# Метод сдвига аргумента и секционные операторы: приложения в дифференциальной геометрии

**А. В. БОЛСИНОВ**
*Университет Лафборо, Великобритания;*
*Московский государственный университет*
*им. М. В. Ломоносова*
e-mail: A.Bolsinov@lboro.ac.uk

УДК 512.81+514.764.2

**Ключевые слова:** метод сдвига аргумента, тензор кривизны Римана, группа голономии, интегрируемые гамильтоновы системы.

**Аннотация**

Данная работа является попыткой изложить систематическим образом конструкцию, которая устанавливает интересную связь между некоторым идеями и понятиями, хорошо известными в теории интегрируемых систем на алгебрах Ли, с другой областью математики, занимающейся изучением проективно эквивалентных римановых и псевдоримановых метрик.

**Abstract**

*A. V. Bolsinov, Argument shift method and sectional operators: applications to differential geometry*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 3, pp. 5—31.

This paper is an attempt to present, in a systematic way, a construction that establishes an interesting relationship between some ideas and notions well-known in the theory of integrable systems on Lie algebras and a rather different area of mathematics studying projectively equivalent Riemannian and pseudo-Riemannian metrics.

*А. Т. Фоменко к 70-летию*

## О чем эта статья?

Этот текст не содержит новых результатов, он представляет собой попытку изложить в систематическом виде одну конструкцию, позволяющую неожиданным образом использовать некоторые идеи и понятия, хорошо известные в теории интегрируемых систем на алгебрах Ли, в совершенно другой области математики, связанной с изучением проективно эквивалентных римановых и псевдоримановых метрик. Основное наблюдение, не вдаваясь пока в подробности, можно сформулировать следующим образом.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2015, том 20, № 3, с. 5—31.

*Тензоры кривизны проективно эквивалентных метрик совпадают с гамильтонианами динамики многомерного твёрдого тела.*

Такая связь представляется весьма любопытной и, вполне вероятно, имеет дальнейшие приложения в дифференциальной геометрии. Желание рассказать именно о ней (и в меньшей степени о наших результатах) было одним из стимулов для написания этой работы.

Второй причиной было желание ещё раз обратить внимание читателя на *метод сдвига аргумента*, предложенный А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [10] как обобщение конструкции С. В. Манакова [9]. По мнению автора, этот метод представляет собой очень простую, естественную и универсальную конструкцию, которая именно благодаря своей простоте, естественности и универсальности возникает в самых разных разделах современной математики. Таких конструкций в математике немного. В данной работе сам метод сдвига аргумента почти не обсуждается, речь пойдёт лишь об одном непосредственно связанном с ним объекте, о так называемых секционных операторах.

В статье обсуждаются некоторые новые результаты, полученные в [25,29,30]. В этом смысле статью можно считать обзором, однако акцент мне хотелось бы перенести с самих результатов на то, как использование алгебраических свойств секционных операторов помогает в решении геометрических задач. Поэтому изложение существенно отличается от упомянутых работ, а некоторые детали доказательств, не относящиеся к основному сюжету, опущены. Два первых раздела посвящены определению и свойствам секционных операторов, в последующих четырёх обсуждаются их приложения в геометрии. Мне также хотелось бы отдельно упомянуть заметку [4], в которой мы обсуждали свойства секционных операторов в общей постановке и которая в концептуальном смысле оказалась очень полезной при работе над этой статьей. Всем своим соавторам, Владимиру Матвееву, Володимиру Киосаку, Драгомиру Цоневу, Штефану Роземану и Андрею Коняеву, я очень признателен.

Особую благодарность я хотел бы выразить своему учителю, Анатолию Тимофеевичу Фоменко, без которого эта работа вообще бы не появилась.

## 1. Секционные операторы на полупростых алгебрах Ли

Мы начнём с краткого напоминания об одном специальном типе уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли (более подробное изложение см. в [2, 3, 10, 13, 18, 39, 40, 55, 59]).

Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, $R\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ — оператор, симметричный относительно формы Киллинга $\langle\ ,\ \rangle$ на $\mathfrak{g}$. Дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = [R(x), x], \quad x \in \mathfrak{g}, \tag{1}$$

является гамильтоновым на $\mathfrak{g}$ относительно стандартной структуры Пуассона—Ли и называется *уравнением Эйлера*, отвечающим функции Гамильтона

$$H(x) = \frac{1}{2}\langle R(x), x\rangle.$$

Классической, интересной и исключительно сложной является проблема нахождения таких операторов $R\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, для которых система (1) вполне интегрируема.

Один из таких операторов был обнаружен С. В. Манаковым в [9], и его идея привела затем к элегантной общей конструкции, развитой А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [10], названной *методом сдвига аргумента* и имеющей много замечательных приложений. Вкратце эта конструкция в случае полупростых алгебр Ли может быть описана следующим образом.

Предположим, что $R\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ удовлетворяет тождеству

$$[R(x), a] = [x, b], \quad x \in \mathfrak{g}, \tag{2}$$

для некоторых фиксированных $a, b \in \mathfrak{g}$, $a \neq 0$. Тогда имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1 (А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [10]).** *Пусть оператор* $R\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *симметричен и удовлетворяет* (2). *Тогда*

— *система* (1) *допускает следующее представление Лакса со спектральным параметром*:
$$\frac{d}{dt}(x + \lambda a) = [R(x) + \lambda b, x + \lambda a];$$

— *функции* $f(x + \lambda a)$, *где* $f\colon \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ — *инвариант присоединённого представления алгебры Ли* $\mathfrak{g}$, *являются первыми интегралами уравнения* (1) *для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$; *более того, эти интегралы коммутируют*;

— *если* $a \in \mathfrak{g}$ — *регулярный элемент, то уравнение* (1) *вполне интегрируемо.*

Эта конструкция имеет важный частный случай. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает $\mathbb{Z}_2$-градуировку, т. е. разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{v}$ (в прямую сумму подпространств), такое что $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{v}$, $[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] \subset \mathfrak{h}$, то мы можем рассмотреть оператор $R\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$, удовлетворяющий (2) с $a, b \in \mathfrak{v}$, и утверждение теоремы 1 по-прежнему останется справедливым, если заменить $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$.

Наиболее важным для приложений (например, в теории интегрируемых волчков) является случай, когда $\mathfrak{g} = \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{h} = \mathrm{so}(n, \mathbb{R})$, а матрицы $a$ и $b$ симметричны. Именно эта ситуация изучалась в пионерской работе С. В. Манакова [9] и привела к доказательству интегрируемости уравнений Эйлера движения $n$-мерного твёрдого тела.

С алгебраической точки зрения конструкция, описанная выше, по-прежнему имеет смысл, если мы заменим $\mathrm{so}(n)$ на $\mathrm{so}(p, q)$ и предположим, что $a$, $b$ — симметричные операторы относительно соответствующей индефинитной формы $g$. Более того, если мы комплексифицируем все наши рассуждения, то даже не заметим никакой разницы. Однако, чтобы подчеркнуть присутствие (но не влияние) билинейной формы $g$, мы будем обозначать пространство $g$-симметричных операторов через $\mathrm{Sym}(g)$, а алгебру Ли $g$-кососимметричных операторов через $\mathrm{so}(g)$.

**Определение 1.** Будем говорить, что $R\colon \mathrm{so}(g) \to \mathrm{so}(g)$ является *секционным оператором*, отвечающим матрицам $A, B \in \mathrm{Sym}(g)$, если $R$ симметричен относительно формы Киллинга и выполнено тождество

$$[R(X), A] = [X, B] \quad \text{для всех} \quad X \in \mathrm{so}(g). \tag{3}$$

Мы следуем терминологии, введённой В. В. Трофимовым и А. Т. Фоменко в [17, 40], где они изучали различные обобщения таких операторов (см. также [4, 10]). Строго говоря, данное выше определение является лишь частным случаем более общей конструкции. Термин «секционный» был связан со следующим обстоятельством. Тождества (2) и (3) намекают на то, что $R$ можно представить в виде $\mathrm{ad}_A^{-1}\mathrm{ad}_B$, однако в общем случае так сделать нельзя, поскольку оператор $\mathrm{ad}_A$, как правило, не является обратимым. Поэтому оператор $R$ разбивается на некоторые куски, каждый из которых действует независимо на своём собственном подпространстве (секции). Похожее разбиение оператора $R$ на «секции» можно будет увидеть в доказательстве предложения 4 ниже.

**Замечание 1.** На самом деле есть два различных типа секционных операторов, определяемых соответственно тождествами (2) и (3). В этой работе основное внимание уделяется операторам (3) из определения 1. Первый тип, в некотором смысле более естественный и фундаментальный, был впервые подробно изучен А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в [10,11]. Традиционно операторы этого класса обозначаются через $\varphi_{a,b,D}$, они обладают многими интересными свойствами и приложениями, см. примеры и подробности в [7, 8, 17, 23, 24].

В следующем разделе мы обсудим основные свойства секционных операторов в смысле определения 1.

# 2. Алгебраические свойства секционных операторов

Первое свойство хорошо известно.

**Предложение 1.** *Пусть $R$ — секционный оператор, отвечающий матрицам $A, B \in \mathrm{Sym}(g)$, т. е. удовлетворяющий тождеству (3) для всех $X \in \mathrm{so}(g)$. Тогда $A$ и $B$ коммутируют. Более того, $B$ лежит в центре централизатора $A$. В частности, матрица $B$ может быть записана в виде $B = p(A)$, где $p(\cdot)$ — некоторый многочлен.*

**Доказательство.** Действительно,

$$\langle [B, A], X\rangle = \langle A, [X, B]\rangle = \langle A, [R(X), A]\rangle = \langle [A, A], R(X)\rangle = 0$$

для всех $X \in \mathrm{so}(g)$, отсюда следует, что $[A, B] = 0$. Более того, если вместо $A$ мы подставим любой элемент $\xi$ из его централизатора $\mathfrak{z}_A = \{Y \mid [Y, A] = 0\}$, то придём к тому же самому заключению $[B, \xi] = 0$, т. е. $B$ лежит в центре централизатора $A$. Здесь под $\langle\,,\,\rangle$ понимается обычная инвариантная форма $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}\, XY$.

Представление $B$ в виде многочлена от $A$ — стандартный факт из теории матриц: центр централизатора любой квадратной матрицы $A$ порождается её степенями $A^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. □

Можно ли восстановить $R$ из соотношения (3), если $A$ и $B = p(A)$ заданы? Пусть $R_1$ и $R_2$ — два оператора, удовлетворяющие (3). Тогда мы имеем

$$[R_1(X) - R_2(X), A] = 0.$$

Это означает, что образ оператора $R_1 - R_2$ содержится в централизаторе $A$ в $\mathrm{so}(g)$, т. е. в подалгебре

$$\mathfrak{g}_A = \{Y \in \mathrm{so}(g) \mid [Y, A] = 0\}.$$

Другими словами, мы видим, что $R$ может быть восстановлен из (3) с точностью до произвольного оператора, образ которого лежит в $\mathfrak{g}_A$.

Заметим также, что $\mathfrak{g}_A$ является инвариантным подпространством для $R$. Действительно, если $X \in \mathfrak{g}_A$, то $X$ коммутирует с $B = p(A)$, следовательно, правая часть (3) обращается в нуль, и мы имеем $[R(X), A] = 0$, т. е. $R(X) \in \mathfrak{g}_A$.

С алгебраической точки зрения эти два утверждения означают, что корректно определён индуцированный оператор

$$\tilde{R}\colon \mathrm{so}(g)/\mathfrak{g}_A \to \mathrm{so}(g)/\mathfrak{g}_A, \tag{4}$$

и он восстанавливается из (3) однозначно.

**Замечание 2.** В качестве важного частного случая рассмотрим ситуацию, когда оператор $A$ является *регулярным* в смысле присоединённого представления, т. е. его централизатор $\mathfrak{z}_A$ имеет минимальную размерность. Хорошо известно, что в этом случае централизатор $A$ порождается его степенями $A^k$. Следовательно, подалгебра $\mathfrak{g}_A = \mathfrak{z}_A \cap \mathrm{so}(g)$ тривиальна, поскольку все элементы из $\mathfrak{z}_A$ являются $g$-симметричными, тогда как $\mathrm{so}(g)$ состоит из $g$-кососимметричных матриц. Таким образом, $R$ может быть однозначно восстановлен по $A$ и $B$. А именно, $R(X) = \mathrm{ad}_A^{-1}\mathrm{ad}_B(x)$, что является хорошо известной формулой в теории интегрируемых систем на алгебрах Ли [10].

Интересно отметить, что и в общем случае (т. е. для произвольного $A$) имеется естественная явная формула для «частного решения» уравнения (3).

**Предложение 2.** *Пусть $B = p(A)$. Тогда*

$$R_0(X) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p(A + tX) \tag{5}$$

*является секционным оператором с параметрами $A$ и $B$. В частности, если $A$ регулярен, то $R_0(X) = \mathrm{ad}_A^{-1}\mathrm{ad}_B(X)$, и это единственное решение уравнения* (3).

**Доказательство.** Действительно, дифференцируя тождество

$$[p(A+tX), A+tX] = 0$$

по $t$, получаем

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [p(A+tX), A+tX] = \left[\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p(A+tX), A\right] + [p(A), X],$$

т. е.

$$\left[\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p(A+tX), A\right] = [X, B],$$

что и утверждалось.

Нам также нужно проверить, что $R_0(X) \in \mathrm{so}(g)$, т. е. $R_0(X)^* = -R_0(X)$, где $*$ обозначает «$g$-сопряжение» оператора $L\colon V \to V$:

$$g(L^* u, v) = g(u, Lv), \quad u, v \in V.$$

Поскольку $A^* = A$, $X^* = -X$, $(p(A+tX))^* = p(A^* + tX^*)$, а $\frac{d}{dt}$ и $*$ коммутируют, мы имеем

$$R_0(X)^* = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p(A+tX)^* = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p(A^* + tX^*) =$$
$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p(A - tX) = -\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} p(A+tX) = -R_0(X),$$

что и требовалось. Таким образом, $R_0(X) \in \mathrm{so}(g)$.

Наконец, проверим, что $R_0$ симметричен относительно формы Киллинга. Поскольку форма Киллинга на $\mathrm{so}(g)$ пропорциональна более простой инвариантной форме вида $\langle X, Y\rangle = \mathrm{tr}\, XY$, мы будем использовать для проверки последнюю. Без ограничения общности мы полагаем $p(A) = A^k$ (общий случай следует по линейности). Тогда

$$R_0(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (A+tX)^k = A^{k-1}X + A^{k-2}XA + \ldots + AXA^{k-2} + XA^{k-1},$$

и мы имеем

$$\langle R_0(X), Y\rangle = \mathrm{tr}\big((A^{k-1}X + A^{k-2}XA + \ldots + AXA^{k-2} + XA^{k-1})\cdot Y\big) =$$
$$= \mathrm{tr}\big(X\cdot(YA^{k-1} + AYA^{k-2} + \ldots + A^{k-2}YA + A^{k-1}Y)\big) = \langle X, R_0(Y)\rangle,$$

что и требовалось. □

Ещё одно интересное свойство секционных операторов состоит в том, что они удовлетворяют тождеству Бьянки. Чтобы это увидеть, рассмотрим естественное отождествление $\Lambda^2 V$ и $\mathrm{so}(g)$:

$$\Lambda^2 V \longleftrightarrow \mathrm{so}(g), \quad v \wedge u = v \otimes g(u) - u \otimes g(v). \tag{6}$$

Здесь билинейная форма $g$ понимается как изоморфизм $g\colon V \to V^*$ между «векторами» и «ковекторами». Учитывая это отождествление, мы имеем следующее утверждение.

**Предложение 3.** *Оператор $R_0$, определённый по формуле* (5), *удовлетворяет тождеству Бьянки, т. е.*

$$R_0(u \wedge v)w + R_0(v \wedge w)u + R_0(w \wedge u)v = 0 \quad \text{для любых} \quad u, v, w \in V.$$

**Доказательство.** Легко убедиться, что наш оператор

$$R_0 \colon \Lambda^2 V \simeq \mathrm{so}(g) \to \mathrm{so}(g)$$

может быть записан как

$$R_0(X) = \sum_k C_k X D_k,$$

где $C_k$ и $D_k$ — некоторые $g$-симметричные операторы (в нашем случае это некоторые степени оператора $A$). Таким образом, тождество Бьянки достаточно проверить для операторов вида $X \mapsto CXD$.

Для $X = u \wedge v$ мы имеем

$$C(u \wedge v)Dw = Cu \cdot g(v, Dw) - Cv \cdot g(u, Dw).$$

Аналогично, если мы циклически переставим $u$, $v$ и $w$,

$$C(v \wedge w)Du = Cv \cdot g(w, Du) - Cw \cdot g(v, Du)$$

и

$$C(w \wedge u)Dw = Cw \cdot g(u, Dv) - Cu \cdot g(w, Dv).$$

Складывая эти три выражения и учитывая, что $C$ и $D$ являются $g$-симметричными, мы получаем нуль, что и требовалось. □

Ещё одно полезное свойство относится к случаю, когда $B = p(A) = 0$, например, если $p(\cdot) = p_{\min}(\cdot)$ — минимальный многочлен оператора $A$. Этот случай кажется бессодержательным, однако оператор $R_0(X)$, определённый по (5), оказывается нетривиальным, поскольку производная $p'_{\min}(\cdot)$, в отличие от самого многочлена $p_{\min}(\cdot)$, в нуль отнюдь не обращается!

**Предложение 4.** *Пусть $p(A) = 0$. Тогда образ оператора $R_0$, заданного формулой* (5), *содержится в $\mathfrak{g}_A$, т. е. в централизаторе $A$ в $\mathrm{so}(g)$:*

$$R_0(X) \in \mathfrak{g}_A = \{Y \in \mathrm{so}(g) \mid [Y, A] = 0\} \quad \text{для любого} \quad X \in \mathrm{so}(g).$$

**Доказательство.** Из предложения 2 мы знаем, что $R_0$ удовлетворяет соотношению $[R_0(X), A] = [X, p(A)]$. Поскольку $p(A) = 0$, мы получаем, что $R_0(X) \in \mathfrak{g}_A$. □

**Замечание 3.** Совпадает ли образ оператора

$$R_0(X) = \frac{d}{dt} p_{\min}(A + tX)\Big|_{t=0}$$

с $\mathfrak{g}_A$? Ответ зависит от структуры жордановых блоков, отвечающих каждому из собственных значений оператора $A$. Напомним прежде всего, что для регулярного $A$ подалгебра $\mathfrak{g}_A$ тривиальна, поэтому вопрос становится содержательным только для сингулярных $A$. Непосредственное вычисление показывает, что для полупростых $A$ мы имеем $\operatorname{Im} R_0 = \mathfrak{g}_A$. Это свойство выполняется и в более общей ситуации, если мы дополнительно предположим, что каждое собственное значение $\lambda$ оператора $A$ допускает не более двух жордановых блоков. Говоря точнее, «плохая» ситуация отвечает случаю, когда $\lambda$ допускает два или больше блоков немаксимального размера. Так, например, если $A$ имеет несколько $\lambda$-блоков размера $k$ и один размера $m < k$, то мы по-прежнему имеем $\operatorname{Im} R_0 = \mathfrak{g}_A$.

Как показано выше, $R$ может быть реконструирован из $A$ и $B$ по модулю операторов, образы которых лежат в $\mathfrak{g}_A$. Естественно задать обратный вопрос. Пусть задан секционный оператор $R\colon \operatorname{so}(g) \to \operatorname{so}(g)$, можем ли мы восстановить по нему $A$ и $B$?

**Предложение 5.** *Предположим, что оператор $R\colon \operatorname{so}(g) \to \operatorname{so}(g)$ симметричен и удовлетворяет одновременно двум тождествам*

$$[R(X), A] = [X, B], \quad [R(X), A'] = [X, B'] \tag{7}$$

*где $A, B, A', B' \in \operatorname{Sym}(g)$. Если $A$ и $A'$ непропорциональны (по модулю единичной матрицы), то матрица $B$ пропорциональна $A$, и следовательно, мы имеем, что $[R(X) - k \cdot X, A] = 0$ для некоторой константы $k \in \mathbb{R}$. Более того, если оператор $A$ регулярен, то $R = k \cdot \mathrm{id}$.*

**Доказательство.** Заметим, что добавление скалярной матрицы к $A$ или $B$ никак не сказывается на уравнении (3), поэтому преобразования $A \mapsto A + c \cdot \mathrm{Id}$ и $B \mapsto B + c \cdot \mathrm{Id}$ мы считаем тривиальными. Без потери общности мы будем считать, что след каждой из матриц $A$, $A'$, $B$, $B'$ равен нулю. Кроме того, мы можем комплексифицировать все объекты и рассматривать вместо $\operatorname{Sym}(g)$ и $\operatorname{so}(g)$ пространства симметричных и кососимметричных комплексных матриц.

Пусть $y$ и $z$ — произвольные симметричные матрицы. Тогда $[A', y], [A, z] \in \in \operatorname{so}(g)$, и мы имеем

$$[R([A', y]), A] = \big[[A', y], B\big], \quad [R([A, z]), A'] = \big[[A, z], B'\big].$$

Поскольку оператор $R$ симметричен относительно формы $\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr} XY$, мы получаем, что

$$\begin{aligned}\big\langle \big[[A', y], B\big], z\big\rangle = \langle [R([A', y]), A], z\rangle = \langle R([A', y]), [A, z]\rangle = \langle [A', y], R([A, z])\rangle = \\ = \langle y, [R([A, z]), A']\rangle = \big\langle y, \big[[A, z], B'\big]\big\rangle = \big\langle \big[[B', y], A\big], z\big\rangle.\end{aligned}$$

Поскольку $z$ — произвольная симметричная матрица, мы заключаем, что

$$\big[[A', y], B\big] = \big[[B', y], A\big]. \tag{8}$$

Аналогично

$$\big[[A, y], B'\big] = \big[[B, y], A'\big].$$

Используя тождество Якоби, несложно получить, что $[B, A'] = [A, B']$.

Переписывая (8) в виде

$$y(B'A - A'B) + (AB' - BA')y = B'yA + AyB' - ByA' - A'yB$$

и замечая, что $[B, A'] = [A, B']$ влечёт $B'A - A'B = AB' - BA'$, получаем, что

$$yT + Ty = B'yA + AyB' - ByA' - A'yB,$$

где $T$ обозначает $AB' - BA'$.

Эта формула может рассматриваться как равенство двух линейных операторов, действующих на пространстве симметричных матриц $y \in \mathrm{Sym}(g)$. Чтобы получить из этого соотношения некоторые следствия, мы подсчитаем что-то вроде «следа» этих операторов. Напомним, что мы рассматриваем $A'$, $A$, $B'$, $B$, $y$, $T$ как обычные симметричные (комплексные) матрицы.

Вместо $y$ подставим симметричную матрицу вида $e_i v^\top + v e_i^\top$, где $e_i$ и $v$ — векторы-столбцы ($e_1, \ldots, e_n$ — стандартный ортонормированный базис), затем применим полученный оператор к $e_i$ и просуммируем по $i$. Вот результат:

$$(e_i v^\top + v e_i^\top) T e_i + T(e_i v^\top + v e_i^\top) e_i = B'(e_i v^\top + v e_i^\top) A e_i + \ldots,$$

или, что то же самое,

$$e_i(Tv, e_i) + v(Te_i, e_i) + Te_i(v, e_i) + Tv(e_i, e_i) = B'e_i(Av, e_i) + B'v(Ae_i, e_i) + \ldots.$$

Используя стандартные факты из линейной алгебры

$$\sum_i (Te_i, e_i) = \operatorname{tr} T, \quad \sum_i (e_i, e_i) = n, \quad \sum_i e_i(v, e_i) = v,$$

мы получаем, что

$$Tv + \operatorname{tr} T \cdot v + Tv + n \cdot Tv = B'Av + \operatorname{tr} A \cdot B'v + \ldots.$$

Учитывая, что следы $A$, $A'$, $B$, $B'$ равны нулю, имеем

$$\big((n+2)T + \operatorname{tr} T \cdot \mathrm{Id}\big) v = (B'A + AB' - A'B - BA')v.$$

Поскольку $v$ произволен и $T = B'A - A'B = AB' - BA'$, окончательно получаем

$$nT + \operatorname{tr} T \cdot \mathrm{Id} = 0,$$

но это просто означает, что $T = 0$. Таким образом, мы приходим к тождеству вида

$$B'yA + AyB' = ByA' + A'yB. \tag{9}$$

Остаётся воспользоваться следующим простым утверждением: если $A$, $B$, $A'$, $B'$ симметричны, $A \neq 0$ и (9) выполняется для всех симметричных $y$, то либо $B = k \cdot A$, либо $A' = k \cdot A$ для некоторой константы $k \in \mathbb{R}$.

По нашему предположению $A$ и $A'$ непропорциональны, поэтому мы заключаем, что $B = k \cdot A$, и следовательно, тождество $[R(X), A] = [X, B]$ превращается в $[R(X) - k \cdot X, A] = 0$, что и утверждалось.

Предположим теперь, что оператор $A$ регулярен. Тогда $\mathfrak{g}_A = \{0\}$ (замечание 2) и из $[R(X) - k \cdot X, A] = 0$ следует, что $R(X) = k \cdot X$ для всех $X \in \mathrm{so}(g)$, т. е. $R = k \cdot \mathrm{id}$, что и требовалось доказать. □

**Замечание 4.** Аналогичный результат для секционных операторов первого типа (см. замечание 1) был доказан А. Ю. Коняевым [8].

Следующее утверждение описывает собственные значения секционных операторов. Для регулярных полупростых $A$ этот факт хорошо известен (см. [9, 10]), и наше наблюдение является его естественным обобщением.

**Предложение 6.** *Пусть $R\colon \mathrm{so}(g) \to \mathrm{so}(g)$ — секционный оператор, отвечающий матрицам $A$ и $B = p(A)$, где $p(\cdot)$ — некоторый многочлен. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ — различные собственные значения $A$. Тогда числа*

$$\frac{p(\lambda_i) - p(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j,$$

*являются собственными значениями оператора $R$. Кроме того, если $A$ имеет нетривиальный жорданов $\lambda_i$-блок, то число $p'(\lambda_i)$ также является собственным значением оператора $R$ (здесь $p'$ обозначает производную многочлена $p$).*

**Доказательство.** Поскольку оператор $R$ не всегда однозначно определён, мы не можем найти все его собственные значения, зная только $A$ и $B$. Однако мы можем найти некоторые из них, а именно те, которые отвечают индуцированному оператору $\tilde R$ (см. (4)). Ясно, что собственные значения оператора $\tilde R$ образуют подмножество в спектре $R$, и для наших вычислений мы можем положить $\tilde R = \tilde R_0$, где $R_0$ задан явно формулой (5).

Используя (5), можно легко описать разбиение $\mathrm{so}(g)$ на инвариантные подпространства оператора $R_0$, каждое из которых, как мы увидим ниже, «несёт» лишь одно собственное значение $R_0$ (некоторые из них могут случайно совпадать, но в типичной ситуации эти инвариантные подпространства будут в точности корневыми подпространствами оператора $R_0$).

Для простоты мы будем предполагать, что все собственные значения $\lambda_i$ оператора $A\colon V \to V$ вещественные. Разложение

$$V = \bigoplus_i V_{\lambda_i}$$

на корневые подпространства оператора $A$ естественным образом индуцирует разложение алгебры $\mathrm{so}(g)$

$$\mathrm{so}(g) = \bigoplus_{i \leqslant j} \mathfrak{m}_{ij},$$

где $\mathfrak{m}_{ij}$, которое можно понимать как $V_{\lambda_i} \wedge V_{\lambda_j}$, порождено матрицами вида

$$v \wedge u = v \otimes g(u) - u \otimes g(v) \in \mathrm{so}(g) \quad \text{для} \quad v \in V_{\lambda_i},\ u \in V_{\lambda_j}.$$

Здесь, как и выше, $g(u) \in V^*$ — ковектор, соответствующий вектору $u \in V$ при естественном отождествлении $V$ и $V^*$ при помощи $g$ (т. е. $g(v, u) = g(u)v$).

Это разложение становится более наглядным в матричном виде, если мы используем базис, адаптированный с разложением

$$V = \bigoplus_i V_{\lambda_i}.$$

Тогда

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_s \end{pmatrix},$$

и $\mathrm{so}(g)$ может быть записана в блочном виде

$$\mathrm{so}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1s} \\ M'_{12} & M_{22} & \dots & M_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M'_{1s} & M'_{2s} & \dots & M_{ss} \end{pmatrix} \right\},$$

где $M_{ii} \in \mathrm{so}(g_i)$ (диагональные блоки), а блоки $M_{ij}$, $i < j$ (над диагональю), произвольны и связаны с блоками $M'_{ij}$ (под диагональю) соотношением $g_j M'_{ij} = -M_{ij}^{\top} g_i$. Тогда $\mathfrak{m}_{ii} = \mathrm{so}(g_i) \subset \mathrm{so}(g)$, т. е. $\mathfrak{m}_{ii}$ состоит из диагонального блока $M_{ii}$, в то время как все остальные блоки обращаются в нуль, а $\mathfrak{m}_{ij}$ состоит из пары блоков $M_{ij}$ и $M'_{ij}$ $(i < j)$, остальные нулевые.

Следующие свойства легко проверяются, и детали мы опустим.

1. Каждое подпространство $\mathfrak{m}_{ij}$ является $R_0$-инвариантным.
2. Ограничение $R_0$ на $\mathfrak{m}_{ij}$, $i < j$, имеет единственное собственное значение, равное
$$\frac{p(\lambda_i) - p(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}.$$
3. Ограничение $R_0$ на $\mathfrak{m}_{ii}$ имеет единственное собственное значение, равное $p'(\lambda_i)$.

Первое утверждение проверяется непосредственно. Второе основано на следующем простом факте из матричной алгебры. Пусть $B$ и $C$ — квадратные матрицы размера $k \times k$ и $m \times m$ соответственно. Предположим, что $\lambda$ и $\mu$ — собственные значения $B$ и $C$ соответственно и других собственных значений эти матрицы не имеют. Тогда собственное значение оператора $Y \mapsto CY - YB$, действующего на $(k \times m)$-матрицах $Y$, всего одно, оно равно $\lambda - \mu$. Третье утверждение требует несложного вычисления.

Мы знаем все собственные значения оператора $R_0 \colon \mathrm{so}(g) \to \mathrm{so}(g)$. Напомним, что нас интересуют собственные значения редуцированного оператора $\tilde{R}_0 \colon \mathrm{so}(g)/\mathfrak{g}_A \to \mathrm{so}(g)/\mathfrak{g}_A$. После редукции, однако, некоторые из собственных значений могут исчезнуть. В качестве последнего шага доказательства мы проверим, что все они выживают.

Воспользуемся для этого ещё одним фактом из линейной алгебры (который объясняет, какие именно собственные значения при редукции выживают). Пусть $\varphi \colon V \to V$ — линейный оператор с инвариантным подпространством $U \subset V$. Пусть $\lambda$ — собственное значение $\varphi$ и $V_\lambda \subset V$ — корневое $\lambda$-подпространство оператора $\varphi$. Тогда $\lambda$ является собственным значением индуцированного оператора $\tilde{\varphi} \colon V/U \to V/U$ в том и только в том случае, когда $V_\lambda \not\subset U$.

Таким образом, для того чтобы показать, что указанные нами собственные значения оператора $R_0$ выживают при редукции, достаточно проверить, что $\mathfrak{m}_{ij}$ и $\mathfrak{m}_{ii}$ не содержатся в $\mathfrak{g}_A$. Чтобы в этом убедиться, мы должны просто посмотреть на структуру $\mathfrak{g}_A$. Легко проверить, что $\mathfrak{g}_A$ имеет следующий блочно-диагональный вид (мы используем тот же адаптированный базис, что и выше):

$$\mathfrak{g}_A = \left\{ X = \begin{pmatrix} X_1 & & & \\ & X_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & X_s \end{pmatrix}, \ X_i \in \mathfrak{g}_{A_i} \right\}, \tag{10}$$

где $\mathfrak{g}_{A_i}$ — это централизатор $A_i$ в $\mathrm{so}(g_i)$, т. е.

$$\mathfrak{g}_{A_i} = \{Y \in \mathrm{so}(g_i) \mid YA_i = A_iY\}.$$

Более детальное описание $\mathfrak{g}_A$ можно найти в [30].

Из этого описания видно, что подпространство $\mathfrak{m}_{ij}$ лежит «вне» $\mathfrak{g}_A$ и пересечение $\mathfrak{m}_{ij} \cap \mathfrak{g}_A$ тривиально, так что $\mathfrak{m}_{ij} \not\subset \mathfrak{g}_A$.

Для $\mathfrak{m}_{ii}$ ситуация другая. По определению $\mathfrak{m}_{ii}$ совпадает с $\mathrm{so}(g_i)$, следовательно, $\mathfrak{m}_{ii}$ содержится в $\mathfrak{g}_A$ (см. (10)) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{m}_{ii} = \mathrm{so}(g_i) = \mathfrak{g}_{A_i}$, т. е. когда матрица $A_i$ коммутирует со всеми $g_i$-кососимметричными матрицами $Y \in \mathrm{so}(g_i)$. Однако это происходит только в том случае, когда $A_i$ — скалярная матрица, т. е. $A_i = \lambda_i \cdot \mathrm{Id}$. В противном случае $\mathfrak{g}_{A_i}$ строго меньше, чем $\mathrm{so}(g_i)$. Согласно нашим предположениям (см. предложение 6) $A$ имеет нетривиальный $\lambda_i$-блок, т. е. $A_i$ скалярной не является. Отсюда следует, что $\mathfrak{m}_{ii}$ не содержится в $\mathfrak{g}_A$ и, следовательно, $\mu_i = p'(\lambda)$ является собственным значением оператора $\tilde{R}_0$, что завершает доказательство предложения 6. $\square$

**Замечание 5.** Описанные выше результаты более или менее автоматически переносятся на случай операторов $R\colon \mathrm{u}(g,J) \to \mathrm{u}(g,J)$, заданных на унитарной алгебре Ли (в формуле (3) мы берём $X$ косоэрмитовым, а $A$ и $B$ — эрмитовыми). Этот случай соответствует $\mathbb{Z}_2$-градуировке

$$\mathrm{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{u}(g,J) \oplus \mathrm{Herm}(g,J).$$

Соберём вместе доказанные выше свойства. Пусть $R\colon \mathrm{so}(g) \to \mathrm{so}(g)$ — секционный оператор, отвечающий $A, B \in \mathrm{Sym}(g)$.

- $A$ и $B$ коммутируют, более того, $B = p(A)$ для некоторого многочлена $p(\cdot)$.
- $R_0(X) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} p(A+tX)$ — секционный оператор, отвечающий паре $A$ и $B = p(A)$. Если $A$ регулярен, то секционный оператор, отвечающий $A$ и $B$, определён однозначно, и поэтому $R = R_0$.
- $R_0$ удовлетворяет тождеству Бьянки.
- Если $B = p(A) = 0$, например, $p = p_{\min}$ — минимальный многочлен оператора $A$, то образ $R_0$ содержится в

$$\mathfrak{g}_A = \{Y \in \mathrm{so}(g) \mid [Y, A] = 0\},$$

т. е. в централизаторе $A$ в $\mathrm{so}(g)$. Кроме того, если каждое собственное значение оператора $A$ имеет не более двух жордановых блоков, то образ $R_0$ совпадает с $\mathfrak{g}_A$.

— Предположим, что $R$ одновременно является секционным оператором для ещё одной пары $A', B' \in \mathrm{Sym}(g)$. Если $A \neq \lambda A' + \mu \mathrm{Id}$, то $B$ и $A$ пропорциональны и, следовательно, $[R(X) - k \cdot X, A] = 0$ для некоторой константы $k \in \mathbb{R}$. Более того, если оператор $A$ регулярен, то $R = k \cdot \mathrm{id}$.

— Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — различные собственные значения оператора $A$ и $B = p(A)$. Тогда числа

$$\frac{p(\lambda_i) - p(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j}, \quad i \neq j,$$

являются собственными значениями секционного оператора $R$. Кроме того, если $A$ имеет нетривиальный жорданов $\lambda_i$-блок, то число $p'(\lambda_i)$ также является собственным значением оператора $R$ (здесь $p'$ обозначает производную многочлена $p$).

# 3. Проективно эквивалентные метрики: тензор кривизны как секционный оператор

**Определение 2.** Две метрики $g$ и $\bar{g}$ на многообразии $M$ называются *проективно эквивалентными*, если они имеют одинаковые геодезические, рассматриваемые без учёта параметризации.

В римановом случае локальная классификация проективно эквивалентных пар $g$ и $\bar{g}$ была получена Леви-Чивита [54] в 1896 г. Для псевдоримановых метрик эта задача оказалась гораздо более сложной. Для наиболее важных случаев локальные формы для $g$ и $\bar{g}$ были получены в [5, 12, 20], но окончательный ответ был получен лишь недавно [27, 28, 32, 33].

В аналитическом виде условие проективной эквивалентности метрик $g$ и $\bar{g}$ может быть записано несколькими эквивалентными способами. Один из них основан на $(1,1)$-тензоре $A = A(g, \bar{g})$, определённом формулой

$$A^i_j := \left| \frac{\det(\bar{g})}{\det(g)} \right|^{1/(n+1)} \bar{g}^{ik} g_{kj}, \tag{11}$$

где $\bar{g}^{ik}$ — тензор, обратный к $\bar{g}_{ik}$. Поскольку метрика $\bar{g}$ может быть однозначно восстановлена по $g$ и $A$, а именно

$$\bar{g}(\cdot, \cdot) = \frac{1}{|\det(A)|} g(A^{-1} \cdot, \cdot), \tag{12}$$

условие, что $\bar{g}$ геодезически эквивалентна $g$, может быть записано как система уравнений в частных производных на компоненты $A$. С точки зрения теории дифференциальных уравнений $A$ — более удобный объект, чем $\bar g$, поскольку соответствующая система уравнений на $A$ оказывается линейной [14]. В инвариантной форме она может быть записана следующим образом (здесь $*$ означает сопряжение относительно $g$):

$$\nabla_u A = \frac{1}{2}\big(u \otimes d\ \mathrm{tr}\, A + (u \otimes d\ \mathrm{tr}\, A)^*\big). \tag{13}$$

**Определение 3.** Мы будем говорить, что $(1,1)$-тензор $A$ *согласован* с $g$, если $A$ невырожден, $g$-симметричен и удовлетворяет (13) в каждой точке и для всех касательных векторов $u$.

Неожиданная связь между секционными операторами и геодезически эквивалентными метриками заключается в следующем наблюдении, сделанном в [25]. Заметим прежде всего, что благодаря своим алгебраическим симметриям (косая симметрия по $i$, $j$ и $k$, $l$ и симметрия относительно перестановки $(ij)$ и $(kl)$) тензор кривизны Римана $R_{ij,kl}$ может естественным образом рассматриваться как симметричный оператор $R\colon \mathrm{so}(g) \to \mathrm{so}(g)$ (строго говоря, мы должны поднять индексы $i$ и $k$ при помощи метрики $g$ и рассмотреть тензор вида $R^{i\ k}_{\ j\ l}$). Эквивалентным образом такую интерпретацию можно получить, используя отождествление (6) пространства бивекторов $\Lambda^2 V$ с алгеброй Ли $\mathrm{so}(g)$.

Таким образом, в (псевдо)римановом случае тензор кривизны может пониматься как линейное отображение

$$R\colon \mathrm{so}(g) \to \mathrm{so}(g).$$

В такой постановке, кстати, симметрия $R_{ij,kl} = R_{kl,ij}$ тензора кривизны означает, что $R$ является самосопряжённым относительно формы Киллинга, а «постоянная кривизна» в точности означает, что $R = k \cdot \mathrm{Id}$, $k = \mathrm{const}$. Тем самым наша интерпретация тензора кривизны вполне естественна.

**Теорема 2 [25].** *Если $g$ и $\bar g$ проективно эквивалентны, то тензор кривизны метрики $g$, рассматриваемый как линейное отображение*

$$R\colon \mathrm{so}(g) \to \mathrm{so}(g),$$

*является секционным оператором, т. е. удовлетворяет соотношению*

$$[R(X), A] = [X, B] \quad \text{для всех} \quad X \in \mathrm{so}(g), \tag{14}$$

*где $A$ определён формулой* (11), *а $B$ является гессианом функции $(1/2)\,\mathrm{tr}\, A$, т. е. $B = (1/2)\nabla\, \mathrm{grad}\, \mathrm{tr}\, A$.*

Этот результат является на самом деле алгебраической интерпретацией уравнений на компоненты тензоров кривизны проективно эквивалентных метрик, полученных в координатной форме А. С. Солодовниковым [15] (см. также [14]).

**Доказательство.** Рассмотрим условия согласованности для системы уравнений в частных производных (13). А именно, продифференцируем (13) при помощи $\nabla_v$, а затем подсчитаем $\nabla_v\nabla_u A - \nabla_u\nabla_v A - \nabla_{[v,u]}A$ через $\mathrm{tr}\, A$:

$$\nabla_v\nabla_u A - \nabla_u\nabla_v A - \nabla_{[v,u]}A = [v \otimes g(u) - u \otimes g(v), B].$$

Остаётся заметить, что выражение в левой части этого тождества можно переписать как $[R(u \wedge v), A]$. Отсюда, учитывая, что бивекторы $v \wedge u = v \otimes g(u) - u \otimes g(v)$ порождают $\Lambda^2 V \simeq \mathrm{so}(g)$, получаем (14), что и требовалось. □

В качестве следствия мы немедленно получаем препятствие к существованию проективно эквивалентного партнёра.

**Следствие 1.** *Для того чтобы $g$ допускала проективно эквивалентную ей метрику $\bar{g}$ (непропорциональную $g$, т. е. $\bar{g} \neq \mathrm{const} \cdot g$), тензор кривизны $g$ должен быть секционными оператором для некоторых $A \neq \lambda \cdot \mathrm{Id}$ и $B$.*

**Замечание 6.** Другие интересные связи между проективно эквивалентными метриками и интегрируемыми системами обсуждаются также в [26, 56, 57].

# 4. Проективно эквивалентные метрики: теорема Фубини

Сколько геодезически эквивалентных метрик $\bar{g}$ может допускать заданная (псевдо)риманова метрика $g$? В случае общего положения ответ простой: только метрики вида $\bar{g} = \mathrm{const} \cdot g$ (это можно вывести, например, из следствия 1, утверждающего, что алгебраическая структура тензора кривизны метрики $g$ должна быть весьма специальной). Теорема классификации Леви-Чивита даёт множество нетривиальных примеров проективно эквивалентных пар $g$ и $\bar{g}$ (более точно, двухпараметрическое семейство таких метрик). Может ли такое семейство быть бо́льшим, например, трёхпараметрическим? В римановом случае следующий классический результат Фубини [41, 42] разъясняет ситуацию. Если три существенно различные метрики на $n$-мерном ($n \geqslant 3$) многообразии $M$ имеют одинаковые непараметризованные геодезические и две из них (скажем, $g$ и $\bar{g}$) строго непропорциональны (т. е. все корни характеристического многочлена $\det(\bar{g} - \lambda g)$ различны), то все метрики имеют постоянную секционную кривизну.

Следуя [25], будем говорить, что $g$ и $\bar{g}$ *строго непропорциональны* в точке $x \in M$, если $g$-симметричный $(1,1)$-тензор $G = g^{-1}\bar{g}$ (его можно эквивалентным образом заменить на $A$ из (11)) регулярен в смысле замечания 2.

Если одна из метрик является римановой, то строгая непропорциональность означает, что все собственные значения $G$ имеют кратность 1, и это было одним из ключевым свойств, использованных Фубини. В псевдоримановом случае эта идея не работает, поскольку $G$ (и $A$) могут иметь нетривиальные жордановы блоки. Однако заключение теоремы Фубини остаётся справедливым и для псевдоримановых метрик.

**Теорема 3 [25].** *Пусть $g$, $\bar{g}$ и $\hat{g}$ — три геодезически эквивалентные метрики на связном многообразии $M^n$ размерности $n \geqslant 3$. Предположим, что существует точка, в которой $g$ и $\bar{g}$ строго непропорциональны, а также точка, в которой $g$, $\bar{g}$*

*и $\hat{g}$ линейно независимы. Тогда метрики $g$, $\bar{g}$ и $\hat{g}$ имеют постоянную секционную кривизну.*

**Доказательство.** Мы просто воспользуемся свойством однозначности для секционных операторов (см. предложение 5). Предположим, что нам даны три геодезически эквивалентные метрики $g$, $\bar{g}$ и $\hat{g}$, и выберем точку общего положения $x \in M$. Тогда по теореме 2 тензор кривизны Римана $R$ метрики $g$ в точке $x \in M$ одновременно удовлетворяет двум тождествам:

$$[R(X), A] = [X, B], \quad [R(X), A'] = [X, B']. \tag{15}$$

Мы предполагаем здесь, что $A$ и $A'$ непропорциональны (по модулю единичной матрицы), в противном случае мы имели бы $\hat{g} = \lambda\bar{g} + \mu g$, что запрещается условием линейной независимости трёх метрик. Кроме того, оператор $A$ регулярен в силу строгой непропорциональности метрик $g$ и $\bar{g}$.

С этого момента мы можем забыть о геометрическом смысле $A$, $B$, $A'$, $B'$ и работать с ними как с некоторыми $g$-симметричными операторами. Теперь мы просто применяем предложение 5 и заключаем, что $R = k(x)\cdot\mathrm{id}$, т. е. секционная кривизна $g$ постоянна во всех направлениях. То, что константа $k$ не зависит от точки $x$, следует из хорошо известного факта: если $\dim M \geqslant 3$, то $R = k(x)\cdot\mathrm{id}$ влечёт $k(x) = \mathrm{const}$.

Это рассуждение даёт доказательство в локальной постановке, т. е. в окрестности точки общего положения, в которой выполнены оба упомянутых выше алгебраических условия на $A$ и $A'$. Тот факт, что множество таких точек открыто и всюду плотно в $M$, не является очевидным и требует дополнительных рассуждений (см. [25]). $\square$

# 5. Новый класс групп голономий в псевдоримановой геометрии

В этом разделе мы обсуждаем результаты и идеи из [30].

Пусть $M$ — гладкое риманово многообразие с симметричной аффинной связностью $\nabla$. Напомним, что *группа голономии* связности $\nabla$ — это подгруппа $\mathrm{Hol}(\nabla) \subset \mathrm{GL}(T_xM)$, состоящая из линейных операторов $A\colon T_xM \to T_xM$, являющихся «преобразованиями параллельного переноса» вдоль замкнутых петель $\gamma$, таких что $\gamma(0) = \gamma(1) = x$.

Группы голономии были введены Эли Картаном в 20-х годах прошлого века [37, 38] для изучения римановых симметрических пространств, и с тех пор классификация групп голономии остаётся одной из классических проблем дифференциальной геометрии. Фундаментальные результаты в этом направлении были получены Марселем Берже [22], предложившим программу классификации римановых и неприводимых групп голономии, которая была завершена

Д. В. Алексеевским [1], Р. Брайянтом [34,35], Д. Джойсом [48—50], Л. Швахxофером и С. А. Меркуловым [58]. В качестве хороших исторических обзоров мы рекомендуем [36,60].

Классификация лоренцовых групп голономии была недавно получена Т. Ляйстнером [53] и А. С. Галаевым [45]. Однако в случае произвольной сигнатуры полное описание псевдоримановых групп голономии является сложной проблемой, которая до сих пор остаётся открытой, и даже отдельные примеры представляют интерес (см. [21, 31, 43, 44, 47]). Более полная информация о современном состоянии и достижениях в этой области может быть найдена в обзоре [46].

Следующая теорема описывает новую серию групп голономии на псевдоримановых многообразиях. Как мы увидим, доказательство этого результата существенно использует идею секционных операторов.

**Теорема 4 [30].** *Для каждого $g$-симметричного оператора $A\colon V \to V$ связная компонента единицы $G_A^0$ его централизатора в* $\mathrm{SO}(g)$

$$G_A = \{X \in \mathrm{SO}(g) \mid XA = AX\}$$

*является группой голономии некоторой псевдоримановой метрики.*

Отметим, что в римановом случае эта теорема становится тривиальной: $A$ диагонализуется, и связная компонента $G_A^0$ его централизатора оказывается изоморфной стандартному прямому произведению

$$\mathrm{SO}(k_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{SO}(k_m) \subset \mathrm{SO}(n), \quad \sum k_i \leqslant n,$$

которое, разумеется, является группой голономии. В псевдоримановом случае $A$ может иметь нетривиальные жордановы блоки (более того, возможна любая комбинация жордановых блоков), и структура $G_A^0$ становится более сложной.

**Доказательство.** Мы следуем традиционному подходу к проблеме описания групп голономии, основанному на понятии алгебры Берже.

**Определение 4.** Отображение $R\colon \Lambda^2 V \to \mathrm{gl}(V)$ называется *формальным оператором кривизны*, если оно удовлетворяет тождеству Бьянки

$$R(u \wedge v)w + R(v \wedge w)u + R(w \wedge u)v = 0 \quad \text{для любых} \quad u, v, w \in V. \tag{16}$$

Это определение просто означает, что $R$ как тензор типа $(1,3)$ удовлетворяет обычным алгебраическим свойствам тензора кривизны:

$$R^m_{k\,ij} = R^m_{k\,ji}, \quad R^m_{k\,ij} + R^m_{i\,jk} + R^m_{j\,ki} = 0.$$

**Определение 5.** Пусть $\mathfrak{h} \subset \mathrm{gl}(V)$ — подалгебра Ли. Рассмотрим множество всех формальных тензоров кривизны $R\colon \Lambda^2 V \to \mathrm{gl}(V)$, таких что $\operatorname{Im} R \subset \mathfrak{h}$:

$$\mathcal{R}(\mathfrak{h}) = \{R\colon \Lambda^2 V \to \mathfrak{h} \mid R(u \wedge v)w + R(v \wedge w)u + R(w \wedge u)v = 0,\ u, v, w \in V\}.$$

Мы скажем, что $\mathfrak{h}$ — *алгебра Берже*, если она порождается как векторное пространство образами формальных тензоров кривизны $R \in \mathcal{R}(\mathfrak{h})$, т. е.

$$\mathfrak{h} = \operatorname{span}\{R(u \wedge v) \mid R \in \mathcal{R}(\mathfrak{h}),\ u, v \in V\}.$$

Тест Берже (на который иногда ссылаются как на критерий Берже) — это следующее свойство групп голономии. Пусть $\nabla$ — симметричная аффинная связность на $TM$. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{hol}(\nabla)$ её группы голономии $\mathrm{Hol}(\nabla)$ является алгеброй Берже.

Обычно решение проблемы описания групп голономий состоит из двух частей. Сначала следует попытаться описать все подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$ определённого типа, удовлетворяющие тесту Берже (т. е. подалгебры Берже). Эта часть чисто алгебраическая. Вторая (геометрическая) часть состоит в том, чтобы найти подходящую связность $\nabla$ для заданной алгебры Берже $\mathfrak{h}$, которая реализует $\mathfrak{h}$ как алгебру Ли группы голономии, т. е. $\mathfrak{h} = \mathfrak{hol}(\nabla)$.

Мы будем следовать той же схеме, но в дополнение будем использовать некоторые идеи из проективной дифференциальной геометрии. В качестве частного случая проективной эквивалентности выделим следующий.

**Определение 6.** Две метрики $g$ и $\bar{g}$ называются *аффинно эквивалентными*, если их геодезические совпадают как параметризованные кривые.

Нетрудно увидеть, что это условие просто означает, что связности Леви-Чивита $\nabla$ и $\bar{\nabla}$ метрик $g$ и $\bar{g}$ совпадают, т. е. $\nabla = \bar{\nabla}$ или, что то же самое,

$$\nabla \bar{g} = 0.$$

Если вместо $\bar{g}$ мы введём линейный оператор $A$ (т. е. тензорное поле типа $(1,1)$), используя обычное взаимно-однозначное соответствие $\bar{g} \leftrightarrow A$ между симметричными билинейными формами и $g$-симметричными операторами

$$\bar{g}(\xi, \eta) = g(A\xi, \eta),$$

то классификация аффинно эквивалентных пар $g$ и $\bar{g}$ сводится к классификации пар $g$ и $A$, где $A$ ковариантно постоянен относительно связности Леви-Чивита $\nabla$ метрики $g$ (классификация таких пар была недавно получена Ш. Бубелем [32]).

С другой стороны, существование ковариантно постоянного $(1,1)$-тензорного поля $A$ может быть интерпретировано в терминах группы голономий $\mathrm{Hol}(\nabla)$. Связность $\nabla$ допускает ковариантно постоянное $(1,1)$-тензорное поле тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hol}(\nabla)$ является подгруппой централизатора оператора $A$ в $\mathrm{SO}(g)$:

$$\mathrm{Hol}(\nabla) \subset G_A = \{X \in \mathrm{SO}(g) \mid XAX^{-1} = A\}.$$

В этой формуле под $A$ мы понимаем значение искомого $(1,1)$-тензорного поля в фиксированной точке $x_0 \in M$. Поскольку $A$ предполагается ковариантно постоянным, то выбор $x_0 \in M$ никакой роли не играет.

Естественно предположить, что для метрики общего положения $g$, удовлетворяющей условию $\nabla A = 0$, её группа голономии будет совпадать с группой $G_A$ (точнее, с её связной компонентой единицы). Это просто иная интерпретация утверждения нашей теоремы. Другими словами, мы хотим построить (локальные) примеры псевдоримановых метрик, которые допускают ковариантно постоянные $(1,1)$-тензорные поля с заданной алгебраической структурой, и затем проверить, что их группы голономии максимально возможные, т. е. совпадают с $G_A^0$. Как обычно, нам будет удобнее работать с соответствующей алгеброй Ли $\mathfrak{g}_A$.

Если формально применить теорему 2 к аффинно эквивалентным метрикам $g$ и $\bar{g}$ (или, что то же самое, к парам $g$, $A$[1]) и воспользоваться тем, что $\operatorname{tr} A = \mathrm{const}$, то мы увидим, что $R$ удовлетворяет более простому уравнению

$$[R(X), A] = 0,$$

которое, разумеется, непосредственно следует из $\nabla A = 0$. Это, казалось бы, говорит о том, что предыдущая дискуссия не имеет отношения к тому весьма частному случаю, который мы теперь рассматриваем. Однако, как мы знаем из предложения 4, формула (5) по-прежнему задаёт нетривиальный оператор, если $p(\cdot)$ — нетривиальный многочлен, обладающий свойством $p(A) = 0$, например минимальный многочлен $p_{\min}(\cdot)$ оператора $A$.

Тем самым у нас есть очень хороший кандидат на роль формального тензора кривизны, с помощью которого можно проверить условие теста Берже. Действительно, рассмотрим секционный оператор (с параметрами $A$ и $B = 0$), заданный формулой

$$R\colon \mathrm{so}(g) \to \mathrm{so}(g), \quad R(X) = \frac{d}{dt} p_{\min}(A + tX)\bigg|_{t=0}. \tag{17}$$

Используя отождествление (6) и предложение 3, мы немедленно заключаем, что этот оператор действительно является формальным оператором кривизны. Согласно предложению 4 образ этого оператора лежит в $\mathfrak{g}_A$ и, более того, совпадает с $\mathfrak{g}_A$, если $A$ удовлетворяет некоторым алгебраическим условиям, в частности, если каждому собственному значению $A$ отвечает не более двух жордановых блоков (см. замечание 3). В контексте критерия Берже это означает, что при выполнении этих дополнительных предположений на $A$ централизатор $\mathfrak{g}_A$ является алгеброй Берже.

Чтобы доказать этот результат для произвольного $A$, достаточно воспользоваться $g$-ортогональным разложением $V = \oplus V_\alpha$ на инвариантные подпространства, отвечающие жордановым блокам $J_\alpha$ оператора $A$ (такое разложение всегда существует, см., например, [51,52]). Это разложение индуцирует в свою очередь естественное разбиение

$$\mathrm{so}(g) = \bigoplus_{\alpha \leqslant \beta} \mathfrak{v}_{\alpha\beta}$$

на инвариантные подпространства оператора $R$ (аналогичное разложению

$$\mathrm{so}(g) = \bigoplus_{i \leqslant j} \mathfrak{m}_{ij}$$

из предложения 6 и, говоря точнее, являющееся подразложением последнего). После этого можно продолжать работать с каждой парой жордановых блоков по

[1]Оператор $A$, который мы используем в этом разделе, несколько отличается от оператора из раздела 3, но вывод остаётся прежним.

отдельности и рассмотреть оператор

$$R_{\alpha\beta}\colon \mathrm{so}(g, V_\alpha \oplus V_\beta) \to \mathrm{so}(g, V_\alpha \oplus V_\beta),$$

используя ту же самую формулу (17) с минимальным многочленом матрицы $A|_{V_\alpha \oplus V_\beta}$, состоящей лишь из этих двух жордановых блоков. Этот оператор $R_{\alpha\beta}$ может затем быть продолжен естественным образом на всю алгебру Ли $\mathrm{so}(g)$: мы просто положим его равным нулю на естественном дополнении к $\mathrm{so}(g, V_\alpha \oplus V_\beta)$ в $\mathrm{so}(g) = \mathrm{so}(g, V)$.

Окончательно мы полагаем

$$R_{\mathrm{formal}} = \sum_{\alpha \leqslant \beta} R_{\alpha\beta}\colon \mathrm{so}(g) \to \mathrm{so}(g). \tag{18}$$

Построенный таким способом оператор является «блочной» модификацией оператора (17); единственное отличие в том, что минимальные многочлены выбираются подходящим образом для каждого отдельного инвариантного подпространства $\mathfrak{v}_{\alpha\beta}$. В итоге мы получаем следующее утверждение.

**Предложение 7.** *Оператор $R_{\mathrm{formal}}$, определённый формулой* (18), *является формальным оператором кривизны, образ которого совпадает с $\mathfrak{g}_A$. В частности, $\mathfrak{g}_A$ — алгебра Берже.*

Следующий шаг — геометрическая реализация этой алгебры Берже. Другими словами, для заданного оператора $A\colon V \to V$, где $V$ отождествляется с касательным пространством многообразия $M$ в некоторой фиксированной точке $x_0$, нам нужно найти (псевдо)риманову метрику $g$ на $M$ и $(1,1)$-тензорное поле $A(x)$ (с начальным условием $A(x_0) = A$), такие что

1) $\nabla A(x) = 0$;

2) $\mathfrak{hol}(\nabla) = \mathfrak{g}_A$.

Отметим, что первое условие гарантирует, что $\mathfrak{hol}(\nabla) \subset \mathfrak{g}_A$. С другой стороны, хорошо известно (теорема Амброза—Зингера), что образ оператора кривизны $R_g(x_0)$ содержится в $\mathfrak{hol}(\nabla)$. Таким образом, учитывая предложение 7, второе условие можно заменить следующим:

2′) $R_g(x_0)$ совпадает с формальным тензором кривизны $R_{\mathrm{formal}}$ (18).

Таким образом, нашей целью в этом разделе является построение (хотя бы одного примера) $A(x)$ и $g(x)$, удовлетворяющих условиям 1) и 2′). Мы воспользуемся специальным анзацем для $A$ и $g$. А именно, мы будем предполагать, что $A(x)$ вообще не зависит от $x = (x_1, \dots, x_k)$ (как было показано А. П. Широковым [19], такая система координат всегда существует, если $\nabla A = 0$), т. е.

$$A(x) = A = \mathrm{const},$$

а $g$ квадратична по $x$, более точно,

$$g_{ij}(x) = g^0_{ij} + \sum \mathcal{B}_{ij,pq} x^p x^q, \tag{19}$$

где $\mathcal{B}$ удовлетворяет очевидным условиям симметрии, а именно $\mathcal{B}_{ij,pq} = \mathcal{B}_{ji,pq}$ и $\mathcal{B}_{ij,pq} = \mathcal{B}_{ij,qp}$.

Итак, наша цель — найти $\mathcal{B}_{ij,pq}$. Нам будет удобнее заменить $\mathcal{B}_{ij,pq}$ на $B^{i\ ,p}_{\ j,\ q} = g_0^{i\alpha} g_0^{p\beta} \mathcal{B}_{\alpha j,\beta q}$ и рассматривать это новое $B$ как линейное отображение

$$B\colon \mathrm{gl}(V) \to \mathrm{gl}(V), \quad B(X)^i_q = B^{i\ ,p}_{\ j,\ q} X^j_p,$$

где $V$ понимается как касательное пространство в начале координат $x_0 = 0$.

Нам нужно, чтобы метрика $g$, заданная формулой (19), удовлетворяла следующим трём условиям:

1) оператор $A$ является $g$-симметричным;
2) $\nabla A = 0$;
3) $R_g(x_0) = R_{\mathrm{formal}}$, где $x_0 = 0$ в наших локальных координатах.

Легко проверяется, что в терминах $B$ эти условия могут быть соответственно записаны как

$$AB(X) = B(AX) \quad \text{для любого} \quad X \in \mathrm{gl}(V), \tag{20}$$

$$[B(X), A] + [B(X), A]^* = 0 \quad \text{для любого} \quad X \in \mathrm{gl}(V), \tag{21}$$

$$R_{\mathrm{formal}}(X) = -B(X) + B(X)^* \quad \text{для любого} \quad X \in \mathrm{so}(g, V). \tag{22}$$

Последняя формула (22) на самом деле показывает, что $B$ можно понимать как продолжение $R_{\mathrm{formal}}$ с $\mathrm{so}(g,V)$ на $\mathrm{gl}(V)$ (с точностью до множителя $-1/2$). В нашем случае такое естественное продолжение действительно существует и определяется формальным выражением

$$B = -\frac{1}{2} R_{\mathrm{formal}}(\otimes),$$

которое имеет следующий смысл. Предположим для простоты, что $R_{\mathrm{formal}}$ задан формулой (17), где

$$p_{\min}(t) = \sum_{m=0}^{n} a_m t^m.$$

Тогда $R_{\mathrm{formal}}(X)$ можно записать в виде

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \left( \sum_{m=0}^{n} a_m (A + t \cdot X)^m \right) = \sum_{m=0}^{n} a_m \sum_{j=0}^{m-1} A^{m-1-j} X A^j.$$

Если в этом выражении формально подставить $\otimes$ вместо $X$ (и добавить множитель $-1/2$), то мы получим искомый тензор типа $(2,2)$:

$$B = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{m=0}^{n} a_m \sum_{j=0}^{m-1} A^{m-1-j} \otimes A^j. \tag{23}$$

Отметим, что $B(X)$ для $X \in \mathrm{gl}(V)$ получается из этого выражения обратной заменой $\otimes$ на $X$. После этого замечания проверка условий (20)—(22) производится непосредственно[1], и реализация тем самым завершена. В общем случае,

[1]Интересно отметить, что (21) сразу следует из предложения 4, поскольку при его доказательстве мы нигде не использовали кососимметричность $X$. Утверждение предложения 4 остаётся справедливым для любых $X \in \mathrm{gl}(V)$.

однако, $R_{\mathrm{formal}}$ является комбинацией операторов $R_{\alpha\beta}$, отвечающих каждой паре жордановых блоков оператора $A$. Это, впрочем, не приводит к серьёзным трудностям, так как мы можем использовать ту же самую идею и положить $B = \sum\limits_{\alpha\leqslant\beta} B_{\alpha\beta}$, где $B_{\alpha\beta}$ — тензоры, построенные по $R_{\alpha\beta}$. Поскольку уравнения (20)—(22) линейны по $B$ в естественном смысле, то необходимые нам свойства будут очевидным образом выполнены и для суммы $B = \sum\limits_{\alpha\leqslant\beta} B_{\alpha\beta}$. Отметим, что с геометрической точки зрения $B_{\alpha\beta}$ задаёт метрику прямого произведения $g_{\alpha\beta}\times g_{\mathrm{flat}}$, где $g_{\alpha\beta}$ — метрика на сумме подпространств $V_\alpha\oplus V_\beta$, соответствующая выбранной паре жордановых блоков, а $g_{\mathrm{flat}}$ — плоская метрика на ортогональном дополнении к $V_\alpha\oplus V_\beta$ (компоненты которой постоянны в наших локальных координатах). Теорема доказана. $\square$

## 6. Гипотеза Яно–Обаты о c-проективных векторных полях

В [29] мы используем секционные операторы для изучения глобальных свойств c-проективно эквивалентных метрик. Здесь я хотел бы вкратце упомянуть о некоторых наших наблюдениях, поскольку они могут, по моему мнению, привести к новым приложениям секционных операторов в геометрии.

**Определение 7.** Кривая $\gamma(t)$ на кэлеровом многообразии $(M, g, J)$ называется *$J$-планарной*, если

$$\nabla_\gamma \dot\gamma = \lambda\dot\gamma,$$

где $\lambda\in\mathbb{C}$ — комплексное число (зависящее от $t$), или, что то же самое,

$$\nabla_\gamma \dot\gamma = \alpha\dot\gamma + \beta J\dot\gamma,$$

где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ , а $J$ — комплексная структура на $M$.

**Определение 8.** Две кэлеровы метрики $g$ и $\hat g$ на комплексном многообразии $(M, J)$ называются *c-проективно эквивалентными*, если они имеют одинаковые $J$-планарные кривые.

Свойства c-проективно эквивалентных кэлеровых метрик во многом похожи на свойства метрик, проективно эквивалентных в обычном смысле (см. раздел 3). По аналогии с (11) мы можем ввести линейный оператор

$$A = \left(\frac{\det\hat g}{\det g}\right)^{1/(2(n+1))}\cdot \hat g^{-1} g,$$

где $n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Эквивалентным образом $\hat g = (\det A)^{-1/2} g A^{-1}$. Отметим, что $A$ эрмитов относительно обеих метрик $g$ и $\hat g$.

Мы скажем, что $g$ и $A$ *c-согласованы*, если $A$ эрмитов, а $g$ и $\hat g = (\det A)^{-1/2} g A^{-1}$ c-проективно эквивалентны. Следующий результат был доказан в [6].

**Теорема 5.** *Кэлерова метрика $g$ и эрмитов оператор $A$ c-согласованы тогда и только тогда, когда*
$$\nabla_u A = \mathrm{pr}_{\mathbb{C}}(u \otimes d\, \mathrm{tr}\, A), \tag{24}$$
*где* $\mathrm{pr}_{\mathbb{C}}$ *обозначает ортогональную проекцию на пространство эрмитовых операторов.*

Явная формула для $\mathrm{pr}_{\mathbb{C}}$ такова:
$$\mathrm{pr}_{\mathbb{C}} L = \frac{1}{4}(L + L^* + JLJ + JL^*J).$$

Как и в случае (псевдо)римановой метрики, который обсуждался в разделе 3, тензор кривизны кэлеровой метрики $g$ может естественным образом рассматриваться как оператор
$$R\colon \mathrm{u}(g, J) \to \mathrm{u}(g, J),$$
где $\mathrm{u}(g, J)$ — (псевдо)унитарная алгебра Ли, отвечающая метрике $g$ и комплексной структуре $J$. Замечательным фактом является то, что для c-согласованных $g$ и $A$ оператор $R$ удовлетворяет соотношению
$$[R(X), A] = [X, B] \quad \text{для всех} \quad X \in \mathrm{u}(g, J),$$
где $B = \nabla\, \mathrm{grad}(\mathrm{tr} A)$. Другими словами, $R$ по-прежнему является секционным оператором, но уже в смысле другой алгебры Ли, а именно $\mathrm{u}(g, J)$ вместо $\mathrm{so}(g)$. После теоремы 2 это свойство уже не выглядит удивительным. Ниже совсем кратко мы обсудим небольшую часть работы [29], чтобы объяснить, как это свойство тензора кривизны может быть использовано в c-проективной геометрии.

В [29] обсуждаются две задачи: локальное описание c-проективно эквивалентных метрик и доказательство гипотезы Яно—Обаты, которая говорит о том, что существенные c-проективные векторные поля[1] могут существовать на компактном кэлеровом многообразии лишь в одном специальном случае, когда $M = \mathbb{C}P^n$ со стандартной метрикой Фубини—Штуди.

Доказательство этой гипотезы основано на локальном описании c-проективно эквивалентных метрик, однако основная трудность заключается в «переходе» от явных *локальных* формул для $g_{ij}(x)$ (которые имеют весьма специальный вид, если $g$ допускает существенное c-проективное векторное поле) к *глобальным* выводам. Проблема в том, что $g_{ij}$ сама по себе не имеет простых скалярных (т. е. не зависящих от выбора локальных координат) инвариантов, таких, как, например, собственные значения. Однако такие инварианты могут быть построены по тензору кривизны. Действительно, если мы понимаем $R$ как оператор на $\mathrm{u}(g, J)$, то мы можем рассмотреть его собственные значения как скалярные функции на $M$. Поскольку $M$ компактно, эти функции должны быть ограниченными, и можно попытаться проверить это условие, используя наши локальные формулы. Следующая проблема вычислительная: как посчитать явно

[1] Существенные проективное векторное поле определяется как векторное поле, сохраняющее $J$-планарные кривые, но меняющее связность.

собственные значения такого сложного объекта, как $R$? Именно здесь на помощь приходят свойства секционных операторов. Предложение 6 (точнее, его унитарный аналог, доказанный в [29]) даёт простую формулу для собственных значений. Анализ этих собственных значений, явно подсчитанных таким способом, — один из важных шагов при доказательстве гипотезы.

В качестве заключения несколько слов о возможных дальнейших приложениях секционных операторов. Как было отмечено в разделе 1, секционные операторы $R\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ могут быть естественным образом определены для любой $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{v}$. Обсуждение в этом разделе показывает, что в случае $\mathfrak{g} = \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ и $\mathfrak{h} = \mathrm{u}(p, q)$, $p + q = n$, соответствующие секционные операторы имеют естественную геометрическую интерпретацию. Что происходит в случае других $\mathbb{Z}_2$-градуировок? Отвечают ли соответствующие операторы каким-то интересным геометрическим структурам?

В недавней работе [32] Ш. Бубель получил классификацию ковариантно постоянных $(1, 1)$-тензорных полей не только на псевдоримановых, но и на кэлеровых и гиперкэлеровых многообразиях произвольной сигнатуры. Было бы интересно обобщить формулы (17), (18) и (23), чтобы по аналогии с конструкцией из раздела 5 построить примеры кэлеровых и гиперкэлеровых многообразий с алгебрами голономии вида $\mathfrak{z}_A \cap \mathrm{u}(p, q)$ и $\mathfrak{z}_A \cap \mathrm{sp}(p, q)$.

## Литература

[1] Алексеевский Д. В. Римановы пространства с необычными группами голономии // Функц. анализ и его прил. — 1968. — Т. 2, № 2.— С. 1—10.

[2] Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 883—938.

[3] Болсинов А. В., Борисов А. В. Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли // Матем. заметки. — 2002. — Т. 72, № 1. — С. 11—34.

[4] Болсинов А. В., Коняев А. Ю. Алгебраические и геометрические свойства квадратичных гамильтонианов, задаваемых секционными операторами // Матем. заметки. — 2011. — Т. 90, № 5. — С. 689—702.

[5] Голиков В. И. Геодезические отображения гравитационных полей общего вида // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1963. — Т. 12. — С. 79—129.

[6] Домашев В. В., Микеш Й. К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств // Матем. заметки. — 1978. — Т. 23, № 2. — С. 297—303.

[7] Коняев А. Ю. Бифуркационная диаграмма и дискриминант спектральной кривой интегрируемых систем на алгебрах Ли // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 9. — С. 27—60.

[8] Коняев А. Ю. Однозначность восстановления параметров секционных операторов на простых комплексных алгебрах Ли // Матем. заметки. — 2011. — Т. 90, № 3. — С. 384—393.

[9] Манаков С. В. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики $n$-мерного твёрдого тела // Функц. анализ и его прил. — 1976. — Т. 10, № 4. — С. 93—94.

[10] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396—415.

[11] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1979. — Т. 19. — С. 3—94.

[12] Петров А. З. О геодезических отображениях римановых пространств неопределённой метрики // Учён. зап. Казанск. ун-та. — 1949. — Т. 109, № 3. — С. 4—36.

[13] Рейман А. Г., Семёнов-тян-Шанский М. А. Интегрируемые системы: теоретико-групповой подход. — М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003.

[14] Синюков Н. С. Геодезические отображения римановых пространств. — М.: Наука, 1979.

[15] Солодовников А. С. Проективные преобразования римановых пространств // УМН. — 1956. — Т. 11, № 4. — С. 45—116.

[16] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Групповые неинвариантные симплектические структуры и гамильтоновы потоки на симметрических пространствах // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1983. — Т. 21. — С. 23—83.

[17] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Динамические системы на орбитах линейных представлений групп Ли и полная интегрируемость некоторых гидродинамических систем // Функц. анализ и его прил. — 1983. — Т. 17, № 1. — С. 31—39.

[18] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. — М.: Факториал, 1995.

[19] Широков А. П. Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 102. — С. 464—467.

[20] Aminova A. V. Projective transformations of pseudo-Riemannian manifolds // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 113, no. 3. — P. 367—470.

[21] Bérard-Bergery L., Ikemakhen A. On the holonomy of Lorentzian manifolds // Differential Geometry: Geometry in Mathematical Physics and Related Topics (Los Angeles, CA, 1990). — Providence: Amer. Math. Soc., 1993. — (Proc. Sympos. Pure Math.; Vol. 54). — P. 27—39.

[22] Berger M. Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés Riemanniennes // Bull. Soc. Math. France. — 1955. — Vol. 83. — P. 279—330.

[23] Bloch A. M., Brinzanescu V., Iserles A., Marsden J. E., Ratiu T. S. A class of integrable flows on the space of symmetric matrices // Commun. Math. Phys. — 2009. — Vol. 290. — P. 399—435.

[24] Bolsinov A. V. Commutative families of functions related to consistent Poisson brackets // Acta Appl. Math. — 1991. — Vol. 24. — P. 253—274.

[25] Bolsinov A. V., Kiosak V., Matveev V. S. A Fubini theorem for pseudo-Riemannian geodesically equivalent metrics // J. London Math. Soc. (2). — 2009. — Vol. 80.— P. 341—356.

[26] Bolsinov A. V., Matveev V. S. Geometrical interpretation of Benenti systems // J. Geom. Phys. — 2003. — Vol. 44. — P. 489—506.

[27] Bolsinov A. V., Matveev V. S. Splitting and gluing lemmas for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics // Trans. Amer. Math. Soc. — 2011. — Vol. 363, no. 8. — P. 4081—4107.

[28] Bolsinov A. V., Matveev V. S. Local normal forms for geodesically equivalent pseudo-Riemannian metrics. — 2013. — arXiv:1301.2492v2.

[29] Bolsinov A. V., Matveev V. S., Rosemann S. Local normal forms for c-projectively equivalent metrics and proof of the Yano—Obata conjecture in arbitrary signature. Proof of the projective Lichnerowicz conjecture for Lorentzian metrics. — 2015. — `arXiv:1510.00275v1`.

[30] Bolsinov A., Tsonev D. On a new class of holonomy groups in pseudo-Riemannian geometry // J. Diff. Geom. — 2014. — Vol. 97. — P. 377—394.

[31] Boubel C. On the holonomy of Lorentzian metrics // Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. — 2007. — Vol. 16, no. 3. — P. 427—475; ENS Lyon preprint No. 323. — 2004.

[32] Boubel C. The algebra of the parallel endomorphisms of a germ of pseudo-Riemannian metric. — 2013. — `arXiv:1207.6544v5`.

[33] Boubel C. On the algebra of parallel endomorphisms of a pseudo-Riemannian metric // J. Differential Geom. — 2015. — Vol. 99, no. 1. — P. 77—123.

[34] Bryant R. A survey of Riemannian metrics with special holonomy groups // Proc. ICM Berkeley. — Amer. Math. Soc., 1987. — P. 505—514.

[35] Bryant R. Metrics with exceptional holonomy // Ann. Math. — 1987. — Vol. 126. — P. 525—576 .

[36] Bryant R. Classical, exceptional, and exotic holonomies: A status report // Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de Marcel Berger, Luminy, France, 12—18 juillet 1992 // A. L. Besse, ed. — Paris: Soc. Math. France, 1996. — (Sémin. Congr.; Vol. 1). — P. 93—165.

[37] Cartan É. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés // Acta Math. — 1926. — Vol. 48. — P. 1—42; Oeuvres complétes. Tome III, vol. 2. — P. 997—1038.

[38] Cartan É. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann // Bull. Soc. Math. France. — 1926. — Vol. 54. — P. 214—264; 1927. — Vol. 55. — P. 114—134; Oeuvres complétes. Tome I, vol. 2. — P. 587—659.

[39] Fomenko A. T. Symplectic Geometry. Methods and Applications. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1988; 1995.

[40] Fomenko A. T., Trofimov V. V. Integrable Systems on Lie Algebras and Symmetric Spaces. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1988.

[41] Fubini G. Sui gruppi transformazioni geodetiche // Mem. Acc. Torino. — 1903. — Vol. 53. — P. 261—313.

[42] Fubini G. Sulle coppie di varieta geodeticamente applicabili // Rend. Acc. Lincei. — 1905. — Vol. 14. — P. 678—683 (1° Sem.); P. 315—322 (2° Sem.).

[43] Galaev A. S. Classification of connected holonomy groups of pseudo-Kählerian manifolds of index 2. — 2005. — `arXiv:math.DG/0405098v2`.

[44] Galaev A. The space of curvature tensors for holonomy algebras of Lorentzian manifolds // Differential Geom. Appl. — 2005. — Vol. 22, no. 1. — P. 1—18.

[45] Galaev A. Metrics that realize all Lorentzian holonomy algebras // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. — 2006. — Vol. 3, no. 5—6. — P. 1025—1045.

[46] Galaev A. S., Leistner T. Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications // Recent Developments in Pseudo-Riemannian Geometry / D. V. Alekseevsky, H. Baum, eds. — Zürich: Eur. Math. Soc., 2008. — (ESI Lect. Math. Phys.). — P. 53—96.

[47] Ikemakhen A. Examples of indecomposable non-irreducible Lorentzian manifolds // Ann. Sci. Math. Québec. — 1996. — Vol. 20, no. 1. — P. 53—66.

[48] Joyce D. Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy $G_2$. I // J. Differential Geom. — 1996. — Vol. 43. — P. 291—328.

[49] Joyce D. Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy $G_2$. II // J. Differential Geom. — 1996. — Vol. 43. — P. 329—375.

[50] Joyce D. A new construction of compact 8-manifolds with holonomy Spin(7) // J. Differential Geom. — 1999. — Vol. 53. — P. 89—130.

[51] Lancaster P., Rodman L. Canonical forms for hermitian matrix pairs under strict equivalence and congruence // SIAM Rev. — 2005. — Vol. 47. — P. 407—443.

[52] Leep D. B., Schueller L. M. Classication of pairs of symmetric and alternating bilinear forms // Exposition. Math. — 1999. — Vol. 17, no. 5. — P. 395—414.

[53] Leistner T. On the classification of Lorentzian holonomy groups // J. Differential Geom. — 2007. — Vol. 76, no. 3. — P. 423—484.

[54] Levi-Civita T. Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche // Ann. Mat. Pura Appl., Ser. 2ª. — 1896. — Vol. 24. — P. 255—300.

[55] Marsden J. E., Ratiu T. S. Introduction to Mechanics and Symmetry. — New York: Springer, 1999.

[56] Matveev V. S., Topalov P. J. Trajectory equivalence and corresponding integrals // Regular and Chaotic Dynamics. — 1998. — Vol. 3, no. 2. — P. 30—45.

[57] Matveev V. S., Topalov P. J. Geodesic equivalence via integrability // Geom. Dedicata. — 2003. — Vol. 96. — P. 91—115.

[58] Merkulov S., Schwachhöfer L. Classification of irreducible holonomies of torsion-free affine connections // Ann. Math. — 1999. — Vol. 150. — P. 77—149.

[59] Perelomov A. M. Integrable systems of classical mechanics and Lie algebras. Vol. I. — Basel: Birkhäuser, 1990.

[60] Schwachhöfer L. Connections with irreducible holonomy representations // Adv. Math. — 2001. — Vol. 160, no. 1. — P. 1—80.