z_1 w_3}{w_1} + \frac{x_2 w_1 + y_1 w_2 + z_2 w_3}{w_2} \right).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Сделаем ряд комментариев.

Очевидно, системы уравнений (инвариантных соотношений), описывающие множества \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 , имеют особенности. Здесь имеется в виду, что рассматривается замыкание в \mathcal{P}^6 множества решений соответствующей системы в её области определения.

Подсистема \mathcal{M}_1 и интеграл F найдены в [39], подсистема \mathcal{M}_2 и интеграл M — в [32]. Подсистемы \mathcal{M}_3 и \mathcal{M}_4 , завершающие описание критического множества, а также интеграл S , являющийся аналогом переменной Ковалевской, сохраняющей постоянное значение на критических движениях четвёртого класса Аппельрота, найдены в [46]. Множество \mathcal{M}_4 , заданное четырьмя уравнениями, является гладким двумерным многообразием. С точностью до диффеоморфизма это объединение двух цилиндров $S^1 \times \mathbb{R}$. Индуцированная система гамильтонова с одной степенью свободы.

Множества \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 являются гладкими четырёхмерными многообразиями, однако \mathcal{M}_2 неориентируемо (см. [50, 63]). С использованием явных параметрических уравнений множества \mathcal{M}_3 , полученных в [47] (они приведены и в [14]), можно показать, что \mathcal{M}_3 — гладкое четырёхмерное многообразие всюду за исключением общих точек с \mathcal{M}_4 , в которых \mathcal{M}_3 имеет трансверсальное самопересечение по двумерному подмногообразию с краем $\mathcal{M}_3 \cap \mathcal{M}_4$.

Ввиду представления (3.1) области существования критических движений Σ_i и бифуркационные диаграммы критических подсистем Σ_i^* удобно описывать в терминах частных отображений момента. Для первых трёх подсистем это отображения $\mathcal{F}_i: \mathcal{M}_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, определённые как

$$\mathcal{F}_1 = F^2 \times H, \quad \mathcal{F}_2 = M \times H, \quad \mathcal{F}_3 = S \times H.$$

Для подсистемы \mathcal{M}_4 с одной степенью свободы естественно положить

$$\mathcal{F}_4 = H: \mathcal{M}_4 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Для дальнейшего нам понадобятся обозначения различных классов критических точек и их образов под действием отображений момента. Ранг точек всегда указывается по отношению к полному отображению момента \mathcal{F} .

Замечание 1. Далее действует соглашение, по которому образы одной и той же критической точки или определённого семейства критических точек обозначаются одинаково независимо от того, какое из введённых выше отображений момента применяется. Это не приведёт к недоразумению. Единственное исключение составляют точки самопересечения поверхности \mathcal{P}_3 , которые при развёртке на плоскость (s, h) получают два представления с различными значениями s . Точки на плоскости (s, h) , которые переходят в одну и ту же точку (h, k, g) будем снабжать верхним индексом «плюс» или «минус» соответственно для большего и для меньшего значений s .

Нам удобно сразу же выделить классы движений Q_i в подсистемах \mathcal{M}_i ($i = 1, 2, 3$), отвечающие подмножествам, на которых вырождается форма, индуцированная симплектической структурой. Известно [22], что на подмногообразиях, заданных как совместный уровень двух независимых функций, такое

вырождение происходит там, где скобка Пуассона этих функций обращается в нуль. В точках подсистем \mathcal{M}_i выполнены тождества [38, 47, 63]

$$\{Z_1, Z_2\} \equiv -2iF, \quad \{F_1, F_2\} \equiv -2ir^2L, \quad \{R_1, R_2\} \equiv \frac{8i}{S}U,$$

где F, S определены в (3.2), а L и U являются интегралами подсистем \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 соответственно и имеют вид

$$L = \frac{1}{\sqrt{x_1x_2}}[w_1w_2 + x_1x_2 + z_1z_2M], \quad U = 2S^4 - 2HS^3 + a^2b^2. \quad (3.3)$$

Таким образом,

$$Q_1 = \mathcal{M}_1 \cap \{F = 0\}, \quad Q_2 = \mathcal{M}_2 \cap \{L = 0\}, \quad Q_3 = \mathcal{M}_3 \cap \{U = 0\}.$$

Почти все точки этих подмножеств имеют ранг 2, но при этом, как показано в [14], все они, включая и точки конечного числа попадающих сюда периодических решений, состоящих из точек ранга 1, являются вырожденными критическими точками отображения момента \mathcal{F} .

По определению $Q_i \subset \mathcal{M}_i$, но вдобавок $Q_1 \subset \mathcal{M}_2$ и $Q_2 \subset \mathcal{M}_3$, причём ограничение симплектической структуры на \mathcal{M}_2 не вырождается в точках Q_1 , а ограничение симплектической структуры на \mathcal{M}_3 не вырождается в точках Q_2 . В соответствии с замечанием 1 обозначим образы множеств Q_1, Q_2, Q_3 под действием полного отображения момента \mathcal{F} и частных отображений \mathcal{F}_i через $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ соответственно.

Классифицируем критические точки по их рангу и принадлежности к критическим подсистемам.

Критических точек ранга 0 в рассматриваемой системе ровно четыре [52]. В них, очевидно, $\alpha_1 = \pm a, \beta_2 = \pm b$, остальные компоненты α и β , как и вектор ω , равны нулю. Обозначим эти точки в порядке возрастания значений H через p_0, p_1, p_2, p_3 . Ни одна из них не лежит в \mathcal{M}_1 , и все они лежат в $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3 \cap \mathcal{M}_4$. Индекс $i = 0, \dots, 3$ равен индексу Морса функции H в этих точках [52]. Образы точек p_i под действием отображений момента обозначим через P_i . Их координаты легко вычисляются из (2.3), (2.4). Для дальнейшего нам важны лишь h -координаты, равные $\mp a \mp b$.

Все критические точки ранга 1 организованы в девять семейств периодических решений, обозначаемых \mathcal{D}_i ($i = 1, 2, 3$) и \mathcal{L}_j ($j = 1, \dots, 6$).

Семейства $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ впервые описаны в [63] как множества критических траекторий пары интегралов H, F на \mathcal{M}_1 . Явные алгебраические выражения фазовых переменных через одну вспомогательную, связанную с временем t эллиптической квадратурой, приведены в [35], где, в частности, доказано, что объединение этих семейств совпадает с пересечением подсистем \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_3 . Там же даны параметрические выражения для значений первых интегралов (общих и частных) на этих семействах, в которых в качестве параметра используется постоянная интеграла S . Обозначая одномерные образы семейств \mathcal{D}_i через δ_i ($i = 1, 2, 3$), получаем уравнения

$$\begin{aligned}
\delta_1: & \begin{cases} h = 2s - \frac{1}{s}\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}, \\ f^2 = -\frac{2}{s}\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}\left(\sqrt{a^2 - s^2} + \sqrt{b^2 - s^2}\right)^2, \\ g = \frac{1}{s}\left(s^4 - s^2\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} + a^2b^2\right), \quad s \in [-b, 0); \end{cases} \\
\delta_2: & \begin{cases} h = 2s + \frac{1}{s}\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}, \\ f^2 = \frac{2}{s}\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}\left(\sqrt{a^2 - s^2} - \sqrt{b^2 - s^2}\right)^2, \\ g = \frac{1}{s}\left(s^4 + s^2\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} + a^2b^2\right), \quad s \in (0, b]; \end{cases} \quad (3.4) \\
\delta_3: & \begin{cases} h = 2s - \frac{1}{s}\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}, \\ f^2 = \frac{2}{s}\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}\left(\sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2}\right)^2, \\ g = \frac{1}{s}\left(s^4 - s^2\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} + a^2b^2\right), \quad s \in [a, +\infty). \end{cases}
\end{aligned}$$

При этом следует учесть, что $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{M}_1$, поэтому здесь $k = 0$.

Точки (3.4) с граничными значениями s ($s = -b, b, a$) обозначим через e_i ($i = 1, 2, 3$ соответственно). На плоскости $\mathbb{R}^2(f^2, h)$ кривые δ_i имеют концевые точки e_i на оси $f^2 = 0$, кривая δ_3 имеет точку возврата, обозначаемую далее через e_4 и отвечающую значению s_0 — единственному корню уравнения

$$3s^8 - 4p^2s^6 + 6a^2b^2s^4 - a^4b^4 = 0 \quad (3.5)$$

на полупрямой $s > a$. На плоскости $\mathbb{R}^2(s, h)$ все три кривые δ_i не имеют особых точек (кроме концевых), а значению s_0 отвечает минимум h на δ_3 .

Семейства \mathcal{L}_j представляют собой маятниковые движения (колебания или вращения) около главных осей инерции тела и в фазовом пространстве имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{1,2} &= \{\alpha \equiv \pm a\mathbf{m}_1, \beta = b(\mathbf{m}_2 \cos \theta - \mathbf{m}_3 \sin \theta), \omega = \theta \cdot \mathbf{m}_1, 2\theta'' = -b \sin \theta\}, \\
\mathcal{L}_{3,4} &= \{\alpha = a(\mathbf{m}_1 \cos \theta + \mathbf{m}_3 \sin \theta), \beta \equiv \pm b\mathbf{m}_2, \omega = \theta \cdot \mathbf{m}_2, 2\theta'' = -a \sin \theta\}, \\
\mathcal{L}_{5,6} &= \{\alpha = a(\mathbf{m}_1 \cos \theta - \mathbf{m}_2 \sin \theta), \beta = \pm b(\mathbf{m}_1 \sin \theta + \mathbf{m}_2 \cos \theta), \omega = \theta \cdot \mathbf{m}_3, \\
&\quad \theta'' = -(a \pm b) \sin \theta\}.
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2\mathbf{m}_3$ — канонический базис в \mathbb{R}^3 . Семейству с первым номером соответствует верхний знак. Бифуркациям в семействах отвечают значения h в неподвижных точках p_i ($i = 0, \dots, 3$), а именно $h = \mp a \mp b$. Считаем, что многообразия \mathcal{L}_i включают и такие особые траектории, т. е. в действительности являются замыканиями семейств периодических траекторий. Непосредственно проверяется, что бифуркации внутри семейств (возникновение колебательных движений и перестройка колебательных движений во вращательные) происходят в соответствии со следующей принадлежностью: $p_0 \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_3 \cap \mathcal{L}_5$,

$p_1 \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_4 \cap \mathcal{L}_6$, $p_2 \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_3 \cap \mathcal{L}_6$, $p_3 \in \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_4 \cap \mathcal{L}_5$. В частности, наименьшие значения H на \mathcal{L}_i таковы: $-a - b$ на \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_3 и \mathcal{L}_5 ; $a - b$ на \mathcal{L}_2 ; $-a + b$ на \mathcal{L}_4 и \mathcal{L}_6 .

Как уже отмечалось, все точки траекторий, попадающих на множества точек вырождения форм, индуцированных симплектической структурой на многообразиях критических подсистем, независимо от ранга являются вырожденными критическими точками отображения момента \mathcal{F} . Формальное доказательство имеется в [14]. Среди точек ранга 0 таких нет. Перечислим вырожденные периодические траектории.

Пусть $\tau_i = \mathcal{D}_i \cap Q_1$. Известно [63], что τ_1, τ_2 состоят из одной траектории, а τ_3 из двух. Эти пересечения имеют своими образами введённые выше точки e_i ($i = 1, 2, 3$), так что $e_i = \Delta_1 \cap \delta_i$. В образе отображения \mathcal{F}_2 они лежат на оси $m = 0$. Эти же траектории являются пересечениями $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{M}_2$ и в совокупности исчерпывают пересечение Q_1 с \mathcal{M}_3 . С множеством Q_2 семейства \mathcal{D}_i не пересекаются. Пересечение с Q_3 имеется лишь у \mathcal{D}_3 по паре траекторий τ_4 , отвечающих введённому выше значению s_0 — корню уравнения (3.5).

Пересечения Q_i с \mathcal{L}_j таковы:

- Q_1 пересекается с $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_2$ по уже указанным траекториям τ_1, τ_2, τ_3 и не имеет других пересечений с \mathcal{L}_j ;
- Q_2 пересекается с \mathcal{L}_4 по паре вращательных траекторий τ_5 с $h = (a^2 + 3b^2)/(2b)$, с \mathcal{L}_2 по паре вращательных траекторий τ_6 с $h = (3a^2 + b^2)/(2a)$ и не имеет других пересечений с \mathcal{L}_j ;
- траектории τ_5, τ_6 служат также пересечениями Q_3 с \mathcal{L}_4 и \mathcal{L}_2 соответственно, и в дополнение Q_3 пересекается с \mathcal{L}_5 по одной колебательной траектории τ_7 ($h = -2\sqrt{ab}$) и паре вращательных траекторий τ_8 ($h = 2\sqrt{ab}$).

Для понимания общей картины расположения семейств \mathcal{L}_i относительно критических подсистем полезны также следующие факты.

Предложение 1.

1. Подсистема \mathcal{M}_1 не пересекается с семействами $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_5, \mathcal{L}_6$ и содержит траектории τ_1, τ_2, τ_3 семейств $\mathcal{L}_3, \mathcal{L}_4, \mathcal{L}_2$. Эти траектории лежат и в Q_1 , являясь его пересечениями с семействами $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$.
2. Семейства $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_4$ целиком лежат в пересечении $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{M}_3$.
3. Семейство \mathcal{L}_5 пересекается с подсистемой \mathcal{M}_2 по бифуркационным траекториям уровней $h = \pm(a + b)$, траектории семейства \mathcal{L}_5 лежат в \mathcal{M}_3 для всех значений $h \notin (-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab})$. Граничным значениям отвечают траектории τ_7, τ_8 .
4. Семейство \mathcal{L}_6 пересекается с подсистемой \mathcal{M}_2 по бифуркационным траекториям уровней $h = \pm(a - b)$ и целиком лежит в \mathcal{M}_3 .
5. Подсистема \mathcal{M}_4 есть объединение семейств \mathcal{L}_5 и \mathcal{L}_6 , при этом часть \mathcal{M}_4 , не принадлежащая другим подсистемам, состоит из траекторий \mathcal{L}_5 со значениями $h \in (-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab})$.

Образы семейств \mathcal{L}_i под действием отображений момента обозначим через λ_i ($i = 1, \dots, 6$). Это одномерные объекты. Точки, служащие образами особых траекторий τ_i , обозначим через e_i ($i = 1, \dots, 8$).

Приведём теперь информацию по образам перечисленных выше особых точек и подмножеств фазового пространства.

Таблица 1 содержит значения всех первых интегралов в точках траекторий τ_i , т. е. координаты точек e_i во всех пространствах-образах отображений момента. Здесь для точки e_4 координаты h , g и f вычисляются по формулам (3.4) для δ_3 с определённым выше значением s_0 .

Таблица 1

	h	k	g	f	m	s
e_1	$-2b$	0	$-bp^2$	0	0	$-b$
e_2	$2b$	0	bp^2	0	0	b
e_3	$2a$	0	ap^2	0	0	a
e_4	$h(s_0)$	0	$g(s_0)$	$f(s_0)$	—	s_0
e_5	$\frac{a^2 + 3b^2}{2b}$	$\frac{r^4}{4b^2}$	$\frac{p^4 - b^2r^2}{2b}$	—	$-\frac{1}{2b}$	b
e_6	$\frac{3a^2 + b^2}{2a}$	$\frac{r^4}{4a^2}$	$\frac{p^4 + a^2r^2}{2a}$	—	$-\frac{1}{2a}$	a
e_7	$-2\sqrt{ab}$	$(a - b)^2$	$-2(ab)^{3/2}$	—	—	$-\sqrt{ab}$
e_8	$2\sqrt{ab}$	$(a - b)^2$	$2(ab)^{3/2}$	—	—	\sqrt{ab}
e_9	$p\sqrt{2}$	$\frac{r^4}{2p^2}$	$\frac{2p^4 + r^4}{2p\sqrt{2}}$	—	$-\frac{1}{p\sqrt{2}}$	$\frac{p}{\sqrt{2}}$

Замечание 2. В табл. 1 добавлена новая точка e_9 . Она отвечает наименьшему значению энергии H на множестве вырожденных критических точек Q_2 . В отличие от множеств Q_1 и Q_3 , где все экстремальные значения энергии отвечают случаям возникновения вырожденных периодических решений, т. е. бифуркациям вырожденных двумерных торов, на множестве Q_2 наименьшее значение H достигается при отсутствии каких-либо дополнительных бифуркаций вырожденных критических точек ранга 2. Однако это значение энергии окажется существенным при классификации изоэнергетических инвариантов.

Образы множеств Q_i вырожденных точек ранга 1 и 2 под действием \mathcal{F} имеют вид

$$\Delta_1: \begin{cases} k = 0, \\ 2g = p^2h, \end{cases} \quad h \geq -2b;$$

$$\Delta_2: \begin{cases} k = \frac{1}{r^4}(2g - p^2h)^2, \\ g = g_{\pm}(h) = \frac{1}{4p^2}[(2p^4 - r^4)h \pm r^4\sqrt{h^2 - 2p^2}], \end{cases} \quad h \geq \sqrt{2p^2};$$

$$\Delta_3: \begin{cases} h = \frac{a^2b^2 + 3s^4}{2s^3}, \\ k = -\frac{3s^2}{4} + a^2 + b^2 - \frac{3a^2b^2}{2s^2} + \frac{a^4b^4}{4s^6}, \\ g = \frac{3a^2b^2 + s^4}{2s}, \end{cases} \quad 0 < s \leq s_0.$$

Вид множеств Δ_i в плоскостях — образах частных отображений момента дан в табл. 2.

Таблица 2

	Вид в $\mathbb{R}^2(f^2, h)$	Вид в $\mathbb{R}^2(m, h)$	Вид в $\mathbb{R}^2(s, h)$
Δ_1	$f = 0, h \geq -2b$	$m = 0, h \geq -2b$	$e_1(-b, -2b), e_2(b, 2b), e_3(a, 2a)$
Δ_2	—	$2p^2m^2 + 2hm + 1 = 0, m < 0$	$2s^2 - 2hs + p^2 = 0, s > 0$
Δ_3	—	—	$3s^4 - 2hs^3 + a^2b^2 = 0, s \in (0, s_0]$

Семействам \mathcal{L}_j отвечают значения первых интегралов, заполняющие кривые λ_j . В $\mathbb{R}^3(h, k, g)$ их уравнения следующие:

$$\lambda_{1,2} = \{g = a^2h \pm ar^2, k = (h \pm 2a)^2, h \geq \mp(a \pm b)\},$$

$$\lambda_{3,4} = \{g = b^2h \mp br^2, k = (h \pm 2b)^2, h \geq -(a \pm b)\},$$

$$\lambda_{5,6} = \{g = \pm abh, k = (a \mp b)^2, h \geq -(a \pm b)\}.$$

На плоскости $\mathbb{R}^2(m, h)$ образы $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_4$ под действием \mathcal{F}_2 — это лучи

$$\lambda_{1,2} = \{h = r^2m \mp 2a, h \geq \mp(a \pm b)\}, \quad \lambda_{3,4} = \{h = -r^2m \mp 2b, h \geq -(a \pm b)\},$$

а на плоскости $\mathbb{R}^2(s, h)$ под действием \mathcal{F}_3 образы всех шести семейств имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \{s = \mp a, h \geq \mp(a \pm b)\},$$

$$\lambda_{3,4} = \{s = \mp b, h \geq -(a \pm b)\},$$

$$\lambda_5 = \left\{ h = s + \frac{ab}{s}, s \in [-a, -b] \cup (0, +\infty) \right\},$$

$$\lambda_6 = \left\{ h = s - \frac{ab}{s}, s \in [-a, 0) \cup [b, +\infty) \right\},$$

Во всех этих формулах верхнему знаку отвечает множество с первым индексом.

Собирая все перечисленные образы особых множеств на плоскостях — образах частных отображений момента $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$, получаем бифуркационные диаграммы $\Sigma_1^*, \Sigma_2^*, \Sigma_3^*$ подсистем $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ и \mathcal{M}_3 . Они изображены на рис. 1–3. Прокомментируем эти рисунки.

1. Типичный прообраз точек кривых Δ_1 и Δ_2 в критическом множестве, как отмечалось, состоит из вырожденных критических точек ранга 2, которые внутри критических подсистем с двумя степенями свободы могут и не быть бифуркационными. Однако при таком выборе частных интегралов Δ_1 и Δ_2 являются внешними границами областей существования движений для подсистем \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 , поэтому обязательно входят в бифуркационную диаграмму. Явления, происходящие в окрестности прообразов этих кривых внутри подсистем \mathcal{M}_1 и \mathcal{M}_2 , подробно изучены в [8, 50]. В третьей подсистеме \mathcal{M}_3 кривые Δ_2, Δ_3 бифуркаций, внутренних по

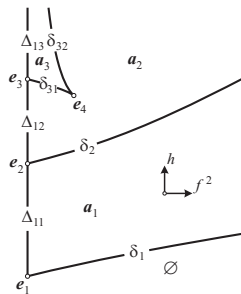


Рис. 1. Диаграмма подсистемы \mathcal{M}_1 на плоскости (f^2, h)

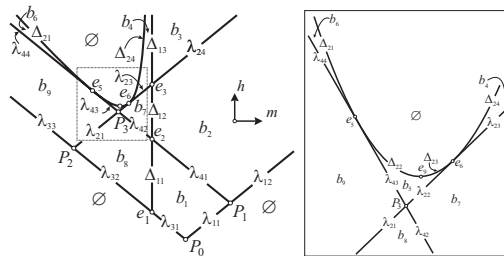


Рис. 2. Диаграмма подсистемы \mathcal{M}_2 на плоскости (m, h) и её фрагмент

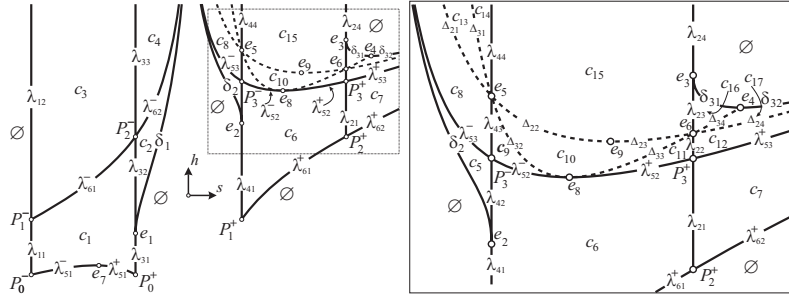


Рис. 3. Диаграмма подсистемы M_3 на плоскости (s, h) и её фрагмент

отношению к M_3 , не вызывают. Но, являясь образами вырожденных точек полного отображения момента, они разделяют точки подсистемы M_3 с различным внешним типом. Поэтому на рис. 3 эти множества также изображены (пунктиром).

2. Диаграммами Σ_i^* ($i = 1, 2, 3$) точки подсистем M_1, M_2 и M_3 ранга 2 (т. е. регулярные точки по отношению к этим подсистемам) разделены также на определённые классы (для M_3 к разделяющему множеству мы также добавляем кривые Δ_2, Δ_3). Эти классы (точнее, подобласти с непустыми интегральными многообразиями, возникающие в образе частных отображений момента) обозначены для первых трёх подсистем символами a, b, c с соответствующими индексами. Связные компоненты дополнения бифуркационных диаграмм принято называть *камерами* [5]. Здесь для разбиения на камеры мы также учитываем образы 2-торов, вырожденных в \mathcal{P}^6 .
3. Диаграмма Σ_4^* состоит из изолированных значений энергии, разделяющих разные типы периодических решений. Это значения $h = \pm a \pm b$ в точках ранга 0 и $h = \pm 2\sqrt{ab}$, разделяющие движения семейства \mathcal{L}_5 на принадлежащие подсистеме M_3 и изолированные от предыдущих критических подсистем. Для последнего семейства участок образа, отвечающий значениям $h \in (-2\sqrt{ab}, 2\sqrt{ab})$, не попавший на рисунки, обозначен через λ_{50} .

Замечание 3. Кривые Δ_i, λ_j разделены на различные участки узловыми точками e_1, \dots, e_9 . Аналогичное деление осуществляет на кривой δ_3 точка e_4 . Такие участки снабжаются вторым индексом после номера кривой.

Пользуясь полученной информацией, дадим явное описание бифуркационной диаграммы Σ отображения \mathcal{F} . Введём некоторые обозначения.

На кривых (3.4) определим обращения зависимостей $h(s)$ на монотонных участках

$$\begin{aligned} \delta_1: s &= s_1(h), \quad h \in [-2b, +\infty), \quad s_1(h) \in [-b, 0), \\ \delta_2: s &= s_2(h), \quad h \geq 2b, \quad s_2(h) \in (0, b], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_{31}: s &= s_{31}(h), \quad h \in [h_0, 2a], \quad s \in [a, s_0], \\ \delta_{32}: s &= s_{32}(h), \quad h \in [h_0, +\infty), \quad s \in [s_0 + \infty).\end{aligned}$$

Здесь h_0 — значение $h(s_0)$ на кривой δ_3 . Уравнение (3.5) для вычисления значения s_0 теперь получим, записывая условие минимума h на кривой δ_3 в виде

$$\frac{1}{s} \sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} = \sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2}. \quad (3.6)$$

Единственность решения при $s > a$ очевидна.

Из соотношений (3.1) для Π_1 найдём зависимость на δ_1 :

$$g = g_1(h) = s^3 + \frac{ab}{s} - s^2 \phi(s)|_{s=s_1(h)}, \quad h \geq -2b.$$

Рассматривая интервалы монотонности $h(s)$ на кривых $\lambda_5 - \lambda_6$, обозначаем

$$s_{51}(h) = \frac{h - \sqrt{h^2 - 4ab}}{2}, \quad s_{52}(h) = \frac{h + \sqrt{h^2 - 4ab}}{2}, \quad s_6(h) = \frac{h + \sqrt{h^2 + 4ab}}{2}.$$

Теперь бифуркационная диаграмма полностью описывается следующей теоремой [34], которая сформулирована так, чтобы все условия давали явные неравенства на параметры поверхностей при фиксированном значении энергии h .

Теорема 2.

1. Множество $\Sigma_1 = \Pi_1 \cap \Sigma$ имеет вид

$$\begin{cases} h \geq -2b, \\ k = 0, \quad g_1(h) \leq g \leq \frac{1}{2}p^2h. \end{cases}$$

2. Множество $\Sigma_2 = \Pi_2 \cap \Sigma$ лежит в полупространстве $h \geq -(a+b)$ и описывается следующей совокупностью систем неравенств:

$$\begin{cases} -(a+b) \leq h \leq p\sqrt{2}, & \begin{cases} h \geq p\sqrt{2}, \\ b^2h - br^2 \leq g \leq g_-(h); \end{cases} \\ b^2h - br^2 \leq g \leq a^2h + ar^2; & \end{cases} \\ \begin{cases} h \geq p\sqrt{2}, \\ g_+(h) \leq g \leq a^2h + ar^2. \end{cases} \end{cases}$$

3. Множество $\Sigma_3 = \Pi_3 \cap \Sigma$ полностью описывается следующей совокупностью условий на плоскости (s, h) . Для отрицательных значений s

$$\begin{cases} -(a+b) \leq h \leq -2\sqrt{ab}, & \begin{cases} -2\sqrt{ab} \leq h \leq -2b, \\ s \in [-a, s_{51}(h)] \cup [s_{52}(h), -b]; \end{cases} \\ s \in [-a, s_{51}(h)] \cup [s_{52}(h), -b]; & \begin{cases} s \in [-a, -b]; \\ h > -2b, \\ s \in [-a, s_1(h)]. \end{cases} \end{cases}$$

Для положительных значений s

$$\begin{cases} -a + b \leq h \leq 2b, \\ s \in [b, s_6(h)]; \end{cases} \quad \begin{cases} 2b \leq h \leq h_0, \\ s \in [s_2(h), s_6(h)]; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_0 \leq h \leq 2a, \\ s \in [s_2(h), s_{31}(h)] \cup [s_{32}(h), s_6(h)]; \end{cases} \quad \begin{cases} h > 2a, \\ s \in [s_2(h), a] \cup [s_{32}(h), s_6(h)]. \end{cases}$$

4. Множество $\Sigma_4 = \Pi_4 \cap \Sigma$ состоит из двух лучей

$$\begin{cases} h \geq -(a + b), \\ g = abh, \quad k = (a - b)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} h \geq -a + b, \\ g = -abh, \quad k = (a + b)^2. \end{cases}$$

Замечание 4. Эта теорема даёт возможность изобразить во всех деталях любое сечение диаграммы Σ плоскостями фиксированного h и отследить с помощью компьютерной графики эволюцию этих сечений с изменением энергии. Граничные значения в условиях на величину h служат разделяющими значениями энергии. В частности, из условий для Σ_2 становится ясна необходимость введения точки e_4 как точки экстремума h на Δ_2 (см. замечание 2). Однако граничные значения h не обязательно исчерпывают всё разделяющее множество. Более точное утверждение приведено ниже.

4. Классификация критических точек по типам

Необходимые определения, связанные с понятием невырожденности критических точек и их типов, даны в [5]. Сделаем одно замечание, касающееся используемой здесь терминологии.

В топологическом анализе систем с двумя степенями свободы в [5] используются термин «3-атом» для описания бифуркации в окрестности невырожденной точки ранга 1 (связная компонента прообраза малого отрезка, трансверсального гладкому сегменту бифуркационной диаграммы, расслоённая на 2-торы Лиувилля с одним особым слоем) и «4-атом» для описания насыщенной окрестности невырожденной точки ранга 0 (как правило, в виде почти прямого произведения атомов систем с одной степенью свободы).

Замечание 5. Имея дело с системой с тремя степенями свободы, мы закрепим термин «3-атом» для характеристики бифуркации в окрестности точки ранга 1 *внутри* соответствующей критической подсистемы с двумя степенями свободы, а «4-атом» будет всегда означать бифуркацию в полном шестимерном фазовом пространстве в окрестности невырожденной точки ранга 2.

Таким образом, 4-атом определяется как расслоённая на 3-торы Лиувилля с одним особым слоем связная компонента прообраза малого отрезка, трансверсального гладкому двумерному листу бифуркационной диаграммы отображения момента $\mathcal{F}: \mathcal{P}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$. При изучении изоэнергетических диаграмм удобно считать такой малый отрезок лежащим на фиксированном уровне энергии, так

как в соответствующей невырожденной точке ранга 2 гамильтониан заведомо регулярен.

В четырёх точках ранга 0 (неподвижных точках системы) гамильтониан H есть функция Морса и, как отмечалось, $\text{ind } H(p_i) = i$. Это в значительной мере определяет характер поведения системы в окрестности этих точек. Однако строгая классификация требует указания их типа как критических точек отображения момента.

Теорема 3. Все критические точки ранга 0 невырождены в \mathcal{P}^6 . При этом p_0 имеет тип «центр-центр-центр», p_1 имеет тип «центр-центр-седло», p_2 имеет тип «центр-седло-седло», а p_3 имеет тип «седло-седло-седло».

Для доказательства в [14] явно вычислены характеристические многочлены симплектического оператора A_H в точках p_i .

Заметим, что в точках p_i встречаются три локальных критических подсистемы: подсистема \mathcal{M}_2 и две части подсистемы \mathcal{M}_3 , которая имеет в этих точках особенность типа самопересечения. В частности, на плоскости (s, h) каждая такая точка изображается двумя. В этом смысле каждая точка пары P_i^\pm диаграммы Σ_3^* имеет свой тип (тип точки p_i по отношению к некоторому выбранному гладкому участку \mathcal{M}_3 в её окрестности). Соответствующее описание критических точек ранга 0 в критических подсистемах \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 сведено в табл. 3.

Таблица 3

\mathcal{K}^0	Образ в $\mathbb{R}^3(h, k, g)$	Тип в \mathcal{M}_2	Образ в $\mathbb{R}^2(s, h)$	Тип в \mathcal{M}_3
p_0	P_0	центр-центр	P_0^- P_0^+	центр-центр центр-центр
p_1	P_1	центр-седло	P_1^- P_1^+	центр-седло центр-центр
p_2	P_2	центр-седло	P_2^- P_2^+	седло-седло центр-седло
p_3	P_3	седло-седло	P_3^- P_3^+	седло-седло седло-седло

Обратимся к точкам ранга 1, организованным в особые периодические траектории.

Теорема 4. Точки ранга 1, образующие семейства траекторий \mathcal{L}_i и \mathcal{D}_j ($i = 1, \dots, 6$, $j = 1, 2, 3$), невырождены как особенности отображения \mathcal{F} , за

исключением следующих значений энергии:

$$\begin{aligned}
 \text{на } \mathcal{D}_1: h &= -2b; & \text{на } \mathcal{L}_2: h &= 2a, h = \frac{3a^2 + b^2}{2a}; \\
 \text{на } \mathcal{D}_2: h &= 2b; & \text{на } \mathcal{L}_3: h &= -2b; \\
 \text{на } \mathcal{D}_3: h &= 2a, h = h(s_0); & \text{на } \mathcal{L}_4: h &= 2b, h = \frac{a^2 + 3b^2}{2b}; \\
 & & \text{на } \mathcal{L}_5: h &= \pm 2\sqrt{ab}.
 \end{aligned}$$

В зависимости от семейства и значения энергии тип невырожденных особенностей в \mathcal{P}^6 и 3-атомы в критических подсистемах определяются по табл. 4.

Таблица 4

\mathcal{K}^1	Образ или сегмент в образе	Кол-во траекторий	Тип в \mathcal{P}^6	3-атом в \mathcal{M}_1	3-атом в \mathcal{M}_2	3-атом в \mathcal{M}_3
\mathcal{L}_1	$\lambda_{11}: -(a+b) < h < -(a-b)$	1	центр-центр		A	A
	$\lambda_{12}: h > -(a-b)$	2	центр-центр		$2A$	$2A$
\mathcal{L}_2	$\lambda_{21}: a-b < h < a+b$	1	седло-седло		B	B
	$\lambda_{22}: a+b < h < \frac{3a^2+b^2}{2a}$	2	седло-седло		$2B$	$2B$
	$\lambda_{23}: \frac{3a^2+b^2}{2a} < h < 2a$	2	седло-седло		$2B$	$2B$
	$\lambda_{24}: h > 2a$	2	седло-центр		$2B$	$2A$
\mathcal{L}_3	$\lambda_{31}: -(a+b) < h < -2b$	1	центр-центр		A	A
	$\lambda_{32}: -2b < h < a-b$	1	центр-седло		A	B
	$\lambda_{33}: h > a-b$	2	центр-седло		$2A$	C_2
\mathcal{L}_4	$\lambda_{41}: -(a-b) < h < 2b$	1	седло-центр		B	A
	$\lambda_{42}: 2b < h < a+b$	1	седло-седло		B	B
	$\lambda_{43}: a+b < h < \frac{a^2+3b^2}{2b}$	2	седло-седло		$2B$	C_2
	$\lambda_{44}: h > \frac{a^2+3b^2}{2b}$	2	седло-седло		$2B$	C_2
\mathcal{L}_5	$\lambda_{50}: -2\sqrt{ab} < h < 2\sqrt{ab}$	1	фокус-фокус			
	$\lambda_{51}: -(a+b) < h < -2\sqrt{ab}$	1	центр-центр			A, A
	$\lambda_{52}: 2\sqrt{ab} < h < a+b$	1	седло-седло			B, B
	$\lambda_{53}: h > a+b$	2	седло-седло			$2A^*, 2B$
\mathcal{L}_6	$\lambda_{61}: -(a-b) < h < a-b$	1	седло-центр			B, A
	$\lambda_{62}: h > a-b$	2	седло-центр			$2A^*, 2A$
\mathcal{D}_1	$\delta_1: s \in (-b, 0)$	2	центр-центр	$2A$		$2A$
\mathcal{D}_2	$\delta_2: s \in (0, b)$	2	седло-центр	$2B$		$2A$
\mathcal{D}_3	$\delta_{31}: s \in (a, s_0)$	4	седло-центр	$4B$		$4A$
	$\delta_{32}: s \in (s_0, +\infty)$	4	центр-центр	$4A$		$4A$

Заметим, что перечисленным случаям вырождения отвечают точки $e_1—e_8$ на бифуркационных диаграммах.

Поясним порядок слов, характеризующих тип точки относительно \mathcal{P}^6 в табл. 4. Для семейств \mathcal{L}_j с $j = 1, \dots, 4$ первый тип — это тип точки ранга 1 в подсистеме \mathcal{M}_2 , второй тип — это тип этой точки в подсистеме \mathcal{M}_3 ; для семейств \mathcal{D}_i с $i = 1, 2, 3$ первый тип — это тип точки ранга 1 в подсистеме \mathcal{M}_1 , второй тип — это тип этой точки в подсистеме \mathcal{M}_3 . Семейства $\mathcal{L}_5, \mathcal{L}_6$ (кроме прообраза фокусного сегмента λ_{50} , который является изолированным в пространстве констант первых интегралов, и его граничных точек, для которых соответствующие критические точки ранга 1 вырождены) являются множеством трансверсального самопересечения фазового пространства подсистемы \mathcal{M}_3 . Поэтому каждой такой траектории отвечают два значения s и две точки λ_{ij}^\pm ($i = 5, 6$) в диаграмме подсистемы \mathcal{M}_3 (см. рис. 3). Знак «минус» отвечает меньшему значению s . Поэтому в табл. 4 для этих семейств первый тип — это тип точки ранга 1 в части подсистемы \mathcal{M}_3 с меньшими s , второй тип — это тип этой точки в части подсистемы \mathcal{M}_3 с большими s .

Для доказательства теоремы в [14] явно предъявлены пары интегралов, порождающие картанову подалгебру размерности 2 в алгебре симплектических операторов, и следующие интегралы, порождающие регулярные элементы этих подалгебр:

$$\begin{aligned} \text{на } \mathcal{L}_{1,2}: \quad & \varphi_{1,2} = K - 2(h \pm 2a)H, \\ \text{на } \mathcal{L}_{3,4}: \quad & \varphi_{3,4} = K - 2(h \pm 2b)H, \\ \text{на } \mathcal{L}_{5,6}: \quad & \varphi_{5,6} = \pm abH - G, \\ \text{на } \mathcal{D}_i: \quad & \psi_i = 2G - (p^2 - \varkappa_i)H \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= (\sqrt{a^2 - s^2} + \sqrt{b^2 - s^2})^2, \quad s \in [-b, 0); \\ \varkappa_2 &= (\sqrt{a^2 - s^2} - \sqrt{b^2 - s^2})^2, \quad s \in (0, b]; \\ \varkappa_3 &= -(\sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2})^2, \quad s \in [a, +\infty). \end{aligned}$$

Атомы бифуркаций, происходящих внутри критических подсистем $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ на периодических траекториях, состоящих из критических точек ранга 1, установлены в результате топологического анализа этих подсистем (см. [38, 48, 63]).

Рассмотрим множество \mathcal{K}^2 критических точек ранга 2. Это объединение трёх систем $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ и \mathcal{M}_3 за вычетом уже исследованных точек множества $\mathcal{K}^0 \cup \mathcal{K}^1$. По соображениям размерности тип невырожденной особенности ранга 2 может быть либо эллиптическим («центр»), либо гиперболическим («седло»). Поскольку свойство невырожденности может быть присуще лишь всему тору Лиувилля целиком, и тогда все точки тора имеют один и тот же тип, говорим об эллиптических или гиперболических торах.

Отметим сразу, что каждый интегральный 2-тор, регулярный в системе \mathcal{M}_1 и невырожденный в \mathcal{P}^6 , является эллиптическим. Это вытекает из того, что интеграл $K = Z_1^2 + Z_2^2$ есть неотрицательная всюду функция, обращающаяся в ноль только на \mathcal{M}_1 .

Теорема 5. *Все критические точки ранга 2 на многообразии \mathcal{M}_1 , за исключением точек нулевого уровня интеграла F , являются невырожденными эллиптического типа.*

Доказательство. На \mathcal{M}_1 нет точек зависимости интегралов H и G , кроме множеств $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_3$ [46] (отметим, что зависимость ограничений $H|_{\mathcal{M}_1}$ и $F|_{\mathcal{M}_1}$, или, что то же самое, ограничений $H|_{\mathcal{M}_1}$ и $G|_{\mathcal{M}_1}$, исследована в [8, 63]). В то же время всюду на \mathcal{M}_1 имеем $dK = 0$. Характеристическое уравнение оператора A_K в \mathbb{R}^9 легко выписывается с учётом уравнений многообразия \mathcal{M}_1 , имеет семь нулевых корней, а оставшийся сомножитель $\mu^2 + 4f^2$ имеет два различных мнимых корня при $f \neq 0$, что и доказывает теорему. \square

В образе отображения момента значения $F = 0$ дают множество $\Delta_1 \subset \mathbb{R}^3(h, k, g)$, для которого тем самым получено обоснование вырожденности соответствующих критических точек.

На многообразии \mathcal{M}_2 система (2.1) имеет явное алгебраическое решение [38], а именно все фазовые переменные представлены в виде рациональных функций от двух вспомогательных переменных s_1, s_2 и некоторых радикалов вида $\sqrt{s_i - c_j}$, где c_j — константы, выраженные через постоянные интегралов H, M . В переменных s_1, s_2 уравнения движения разделяются и сводятся к эллиптическим квадратурам. Соответствующие формулы можно найти в [14].

Теорема 6. *Все критические точки ранга 2 на многообразии \mathcal{M}_2 , за исключением точек, лежащих в прообразе кривых Δ_1, Δ_2 , невырожденны. При этом они имеют эллиптический тип для $m > 0$ и гиперболический тип для $m < 0$.*

Доказательство. В качестве единственного интеграла вида (2.5), имеющего особенность в каждой точке $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{K}^2$, благодаря достаточно простым уравнениям (3.1) листа Π_2 удобно взять функцию

$$\Phi = \phi_2(H, K, G) = (2G - p^2H)^2 - r^4K. \quad (4.1)$$

Для неё характеристическое уравнение оператора A_Φ после необходимой факторизации по нулевому корневому подпространству в подстановке явных зависимостей фазовых переменных от переменных разделения принимает вид

$$\mu^2 + 4r^{12}\ell^2m = 0 \quad (4.2)$$

и, за исключением случаев $m = 0$ (Δ_1) и $\ell = 0$ (Δ_2), имеет два различных корня, чисто мнимых при $m > 0$ и вещественных при $m < 0$. Здесь ℓ — константа частного интеграла L , определённого в (3.3). Теорема доказана. \square

Как показано в [38], \mathcal{M}_2 состоит из критических точек нулевого уровня функций $2G - p^2H \pm r^2\sqrt{K}$, одна из которых является суммой квадратов двух

гладких регулярных функций ($m > 0$), а другая — разностью квадратов ($m < 0$, $\ell \neq 0$). Отсюда следует эллиптичность двумерных торов в первом случае и гиперболичность во втором. Уравнение (4.2) строго доказывает невырожденность таких точек. Интересно отметить связь вырожденности критических точек с аналитическим решением. При $m = 0$ падает степень подкоренного выражения в разделённых дифференциальных уравнениях типа Абеля—Якоби. При $\ell = 0$ переменные s_1, s_2 входят в разделённые уравнения только в чётных степенях, в связи с чем возникает дополнительная симметрия. В целом \mathcal{M}_2 неориентируемо, и главную роль в этом играет окрестность множества $\ell = 0$ [50].

На многообразии \mathcal{M}_3 явное алгебраическое решение системы (2.1) указано в [47, 48]. Все фазовые переменные представлены в виде рациональных функций от двух вспомогательных переменных t_1, t_2 и некоторых радикалов вида $\sqrt{t_i - c_j}$, где c_j — константы, выраженные через постоянные интегралов H, S . В переменных t_1, t_2 уравнения движения разделяются и имеют вид уравнений Абеля—Якоби или уравнений Ковалевской с многочленом шестой степени под радикалом. Это разделение гиперэллиптическое. Соответствующие формулы также имеются в [14].

Теорема 7. Все регулярные двумерные торы подсистемы \mathcal{M}_3 состоят из невырожденных критических точек ранга 2 отображения момента \mathcal{F} , за исключением точек в прообразах множеств Δ_2, Δ_3 . Тор эллиптический, если значение

$$s(2s^2 - 2hs + a^2 + b^2)[s^4 + 2(s - h)s^3 + a^2b^2]$$

отрицательно, и гиперболический, если оно положительно.

Доказательство. В качестве интеграла, имеющего особенность на \mathcal{M}_3 , можно взять функцию вида (4.1), полученную, например, исключением s из уравнений (3.1) поверхности Π_3 . Однако результат слишком громоздкий, и такой подход нерационален. Здесь удобно рассмотреть функцию с неопределёнными множителями Лагранжа, которая была введена в [46] для вывода уравнений критических подсистем, $\Psi = 2G + 2s(s - h)H + sK$, где s и h рассматриваются как неопределённые множители. Как показано в [46], после записи условия наличия критической точки у функции Ψ константы s, h на \mathcal{M}_3 оказываются значениями интегралов S, H . Поэтому и при вычислении характеристического многочлена оператора A_Ψ считаем s и h константами, а лишь затем подставляем в найденное выражение зависимости фазовых переменных от переменных разделения. Получим характеристическое уравнение в виде

$$\mu^2 - \frac{2(2s^2 - 2hs + a^2 + b^2)}{s}[s^4 + 2(s - h)s^3 + a^2b^2] = 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы. \square

Подводя итог, обратимся к рис. 1—3, на которых образы критических точек ранга 2 заполняют области $a_1 - a_3, b_1 - b_9$ и $c_1 - c_{17}$. Для критических подсистем эти области являются и камерами, так как мы включаем в Σ_i^* также и образы

вырожденных 2-торов. В соответствии с теоремами 5–7 устанавливаем тип всех точек ранга 2.

Предложение 2. *Критические точки ранга 2 имеют эллиптический тип в прообразах областей a_1 – a_3 , b_1 – b_3 , c_1 – c_4 , c_{10} , c_{13} , c_{17} и гиперболический тип в прообразах остальных областей. При этом в прообразах с эллиптическими бифуркациями 4-атома таковы:*

- A для областей c_1 , b_1 ;*
- 2A для областей a_1 , b_2 , c_2 , c_3 , c_4 , c_{10} , c_{13} ;*
- 4A для областей b_4 , b_5 , b_6 , c_{12} , c_{16} ;*
- 8A для области a_3 .*

В прообразах сегментов Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 двумерные торы состоят из вырожденных точек ранга 2.

Информация по количеству критических 2-торов в прообразах всех указанных областей получена при грубом топологическом анализе критических подсистем в [8, 38, 48] и для экономии места указана в табл. 5 следующего раздела. Ясно, что эллиптические 4-атома этим полностью определены. Для гиперболических атомов необходимые уточнения будут приведены ниже.

Получена полная классификация критических точек отображения момента по их типам и 3-атомам, что завершает и описание грубой топологии критических подсистем.

5. Изоэнергетический атлас

Изоэнергетическая диаграмма $\mathcal{S}(h)$ — это бифуркационная диаграмма ограничения отображения момента \mathcal{F} на изоэнергетический уровень $H_h = \{H = h\} \subset \mathcal{P}^6$. Естественным образом используется отождествление этого ограничения с отображением в плоскость постоянных g, k :

$$\mathcal{F}|_{\{H=h\}} \cong (G \times K)|_{\{H=h\}}: H_h \rightarrow \mathbb{R}^2(g, k).$$

Для краткости последнее отображение обозначим через $\mathcal{F}(h)$.

Далее мы рассматриваем задачу классификации диаграмм $\mathcal{S}(h)$, оснащённых дополнительной информацией о топологическом устройстве прообраза — указанием количества семейств регулярных торов в дополнении к диаграмме и бифуркаций, происходящих при пересечении её одномерного остова. При этом сама диаграмма $\mathcal{S}(h)$ рассматривается как одномерное стратифицированное многообразие. Гладкие сегменты одномерного остова — это образы невырожденных критических точек ранга 2, а нульмерный остов есть образ всех критических точек ранга 1, а также вырожденных критических точек ранга 2. Здесь, естественно, речь идёт о точках фиксированного регулярного изоэнергетического уровня H_h . Имея всю полученную ранее и выявленную на этом этапе информацию, нетрудно снабдить и точки нульмерного остова описанием топологии

насыщенных окрестностей в прообразе. Ввиду недостатка места мы ограничимся в следующем разделе грубыми круговыми молекулами гиперболических особенностей ранга 0.

До настоящего времени, в силу того что теоретически диаграмма может быть устроена достаточно сложно, нет единого определения эквивалентных диаграмм. В нашем случае $\mathcal{S}(h)$ — плоское одномерное стратифицированное многообразие. Поэтому назовём две диаграммы эквивалентными, если существует диффеоморфизм некоторых их окрестностей в плоскости, сохраняющий как сами диаграммы, так и указанное выше оснащение.

Что значит указать бифуркацию? Пусть γ — гладкий сегмент одномерного остова $\mathcal{S}(h)$ и $z = (g, k) \in \gamma$. Проведём через z маленький одномерный отрезок ε , трансверсальный γ и не имеющий других общих точек с $\mathcal{S}(h)$, кроме z . Полный прообраз ε в фазовом пространстве есть четырёхмерное многообразие $\mathcal{F}^{-1}(\varepsilon) \subset H_h$, расслоённое на 3-торы Лиувилля с одним особым слоем на каждой связной компоненте. Множество критических точек на каждом таком особом слое состоит из конечного числа 2-торов, все точки которых — это точки ранга 2. Связную компоненту в $\mathcal{F}^{-1}(\varepsilon)$ назовём 4-атомом (см. замечание 5). Определённый набор 4-атомов получим, умножая стандартные 3-атомы на окружность. Для них очевидным образом сохраним общепринятые обозначения A, B, C_2, A^* и т. п. Таким образом, оснащённая диаграмма должна содержать на каждом гладком ребре обозначение соответствующего 4-атома. С другой стороны, гладкое ребро $\mathcal{S}(h)$ получается сечением на уровне h соответствующей камеры одной из критических подсистем, а 4-атом получается при рассмотрении бифуркации, получаемой при трансверсальном пересечении гладкого листа — образа критической подсистемы. Поэтому удобно на изоэнергетических диаграммах нанести на рёбра обозначения соответствующих камер критических подсистем, а затем на основе полученной выше информации и эволюции диаграмм $\mathcal{S}(h)$ указать все 4-атомы, отвечающие этим камерам.

Очевидно, что $\mathcal{S}(h)$ зависит не только от h , но также и от физических параметров a, b . Назовём тройку (a, b, h) разделяющей, если в любой её окрестности в \mathbb{R}^3 существуют тройки с неэквивалентными диаграммами. При этом, поскольку стратифицированное многообразие $\mathcal{S}(h)$ составлено из h -сечений $\Sigma_i(h)$ множеств Σ_i ($i = 1, \dots, 4$), перестройки $\mathcal{S}(h)$ происходят тогда и только тогда, когда перестраивается одно из стратифицированных многообразий $\Sigma_i(h)$. Как следует из теоремы 2 (см. замечание 4) сечения $\Sigma_i(h)$ перестраиваются при прохождении через граничные значения, фигурирующие в условиях на h в этой теореме, что даёт восемь разделяющих значений h (в зависимости от a, b), то есть восемь разделяющих поверхностей в $\mathbb{R}^3(a, b, h)$. В целом же разделяющие значения h являются критическими значениями величины h , рассматриваемой как функция на стратифицированных многообразиях Σ_i ($i = 1, \dots, 4$) [36, 49]. Как легко вывести из приведённых выше рисунков 1–3, критические значения h на Σ_i — это h -координаты точек P_0 – P_3 и e_1 – e_9 . Обращаясь к табл. 1, приходим к следующей теореме [34].

Теорема 8. В пространстве параметров $\mathbb{R}^3(a, b, h)$ разделяющими поверхностями при классификации изоэнергетических диаграмм $\mathcal{S}(h)$ являются 13 поверхностей, рассматриваемых в естественном ограничении $0 \leq b \leq a$:

$$\begin{aligned} \text{Sep}_1 - \text{Sep}_4: h &= \mp a \mp b; \\ \text{Sep}_5: h &= -2b; \quad \text{Sep}_6: h = 2b; \quad \text{Sep}_7: h = 2a; \\ \text{Sep}_8: \begin{cases} h = s \left(3 - \frac{s^2}{a^2} \right) - \frac{1}{a^2} \sqrt{(s^2 - a^2)^3}, \\ b = \frac{s}{a} \sqrt{s \left[s \left(3 - \frac{2s^2}{a^2} \right) - \frac{2}{a^2} \sqrt{(s^2 - a^2)^3} \right]}, \end{cases} & s \in \left[a, \frac{2}{\sqrt{3}} a \right]; \quad (5.1) \\ \text{Sep}_9: h &= \frac{1}{2b}(a^2 + 3b^2); \quad \text{Sep}_{10}: h = \frac{1}{2a}(3a^2 + b^2); \\ \text{Sep}_{11}: h &= -2\sqrt{ab}; \quad \text{Sep}_{12}: h = 2\sqrt{ab}; \quad \text{Sep}_{13}: h = \sqrt{2(a^2 + b^2)}. \end{aligned}$$

Непустым диаграммам отвечает область $h \geq -a - b$. Все сечения плоскостями постоянного $a \neq 0$ переводятся в сечение $a = 1$ преобразованием подобия $h' = h/a, b' = b/a$, что отвечает выбору значения a в качестве единицы измерения напряжённостей силовых полей.

Здесь комментарий требуется лишь для поверхности Sep_8 : она получена как параметрическая запись значения $h(s_0)$ в точке e_4 с использованием уравнения (3.6) и соответствующего уравнения для h на кривой δ_3 .

Разделяющее множество изображено на рис. 4 в проекции на сечение $a = 1$. Непустым изоэнергетическим диаграммам отвечают 19 областей в пространстве параметров. Выбирая в каждой из них по точке, соединяем их путями, удобными для просмотра и анализа трансформаций диаграмм. В соответствии с рис. 4 назовём эти пути «левым кругом», «правым кругом», «линией» и «блоком». Круги имеют общую область 1, правый круг и линия — общую область 9, линия и блок — общую область 14. Соответствующие диаграммы приведены на рисунках 5—8. Для наглядности допущены искажения плоскими диффеоморфизмами (т. е. в пределах определённого выше класса эквивалентности диаграмм). Все

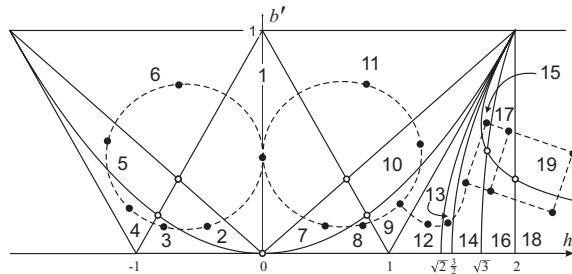


Рис. 4. Разделяющее множество и пути просмотра

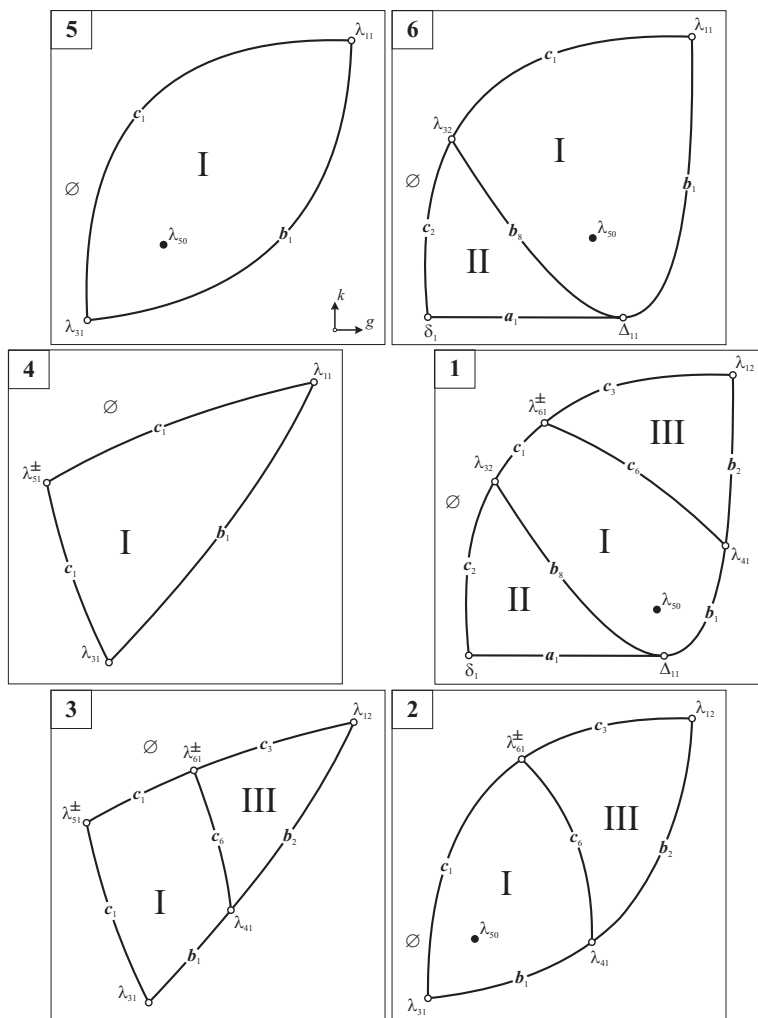


Рис. 5. Оснащённые диаграммы: «левый круг»

элементы диаграмм оснащены обозначениями соответствующих участков, введёнными выше для диаграмм критических подсистем. Кроме того, римскими цифрами I—IX занумерованы связные компоненты дополнения к бифуркационному множеству полного отображения момента в допустимом множестве (т. е. в множестве, отвечающем непустым интегральным многообразиям) в расширенном пространстве $\mathbb{R}^5(g, k, h, a, b)$. Такие компоненты мы по-прежнему называем камерами. В них сохраняется структура регулярного интегрального многообразия при изменении как интегральных постоянных, так и физических парамет-

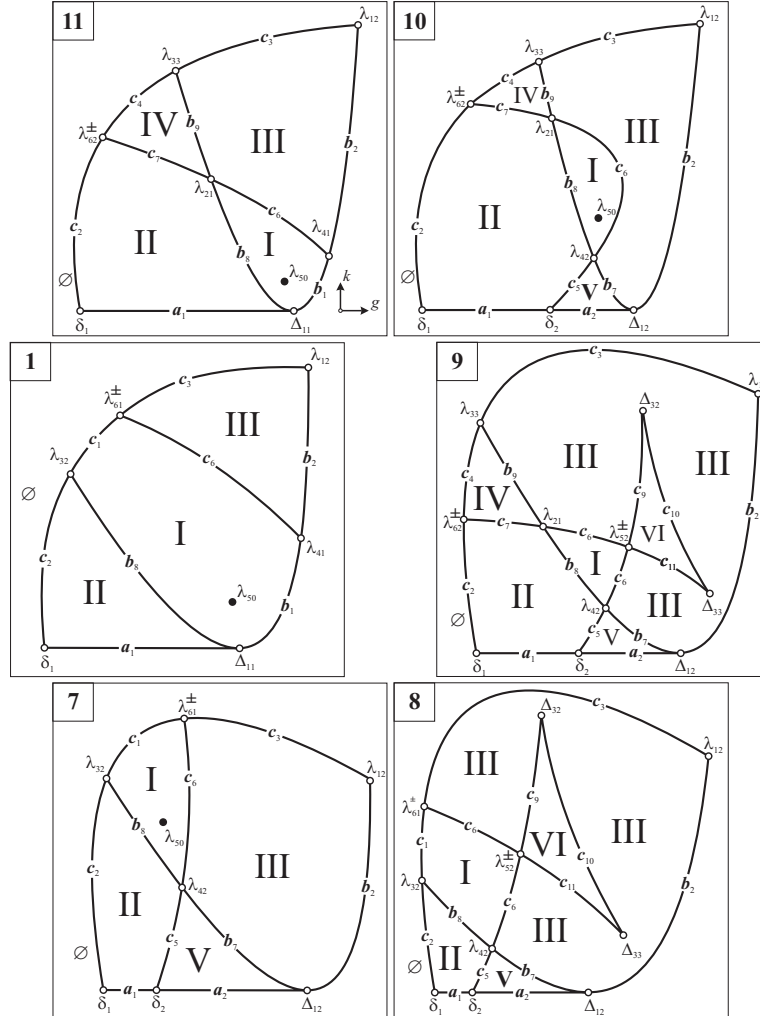


Рис. 6. Оснащённые диаграммы: «правый круг»

ров. «Внешнюю», недопустимую камеру (содержащую сколь угодно большие значения интегралов и потому заведомо отвечающую пустым интегральным многообразиям) обозначаем символом \emptyset и называем нуль-камерой. Теперь мы можем обосновать количество регулярных 3-торов в камерах, описать семейства этих торов и установить все типы 4-атомов.

Теорема 9. *Изоэнергетические диаграммы делят расширенное пространство параметров на 10 камер, одна из которых (внешняя) отвечает пустым интегральным многообразиям. В фазовом пространстве с учётом изменений всех*

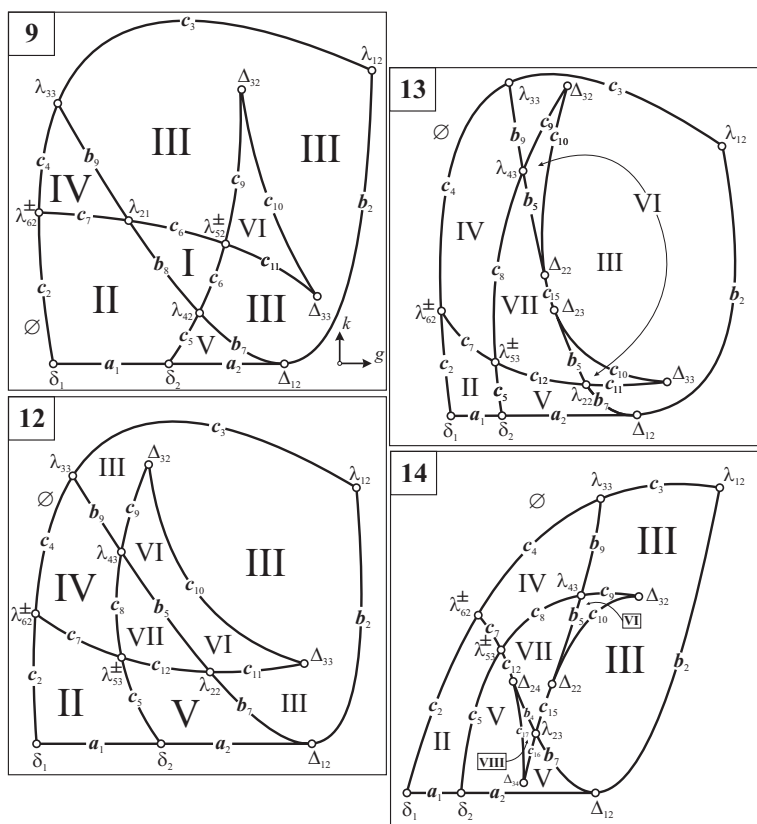


Рис. 7. Оснащённые диаграммы: «линия»

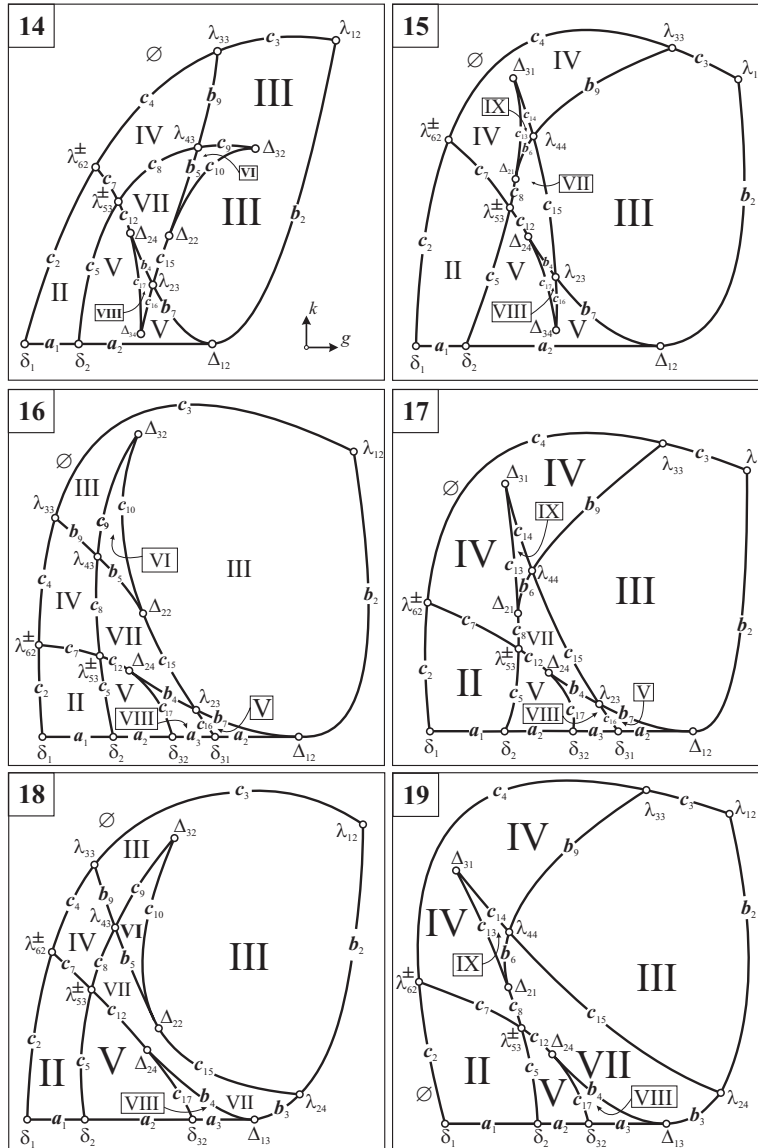


Рис. 8. Оснащённые диаграммы: «блок»

Таблица 5

Сегмент (область)	Кол-во 2-торов	Переход	4-атом	Сегмент (область)	Кол-во 2-торов	Переход	4-атом
a_1	2	$\emptyset \rightarrow \text{II}$	$2A$	c_4	2	$\emptyset \rightarrow \text{IV}$	$2A$
a_2	4	$\emptyset \rightarrow \text{V}$	$4A$	c_5	2	$\text{II} \rightarrow \text{V}$	$2B$
a_3	8	$\emptyset \rightarrow \text{VIII}$	$8A$	c_6	1	$\text{I} \rightarrow \text{III}$	B
b_1	1	$\emptyset \rightarrow \text{I}$	A	c_7	2	$\text{II} \rightarrow \text{IV}$	$2A^*$
b_2	2	$\emptyset \rightarrow \text{III}$	$2A$	c_8	2	$\text{IV} \rightarrow \text{VII}$	$2B$
b_3	4	$\emptyset \rightarrow \text{VII}$	$4A$	c_9	2	$\text{III} \rightarrow \text{VI}$	$2B$
b_4	4	$\text{VII} \rightarrow \text{VIII}$	$4B$	c_{10}	2	$\text{III} \rightarrow \text{VI}$	$2A$
b_5	4	$\text{VI} \rightarrow \text{VII}$	$2C_2$	c_{11}	2	$\text{III} \rightarrow \text{VI}$	$2B$
b_6	4	$\text{VII} \rightarrow \text{IX}$	$2C_2$	c_{12}	4	$\text{V} \rightarrow \text{VII}$	$4A^*$
b_7	2	$\text{III} \rightarrow \text{V}$	$2B$	c_{13}	2	$\text{IV} \rightarrow \text{IX}$	$2A$
b_8	1	$\text{I} \rightarrow \text{II}$	B	c_{14}	2	$\text{IV} \rightarrow \text{IX}$	$2B$
b_9	2	$\text{III} \rightarrow \text{IV}$	C_2	c_{15}	2	$\text{III} \rightarrow \text{VII}$	$2B$
c_1	1	$\emptyset \rightarrow \text{I}$	A	c_{16}	4	$\text{V} \rightarrow \text{VIII}$	$4B$
c_2	2	$\emptyset \rightarrow \text{II}$	$2A$	c_{17}	4	$\text{V} \rightarrow \text{VIII}$	$4A$
c_3	2	$\emptyset \rightarrow \text{III}$	$2A$				

параметров имеется 23 семейства трёхмерных регулярных торов Лиувилля. Между камерами имеется 29 стенок, отвечающих двумерным камерам, определённым диаграммами критических подсистем. При пересечении этих стенок бифуркации задаются 4-атомами, приведёнными в табл. 5.

Доказательство проведём в несколько шагов. Вначале, пользуясь только уже известными эллиптическими бифуркациями, определим количество регулярных 3-торов в камерах и соответствующие семейства.

Напомним, что семейством регулярных торов называется слоение на торы Лиувилля связной компоненты множества в фазовом пространстве, которое получается выбрасыванием всех особых слоёв. В пределах одной камеры всегда живут фиксированные семейства, но одно семейство может присутствовать и в нескольких камерах.

Стенки между камерами (в том числе между регулярной камерой и нуль-камерой), отвечающие 4-атомам вида kA ($k \in \mathbb{N}$), назовём A -переходами. Расставим все A -переходы на диаграммах, пользуясь бифуркациями типа «центр» из предложения 2. Получим информацию, собранную в табл. 6. Таким образом,

Таблица 6

Камера	Переход	Сегменты	4-атом	Кол-во торов	Новых семейств
I	$\emptyset \rightarrow I$	c_1, b_1	A	1	1
II	$\emptyset \rightarrow II$	a_1, c_2	$2A$	2	2
III	$\emptyset \rightarrow II$	b_2, c_3	$2A$	2	2
IV	$\emptyset \rightarrow IV$	c_4	$2A$	2	2
V	$\emptyset \rightarrow V$	a_2	$4A$	4	4
VI	$III \rightarrow VI$	c_{10}	$2A$	4	2
VII	$\emptyset \rightarrow VII$	b_3	$4A$	4	4
VIII	$V \rightarrow VIII$	c_{17}	$4A$	8	4
IX	$IV \rightarrow IX$	c_{13}	$2A$	4	2

установлено количество регулярных торов во всех камерах, а также общее количество семейств торов. Как видим, их оказалось 23. Общие семейства имеются в парах камер III, VI (два семейства), IV, IX (два семейства) и V, VIII (четыре семейства).

На следующих шагах устанавливаются все гиперболические бифуркации. Часть из них определяет лемма, аналог которой для двух степеней свободы можно получить из результатов [5].

Лемма 1. Пусть x_0 — невырожденная критическая точка ранга $n - 2$ типа «центр-седло» в интегрируемой системе с n степенями свободы и отображением момента \mathcal{J} . Обозначим через U_1 и U_2 две локальные критические подсистемы с $n - 1$ степенью свободы, пересекающиеся в x_0 трансверсально, причём в U_1 точке x_0 отвечает гиперболический n -атом V , а в U_2 точке x_0 отвечает эллиптический n -атом kA ($k \in \mathbb{N}$). Рассмотрим малое двумерное сечение, трансверсальное гладким листам $\mathcal{J}(U_1)$ и $\mathcal{J}(U_2)$, проведённое через точку $\mathcal{J}(x_0)$. Пусть q — точка на ребре этого сечения, порождённом листом $\mathcal{J}(U_2)$. Тогда $(n + 1)$ -атом, содержащий прообраз q , есть $k(V \times S^1)$.

В табл. 7 перечислены рёбра, удовлетворяющие условиям леммы, т. е. такие, вдоль которых внутри критической подсистемы-прообраза бифуркация в граничной точке эллиптическая, а прообраз граничной точки имеет тип «центр-седло». Гиперболический 3-атом в граничной точке внутри трансверсальной критической подсистемы находим из табл. 4. Тогда на этих ребрах 4-атомы определяются согласно лемме (последний столбец таблицы). Напомним, что 4-атомы,

Таблица 7

Ребро	Граничная точка	Граничный переход	3-атом	4-атом на ребре
b_8	λ_{32}	$c_2 \rightarrow c_1$	B в \mathcal{M}_3	B
c_6	λ_{41}	$b_1 \rightarrow b_2$	B в \mathcal{M}_2	B
b_9	λ_{33}	$c_4 \rightarrow c_3$	C_2 в \mathcal{M}_3	C_2
c_7	λ_{62}^-	$c_2 \rightarrow c_4$	$2A^*$ в \mathcal{M}_3	$2A^*$
c_5	δ_2	$a_1 \rightarrow a_2$	$2B$ в \mathcal{M}_1	$2B$
c_{16}	δ_{31}	$a_2 \rightarrow a_3$	$4B$ в \mathcal{M}_1	$4B$

получающиеся из 3-атомов прямым произведением на окружность, мы обозначаем так же, как исходные 3-атомы.

Рассмотрим точки возврата Δ_{31} — Δ_{33} изоэнергетических диаграмм. Зная 4-атомы на входящих в эти точки эллиптических рёбрах ($2A$ на рёбрах c_{13} в Δ_{31} и c_{10} в Δ_{32} , Δ_{33}), видим, что оставшиеся входящие рёбра c_{14} , c_9 и c_{11} отвечают атомам $2B$. Точка возврата Δ_{34} новой информации не даёт (атомы рёбер c_{16} и c_{17} уже известны).

Ещё один блок информации может быть получен из следующего простого соображения. Пусть критические точки в прообразе некоторого ребра образуют k гиперболических двумерных торов, а при переходе через это ребро между соседними камерами число регулярных трёхмерных торов меняется с k на $2k$. Тогда атом ребра есть kB . Отсюда, имея информацию о количестве 2-торов, устанавливаем следующие атомы: $2B$ на рёбрах b_7 , c_8 и c_{15} (переходы $\text{III} \rightarrow \text{V}$, $\text{IV} \rightarrow \text{VI}$ и $\text{III} \rightarrow \text{VII}$ соответственно), $4B$ на ребре b_4 (переход $\text{VII} \rightarrow \text{VIII}$).

Остались неизвестными 4-атомы рёбер b_5 , b_6 и c_{12} . Все они соответствуют переходам через стенки между камерами, содержащими по четыре тора. Анализируем имеющуюся информацию по невырожденным периодическим траекториям в прообразе следующих точек изоэнергетических диаграмм: λ_{43} для b_5 (область 12), λ_{44} для b_6 (область 15), λ_{53}^\pm для c_{12} (область 13). Для всех этих точек известны 4-атомы на трёх входящих рёбрах из четырёх и количество регулярных торов в прилегающих камерах. Поэтому 4-атомы для оставшихся рёбер таковы: $2C_2$ для рёбер b_5 , b_6 и $4A^*$ для ребра c_{12} . Теорема доказана.

На этом закончено описание оснащённых изоэнергетических диаграмм и грубой трёхмерной топологии регулярных изоэнергетических уровней.

6. Грубые сетевые инварианты

Теория сетевых топологических инвариантов интегрируемых систем со многими степенями свободы развита А. Т. Фоменко в [24, 45]. В то же время ввиду отсутствия методов практического анализа нетривиальных примеров до настоящего момента не было выполнено ни одного исследования топологии системы, не приводимой к семейству систем с двумя степенями свободы. Такой системой является изучаемый здесь волчок Ковалевской в двойном поле. Построенные выше оснащённые изоэнергетические диаграммы — один из возможных грубых топологических инвариантов. Однако, как можно заметить из представленных иллюстраций, попытка сохранить правильные масштабы приводит к возникновению сверхмалых областей трансформации диаграмм, в связи с чем наглядное представление о таких инвариантах оказывается не всегда достижимо, а сами иллюстрации в отдельных моментах перегружены информацией.

Здесь мы дадим описание грубых топологических инвариантов в виде аналога сетей Фоменко на изоэнергетических уровнях для всех параметрически устойчивых случаев. Поясним суть сетей Фоменко и предлагаемого упрощённого аналога.

В интегрируемой системе с тремя степенями свободы отождествим в точку каждую связную компоненту интегрального многообразия. При определённых условиях получим трёхмерное стратифицированное многообразие (подробности см. в [23, 24]). Грубым топологическим инвариантом является построенный по этому многообразию одномерный комплекс — граф с двумя типами вершин: вершина типа «центр» заменяет связную компоненту трёхмерного страта, вершина типа «атом» заменяет связную компоненту двумерной стенки и оснащена обозначением атома бифуркации, происходящей в окрестности соответствующей критической интегральной поверхности. Ребро графа соединяет центр с тем атомом, на котором происходит бифуркация соответствующего трёхмерного тора при пересечении стенки. Этот инвариант называется сетевым инвариантом Фоменко. Сетевой инвариант может быть естественным образом применён и к приводимым системам (т. е. системам с одномерной группой симметрий, допускающим редукцию к семейству систем с двумя степенями свободы). Опыт построения многомерного инварианта в таких более простых системах показал следующее. Во-первых, целесообразно строить сетевой инвариант для систем, индуцированных на неособых изоэнергетических многообразиях. Во-вторых, в целях описания грубой топологии удобно упростить конструкцию, базируясь на понятии изоэнергетической диаграммы и порождённых ей камер. Пусть, как и ранее, H — гамильтониан системы, \mathcal{F} — отображение момента, $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ — бифуркационная диаграмма, т. е. множество критических значений отображения момента. Предположим, что все изоэнергетические многообразия $H_h = \{H = h\}$ компактны, и зафиксируем неособое H_h . Диаграмма $\mathcal{S}(h)$ ограничения $\mathcal{F}(h)$ отображения \mathcal{F} на H_h делит плоскость на открытые связные компоненты (камеры), в прообразе которых лежат регулярные трёхмерные торы. Как отмечалось выше, в силу компактности H_h возникает нуль-камера, содержащая все доста-

точно удалённые точки плоскости. Дополним плоскость «бесконечно удалённой» точкой до двумерной сферы S^2 . Получим, что (при отсутствии фокусных особенностей, т. е. изолированных точек в диаграмме) диаграмма $\mathcal{S}(h)$ порождает представление S^2 в виде двумерного клеточного комплекса. Обозначим его через $\tilde{\mathcal{S}}(h)$. Оснащённая диаграмма добавляет в комплекс информацию о количестве регулярных торов в прообразах двумерных клеток и о бифуркациях, соответствующих одномерным клеткам.

Заменим каждую камеру, включая и нуль-камеру, точкой, снабжённой числом — количеством регулярных торов в прообразе любой точки камеры. Это вершины нового графа Γ_h , которые естественно считать расположенными на двумерной сфере S^2 . Вершины, отвечающие паре смежных камер, соединим ребром графа, на котором отметим набор атомов, возникающих в окрестности прообраза точки на общей стенке камер. Если граница камеры содержит изолированную точку диаграммы $\mathcal{S}(h)$, в прообразе которой имеется фокусная особенность ранга 1, то к такой вершине проведём ребро-петлю, снабжённую символом F . Граф Γ_h удобно изображать в проекции сферы S^2 на плоскость из «бесконечно удалённой» точки. При этом соответствующую нуль-вершину изображаем пунктирной замкнутой кривой, охватывающей все остальные вершины и рёбра графа. Отметим, что F -петли не лежат на сфере, а лишь изображаются на ней в целях наглядности. При отсутствии этих петель (фокусных особенностей) сфера с графом Γ_h есть двумерный комплекс, сопряжённый комплексу $\tilde{\mathcal{S}}(h)$.

Обратимся к волчку Ковалевской в двойном поле. Согласно полученным выше результатам по классификации изоэнергетических диаграмм $\mathcal{S}(h)$ в зависимости от h и физических параметров a, b (см. рис. 4) имеем следующее утверждение.

Теорема 10. *Параметрически устойчивым диаграммам $\mathcal{S}(h)$ отвечают 19 типов грубых топологических сетевых инвариантов $\Gamma_h(a, b)$ пятимерных изоэнергетических поверхностей волчка Ковалевской в двойном поле.*

Заметим, что топология самих изоэнергетических уровней известна [52] и меняется при пересечении значений $h = \mp a \mp b$, т. е. разделяющих поверхностей Ser_1 — Ser_4 .

Полный список инвариантов показан на рис. 9—12. Здесь кружками с числом внутри изображены вершины с указанием количества регулярных торов (за исключением оговорённого выше способа изображения вершины для внешней нуль-камеры). На ребрах графа указаны 4-атомы трёхмерных бифуркаций (полученные из соответствующих атомов систем с двумя степенями свободы умножением на топологическую окружность). Изображения сетевых инвариантов расположены по аналогии с расположением соответствующих изоэнергетических диаграмм на рис. 5—8.

Построенные изоэнергетические инварианты дают возможность восстановить и полный сетевой инвариант А. Т. Фоменко в смысле [24] на шестимерном фазовом пространстве, отслеживая динамику $\Gamma_h(a, b)$ при фиксированных a, b

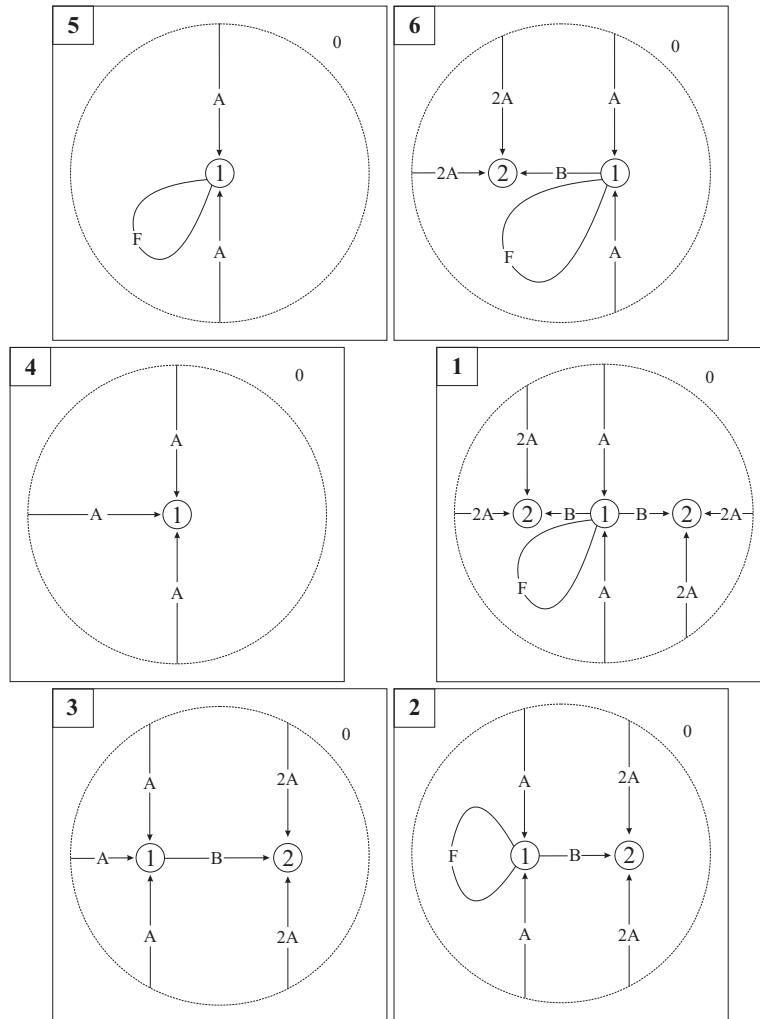


Рис. 9. Сетевые инварианты: «левый круг»

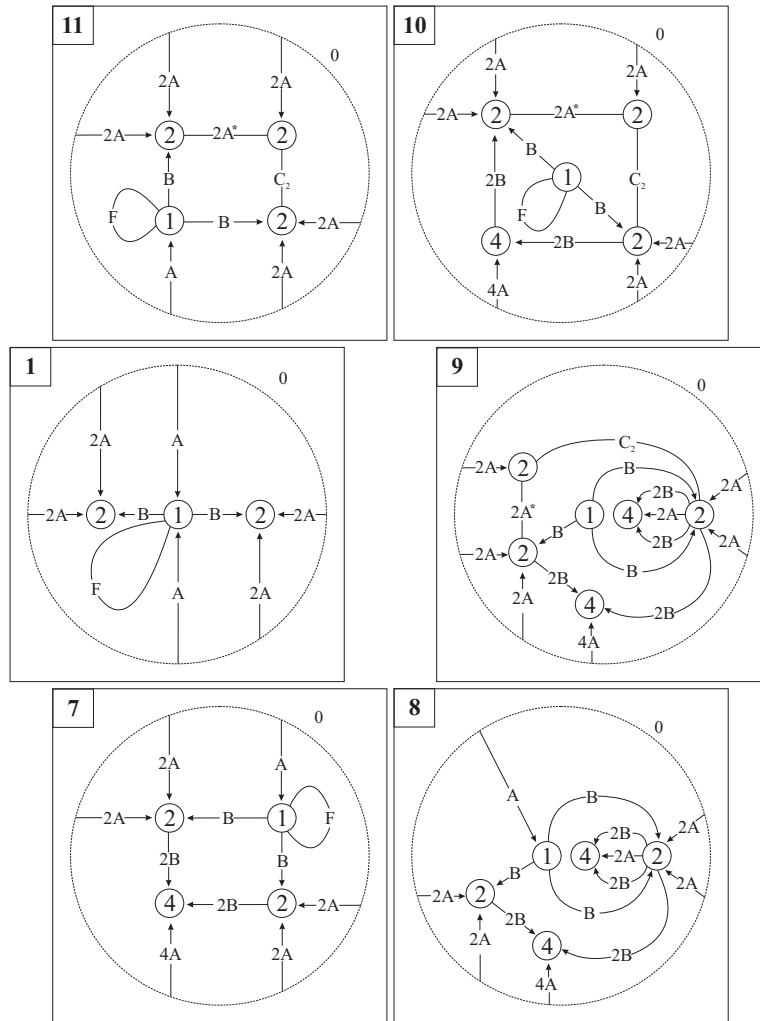


Рис. 10. Сетевые инварианты: «правый круг»

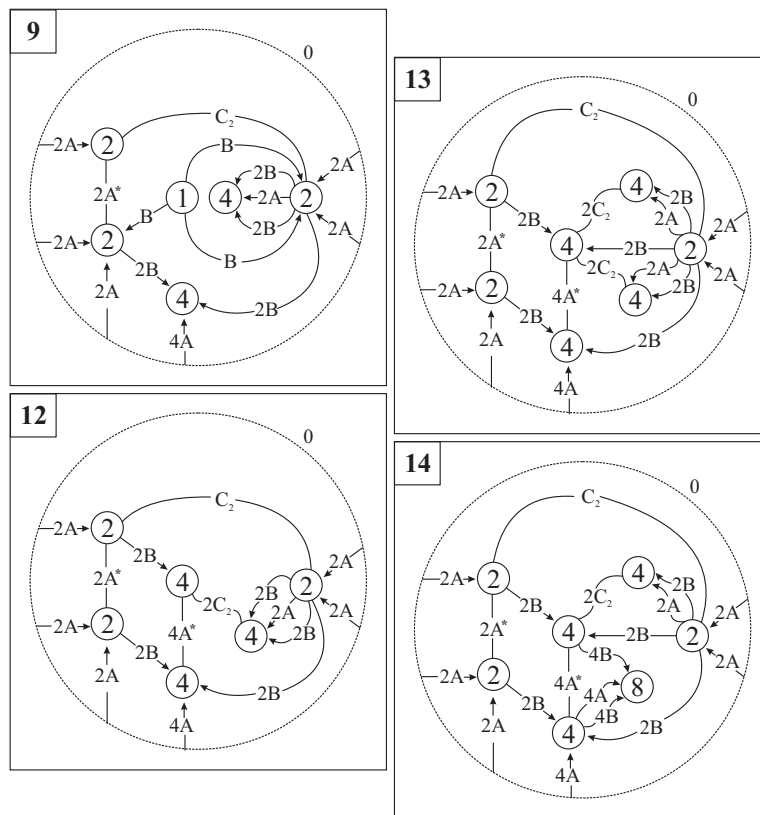


Рис. 11. Сетевые инварианты: «линия»

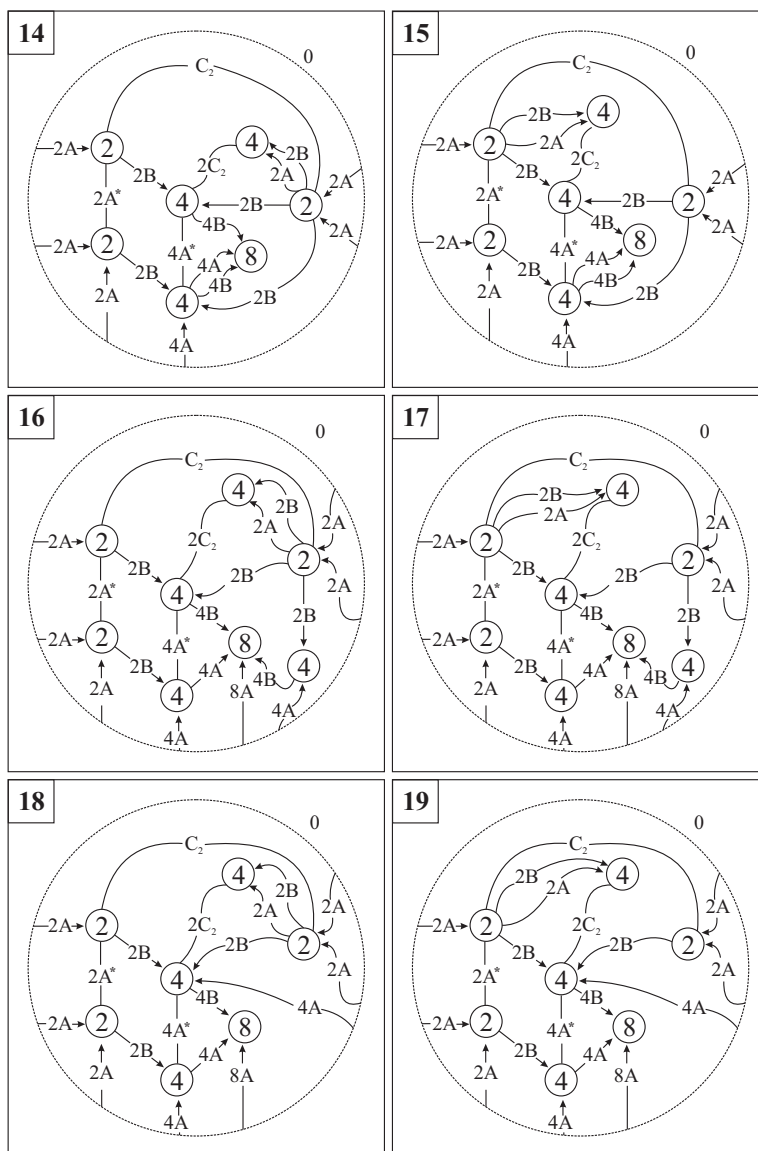


Рис. 12. Сетевые инварианты: «блок»

и объединяя эти графы по h в соответствующем расширенном пространстве. Напомним, что a не является существенным параметром и все объекты сохраняются преобразованием подобия $h' = h/a$, $b' = b/a$. Перестройки полного инварианта происходят, когда прямая $b' = \text{const}$ в плоскости (b', h') проходит через одну из кратных точек семейства разделяющих кривых. Соответствующие значения b' определяются непосредственно из (5.1). В частности, точке пересечения кривых Sep_8 , Sep_9 отвечает единственный положительный корень b_0 уравнения

$$6591b'^8 + 612b'^3 - 262b'^2 - 28b' - 1 = 0.$$

Теорема 11. *Задача о движении волчка Ковалевской в двойном поле имеет четыре грубых сетевых инварианта Фоменко, устойчивых по физическому параметру $b/a \in [0, 1]$. Разделяющими значениями параметра служат значения 0 (случай Ковалевской), $3 - 2\sqrt{2}$, $1/3$, b_0 и 1 (приводимый случай Яхья).*

Зная упрощённый сетевой инвариант, установим количество и характер периодических и вырожденных движений. По предположению уровень H_h неособый, поэтому нульмерный остов $\mathcal{S}(h)$ порождён периодическими решениями, состоящими из критических точек ранга 1. К нульмерному остову отнесены также и точки-образы вырожденных критических точек ранга 2, заполняющих особые двумерные торы. Точки нульмерного остова обычно называются узловыми точками диаграммы. Граф Γ_h (без учёта F -петель) делит сферу S^2 на открытые связные компоненты, каждая из которых ограничена циклом в графе. Таким образом, двумерные клетки разбиения сферы графом Γ_h отвечают особенностям ранга 1 или вырожденным особенностям ранга 2. По атомам вдоль рёбер, ограничивающих клетку, соответствующую периодическим решениям, можно определить их количество на заданном уровне первых интегралов и тип. Игнорируя F -петли, получаем, что решения типа «центр-центр» имеют на границе клетки только атомы A , типа «седло-седло» — только атомы гиперболического типа (здесь это B , A^* , C_2), а у решений типа «центр-седло» на границе клетки встречаются атомы как эллиптического, так и гиперболического типа. Количество периодических решений в прообразе двумерной клетки (узловой точки диаграммы) определяется кратностью атомов на рёбрах и кратностью вершин графа Γ_h вдоль граничного цикла двумерной клетки. Для того чтобы выделить двумерные клетки, отвечающие вырожденным решениям ранга 2, необходимо обратиться к соответствующей бифуркационной диаграмме и отметить на ней точки возврата и точки касания бифуркационных кривых.

Теорема 12. *Количество и тип особых периодических решений и количество вырожденных двумерных торов на неособых уровнях энергии волчка Ковалевской в двойном поле в 19 параметрически устойчивых случаях определяются в соответствии с табл. 8. Нумерация областей дана в соответствии с рис. 4.*

Из построенных сетевых инвариантов вытекает также описание круговых молекул особенностей ранга 1. Если в типе особенности присутствует «центр»,

Таблица 8

Номер области	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
Тип «центр-центр»	4	3	4	3	2	3	4	4	4	4
Тип «центр-седло»	3	2	2	0	0	1	4	4	6	6
Тип «седло-седло»	0	0	0	0	0	0	1	2	3	2
Тип «фокус-фокус»	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
Вырожденные торы	1	0	0	0	0	1	2	6	6	2
Номер области	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Тип «центр-центр»	4	4	4	4	4	8	8	8	8	
Тип «центр-седло»	5	6	6	6	6	10	10	8	8	
Тип «седло-седло»	1	6	6	6	6	6	6	4	4	
Тип «фокус-фокус»	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
Вырожденные торы	1	6	10	14	12	10	10	12	12	

то её насыщенная окрестность в \mathcal{P}^6 представляется в виде прямого произведения двух 3-атомов и легко восстанавливается из табл. 4. Для особенностей типа «седло-седло» рассмотрим круговую молекулу на изоэнергетическом уровне. Во введённом упрощённом сетевом инварианте для такой особенности необходима двумерная клетка с четырьмя вершинами и рёбрами, отвечающими гиперболическим атомам трёхмерных бифуркаций. Полный список видов седловых круговых молекул, встречающихся в данной задаче, и соответствующих обозначений приведён на рис. 13. Первые три молекулы имеют аналог в двух степенях свободы: это молекулы критических точек ранга 0 с насыщенными окрестностями

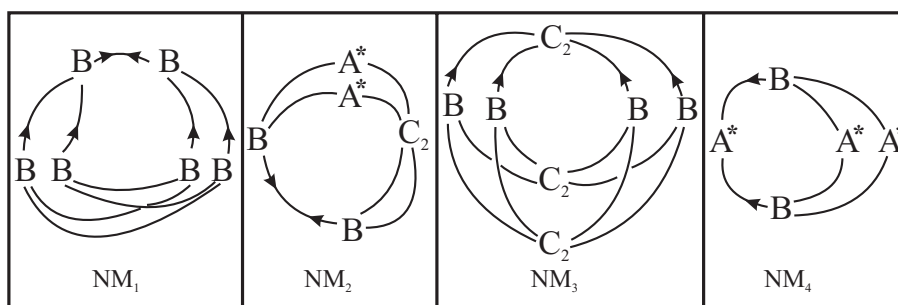


Рис. 13. Круговые молекулы гиперболических особенностей ранга 1

вида $B \times B$, $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$ и $B \times C_2$ [12, 13]. Здесь, естественно, имеются в виду 2-атомы. Последняя молекула такого аналога не имеет. Для седловых особенностей нашей задачи получим следующие изоэнергетические круговые молекулы: NM_1 для λ_{42} и λ_{52} ; $2NM_1$ для λ_{23} ; NM_2 для λ_{21} ; $2NM_2$ для λ_{22} ; NM_3 для λ_{43} и λ_{44} ; $2NM_4$ для λ_{53} .

Авторы благодарят академика А. Т. Фоменко за плодотворные обсуждения подходов и результатов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00119) и Правительства Волгоградской области (гранты № 13-01-97025, 15-41-02049).

Литература

- [1] Болсинов А. В., Козлов В. В., Фоменко А. Т. Принцип Мопертюи и геодезические потоки на сфере, возникающие из интегрируемых случаев динамики твёрдого тела // УМН. — 1995. — Т. 50, № 3. — С. 3–32.
- [2] Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // УМН. — 1990. — Т. 45, № 2. — С. 49–77.
- [3] Болсинов А. В., Рихтер П., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Матем. сб. — 2000. — Т. 191, № 2. — С. 3–42.
- [4] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые геодезические потоки на сфере, порождённые системами Горячева—Чаплыгина и Ковалевской в динамике твёрдого тела // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56, № 2. — С. 139–142.
- [5] Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. В 2-х т. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
- [6] Браилов Ю. А. Топология бифуркационных диаграмм интегрируемых систем на полупростых алгебрах Ли // Докл. Акад. наук. Сер. матем. — 2000. — Т. 375, № 2. — С. 151–153.
- [7] Зотьев Д. Б. Фазовая топология волчка Ковалевской в $SO(2)$ -симметричном двойном силовом поле // Мех. твёрд. тела. — 2004. — № 34. — С. 66–71.
- [8] Зотьев Д. Б. Фазовая топология 1-го класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 1. — С. 95–128.
- [9] Зунг Н. Т. Топологические инварианты интегрируемых геодезических потоков на многомерном торе и сфере // Тр. МИАН. — 1994. — Т. 205. — С. 73–90.
- [10] Кузнецов А. В. Построение инварианта алгебраического аналога периодической цепочки Тода // УМН. — 1992. — Т. 47, № 5 (287). — С. 181–182.
- [11] Лерман Л. М., Уманский Я. Л. О классификации четырёхмерных интегрируемых гамильтоновых систем в расширенных окрестностях простых особых точек // Методы качественной теории и теории бифуркаций. — Горький: Горьк. гос. ун-т, 1988. — С. 67–76.
- [12] Ошемков А. А. Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 8. — С. 63–102.

- [13] Ошемков А. А. Седловые особенности сложности 1 интегрируемых гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 2. — С. 3—12.
- [14] Рябов П. Е., Харламов М. П. Классификация особенностей в задаче о движении волчка Ковалевской в двойном поле сил // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 2. — С. 111—142. — <http://dx.doi.org/10.4213/sm7758>; <http://arxiv.org/abs/1408.0077>.
- [15] Селиванова Е. Н. Топология задачи о трёхточечных вихрях // Тр. МИАН. — 1994. — Т. 205. — С. 141—149.
- [16] Смейл С. Топология и механика // УМН. — 1972. — Т. 27, № 2 (164). — С. 77—133. — <http://mi.mathnet.ru/umn5030>.
- [17] Соколов В. В. Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа // Теор. и матем. физ. — 2001. — Т. 129, № 1. — С. 31—37.
- [18] Соколов В. В. Об одном классе квадратичных $so(4)$ -гамильтонианов // Докл. Акад. наук. — 2004. — Т. 394, № 5. — С. 602—605.
- [19] Соколов В. В., Цыганов А. В. Пары Лакса для деформированных волчков Ковалевской и Горячева—Чаплыгина // Теор. и матем. физ. — 2002. — Т. 131, № 1. — С. 118—125.
- [20] Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287, № 5. — С. 1071—1075.
- [21] Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1986. — Т. 50, № 6. — С. 1276—1307.
- [22] Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
- [23] Фоменко А. Т. Симплектическая топология вполне интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. — 1989. — Т. 44, № 1. — С. 145—173.
- [24] Фоменко А. Т. Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Т. 55, № 4. — С. 747—779.
- [25] Фоменко А. Т. Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырёхмерных симплектических многообразиях // Функц. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, № 4. — С. 23—35.
- [26] Фоменко А. Т., Цишанг Х. О типичных топологических свойствах интегрируемых гамильтоновых систем // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1988. — Т. 52, № 2. — С. 378—407.
- [27] Харламов М. П. Интегральные многообразия приведённой системы в задаче о движении по инерции твёрдого тела с неподвижной точкой // Мех. твёрд. тела. — 1976. — № 8. — С. 18—23. — <http://arxiv.org/abs/1408.4548>.
- [28] Харламов М. П. Фазовая топология одного интегрируемого случая движения твёрдого тела // Мех. твёрд. тела. — 1979. — № 11. — С. 50—64. — <http://arxiv.org/abs/1408.6028>.
- [29] Харламов М. П. Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской // Прикл. матем. и мех. — 1983. — Т. 47, № 6. — С. 922—930. — <http://arxiv.org/abs/1312.7299>.

- [30] Харламов М. П. Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твёрдого тела // ДАН СССР. — 1983. — Т. 273, № 6. — С. 1322–1325. — <http://arxiv.org/abs/0906.2548>.
- [31] Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твёрдого тела. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. — <http://arxiv.org/abs/1401.1015>.
- [32] Харламов М. П. Один класс решений с двумя инвариантными соотношениями задачи о движении волчка Ковалевской в двойном постоянном поле // Мех. твёрд. тела. — 2002. — № 32. — С. 32–38. — <http://arxiv.org/abs/0803.1028>.
- [33] Харламов М. П. Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Мех. твёрд. тела. — 2004. — № 34. — С. 47–58.
- [34] Харламов М. П. Области существования критических движений обобщённого волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы // Мех. твёрд. тела. — 2006. — № 36. — С. 13–22.
- [35] Харламов М. П. Особые периодические решения обобщённого случая Делоне // Мех. твёрд. тела. — 2006. — № 36. — С. 23–33.
- [36] Харламов М. П. Полный топологический атлас интегрируемой системы с двумя или тремя степенями свободы // Современные методы теории краевых задач. Материалы Воронежской весенней матем. школы «Понтрягинские чтения — XXIV». — Воронеж: Изд-во ВГУ, 2013.
- [37] Харламов М. П., Рябов П. Е. Сетевые диаграммы для инварианта Фоменко в интегрируемой системе с тремя степенями свободы // Докл. Акад. наук. — 2012. — Т. 447, № 5. — С. 499–502. — <http://dx.doi.org/10.1134/S1064562412060282>.
- [38] Харламов М. П., Савушкин А. Ю. Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщённого волчка Ковалевской // Укр. матем. вестн. — 2004. — Т. 1, № 4. — С. 564–582.
- [39] Bogoyavlensky O. I. Euler equations on finite-dimension Lie algebras arising in physical problems // Commun. Math. Phys. — 1984. — Vol. 95. — P. 307–315.
- [40] Bolsinov A. V. Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant // Adv. Sov. Math. — 1991. — Vol. 6. — P. 147–183.
- [41] Bolsinov A. V., Dullin H. R., Veselov A. P. Spectra of Sol-manifolds: arithmetic and quantum monodromy // Commun. Math. Phys. — 2006. — Vol. 264. — P. 583–611.
- [42] Bolsinov A. V., Oshemkov A. A. Singularities of integrable Hamiltonian systems // Topological Methods in the Theory of Integrable Systems. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2006. — P. 1–67.
- [43] Brailov Yu. A. Geometry of singularities of integrable systems on Lie algebras // Rev. Math. Math. Phys. — 2005. — Vol. 12, no. 2. — P. 1–51.
- [44] Davison C. M., Dullin H. R., Bolsinov A. V. Geodesics on the ellipsoid and monodromy // J. Geom. Phys. — 2007. — Vol. 57. — P. 2437–2454.
- [45] Fomenko A. T. The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom // Adv. Sov. Math. — 1991. — Vol. 6. — P. 1–35.
- [46] Kharlamov M. P. Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Regular Chaotic Dynam. — 2005. — Vol. 10, no. 4. —

- P. 381–398. — <http://arxiv.org/abs/0803.0893>; <http://dx.doi.org/10.1070/RD2005v010n04ABEH000321>.
- [47] Kharlamov M. P. Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class // Regular Chaotic Dynam. — 2007. — Vol. 12, no. 3. — P. 267–280. — <http://arxiv.org/abs/0803.1024>; <http://dx.doi.org/10.1134/S1560354707030021>.
- [48] Kharlamov M. P. Separation of variables in the generalized 4th Appelrot class. II. Real solutions // Regular Chaotic Dynam. — 2009. — Vol. 14, no. 6. — P. 621–634. — <http://dx.doi.org/10.1134/S1560354709060021>.
- [49] Kharlamov M. P. Complete topological atlases of some integrable systems with two and three degrees of freedom // IV Int. Conf. «Geometry, Dynamics, Integrable Systems». Book of Abstracts. — Izhevsk: RCD, 2013. — <http://dx.doi.org/10.13140/2.1.2982.6884>.
- [50] Kharlamov M. P. Phase topology of one system with separated variables and singularities of the symplectic structure // J. Geom. Phys. — 2015. — Vol. 87. — P. 248–265. — <http://arxiv.org/abs/1312.5184>; <http://dx.doi.org/10.1016/j.geomphys.2014.07.004>.
- [51] Kharlamov M. P., Shvedov E. G. On the existence of motions in the generalized 4th Appelrot class // Regular Chaotic Dynam. — 2006. — Vol. 11, no. 3. — P. 337–342. — <http://dx.doi.org/10.1070/RD2006v011n03ABEH000357>.
- [52] Kharlamov M. P., Zotev D. B. Nondegenerate energy surfaces of rigid body in two constant fields // Regular Chaotic Dynam. — 2005. — Vol. 10, no. 1. — P. 15–19. — <http://dx.doi.org/10.1070/RD2005v010n01ABEH000296>.
- [53] Kharlamova I. I., Savushkin A. Y. Bifurcation diagrams involving the linear integral of Yehia // J. Phys. A. Math. Theor. — 2010. — Vol. 43, no. 10. — P. 0301–0311.
- [54] Lerman L. M., Umanskiĭ Ya. L. Structure of the Poisson action of \mathbb{R}^2 on a four-dimensional symplectic manifold. I, II // Selecta Math. Sov. — 1987. — Vol. 6, no. 4. — P. 365–396; 1988. — Vol. 7, no. 1. — P. 39–48.
- [55] Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations // Adv. Sov. Math. — 1991. — Vol. 6. — P. 67–146.
- [56] Polyakova L. S. Topological invariants for some algebraic analogs of the Toda lattice // Adv. Sov. Math. — 1991. — Vol. 6. — P. 185–207.
- [57] Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. Lax representation with a spectral parameter for the Kowalewski top and its generalizations // Lett. Math. Phys. — 1987. — Vol. 14, no. 1. — P. 55–61.
- [58] Sokolov V. V. A generalized Kowalewski Hamiltonian and new integrable cases on $e(3)$ and $so(4)$ // Kowalevski Property // V. B. Kuznetsov, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2002. — (CRM Proc. Lect. Notes). — P. 304–315.
- [59] Yehia H. M. New integrable cases in the dynamics of rigid bodies // Mech. Research Commun. — 1986. — Vol. 13, no. 3. — P. 169–172. — [http://dx.doi.org/10.1016/0093-6413\(86\)90059-5](http://dx.doi.org/10.1016/0093-6413(86)90059-5).
- [60] Yehia H. M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kowalevskaya configuration. I. The case of axisymmetric forces // Mech. Research Commun. — 1996. — Vol. 23, no. 5. — P. 423–427. — [http://dx.doi.org/10.1016/0093-6413\(96\)00041-9](http://dx.doi.org/10.1016/0093-6413(96)00041-9).

- [61] Yehia H. M. New integrable problems in the dynamics of rigid bodies with the Kovalevskaya configuration. II. The case of asymmetric forces // *Mech. Research Commun.* — 1996. — Vol. 23, no. 5. — P. 429–431. — [http://dx.doi.org/10.1016/0093-6413\(96\)00042-0](http://dx.doi.org/10.1016/0093-6413(96)00042-0).
- [62] Yehia H. M. The master integrable two-dimensional system with a quartic second integral // *J. Phys. A. Math. Gen.* — 2006. — Vol. 39. — P. 5807–5824. — <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/39/20/012>.
- [63] Zotev D. B. Fomenko–Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyi case // *Regular Chaotic Dynam.* — 2000. — Vol. 5, no. 4. — P. 437–458.
- [64] Zung N. T. Decomposition of nondegenerate singularities of integrable Hamiltonian systems // *Lett. Math. Phys.* — 1995. — Vol. 33. — P. 187–193. — <http://dx.doi.org/10.1007/BF00749620>.