О неподвижных точках многозначных отображений ациклического типа*

Б. Д. ГЕЛЬМАН
Воронежский государственный университет
e-mail: gelman_boris@mail.ru

В. В. ОБУХОВСКИЙ
Воронежский государственный педагогический университет
e-mail: valerio-ob2000@mail.ru

УДК 515.126

Ключевые слова: многозначное отображение, неподвижная точка, ацикличное множество, вьеторисовское отображение.

Аннотация

Приводятся новые теоремы о неподвижной точке для многозначных отображений ациклического типа, включая нелинейную альтернативу для отображения, заданного на открытом множестве.

Abstract

B. D. Gel'man, V. V. Obukhovskii, On fixed points of acyclic type multivalued maps, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 3, pp. 47—59.

We present new fixed point theorems for acyclic type multivalued maps, including a nonlinear alternative for a map defined on an open set.

Посвящается юбилею академика
Анатолия Тимофеевича Фоменко

1. Введение

Теория неподвижных точек многозначных отображений с ацикличными значениями берёт своё начало от известной работы С. Эйленберга и Д. Монтгомери [8], в которой было доказано обобщение теоремы Лефшеца—Хопфа. В последующие десятилетия эта теория развивалась в различных направлениях (см., например, [1, 2, 9—11] и др.). В последние годы интерес к этой тематике усилился в связи с важными и интересными приложениями в теории дифференциальных включений и управляемых систем (см., например, [9, 11]). Отметим, что

*Работа поддержана грантами РФФИ 14-01-00468 и 13-01-00041.

при этом неподвижные точки традиционно изучаются для отображений, определённых на замкнутых множествах. В настоящей статье приводится несколько новых теорем о неподвижной точке многозначных отображений ациклического типа, среди которых теорема о неподвижной точке для многозначных отображений, определённых на открытом множестве (см. теорему 4). Данная работа естественно продолжает исследования авторов [1, 2, 4].

2. Основные определения

Пусть M — подмножество метрического пространства X и $H^*(M)$ обозначает функтор когомологий Александера—Чеха множества M с коэффициентами в группе целых чисел $\mathbb{Z}$ (см., например, [7]). Множество M называется *ацикличным*, если $H^0(M) \approx \mathbb{Z}$, а $H^k(M) = 0$ для любого $k > 0$.

Пусть X, Y и Z — метрические пространства.

Определение 1 (см., например, [9]). Отображение $f\colon X \to Y$ называется вьеторисовским, если выполнены следующие условия:

1) f непрерывное, сюръективное и собственное (т. е. для любого компакта $K \subset Y$ множество $f^{-1}(K)$ также является компактом);
2) для любой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ является ацикличным.

Отметим следующие свойства вьеторисовских отображений.

Предложение 1.

1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — вьеторисовское отображение. Тогда для любого множества $B \subset Y$ отображение*
$$f|_{f^{-1}(B)}\colon f^{-1}(B) \to B$$
также является вьеторисовским.
2. *Пусть $f_1\colon X \to Y$ и $f_2\colon Y \to Z$ — вьеторисовские отображения. Тогда их композиция $f_2 \circ f_1\colon X \to Z$ также является вьеторисовским отображением.*

Пусть A — замкнутое подмножество в X, B — замкнутое подмножество в Y. Отображение f является непрерывным отображением пары (X, A) в пару (Y, B), если $f\colon X \to Y$ и $f(A) \subset B$. Отображение пар будем обозначать $f\colon (X, A) \to (Y, B)$.

Справедлива следующая теорема (см., например, [6]).

Теорема 1 (Л. Фиторис, Э. Г. Бегл). *Пусть $f\colon \big(X, f^{-1}(B)\big) \to (Y, B)$ — вьеторисовское отображение. Тогда для любого $i \geqslant 0$ индуцированный гомоморфизм когомологий $f^*\colon H^i(Y, B) \to H^i\big(X, f^{-1}(B)\big)$ является изоморфизмом.*

Нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $f\colon (X, A) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ — непрерывное отображение и индуцированный гомоморфизм $f^*\colon H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^n(X, A)$ ненулевой. Тогда существует точка $x_0 \in X \setminus A$, такая что $f(x_0) = 0$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда отображение f можно представить в виде композиции $f = i \circ \tilde{f}$, где $\tilde{f}\colon (X, A) \to (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, а i — отображение вложения $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ в $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Так как

$$H^n(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = 0,$$

это доказывает лемму. □

3. Неподвижные точки многозначных отображений

Напомним некоторые понятия (см., например, [3]). *Многозначное отображение* (или *мультиотображение*) метрического пространства (X, ϱ_X) в метрическое пространство (Y, ϱ_Y) — это соответствие $F\colon X \multimap Y$, при котором каждой точке $x \in X$ отвечает непустое подмножество $F(x) \subset Y$, называемое *значением точки* x. Если $A \subset X$, то образом этого множества будем называть множество $F(A) = \bigcup\limits_{x \in A} F(x)$. В дальнейшем если значения всех точек при действии мультиотображения F являются компактными множествами, то, обозначая через $K(Y)$ *совокупность всех непустых компактных подмножеств* Y, будем записывать это следующим образом: $F\colon X \to K(Y)$.

Мультиотображение $F\colon X \to K(Y)$ называется *полунепрерывным сверху в точке* $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что $\varrho_X(x, x') < \delta$ влечёт $F(x') \subset V_\varepsilon\big(F(x)\big)$, где V_ε обозначает ε-окрестность множества. Мультиотображение F, полунепрерывное сверху в каждой точке $x \in X$, называется *полунепрерывным сверху*.

Пусть $X \subset Y$, $F\colon X \to K(Y)$ — некоторое мультиотображение. Точка $x_\circ$ называется *неподвижной точкой мультиотображения* F, если $x_\circ \in F(x_\circ)$.

Графиком мультиотображения $F\colon X \to K(Y)$ называется множество

$$\Gamma_X(F) = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in F(x)\} \subset X \times Y.$$

Определены естественные проекции

$$t\colon \Gamma_X(F) \to X, \quad t(x, z) = x,$$

и

$$r\colon \Gamma_X(F) \to Y, \quad r(x, z) = z.$$

Ясно, что для любого $x \in X$ справедливо равенство

$$F(x) = r\big(t^{-1}(x)\big).$$

Таким образом, мультиотображение F (полунепрерывное сверху мультиотображение F) определяет пятёрку $(X, Y, \Gamma_X(F), t, r)$, такую что отображение t сюръективно и множество $t^{-1}(x)$ компактно для любой точки $x \in X$ (соответственно отображение t сюръективно и собственно, а образ $(t, r)\big(\Gamma_X(F)\big)$ замкнут в $X \times Y$).

Справедливо и обратное, а именно если задана пятёрка (X, Y, Z, p, q), где X, Y, Z — метрические пространства, $p\colon Z \to X$, $q\colon Z \to Y$ — непрерывные отображения, причём p сюръективно и множество $p^{-1}(x)$ компактно для любой точки $x \in X$ (отображение p сюръективно и собственно, а образ $(p,q)(Z)$ замкнут в $X \times Y$), то равенство $F(x) = q\big(p^{-1}(x)\big)$ задаёт мультиотображение $F\colon X \to K(Y)$ (соответственно полунепрерывное сверху мультиотображение $F\colon X \to K(Y)$).

Очевидно, что одно и то же мультиотображение может определяться разными пятёрками. Это вытекает из того, что отображение $(p,q)\colon Z \to X \times Y$ не обязано быть инъективным. Инъективным является отображение $(t,r)\colon \Gamma_X(F) \to X \times Y$, поэтому пятёрку $(X, Y, \Gamma_X(F), t, r)$ будем называть *каноническим представлением мультиотображения* F.

Отметим, что мультиотображение с замкнутым графиком называется *замкнутым*. Полунепрерывное сверху мультиотображение $F\colon X \to K(Y)$ является замкнутым. Если область значений $F(X) \subset Y$ относительно компактна, то верно и обратное.

Пусть E — банахово пространство, $X \subset E$ — множество, $F\colon X \to K(E)$ — мультиотображение. Мультиотображение

$$\Phi\colon X \to K(E), \quad \Phi(x) = x - F(x),$$

называется *многозначным векторным полем* (*мультиполем*), *соответствующим* F. Очевидно, что если мультиотображение F задаётся пятёркой (X, E, Q, p, q), то соответствующее ему мультиполе Φ задаётся пятёркой $(X, E, Q, p, p - q)$.

Пусть X — замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, A — замкнутое подмножество в X, $F\colon X \to K(\mathbb{R}^n)$ — многозначное отображение, заданное произвольной пятёркой $(X, \mathbb{R}^n, Q, p, q)$.

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 2. *Пусть полунепрерывное сверху мультиотображение F не имеет неподвижных точек на A. Если гомоморфизм*

$$(p-q)^*\colon H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^n\big(Q, p^{-1}(A)\big)$$

ненулевой, то мультиотображение F имеет неподвижную точку в $X \setminus A$.

Доказательство этой леммы вытекает из леммы 1.

Лемма 3. *Пусть $(X, \mathbb{R}^n, \Gamma_X(F), t, r)$ — каноническое представление полунепрерывного сверху мультиотображения F, $(X, \mathbb{R}^n, Q, p, q)$ — некоторое другое представление F. Пусть F не имеет неподвижных точек на A. Если гомоморфизм*

$$(p-q)^*\colon H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^n\big(Q, p^{-1}(A)\big)$$

ненулевой, то гомоморфизм

$$(t-r)^*\colon H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to H^n\big(\Gamma_X(F), \Gamma_A(F)\big)$$

также ненулевой (*здесь $\Gamma_A(F)$ — график F над A*).

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$(p, q)\colon Q \to \Gamma_X(F), \quad (p, q)(z) = \bigl(p(x), q(x)\bigr).$$

Тогда $p-q = (t-r)\circ(p, q)$. Следовательно, если гомоморфизм $(p-q)^*$ ненулевой, то и гомоморфизм $(t-r)^*$ также будет ненулевым. $\square$

Пусть $\mathcal{B} = B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0, его граница — сфера $\mathcal{S} = \partial\mathcal{B}$.

Теорема 2. *Пусть $F\colon \mathcal{B} \to K(\mathbb{R}^n)$ — полунепрерывное сверху мультиотображение, удовлетворяющее следующим условиям*:

1) $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{B}$;
2) *гомоморфизм*
$$t^*\colon H^n(\mathcal{B}, \mathcal{S}) \to H^n\bigl(\Gamma_{\mathcal{B}}(F), \Gamma_{\mathcal{S}}(F)\bigr) \tag{1}$$
ненулевой.

Тогда мультиотображение F имеет неподвижную точку.

Доказательство. Если мультиотображение F имеет неподвижную точку на сфере $\mathcal{S}$, то теорема доказана. Пусть F не имеет неподвижных точек на $\mathcal{S}$. Тогда определено отображение

$$t - r\colon \bigl(\Gamma_{\mathcal{B}}(F), \Gamma_{\mathcal{S}}(F)\bigr) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Покажем, что гомоморфизм, индуцированный этим отображением, ненулевой. Пусть отображение $\varphi\colon \Gamma_{\mathcal{B}}(F) \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ определено условием

$$\varphi(x, y, \lambda) = x - (1-\lambda)y - \lambda x_0.$$

Нетрудно убедиться, что по условию 1) $\varphi(x, y, \lambda) \neq 0$ для любых $(x, y) \in \Gamma_{\mathcal{S}}(F)$ и $\lambda \in [0,1]$. Тогда отображение

$$\varphi\colon (\Gamma_{\mathcal{B}}(F) \times [0,1], \Gamma_{\mathcal{S}}(F) \times [0,1]) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

является гомотопией, соединяющей отображения $\hat{t}$ и $t - r$, где

$$\hat{t}, t - r\colon \bigl(\Gamma_{\mathcal{B}}(F), \Gamma_{\mathcal{S}}(F)\bigr) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad \hat{t}(x) = s\Bigl(i\bigl(t(x)\bigr)\Bigr)$$

(здесь $i\colon (\mathcal{B}, \mathcal{S}) \subset (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\})$ — отображение вложения, $s\colon (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}) \to$ $\to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ — отображение сдвига). Так как вложение i и сдвиг s индуцируют изоморфизмы групп когомологий и гомоморфизм t^* ненулевой, то ненулевым является и гомоморфизм $\hat{t}^* = (t-r)^*$. Следовательно, по лемме 2 отображение $t - r$ имеет ноль в множестве $\Gamma_{\mathcal{B}}(F) \setminus \Gamma_{\mathcal{S}}(F)$, т. е. F имеет неподвижную точку в $\mathcal{B} \setminus \mathcal{S}$. Теорема доказана. $\square$

Некоторые условия нетривиальности гомоморфизма (1) были получены в [1]. Справедливо следующее простое свойство.

Предложение 2. *Пусть мультиотображения $F_0, F_1\colon \mathcal{B} \to K(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условию*

$$F_0(x) \subset F_1(x) \ \text{ для любого } \ x \in \mathcal{B}.$$

Тогда если гомоморфизм (1) *для мультиотображения* F_0 *является ненулевым, то ненулевым будет аналогичный гомоморфизм, построенный для мультиотображения* F_1.

Рассмотрим ещё один подход к изучению гомоморфизма (1). Пусть (X, ϱ_X), (Y, ϱ_Y) — метрические пространства, в пространстве $X \times Y$ определим метрику

$$\varrho\big((x_1, y_1); (x_2, y_2)\big) = \max\{\varrho_X(x_1, x_2); \varrho_Y(y_1, y_2)\}.$$

Пусть $F \colon X \to K(\mathbb{R}^n)$ — полунепрерывное сверху мультиотображение.

Определение 2. Полунепрерывное сверху мультиотображение

$$F_\varepsilon \colon X \to K(\mathbb{R}^n)$$

называется ε-аппроксимацией мультиотображения F, если

$$\Gamma_X(F_\varepsilon) \subset V_\varepsilon\big(\Gamma_X(F)\big),$$

где $V_\varepsilon\big(\Gamma_X(F)\big)$ — ε-окрестность множества $\Gamma_X(F)$ в $X \times Y$.

Предложение 3. *Пусть X — компакт, A — замкнутое подмножество в X, $F \colon X \to K(\mathbb{R}^n)$ — полунепрерывное сверху мультиотображение. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует многозначная ε-аппроксимация F_ε, такая что порождённый ею гомоморфизм*

$$t_\varepsilon^* \colon H^n(X, A) \to H^n\big(\Gamma_X(F_\varepsilon), \Gamma_A(F_\varepsilon)\big) \tag{2}$$

ненулевой, то гомоморфизм

$$t^* \colon H^n(X, A) \to H^n\big(\Gamma_X(F), \Gamma_A(F)\big)$$

также ненулевой.

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел, такая что

$$\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0.$$

Обозначим

$$M_i = \overline{V_{\varepsilon_i}\big(\Gamma_X(F)\big)} \subset X \times \mathbb{R}^n, \quad N_i = (M_i \cap A) \times \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, что если $i < j$, то $\Gamma_X(F) \subset M_j \subset M_i$ и $\Gamma_A(F) \subset N_j \subset N_i$. Так как F является полунепрерывным сверху мультиотображением с компактными значениями и компактной областью определения, то множества M_i, N_i, $\Gamma_X(F)$ и $\Gamma_A(F)$ являются компактами (см. [3]), причём

$$\Gamma_X(F) = \bigcap_i M_i, \quad \Gamma_A(F) = \bigcap_i N_i.$$

Тогда в силу свойства слабой непрерывности теории когомологий Александера—Чеха (см. [7, с. 411]) отображения вложения $\alpha_i \colon \big(\Gamma_X(F), \Gamma_A(F)\big) \subset (M_i, N_i)$ индуцируют изоморфизм

$$\{\alpha_i^*\} \colon \varinjlim H^n(M_i, N_i) \approx H^n\big(\Gamma_X(F), \Gamma_A(F)\big).$$

Пусть $\bar{t}_i \colon (M_i, N_i) \to (X, A)$ — отображение проектирования на первую координату. Тогда имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
(X,A) & & (M_i, N_i) \arrow[ll, "\bar{t}_i"'] \\
& & \bigl(\Gamma_X(F), \Gamma_A(F)\bigr) \arrow[ull, "t"] \arrow[u, "\alpha_i"']
\end{tikzcd} .$$

Предположим, что гомоморфизм t^* нулевой. Тогда по определению прямого предела существует такой номер i_0, что нулевым будет гомоморфизм $\bar{t}^*_{i_0} \colon H^n(X, A) \to H^*(M_{i_0}, N_{i_0})$.

С другой стороны, справедлива коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(X,A) & & (M_{i_0}, N_{i_0}) \arrow[ll, "\bar{t}_{i_0}"'] \\
& & \bigl(\Gamma_X(F_{\varepsilon_{i_0}}), \Gamma_A(F_{\varepsilon_{i_0}})\bigr) \arrow[ull, "t_{\varepsilon_{i_0}}"] \arrow[u, "\beta_{i_0}"']
\end{tikzcd} ,$$

где $\beta_{i_0} \colon \bigl(\Gamma_X(F_{\varepsilon_{i_0}}), \Gamma_A(F_{\varepsilon_{i_0}})\bigr) \subset (M_{i_0}, N_{i_0})$ — соответствующее отображение вложения. Так как по условию гомоморфизм $t^*_{\varepsilon_{i_0}}$ ненулевой, то и гомоморфизм $\bar{t}^*_{i_0}$ также должен быть ненулевым. Полученное противоречие и доказывает утверждение. □

Рассмотрим одно следствие из предложения 3. Для $A, B \subset \mathbb{R}^n$ будем обозначать через

$$\varrho_*(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|$$

отклонение множества A от множества B (см., например, [3]).

Лемма 4. *Пусть X — компакт и $F \colon X \to K(\mathbb{R}^n)$ — полунепрерывное сверху мультиотображение, $\{F_m\}_{m=1}^{\infty}$, $F_m \colon X \to K(\mathbb{R}^n)$, — последовательность полунепрерывных сверху мультиотображений, удовлетворяющих следующему условию:*

(A1) *если последовательность $\{x_k\} \subset X$ сходится к точке x_0, то для любой подпоследовательности $\{F_{m_k}\}$ имеем*

$$\lim_{k \to \infty} \varrho_*\bigl(F_{m_k}(x_k), F(x_0)\bigr) = 0. \tag{3}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $m_0 = m_0(\varepsilon)$, такой что F_m является ε-аппроксимацией F, как только $m \geqslant m_0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, последовательность $\{x_k\} \subset X$ и подпоследовательность $\{F_{m_k}\}$, такие что

$$\varrho_*\big(F_{m_k}(x_k), F(x')\big) \geqslant \varepsilon_0$$

для любой точки $x' \in V_{\epsilon_0}(x_k)$. В силу компактности множества X без ограничения общности можно считать, что $\{x_k\} \to x_0$. Тогда начиная с некоторого m_0 имеем $x_k \in V_{\varepsilon_0}(x_0)$, $k \geqslant m_0$. По предположению получаем $\varrho_*\big(F_{m_k}(x_k), F(x_0)\big) \geqslant \varepsilon_0$, что противоречит (3). Лемма доказана. □

Пусть, как и раньше, $\mathcal{B}$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{S} = \partial\mathcal{B}$.

Теорема 3. *Пусть полунепрерывное сверху мультиотображение*

$$F\colon \mathcal{B} \to K(\mathbb{R}^n)$$

удовлетворяет следующему условию:

(L1) *для любого замкнутого шара $B \subset \operatorname{Int}\mathcal{B}$, $S = \partial B$, гомоморфизм*

$$t_B^*\colon H^n(B, S) \to H^n\big(\Gamma_B(F), \Gamma_S(F)\big) \tag{4}$$

ненулевой.

Тогда если $F(\mathcal{S}) \subset \mathcal{B}$, то мультиотображение F имеет неподвижную точку.

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $\mathcal{B} = B_R(0)$ — замкнутый шар с центром в нуле радиуса $R > 0$. Рассмотрим последовательность мультиотображений $\{F_m\}_{m=1}^{\infty}$, определённых по правилу

$$F_m(x) = F\left(\frac{m}{m+1}x\right).$$

Опишем свойства отображений F_m. Легко убедиться, что F_m является полунепрерывным сверху мультиотображением (см., например, [3]). Отметим также, что график $\Gamma_{\mathcal{B}}(F_m)$ гомеоморфен графику $\Gamma_{B_m}(F)$ над шаром $B_m = B_{mR/(m+1)}(0)$ и гомеоморфизм задаётся отображением

$$\alpha_m\colon \Gamma_{\mathcal{B}}(F_m) \to \Gamma_{B_m}(F), \quad \alpha_m(x, y) = \left(\frac{m}{m+1}x, y\right).$$

Пусть $t_m\colon \Gamma_{\mathcal{B}}(F_m) \to \mathcal{B}$, $\hat{t}_m\colon \Gamma_{B_m}(F) \to B_m$ — естественные проекции на первую координату. Имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{B}, \mathcal{S}) \arrow[d, "\beta_m"'] & \big(\Gamma_{\mathcal{B}}(F_m), \Gamma_{\mathcal{S}}(F_m)\big) \arrow[l, "t_m"'] \arrow[d, "\alpha_m"] \\
(B_m, \partial B_m) & \big(\Gamma_{B_m}(F), \Gamma_{\partial B_m}(F)\big) \arrow[l, "\hat{t}_m"']
\end{tikzcd},$$

где

$$\beta_m(x) = \frac{m}{m+1}x -$$

гомеоморфизм. Так как гомеоморфизмы α_m и β_m порождают изоморфизмы групп когомологий, а гомоморфизм $\hat{t}_m^*$ ненулевой по предположению, то ненулевым будет и гомоморфизм

$$t_m^*\colon H^n(\mathcal{B},\mathcal{S}) \to H^n\bigl(\Gamma_{\mathcal{B}}(F_m),\Gamma_{\mathcal{S}}(F_m)\bigr).$$

Проверим теперь, что последовательность мультиотображений $\{F_m\}$ удовлетворяет условию (A1) из леммы 4. Пусть последовательность $\{x_k\} \subset X = \mathcal{B}$ сходится к точке x_0, и пусть $\{F_{m_k}\}$ — некоторая подпоследовательность последовательности $\{F_m\}$. Тогда

$$F_{m_k}(x_k) = F\left(\frac{m_k}{m_k+1}x_k\right).$$

Очевидно, что

$$\left\{y_k = \frac{m_k}{m_k+1}x_k\right\} \to x_0.$$

Тогда в силу полунепрерывности сверху мультиотображения F имеем

$$\lim_{k\to\infty} \varrho_*\bigl(F_{m_k}(x_k), F(x_0)\bigr) = \lim_{k\to\infty} \varrho_*\bigl(F(y_k), F(x_0)\bigr) = 0,$$

что и доказывает выполнение условия (A1) из леммы 4. Тогда по лемме 4 для любого $\varepsilon > 0$ существует номер m_0, такой что F_{m_0} является ε-аппроксимацией мультиотображения F. Теперь из предложения 3 следует, что гомоморфизм (1) является ненулевым, и доказываемое утверждение вытекает из теоремы 2. □

Следствие 1. *Пусть полунепрерывное сверху мультиотображение*

$$F\colon \mathcal{B} \to K(\mathbb{R}^n)$$

удовлетворяет следующим условиям:

(L2) *существует такая пятёрка $(\mathcal{B},\mathbb{R}^n,\Gamma,p,q)$, определяющая мультиотображение F, что для любого замкнутого шара $B \subset \operatorname{Int}\mathcal{B}$ и $S = \partial B$, отображение $p_B\colon \bigl(p^{-1}(B),p^{-1}(S)\bigr) \to (B,S)$ порождает ненулевой гомоморфизм $p_B^*\colon H^n(B,S) \to H^n\bigl(p^{-1}(B),p^{-1}(S)\bigr)$;*

(L3) *$F(x) \subset \mathcal{B}$ для любой точки $x \in \mathcal{S}$.*

Тогда отображение F имеет неподвижную точку.

Доказательство этого утверждения вытекает из теоремы 3 и леммы 3.

4. Неподвижные точки многозначных отображений открытых множеств

Пусть E — банахово пространство, $\mathfrak{B} = B_R(x_0) \subset E$ — замкнутый шар радиуса R с центром в точке x_0, $F\colon \mathfrak{B} \to K(E)$ — *вполне непрерывное мультиотображение* (т. е. F полунепрерывно сверху и область значений $F(\mathfrak{B})$ относительно компактна).

Предложение 4. *Пусть существует такая пятёрка* $(\mathfrak{B}, E, Z, p, q)$, *определяющая мультиотображение* F, *что отображение* p *сюръективно и собственно и*

1) *для любой точки* $x \in \operatorname{Int} \mathfrak{B}$ *множество* $p^{-1}(x)$ *ациклично*;
2) *для любой точки* $x \in \mathfrak{S} = \partial \mathfrak{B}$ *выполнено* $F(x) \subset \mathfrak{B}$.

Тогда мультиотображение F *имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что точка x_0 является нулём пространства E. Предположим противное. Тогда существует число $\varepsilon_0 > 0$, такое что

$$\varrho\big(x, F(x)\big) = \inf_{y \in F(x)} \|x - y\| \geqslant \varepsilon_0$$

для любой точки $x \in \mathfrak{B}$. Для произвольного числа $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выберем в компакте $M = \overline{F(\mathfrak{B})}$ произвольную конечную ε-сеть $\tau = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Пусть E^n — линейная оболочка точек $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, т. е. $E^n = L(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $\pi_\varepsilon \colon M \to \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset E^n$ — проектор Шаудера (см., например, [5]).

Рассмотрим мультиотображение

$$F_\varepsilon = \pi_\varepsilon \cdot F \colon \mathfrak{B} \to K(\operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}).$$

Очевидно, что пятёрка $(\mathfrak{B}, E, Z, p, \pi_\varepsilon \circ q)$ является представлением мультиотображения F_ε, т. е. $F_\varepsilon(x) = \pi_\varepsilon\Big(q\big(p^{-1}(x)\big)\Big)$ для любой точки $x \in \mathfrak{B}$. Пусть $\Sigma = \mathfrak{B} \cap E^n$ — шар радиуса R с центром в нуле пространства E^n. Рассмотрим сужение отображения F_ε на множество Σ, т. е. мультиотображение

$$\hat{F}_\varepsilon \colon \Sigma \to K(\operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}) \subset K(E^n).$$

Очевидно, что представлением этого мультиотображения является пятёрка $(\Sigma, E^n, p^{-1}(\Sigma), p, \pi_\varepsilon \circ q)$. Поскольку отображение p собственно и для любой точки $x \in \operatorname{Int} \Sigma$ множество $p^{-1}(x)$ является ацикличным, в силу теоремы 1 для любого шара $B \subset \operatorname{Int} \Sigma$ отображение

$$p_B \colon \big(p^{-1}(B), p^{-1}(\partial B)\big) \to (B, \partial B)$$

порождает изоморфизмы

$$p_B^* \colon H^i(B, \partial B) \to H^i\big(p^{-1}(B), p^{-1}(\partial B)\big), \quad i \geqslant 0.$$

С другой стороны, так как мультиотображение $\hat{F}_\varepsilon$ полунепрерывно сверху и для любой точки $x \in \partial \Sigma$ выполнено включение

$$\hat{F}_\varepsilon(x) \subset \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_m\} \subset \Sigma,$$

то мультиотображение $\hat{F}_\varepsilon$ удовлетворяет условиям следствия 1, следовательно, оно имеет неподвижную точку $x_\varepsilon \in \Sigma$. Тогда

$$x_\varepsilon \in \hat{F}_\varepsilon(x_\varepsilon) = \pi_\varepsilon\big(F(x_\varepsilon)\big).$$

Так как для любой точки $y \in M$ справедливо неравенство

$$\|y - \pi_\varepsilon(y)\| < \varepsilon,$$

то в $F(x_\varepsilon)$ существует точка y, такая что $\|x_\varepsilon - y\| < \varepsilon$, т. е.

$$\varrho\big(x_\varepsilon, F(x_\varepsilon)\big) < \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Полученное противоречие и доказывает утверждение. $\square$

Применим предложение 4 к изучению неподвижных точек мультиотображений, определённых на открытых множествах.

Пусть $\mathbb{U} = U_R(x_0) \subset E$ — открытый шар радиуса R с центром в точке x_0. Обозначим через $\mathbb{S}$ границу шара $\mathbb{U}$. Пусть $F\colon \mathbb{U} \to K(E)$ — вполне непрерывное мультиотображение. Для точки $x \in \mathbb{S}$ рассмотрим множество

$$A(x) = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{F(V_\varepsilon(x) \cap \mathbb{U})}. \tag{5}$$

Легко убедиться, что в силу полной непрерывности многозначного отображения F множество $A(x)$ непусто для любой точки $x \in \mathbb{S}$. Тогда можно рассмотреть мультиотображение $\tilde{F}\colon \bar{\mathbb{U}} \to K(E)$, определённое условием

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } x \in \mathbb{U}, \\ A(x), & \text{если } x \in \mathbb{S}. \end{cases} \tag{6}$$

Легко убедиться, что это мультиотображение замкнуто и $\tilde{F}(\bar{\mathbb{U}}) \subset \overline{F(\mathbb{U})}$, т. е. область значений лежит в компактном множестве. Следовательно, мультиотображение $\tilde{F}$ полунепрерывно сверху. Имеет место следующий результат.

Теорема 4. *Пусть вполне непрерывное мультиотображение $F\colon \mathbb{U} \to K(E)$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *существует пятёрка $(\mathbb{U}, E, Z, p, q)$, определяющая мультиотображение F, такая что отображение p является вьеторисовским;*

(ii) $A(\mathbb{S}) \subset \bar{\mathbb{U}}$.

Тогда справедливо по крайней мере одно из следующих утверждений:

(I) *мультиотображение F имеет неподвижную точку;*

(II) *существуют точка $x_* \in \mathbb{S}$ и последовательность $\{x_n\} \subset \mathbb{U}$, $\{x_n\} \to x_*$, такие что*

$$\lim_{n\to\infty} \varrho\big(x_*, F(x_n)\big) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим мультиотображение $\tilde{F}\colon \bar{\mathbb{U}} \to K(E)$. Оно удовлетворяет условиям предложения 4, следовательно, оно имеет неподвижную точку x_*. Если $x_* \in \mathbb{U}$, то справедливо утверждение (I). Если же $x_* \in \mathbb{S}$, то справедливо утверждение (II). Теорема доказана. $\square$

Следствие 2. *Пусть вполне непрерывное мультиотображение $F\colon \mathbb{U} \to K(E)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *существует такая пятёрка $(\mathbb{U}, E, Z, p, q)$, определяющая мультиотображение F, что отображение p является вьеторисовским;*

2) $A(\mathbb{S}) \subset \overline{\mathbb{U}}$;

3) *для любой точки* $x \in \mathbb{S}$ *выполнено* $x \notin A(x)$.

Тогда мультиотображение F *имеет неподвижную точку.*

Следствие 3. *Пусть вполне непрерывное однозначное отображение* $f: \mathbb{U} \to E$ *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $A(\mathbb{S}) \subset \overline{\mathbb{U}}$;

2) *для любой точки* $x \in \mathbb{S}$ *выполнено* $x \notin A(x)$.

Тогда отображение f *имеет неподвижную точку.*

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Пусть $\mathbb{U} = (-2, 2)$. Рассмотрим непрерывное отображение

$$\varphi\colon (-2, 2) \to \mathbb{R},$$

определённое условием

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{2-x}\right) - 1, & \text{если} \quad x \in (1, 2), \\ f(x), & \text{если} \quad x \in [-1, 1], \\ \sin\left(\dfrac{1}{2+x}\right) + 1, & \text{если} \quad x \in (-2, -1), \end{cases}$$

где f — произвольная непрерывная функция на отрезке $[-1, 1]$, такая что $f(-1) = \sin 1 + 1$, а $f(1) = \sin 1 - 1$. Нетрудно убедиться, что $A(-2) = [0, 2]$, $A(2) = [-2, 0]$. Таким образом, по следствию 3 отображение φ имеет неподвижную точку.

Рассмотрим более сложный пример, в котором множества $A(x)$ не являются ацикличными.

Пример 2. Пусть $E = \mathbb{R}^2$ — евклидова плоскость, $\mathbb{U} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}$, отображение $\psi\colon \mathbb{U} \to \mathbb{R}^2$ определено условиями

$$\psi(x, y) = \\ = \begin{cases} \left(-1 + \cos\left(2\pi \sin \dfrac{1}{2-x}\right); \sin\left(2\pi \sin \dfrac{1}{2-x}\right)\right), & \text{если} \quad x \in (1, 2), \\ f(x), & \text{если} \quad x \in [-1, 1], \\ \left(1 + \cos\left(2\pi \sin \dfrac{1}{2+x}\right); \sin\left(2\pi \sin \dfrac{1}{2+x}\right)\right), & \text{если} \quad x \in (-2, -1), \end{cases}$$

где $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{U}$ — произвольное непрерывное отображение, такое что

$$f(-1) = \bigl(1 + \cos(2\pi \sin 1); \sin(2\pi \sin 1)\bigr)$$

и

$$f(1) = \bigl(-1 + \cos(2\pi \sin 1); \sin(2\pi \sin 1)\bigr).$$

В этом случае множество $A(x, y)$ для точки $(x, y) \in \partial\mathbb{U}$ будет определяться условиями

$$A(x,y) = \begin{cases} \{(x,y) \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}, & \text{если } x = 2, \\ \psi(x,0), & \text{если } x \in (-2,-1), \\ f(x), & \text{если } x \in [-1,1], \\ \psi(x,0), & \text{если } x \in (1,2), \\ \{(x,y) \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}, & \text{если } x = -2. \end{cases}$$

Так как для любых $(x, y) \in \partial\mathbb{U}$ выполнено $A(x, y) \subset \bar{\mathbb{U}} \setminus (x, y)$, то согласно следствию 3 отображение ψ имеет неподвижную точку.

Авторы признательны рецензенту за ценные замечания.

Литература

[1] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных точек многозначных отображений // УМН. — 1980. — Т. 35, № 1. — С. 59—126.

[2] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Многозначные отображения // Итоги науки и техн. Сер. Матем. анал. — 1982. — Т. 19. — С. 127—231.

[3] Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений. — М.: Либроком, 2011.

[4] Гельман Б. Д. К теоремам о неподвижных точках типа Какутани для многозначных отображений // Глобальный анализ и нелинейные уравнения: Сб. науч. тр. — Воронеж: Изд-во ВГУ, 1988. — С. 117—119.

[5] Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. — М.: Наука, 1975.

[6] Скляренко Е. Г. О некоторых приложениях теории пучков в общей топологии // УМН. — 1964. — Т. 19, № 6. — С. 47—70.

[7] Спеньер Э. Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.

[8] Eilenberg S., Montgomery D. Fixed point theorems for multivalued transformations // Amer. J. Math. — 1946. — Vol. 68. — P. 214—222.

[9] Górniewicz L. Topological Fixed Point Theory of Multivalued Mappings. — Dordrecht: Springer, 2006.

[10] Granas A., Dugundji J. Fixed Point Theory. — New York: Springer, 2003.

[11] Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. — Berlin: Walter de Gruyter, 2001.