Инвариантные слоения невырожденных бигамильтоновых структур*

И. К. КОЗЛОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ikozlov90@gmail.com

УДК 514.763.3

Ключевые слова: бигамильтоновы структуры, согласованные симплектические структуры, инвариантные распределения.

Аннотация

В работе описаны все инвариантные распределения невырожденных бигамильтоновых структур и исследована их интегрируемость в окрестности точки общего положения.

Abstract

I. K. Kozlov, Invariant foliations of nondegenerate bi-Hamiltonian structures, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 3, pp. 91—111.

In this paper, we describe all invariant distributions of nondegenerate bi-Hamiltonian structures and investigate their integrability in the neighborhood of a generic point.

Посвящается академику Анатолию Тимофеевичу Фоменко к его семидесятилетию

1. Введение и основные результаты

В этой работе мы исследуем интегрируемость некоторых распределений, которые естественным образом возникают при рассмотрении пар согласованных невырожденных скобок Пуассона на вещественных и комплексных многообразиях.

Договорённость 1. В вещественном случае все рассматриваемые в этой работе объекты (многообразия, дифференциальные формы и т. д.) предполагаются гладкими (класса C^∞). В комплексном случае все рассматриваемые объекты комплексно-аналитичны.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00664-а) и программы «Ведущие научные школы» (грант № НШ-581.2014.1).

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 3, с. 91—111.

Определение 1. Дифференциальные 2-формы ω_0 и ω_1 на многообразии M мы будем называть *согласованными*, если выполнены следующие условия:

1) форма ω_0 невырожденна;
2) обе формы ω_0 и ω_1 замкнуты: $d\omega_0 = 0$, $d\omega_1 = 0$;
3) тензор Нейенхёйса поля эндоморфизмов $P = \omega_0^{-1}\omega_1$ равен нулю: $N_P = 0$.

Напомним, что тензор Нейенхёйса N_P поля эндоморфизмов P задаётся формулой $N_P(X, Y) = [PX, PY] - P[PX, Y] - P[X, PY] + P^2[X, Y]$ для любых векторных полей X и Y.

Две симплектические формы на многообразии M согласованы тогда и только тогда, когда соответствующие пуассоновы структуры являются согласованными (т. е. задают бигамильтонову структуру). Поэтому пару согласованных 2-форм мы также будем называть *невырожденной бигамильтоновой структурой*. Более подробную информацию о бигамильтоновых структурах можно найти, например, в [3] (см. также приведённые там ссылки).

В этой работе мы будем исследовать инвариантные распределения, которые определяются следующим образом.

Определение 2. Подпространство W линейного пространства V, на котором задана пара билинейных форм A и B, мы будем называть *инвариантным*, если оно инвариантно относительно действия группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(V, A, B)$, состоящей из всех линейных преобразований, сохраняющих обе формы A и B.

Иногда вместо пары форм на линейном пространстве мы будем рассматривать пару, состоящую из билинейной формы B и оператора P. При этом мы будем отождествлять пару (B, P) с парой билинейных форм $(B \circ P, B)$.

Определение 3. Распределение F на многообразии M, на котором задана пара согласованных дифференциальных 2-форм (ω_0, ω_1), мы будем называть *инвариантным*, если каждое подпространство F_x является инвариантным подпространством соответствующего касательного пространства $(T_xM, \omega_0, \omega_1)$.

Для краткости, мы будем говорить, что распределение является *интегрируемым* (*неинтегрируемым*) *в некоторой точке*, если оно является интегрируемым в некоторой окрестности этой точки (соответственно не является интегрируемым ни в какой окрестности этой точки).

В этой работе мы исследуем интегрируемость инвариантных распределений в окрестности точки общего положения. Задача об интегрировании инвариантных распределений была поставлена в [3]. С одной стороны, эту задачу можно рассматривать как вопрос о локальном устройстве согласованных скобок Пуассона и как продолжение исследований И. С. Захаревича [15], А. Панасюка [10] и Ф. Туриэля [12—14]. С другой стороны, эта задача связана с вопросом об интегрировании бигамильтоновых систем и с обобщённой гипотезой Мищенко—Фоменко о существовании полного набора функций в биинволюции для пучка метода сдвига аргумента на коалгебрах Ли (см. [3]). Один из наиболее эффективных на данный момент методов построения интегралов для бигамильтоновых систем на алгебрах Ли — метод сдвига аргумента — был разработан

А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко в [7,8]. Критерий полноты семейства функций, построенных методом сдвига аргумента, был получен в работах А. В. Болсинова [1, 2] (подробнее о методе сдвига аргумента и его возможных обобщениях см. также [9]). Поскольку в общем случае сдвиги инвариантов не дают полного инволютивного набора, для доказательства обобщённой гипотезы Мищенко—Фоменко необходимы дополнительные соображения. Поэтому в этой работе мы попробуем подойти к вопросу об интегрировании бигамильтоновых систем с другой стороны. А именно, мы изучим вопрос о поиске слоений, которые можно описать в терминах самой бигамильтоновой структуры, или, более общо, о поиске интегрируемых распределений, естественным образом связанных с бигамильтоновой структурой.

К сожалению, на данный момент особенности бигамильтоновых структур всё ещё практически не изучены. Поэтому мы ограничимся рассмотрением определённого семейства точек общего положения (эти точки мы будем называть регулярными). Для определения того, какие точки невырожденных бигамильтоновых структур мы будем рассматривать, нам потребуются следующие две теоремы из линейной алгебры.

Теорема 1 (теорема Жордана–Кронекера). *Пусть A и B — две кососимметрические билинейные формы на конечномерном векторном пространстве V над полем $\mathbb{K}$. Если поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнуто, то существует такой базис пространства V, что матрицы обеих форм A и B одновременно приводятся к блочно-диагональному виду*:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где каждая пара соответствующих блоков A_i и B_i имеет один из следующих видов:

1) *жорданов блок с собственным значением $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$A_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & \lambda & 1 & & \\ & & 0 & & & \lambda & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & \lambda \\ \hline -\lambda & & & & & & & \\ -1 & -\lambda & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & 0 & \\ & & -1 & -\lambda & & & & \end{array}\right),$$

$$B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -1 & & & & \end{array}\right);$$

2) *жорданов блок с собственным значением* ∞,

$$A_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & & & \\ & 0 & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \\ \hline -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & 0 & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -1 & & & & \end{array}\right),$$

$$B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & & & 0 & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & 0 \\ \hline 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & \end{array}\right);$$

3) *кронекеров блок*,

$$A_i = \left(\begin{array}{ccc|cccc} & & & 1 & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 1 & 0 \\ \hline -1 & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & 0 & \\ & \ddots & -1 & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}\right),$$

$$B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & 0 & 1 \\ \hline 0 & & & & & & & \\ -1 & \ddots & & & & & 0 & \\ & \ddots & 0 & & & & & \\ & & -1 & & & & & \end{array}\right).$$

Каждый кронекеров блок — это блок размера $(2k_i+1)\times(2k_i+1)$, *где* $k_i \geqslant 0$. *В частности, если* $k_i = 0$, *то* A_i *и* B_i *— это две нулевые* (1×1)*-матрицы:*

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}.$$

Существует естественный вещественный аналог теоремы Жордана—Кронекера.

Теорема 2 (вещественная теорема Жордана—Кронекера). *Любые две кососимметрические билинейные формы* A *и* B *на вещественном конечномерном векторном пространстве* V *можно одновременно привести к блочно-диагональному виду, при этом каждый блок будет либо кронекеровым блоком, либо жордановым блоком с собственным значением* $\lambda \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$, *либо вещественным жордановым блоком с комплексным собственным значением* $\lambda = \alpha + i\beta$:

$$A_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & \Lambda & E & & \\ & 0 & & & & \Lambda & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & E \\ & & & & & & & \Lambda \\ \hline -\Lambda & & & & & & & \\ -E & -\Lambda & & & & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -E & -\Lambda & & & & \end{array}\right),$$

$$B_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & E & & & \\ & 0 & & & & E & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & E \\ \hline -E & & & & & & & \\ & -E & & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & -E & & & & \end{array}\right).$$

Здесь Λ *и* E — *это* (2×2)*-матрицы:*

$$\Lambda=\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Доказательство теоремы Жордана—Кронекера можно найти в [5, 11] (отметим, что доказательство в [11] опирается на результаты из [4]). Подробнее о теореме Жордана—Кронекера можно также прочитать в [6].

Пару блочно-диагональных матриц (1), состоящих из жордановых и кронекеровых блоков, мы будем называть формой Жордана—Кронекера пары форм A и B. Форма Жордана—Кронекера пары форм A и B определена однозначно с точностью до перестановки блоков.

Если одна из форм невырожденна, то в форме Жордана—Кронекера нет кронекеровых блоков.

Определение 4. Пусть (ω_0,ω_1) — пара согласованных 2-форм на многообразии M. Точку $x_0\in M$ мы будем называть *регулярной*, если в некоторой её окрестности Ox_0 постоянны следующие инварианты Жордана—Кронекера:

— количество различных собственных значений λ_i оператора
$$P_x\colon T_xM\to T_xM,$$
— количество и размеры жордановых блоков, отвечающих каждому собственному значению λ_i.

Замечание 1. Регулярные точки можно также описать следующим образом. Напомним, что локальным репером называется набор векторных полей, заданных в окрестности некоторой точки многообразия и линейно независимых в каждой точке этой окрестности.

Точка $x_0\in M$ является регулярной тогда и только тогда, когда в окрестности этой точки существует локальный репер $v_1(x),\dots,v_n(x)$, такой что матрицы обеих форм ω_0 и ω_1 имеют блочно-диагональный вид, как в теореме Жордана—Кронекера,

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k\end{pmatrix},$$

но каждое собственное значение $\lambda_i(x)$ зависит от точки многообразия:

$$A_i=\left(\begin{array}{c|c}0 & J\bigl(\lambda_i(x)\bigr)\\ \hline -J^{\mathrm T}\bigl(\lambda_i(x)\bigr) & 0\end{array}\right),\quad B_i=\left(\begin{array}{c|c}0 & E\\ \hline -E & 0\end{array}\right). \tag{2}$$

Сформулируем теперь основные полученные результаты. Следующие две теоремы позволяют свести задачу об интегрируемости инвариантных распределений к случаю одного собственного значения в комплексном случае или к случаям одного вещественного или двух комплексно-сопряжённых собственных значений в вещественном случае.

Теорема 3 (Ф. Туриэль [12]). *Пусть (ω_0, ω_1) — пара согласованных 2-форм на многообразии M. Тогда у любой регулярной точки $x_0 \in (M, \omega_0, \omega_1)$ существует окрестность Ox, изоморфная прямому произведению многообразий с заданными на них парами согласованных 2-форм,*

$$(Ox, \omega_0, \omega_1) = \prod (O_i x, \omega_{0,i}, \omega_{1,i}),$$

где характеристический многочлен каждой пары форм $(\omega_{0,i}, \omega_{1,i})$ нельзя разложить в произведение двух нетривиальных взаимно простых многочленов.

Теорема 4. *Пусть многообразие M с заданной парой согласованных 2-форм (ω_0, ω_1) распадается в прямое произведение*

$$(M, \omega_0, \omega_1) = (M', \omega_0', \omega_1') \times (M'', \omega_0'', \omega_1''),$$

где (ω_0', ω_1') и (ω_0'', ω_1'') — пары согласованных 2-форм на M' и M'' соответственно. Тогда если характеристические многочлены χ' и χ'' пар форм (ω_0', ω_1') и (ω_0'', ω_1'') взаимно просты (в каждой точке многообразия), то любое инвариантное распределение F на M является прямым произведением инвариантных распределений F' и F'' на M' и M'' соответственно. При этом инвариантное распределение F на M интегрируемо тогда и только тогда, когда интегрируемы соответствующие распределения F' на M' и F'' на M''.

Случай одного и двух комплексно-сопряжённых собственных значений описывается следующей теоремой.

Теорема 5. *Рассмотрим пару согласованных форм ω_0, ω_1 на M с одним собственным значением λ или с одной парой комплексно-сопряжённых собственных значений $\alpha \pm i\beta$. Пусть x_0 — регулярная точка M. Предположим, что в точке x_0 соответствующее разложение Жордана—Кронекера пространства $(T_{x_0}M, \omega_0, \omega_1)$ состоит из жордановых блоков размеров $2(k_1+1) \times 2(k_1+1), 2k_2 \times 2k_2, \ldots, 2k_n \times 2k_n$, где $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$. Тогда существует окрестность точки x_0, в которой все инвариантные распределения, кроме, может быть, $\operatorname{Ker}(P - \lambda E)^{k_i}$ и $\operatorname{Ker}(P^2 - 2\alpha P + (\alpha^2 + \beta^2)E)^{k_i}$, где $i > 1$, являются интегрируемыми. В случае одного собственного значения λ распределения $\operatorname{Ker}(P - \lambda E)^{k_i}$, где $i > 1$, являются интегрируемыми в точке x_0 тогда и только тогда, когда собственное значение λ постоянно в некоторой окрестности точки x_0. Аналогично в случае пары комплексно-сопряжённых собственных значений $\alpha \pm i\beta$ распределения $\operatorname{Ker}(P^2 - 2\alpha P + (\alpha^2 + \beta^2)E)^{k_i}$, где $i > 1$, являются интегрируемыми в точке x_0 тогда и только тогда, когда функции α и β постоянны в некоторой окрестности точки x_0.*

Вместе с описанием всех линейных инвариантных подпространств в разделе 2 (см. теоремы 6, 7 и 9, а также замечание 2) теоремы 3—5 дают полное описание всех интегрируемых инвариантных распределений в окрестности регулярной точки.

Доказательство теорем 4 и 5 приведено в разделе 4.

2. Линейные инвариантные подпространства

В этом разделе мы опишем все инвариантные подпространства линейного пространства V, на котором заданы две кососимметрические билинейные формы A и B, одна из которых невырожденна (мы будем считать, что форма B невырожденна). При этом вместо пары билинейных форм A и B нам будет удобнее рассматривать пару, состоящую из невырожденной билинейной формы B и оператора $P = B^{-1}A$, самосопряжённого относительно формы B.

Все теоремы об устройстве линейных инвариантных подпространств немедленно следуют из устройства группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(V, B, P)$, описанной в [16].

Редукция проблемы

Для начала сведём задачу к случаю, когда характеристический многочлен оператора P неразложим. Корневым подпространством V^λ оператора P, соответствующим собственному значению λ, мы будем называть множество $\mathrm{Ker}(P - \lambda E)^N$, где число N достаточно велико. В вещественном случае мы будем рассматривать либо корневые подпространства, отвечающие вещественному собственному значению, либо корневые подпространства, отвечающие паре комплексно-сопряжённых собственных значений. Корневым подпространством, отвечающим паре комплексно-сопряжённых собственных значений $\alpha \pm i\beta$, мы будем называть ядро

$$\mathrm{Ker}(P^2 - 2\alpha P + (\alpha^2 + \beta^2)E)^N.$$

Отметим, что так как оператор P самосопряжён, то корневые подпространства, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны относительно формы B. Поэтому ограничение формы B на каждое корневое подпространство невырожденно.

Теорема 6. *Пусть P — самосопряжённый оператор на линейном вещественном или комплексном симплектическом пространстве (V, B). Рассмотрим разложение пространства V в сумму корневых подпространств оператора P:*

$$V = \bigoplus_\lambda V^\lambda.$$

Подпространство $W \subset V$ инвариантно тогда и только тогда, когда оно разлагается в прямую сумму своих пересечений с корневыми подпространствами

$$W = \bigoplus_\lambda (W \cap V^\lambda)$$

и каждое пересечение $W \cap V^\lambda$ является инвариантным подпространством соответствующего корневого подпространства $\big(V^\lambda, B|_{V^\lambda}, P|_{V^\lambda}\big)$.

Для доказательства теоремы 6 достаточно воспользоваться тем, что подпространство пространства V инвариантно тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно групп $\mathrm{Aut}\big(V^\lambda, B|_{V^\lambda}, P|_{V^\lambda}\big)$, естественным образом вложенных в $\mathrm{Aut}(V, B, P)$.

Далее в этом разделе мы будем считать, что характеристический многочлен оператора P неразложим. Это значит, что у оператора P только одно собственное значение в комплексном случае и либо одно вещественное, либо пара комплексно-сопряжённых значений в вещественном случае.

Случай одного собственного значения

Вначале рассмотрим случай, когда собственное значение только одно. Без ограничения общности можно считать, что это собственное значение равно 0 (иными словами, можно считать, что оператор P нильпотентный).

Теорема 7. *Пусть P — нильпотентный самосопряжённый оператор на симплектическом пространстве (V, B). Тогда любое подпространство $W \subset V$, инвариантное относительно группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(V, B, P)$, имеет вид*

$$W = \bigoplus_{i=1}^{s} (\mathrm{Ker}\, P^{k_i} \cap \mathrm{Im}\, P^{l_i}), \tag{3}$$

для некоторых $s \in \mathbb{N}$, $k_i, l_i \geqslant 0$.

Следствие 1. *Если пространство (V, B, P) является суммой жордановых блоков одной и той же высоты k, то инвариантные подпространства — это в точности пространства*

$$\mathrm{Ker}\, P^i = \mathrm{Im}\, P^{k-i}.$$

Следующее замечание позволяет ввести ограничения на количество слагаемых и их виды в формуле (3).

Замечание 2. Сумму подпространств вида $\mathrm{Ker}\, P^{k_i} \cap \mathrm{Im}\, P^{l_i}$ можно также описать следующим образом. Обозначим через V_J^k сумму всех жордановых блоков высоты (ровно) k. Обозначим через $U^m(V_J^k)$ подпространство V_J^k, состоящее из всех векторов высоты не более m.

Пусть пространство (V, B, P) является суммой жордановых блоков высоты $k_1, \ldots, k_N$, где $k_1 > k_2 > \ldots > k_N$. Тогда любое инвариантное подпространство имеет вид

$$U^{m_1}(V_J^{k_1}) \oplus \ldots \oplus U^{m_N}(V_J^{k_N}), \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} &0 \leqslant m_1 - m_2 \leqslant k_1 - k_2, \\ &\quad \ldots \\ &0 \leqslant m_{N-1} - m_N \leqslant k_{N-1} - k_N. \end{aligned} \tag{5}$$

Теорема 7 легко следует из следующей теоремы об устройстве алгебры Ли группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(V, B, P)$ в случае одного собственного значения, поэтому мы опишем только возможную схему доказательства.

Теорема 8 (П. Чжан [16]). *Пусть пространство (V, A, B) состоит из l_i жордановых k_i-блоков с собственным значением 0, где $i = 1, \ldots, N$ и $k_1 > k_2 > \ldots > k_N$. Рассмотрим базис пространства V, в котором матрицы оператора $P = B^{-1}A$ и формы B имеют блочно-диагональный вид,*

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & \\ & \ddots & \\ & & P_N \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_N \end{pmatrix}, \tag{6}$$

при этом блоки P_i и B_i равны

$$P_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ E_{2l_i} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & E_{2l_i} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} & & & Q_{2l_i} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ Q_{2l_i} & & & \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где

$$Q_{2s} = \begin{pmatrix} 0 & E_s \\ -E_s & 0 \end{pmatrix}$$

E_s — единичная $(s \times s)$-матрица. Тогда алгебра Ли группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(V, B, P)$ состоит из элементов вида

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccc|c} C_1^{1,1} & & & & & & & & \\ C_2^{1,1} & C_1^{1,1} & & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & C_1^{1,2} & & & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \ddots & & \\ C_n^{1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & C_1^{1,1} & C_m^{1,2} & \cdots & C_1^{1,2} & \\ \hline C_1^{2,1} & & & & & C_1^{2,2} & & & \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots & \ddots & & \cdots \\ C_m^{2,1} & \cdots & C_1^{2,1} & & & C_m^{2,2} & \cdots & C_1^{2,2} & \\ \hline & & \cdots & & & & \cdots & & \cdots \end{array}\right), \tag{8}$$

где $C_s^{i,j}$ — $(l_i \times l_j)$-матрицы, удовлетворяющие соотношениям

$$(C_s^{j,i})^T Q_{2l_j} + Q_{2l_i} C_s^{i,j} = 0. \tag{9}$$

В частности, элементы диагональных блоков $C_s^{i,i}$ должны лежать в симплектической алгебре Ли $\mathrm{sp}(2l_i, \mathbb{K})$, так как

$$(C_s^{i,i})^{\mathrm{T}} Q_{2l_i} + Q_{2l_i} C_s^{i,i} = 0. \tag{10}$$

Схема доказательства теоремы 7. Очевидно, что любое подпространство вида (3) имеет вид (4) и наоборот. Например,

$$U^{m_1}(V_J^{k_1}) \oplus \ldots \oplus U^{m_N}(V_J^{k_N}) = \bigoplus_{i=1}^{N} (\mathrm{Ker}\, P^{m_i} \cap \mathrm{Im}\, P^{k_i - m_i}).$$

Также очевидно, что подпространства вида (3) инвариантны. Поэтому остаётся показать, что любое инвариантное подпространство имеет вид (4). Далее, если фиксировано разложение

$$V = V_J^{k_1} \oplus \ldots \oplus V_J^{k_N},$$

то определено естественное вложение $\mathrm{Aut}(V_J^{k_i}) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(V, B, P)$, при котором элементы из $\mathrm{Aut}(V_J^{k_i})$ тождественно действуют на всех слагаемых $V_J^{k_j}$, кроме $V_J^{k_i}$. Поэтому любое инвариантное подпространство W разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств

$$W = \bigoplus (W \cap V_J^{k_i}).$$

Таким образом, задача сводится к случаям, когда есть только один или два типа жордановых блоков. Вначале, используя теорему 8, можно доказать следствие 1. Тем самым будет доказано, что инвариантными подпространствами пространства $V_J^{k_i}$ являются подпространства $U^m(V_J^{k_i})$ и только они. После этого остаётся доказать неравенства (5). Они вытекают из следующих двух утверждений, которые также могут быть легко доказаны при помощи теоремы 8. $\square$

Утверждение 1. *Если в инвариантном подпространстве $W \subset (V, B, P)$ существует вектор $v \in V_J^{k_1} \cap \mathrm{Im}\, P^l$, то $V_J^{k_2} \cap \mathrm{Im}\, P^l \subset W$ для любого $k_2 < k_1$.*

Утверждение 2. *Если в инвариантном подпространстве $W \subset (V, B, P)$ существует вектор $v \in V_J^{k_2} \cap \mathrm{Ker}\, P^k$, то $V_J^{k_1} \cap \mathrm{Ker}\, P^k \subset W$ для любого $k_2 < k_1$.*

2.1. Вещественный случай

Рассмотрим теперь случай двух комплексно-сопряжённых собственных значений. Этот случай легко сводится к комплексному благодаря наличию естественной комплексной структуры.

Лемма 1. *В каждом корневом подпространстве оператора P, соответствующем паре комплексно-сопряжённых собственных значений $\alpha \pm i\beta$, полупростая часть оператора $(P - \alpha E)/\beta$ является комплексной структурой J, самосопряжённой относительно A и B.*

Доказательство леммы 1. J является комплексной структурой, т. е. $J^2 = -E$, так как характеристический полином $(P - \alpha E)/\beta$ равен $(t^2 + 1)^n$. Оператор J самосопряжён, так как он является полиномом от P. $\square$

Пусть пространство (V, A, B) состоит только из вещественных жордановых блоков с одинаковым комплексным собственным значением $\lambda = \alpha + i\beta$. Обозначим через $V^{\mathbb{C}}$ комплексификацию пространства V при помощи комплексной структуры J из леммы 1. Определим следующие комплексные билинейные формы на V:

$$A^{\mathbb{C}}(u, v) = A(u, v) - iA(u, Jv), \quad B^{\mathbb{C}}(u, v) = B(u, v) - iB(u, Jv).$$

Формы $A^{\mathbb{C}}$ и $B^{\mathbb{C}}$ являются корректно определёнными комплексными билинейными формами на V, так как оператор J самосопряжён относительно A и B.

Отметим, что пространство $V^{\mathbb{C}}$ состоит из тех же блоков, что и пространство V, т. е. каждому вещественному жорданову k-блоку с собственным значением $\alpha+i\beta$ в разложении V соответствует комплексный жорданов k-блок с тем же собственным значением в разложении пространства $V^{\mathbb{C}}$.

При комплексификации автоморфизмы пространства (V, A, B) переходят в автоморфизмы пространства $(V^{\mathbb{C}}, A^{\mathbb{C}}, B^{\mathbb{C}})$, а вещественные инвариантные подпространства — в комплексные инвариантные подпространства.

Теорема 9. *Пусть пространство (V, A, B) состоит только из вещественных жордановых блоков с одинаковым комплексным собственным значением $\lambda=\alpha+i\beta$. Тогда любой автоморфизм $Q \in \operatorname{Aut}(V, A, B)$ сохраняет естественную комплексную структуру J из леммы 1:*

$$QJ = JQ.$$

Как следствие, имеет место естественное взаимно-однозначное соответствие

$$\operatorname{Aut}(V, A, B) \cong \operatorname{Aut}(V^{\mathbb{C}}, A^{\mathbb{C}}, B^{\mathbb{C}}). \tag{11}$$

Подпространство $U \subset (V, A, B)$ инвариантно тогда и только тогда, когда оно J-инвариантно и соответствующее подпространство $U^{\mathbb{C}}$ пространства $(V^{\mathbb{C}}, A^{\mathbb{C}}, B^{\mathbb{C}})$ инвариантно.

Доказательство. Автоморфизм $Q \in \operatorname{Aut}(V, A, B)$ сохраняет структуру J потому, что он сохраняет формы A и B. Для доказательства того, что инвариантные подпространства комплексифицируются, можно воспользоваться тем, что если инвариантное подпространство U содержит вектор u, то оно содержит и всевозможные (конечные) линейные комбинации векторов вида Qu, где $Q \in \operatorname{Aut}(V, A, B)$. Для доказательства того, что если $u \in U$, то и $Ju \in U$, достаточно фиксировать произвольную форму Жордана—Кронекера и рассмотреть операторы, которые действуют на одном вещественном жордановом блоке при помощи матриц

$$\begin{pmatrix} R^T & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c & -d \\ d & c \end{matrix}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\begin{matrix} c & -d \\ d & c \end{matrix}} \end{pmatrix}, \quad c, d \in \mathbb{R}, \quad c^2+d^2 \neq 0,$$

и тривиально действуют на остальных жордановых блоках. $\square$

3. Локальное устройство невырожденных бигамильтоновых структур

В этом разделе мы опишем основные результаты, доказанные Ф. Туриэлем в [12], переформулировав их в удобном для нас виде. В [12] описана структура согласованных 2-форм в окрестности таких регулярных точек $x_0 \in (M, \omega_0, \omega_1)$, что каждое собственное значение либо постоянно, либо не имеет критических точек в некоторой окрестности точки x_0:

$$\lambda_i(x) \equiv \mathrm{const} \quad \text{или} \quad d\lambda_i(x) \neq 0.$$

Такие регулярные точки мы будем называть *регулярными некритическими*.

Следующая общая теорема позволяет свести задачу к случаю, когда характеристический многочлен поля эндоморфизмов $P = \omega_0^{-1}\omega_1$ неразложим.

Теорема 10 (Ф. Туриэль [12]). *Пусть (ω_0, ω_1) — пара согласованных 2-форм на многообразии M. Предположим, что характеристический многочлен $\chi(x)$ поля эндоморфизмов $P = \omega_0^{-1}\omega_1$ распадается в прямое произведение многочленов, взаимно простых в каждой точке многообразия M:*

$$\chi(x) = \chi_1(x)\chi_2(x), \quad \text{НОД}\big(\chi_1(x), \chi_2(x)\big) \equiv 1.$$

Тогда у любой точки $x \in M$ существует окрестность Ox, которую можно разложить в прямое произведение

$$(Ox, \omega_0, \omega_1) = (O'x, \omega_0', \omega_1') \times (O''x, \omega_0'', \omega_1'')$$

так, что характеристические многочлены пар форм (ω_0', ω_1') и (ω_0'', ω_1'') равны $\chi_1(x)$ и $\chi_2(x)$ соответственно.

Отметим, что теорема 10 выполнена в окрестности любой регулярной точки.

Случай постоянных собственных значений описывается следующей теоремой.

Определение 5. Невырожденную бигамильтонову структуру (ω_0, ω_1) мы будем называть *плоской* в точке $x \in M$, если существуют локальные координаты в окрестности этой точки, в которых матрицы обеих форм ω_0 и ω_1 записываются с постоянным коэффициентами.

Теорема 11 (Ф. Туриэль [12]). *Невырожденная бигамильтонова структура (ω_0, ω_1) является плоской в окрестности точки $x \in M$ тогда и только тогда, когда точка x регулярна и все собственные значения постоянны.*

Случай одного собственного значения без критических точек описывается теоремами 12 и 13.

Определение 6. Две пары невырожденных бигамильтоновых структур $(M', \omega_0', \omega_1')$ и $(M'', \omega_0'', \omega_1'')$ мы будем называть *изоморфными*, если существует диффеоморфизм $f\colon M' \to M''$, такой что $f^*\omega_0'' = \omega_0'$ и $f^*\omega_1'' = \omega_1'$.

Теорема 12 (Ф. Туриэль [12]). *Рассмотрим две пары согласованных 2-форм (ω_0', ω_1') и (ω_0'', ω_1'') на многообразиях M' и M'', такие что каждой паре соответствует только одно непостоянное собственное значение без критических точек. Тогда регулярные точки $x' \in M'$ и $x'' \in M''$ имеют изоморфные окрестности тогда и только тогда, когда разложения Жордана—Кронекера пар форм (ω_0', ω_1') и (ω_0'', ω_1'') в этих точках совпадают (т. е. состоят из одного и того же набора жордановых блоков).*

Не все инварианты Жордана—Кронекера можно реализовать неплоскими согласованными 2-формами.

Теорема 13 (Ф. Туриэль [12]). *Пусть (ω_0, ω_1) — пара согласованных 2-форм на многообразии M с одним собственным значением λ, которое не имеет критических точек на M. Тогда для любой регулярной точки $x_0 \in M$ в разложении Жордана—Кронекера соответствующего касательного пространства $(T_{x_0}M, \omega_0, \omega_1)$ наибольший жорданов блок всегда (строго) больше, чем остальные жордановы блоки.*

Для каждого набора жордановых блоков, в котором самый большой жорданов блок только один, опишем реализующую его невырожденную бигамильтонову структуру.

Теорема 14 (Ф. Туриэль [12]). *Пусть ω_0 и ω_1 — согласованные 2-формы на многообразии M, а $x_0 \in M$ — регулярная точка. Пусть у поля эндоморфизмов $P = \omega_0^{-1}\omega_1$ только одно собственное значение λ и $d\lambda|_{x_0} \neq 0$. Пусть разложение Жордана—Кронекера пары форм ω_0 и ω_1 в точке x_0 состоит из жордановых блоков размеров*

$$2(k_1+1) \times 2(k_1+1),\ 2k_2 \times 2k_2, \ldots,\ 2k_n \times 2k_n,$$

где $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$. Тогда в окрестности точки x_0 существуют локальные координаты

$$(x_1^1, \ldots, x_1^{k_1}, y_1^1, \ldots, y_1^{k_1}, x_2^1, \ldots, y_n^{k_n}, z, \lambda),$$

такие что

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \left(\sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_s} dx_s^i \wedge dy_s^i \right) + dz \wedge d\lambda, \\ \omega_1 &= \lambda\omega_0 + \left(\sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_s-1} dx_s^i \wedge dy_s^{i+1} \right) + \alpha \wedge d\lambda + dy_1^1 \wedge d\lambda, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\alpha = \sum_{s=1}^{n} \sum_{i=1}^{k_s} \left(i + \frac{1}{2}\right) y_s^i\ dx_s^i + \left(i - \frac{1}{2}\right) x_s^i\ dy_s^i. \tag{13}$$

Иными словами, матрицы форм имеют следующий вид:

$$
\omega_0 = \left(\begin{array}{ccccc|cc}
0 & E_{k_1} & & & & & \\
-E_{k_1} & 0 & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & 0 & E_{k_n} & & \\
 & & & -E_{k_n} & 0 & & \\
\hline
 & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & -1 & 0
\end{array}\right),
$$

$$
\omega_1 = \left(\begin{array}{ccccc|cc}
0 & J_{k_1}(\lambda) & & & & 0 & \alpha_1 \\
-J^T_{k_1}(\lambda) & 0 & & & & 0 & \beta_1 + \delta \\
 & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
 & & & 0 & J_{k_n}(\lambda) & 0 & \alpha_n \\
 & & & -J^T_{k_n}(\lambda) & 0 & 0 & \beta_n \\
\hline
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda \\
-\alpha_1^T & -\beta_1^T - \delta^T & \cdots & -\alpha_n^T & -\beta_n^T & -\lambda & 0
\end{array}\right), \tag{14}
$$

где

$$
\alpha_s = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} y_s^1 \\ \frac{5}{2} y_s^2 \\ \vdots \\ \left(k_s + \frac{1}{2}\right) y_s^{k_s} \end{pmatrix}, \quad
\beta_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x_s^1 \\ \frac{3}{2} x_s^2 \\ \vdots \\ \left(k_s - \frac{1}{2}\right) x_s^{k_s} \end{pmatrix}, \quad
\delta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}
$$

Замечание 3.

— Подчеркнём, что последняя координата — это собственное значение λ. Также отметим, что $\partial/\partial z$ — это гамильтоново векторное поле с гамильтонианом $\pm\lambda$ относительно формы ω_0. (Знак $\pm$ зависит от соглашения о знаках при определении гамильтонова векторного поля.)

— Слагаемое $\alpha \wedge d\lambda$ нужно, чтобы форма ω_1 была замкнута.

— Слагаемое $dy_1^1 \wedge d\lambda$ нужно, чтобы инварианты Жордана—Кронекера в окрестности точки x_0 были постоянны.

Следствие 2. *Поле эндоморфизмов $P = \omega_0^{-1}\omega_1$ задаётся формулой*

$$
\begin{aligned}
P = \lambda E + \Bigg(\sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_s} \left(\frac{\partial}{\partial x_s^{j+1}} + \left(j + \frac{1}{2}\right) y_s^j \frac{\partial}{\partial z} \right) \otimes dx_s^j + {} \\
+ \left(\frac{\partial}{\partial y_s^{k_s - j}} + \left(k_s + \frac{1}{2} - j\right) x_s^{k_s - j + 1} \frac{\partial}{\partial z} + \delta_s^1 \delta_j^{k_s} \frac{\partial}{\partial z} \right) \otimes dy_s^{k_s + 1 - j} \Bigg) + {} \\
+ \Bigg(\sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_s} - \left(\left(\left(j - \frac{1}{2}\right) x_s^j + \delta_s^1 \delta_j^1 \right) \frac{\partial}{\partial x_s^j} + \left(j + \frac{1}{2}\right) y_s^j \frac{\partial}{\partial y_s^j} \right) \otimes d\lambda,
\end{aligned} \tag{16}
$$

где мы формально полагаем $x_s^i = y_s^i = 0$, *если* $i > k_s$ *или* $i \leqslant 0$. *Иными словами, матрица этого поля эндоморфизмов имеет вид*

$$P = \left(\begin{array}{ccccc|cc} J_{k_1}^T(\lambda) & 0 & & & & 0 & -\beta_1 - \delta \\ 0 & J_{k_1}(\lambda) & & & & 0 & \alpha_1 \\ & & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ & & & J_{k_n}^T(\lambda) & 0 & 0 & -\beta_n \\ & & & 0 & J_{k_n}(\lambda) & 0 & \alpha_n \\ \hline \alpha_1^T & \beta_1^T + \delta^T & \cdots & \alpha_n^T & \beta_n^T & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array}\right), \tag{17}$$

где векторы α_i, β_i *и* δ *задаются формулами* (15).

Из формулы (16) немедленно следует, что

$$\begin{gathered} (P - \lambda E)\frac{\partial}{\partial x_s^j} = \frac{\partial}{\partial x_s^{j+1}} + \left(j + \frac{1}{2}\right) y_s^j \frac{\partial}{\partial z}, \\ (P - \lambda E)\frac{\partial}{\partial y_s^{k_s+1-j}} = \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s-j}} + \left(k_s + \frac{1}{2} - j\right) x_s^{k_s-j+1}\frac{\partial}{\partial z} + \delta_s^1 \delta_j^{k_s}\frac{\partial}{\partial z}, \\ (P - \lambda E)\frac{\partial}{\partial \lambda} = \sum_{s=1}^n \left(\sum_{j=1}^{k_s} - \left((j - \frac{1}{2}\right) x_s^j + \delta_s^1\delta_j^1)\frac{\partial}{\partial x_s^j} + \left(j + \frac{1}{2}\right) y_s^j \frac{\partial}{\partial y_s^j}\right). \end{gathered} \tag{18}$$

Несколько раз применяя формулы (18), получаем, что

$$(P - \lambda E)^p \frac{\partial}{\partial x_s^j} = (P - \lambda E)\frac{\partial}{\partial x_s^{j+p-1}} = \frac{\partial}{\partial x_s^{j+p}} + \left(j + p - \frac{1}{2}\right) y_s^{j+p-1}\frac{\partial}{\partial z} \tag{19}$$

и что

$$\begin{aligned} (P - \lambda E)^p \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s+1-j}} &= (P - \lambda E)\frac{\partial}{\partial y_s^{k_s+2-j-p}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s+1-j-p}} + \left(k_s + \frac{3}{2} - j - p\right) x_s^{k_s+2-j-p}\frac{\partial}{\partial z} + \delta_s^1 \delta_{j+p}^{k_s+1}\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{20}$$

Вещественный случай

Случай одной пары комплексно-сопряжённых собственных значений на самом деле аналогичен соответствующему комплексному случаю, потому что почти комплексная структура из леммы 1 оказывается интегрируемой.

Теорема 15 (Ф. Туриэль [12]). *Пусть* (ω_0, ω_1) — *пара согласованных 2-форм на вещественном многообразии* M *с одной парой комплексно-сопряжённых собственных значений* $\alpha \pm i\beta$. *Тогда полупростая часть* J *оператора* $(P - \alpha E)/\beta$, где $P = \omega_0^{-1}\omega_1$, *является комплексной структурой на* M. *Пусть* $M^{\mathbb{C}}$ — *комплексификация многообразия* M *при помощи комплексной структуры* J. *Тогда формы* $\omega_0^{\mathbb{C}}$ *и* $\omega_1^{\mathbb{C}}$, *заданные формулами*

$$\omega_0^{\mathbb{C}}(u, v) = \omega_0(u, v) - i\omega_0(u, Jv), \quad \omega_1^{\mathbb{C}}(u, v) = \omega_1(u, v) - i\omega_1(u, Jv), \tag{21}$$

являются согласованными голоморфными формами на $M^{\mathbb{C}}$. Оператор P коммутирует с комплексной структурой J, поэтому задаёт оператор $P^{\mathbb{C}}$ на $M^{\mathbb{C}}$. Имеет место равенство $P^{\mathbb{C}} = (\omega_0^{\mathbb{C}})^{-1}\omega_1^{\mathbb{C}}$, поэтому паре форм $(\omega_0^{\mathbb{C}}, \omega_1^{\mathbb{C}})$ на $M^{\mathbb{C}}$ соответствует ровно одно собственное значение $\lambda = \alpha + i\beta$.

Замечание 4. В условиях теоремы 15 если вместо комплексной структуры J взять комплексную структуру $-J$, то при комплексификации паре форм будет соответствовать собственное значение $\alpha - i\beta$.

4. Доказательство основных теорем

Теорема 3 является прямым следствием теоремы 10. Теорема 4 вытекает из теорем 3 и 6. Таким образом, остаётся доказать только теорему 5. Случай пары комплексно-сопряжённых собственных значений сводится к случаю одного собственного значения при помощи теорем 9 и 15, поэтому теорему 5 достаточно доказать для случая одного собственного значения. Этому посвящён весь настоящий раздел.

Регулярные некритические точки образуют открытое всюду плотное множество, поэтому достаточно доказать теорему 5 только для них. Случай, когда собственные значения постоянны (т. е. когда невырожденная бигамильтонова структура плоская), тривиален. Поэтому остаётся разобрать случай одного непостоянного собственного значения без критических точек (т. е. случай из теоремы 14). Доказательство проводится прямым вычислением. Явно опишем каждое инвариантное распределение и проверим его инволютивность (формула для векторных полей, задающих распределения, приведена в лемме 2).

Вначале опишем локальный репер

$$e_1^0,\ e_1^1,\ \dots,\ e_1^{k_1},\ f_1^0,\ \dots,\ f_1^{k_1},\ e_2^1,\ \dots,\ e_n^{k_n},\ f_n^1,\ \dots,\ f_n^{k_n} \tag{22}$$

в окрестности точки x_0, в котором матрицы форм ω_0 и ω_1 состоят из жордановых блоков. Базис меньших блоков (т. е. жордановых k_2-,…, k_n-блоков):

$$\begin{aligned}
e_s^1 &= \frac{\partial}{\partial x_s^1} - \frac{(k_s+\frac12)y_s^{k_s}}{(\frac12 x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^{k_s}},\\
e_s^i &= (P-\lambda E)^{i-1}e_s^1 = \frac{\partial}{\partial x_s^i} - \frac{(k_s+\frac12)y_s^{k_s}}{(\frac12 x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^{k_s-i+1}} + \alpha_s^i\frac{\partial}{\partial z},\\
f_s^{k_s} &= \frac{\partial}{\partial y_s^1} - \frac{\frac12 x_s^1}{(\frac12 x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^{k_s}},\\
f_s^i &= (P-\lambda E)^{k_s-i}f_s^{k_s} = \frac{\partial}{\partial y_s^i} - \frac{\frac12 x_s^1}{(\frac12 x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^i} + \beta_s^i\frac{\partial}{\partial z},
\end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_s^i &= \left(i-\frac{1}{2}\right)y_s^{i-1} - \frac{(k_s+\frac{1}{2})y_s^{k_s}}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)}\left(\left(k_s-i+\frac{3}{2}\right)x_1^{k_s-i+2}+\delta_i^{k_s+1}\right),\\ \beta_s^i &= \left(i+\frac{1}{2}\right)x_s^{i+1} - \frac{\frac{1}{2}x_s^1}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)}\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)x_1^{i+1}+\delta_0^i\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Базис наибольшего (k_1+1)-блока:

$$\begin{aligned}e_1^0 &= -\frac{\partial}{\partial\lambda} + \sum_{s=1}^{n}\Bigg(\sum_{j=1}^{k_s} - \left(j+\frac{1}{2}\right)x_s^{j+1}\frac{\partial}{\partial x_s^j} + \left(j-\frac{1}{2}\right)y_s^{j-1}\frac{\partial}{\partial y_s^j}\Bigg),\\ e_1^i &= (P-\lambda E)^i e_1^0 = \sum_{s=1}^{n}\left(\left(\frac{1}{2}x_s^1+\delta_s^1\right)\frac{\partial}{\partial x_s^i} - \left(k_s+\frac{1}{2}\right)y_s^{k_s}\frac{\partial}{\partial y_s^{k_s-i+1}}\right) + \gamma_i\frac{\partial}{\partial z},\\ f_1^{k_1} &= \frac{1}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^{k_1}},\\ f_1^i &= (P-\lambda E)^{k_1-i}f_1^{k_1} = \frac{1}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)}\frac{\partial}{\partial y_1^i} + \beta_1^i\frac{\partial}{\partial z},\\ f_1^0 &= \frac{\partial}{\partial z},\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_i &= \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{1}{2}x_s^1+\delta_s^1\right)\left(i-\frac{1}{2}\right)y_s^{i-1} - \left(k_s+\frac{1}{2}\right)y_s^{k_s}\left(k_s-i+\frac{3}{2}\right)x_s^{k_s-i+2},\\ \beta_1^i &= \frac{1}{\frac{1}{2}x_1^1+1}\left(\left(i+\frac{1}{2}\right)x_1^{i+1}+\delta_0^i\right).\end{aligned} \tag{26}$$

При этом мы формально полагаем, что $x_s^i = y_s^i = 0$, если $i > k_s$ или $i \leqslant 0$. В частности, $\gamma_1 = 0$.

Векторные поля (23) и (25) были выбраны так, чтобы было выполнено следующее утверждение.

Утверждение 3. *В условиях теоремы* 14 *в локальном репере* (22), *заданном формулами* (23) *и* (25), *матрицы форм* ω_0 *и* ω_1 *имеют блочно-диагональный вид*

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k\end{pmatrix}, \quad \omega_0 = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k\end{pmatrix}, \tag{27}$$

где A_1, B_1 — *это жорданов* (k_1+1)-*блок, а* A_i, B_i *при* $i>1$ — *это жордановы* k_i-*блоки.*

Из устройства инвариантных подпространств (см. замечание 2) вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 5 *в базисе* (22), *заданном формулами* (23) *и* (25), *инвариантные распределения имеют вид*

$$U^{m_1+1}(V_J^{k_1+1}) \oplus \ldots \oplus U^{m_N}(V_J^{k_N}) = \left\langle \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y_1^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_1^{m_1}}, e_1^{k_1}, \ldots, e_1^{k_1-m_1} \right\rangle \oplus$$

$$\oplus \bigoplus_{s=2}^{N} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s-m_s+2}}, \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s-m_s+1}} - \frac{(k_s+\frac{1}{2})y_s^{k_s}}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}}, \right.$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y_s^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_s^{m_s-1}}, \frac{\partial}{\partial y_s^{m_s}} - \frac{\frac{1}{2}x_s^1}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}} \right\rangle. \tag{28}$$

Доказательство теоремы 5. Для доказательства теоремы 5 остаётся проверить инволютивность распределений (28). Это делается прямым вычислением: нужно найти коммутаторы векторных полей, задающих распределение (28), и проверить, касаются ли они этого распределения.

Распределения $\operatorname{Ker}(P-\lambda E)^{k_i}$, где $i>1$, неинтегрируемы, потому что коммутатор векторных полей

$$u_s = \frac{\partial}{\partial x_s^{k_s-m_s+1}} - \frac{(k_s+\frac{1}{2})y_s^{k_s}}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}}, \quad v_s = \frac{\partial}{\partial y_s^{m_s}} - \frac{\frac{1}{2}x_s^1}{(\frac{1}{2}x_1^1+1)} \frac{\partial}{\partial y_1^{m_s}}$$

не касается соответствующего распределения. Действительно,

$$[u_s, v_s] = \delta_{m_s}^{k_s} \frac{k_s}{\frac{1}{2}x_1^1+1} \frac{\partial}{\partial y_1^{k_s}}. \tag{29}$$

Несложно проверить, что векторные поля $\partial/\partial y_1^{m_s}$ касаются инвариантного распределения (28) тогда и только тогда, когда $m_1 \geqslant m_s$. Для распределений $\operatorname{Ker}(P-\lambda E)^{k_i}$, где $i>1$, выполнены соотношения $m_1 = m_s - 1 < m_s = k_s$. Поэтому в этих случаях коммутатор $[u_s, v_s]$ не касается $\operatorname{Ker}(P-\lambda E)^{k_i}$.

Доказательство того, что инвариантные распределения, отличные от $\operatorname{Ker}(P-\lambda E)^{k_i}$, где $i>1$, интегрируемы, можно немного упростить, если воспользоваться следующими соображениями. Заметим, что

$$\left[e_1^m, \frac{\partial}{\partial x_s^i}\right] \in \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle, \quad \left[e_1^m, \frac{\partial}{\partial y_s^{k_s-i}}\right] \in \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

при $i>1$ и что векторные поля $\partial/\partial z$ принадлежат любому инвариантному распределению (за исключением тривиального нульмерного распределения). Отсюда следует, что единственные нетривиальные коммутаторы векторных полей из формулы (28), которые могут не касаться распределения — это попарные коммутаторы векторных полей e_1^0, e_1^1, u_s и v_s. Из устройства инвариантных подпространств (см. замечание 2) следует, что единственное инвариантное распределение, содержащее векторное поле e_1^0, совпадает со всем касательным расслоением. Также из замечания 2 следует, что единственное инвариантное распределение, содержащее векторное поле e_1^1, отличное от всего касательного расслоения и от $\operatorname{Ker}(P-\lambda E)^{k_i}$, где $i>2$, — это распределение $\operatorname{Im}(P-\lambda E)$. Отдельно докажем инволютивность этого распределения.

Утверждение 4. *В условиях теоремы* 14 *распределение* $\mathrm{Im}(P-\lambda E)$ *инволютивно.*

Доказательство. Так как $N_P = 0$, выполнено равенство

$$[(P-\lambda E)u, (P-\lambda E)v] = \\ = (P-\lambda E)([u, Pv] + [Pu, v] - (P+\lambda E)[u, v]) + (\mathcal{L}_{(P-\lambda E)v}\lambda)u - (\mathcal{L}_{(P-\lambda E)u}\lambda)v.$$

Распределение $\mathrm{Im}(P-\lambda E)$ инволютивно, потому что $\mathcal{L}_{(P-\lambda E)u}\lambda = 0$ для любого векторного поля u. □

Таким образом, теорема 5 полностью доказана. □

Литература

[1] Болсинов А. В. Критерий полноты семейства функций в инволюции, построенного методом сдвига аргумента // Докл. АН СССР. — 1988. — Т. 301, № 5. — С. 1037—1040.

[2] Болсинов А. В. Согласованные скобки Пуассона на алгебрах Ли и полнота семейств функций в инволюции // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1991. — Vol. 55, № 1. — С. 68—92.

[3] Болсинов А. В., Изосимов А. М., Коняев А. Ю., Ошемков А. А. Алгебра и топология интегрируемых систем. Задачи для исследования // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. — 2012. — Вып. 28. — С. 119—191.

[4] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1988.

[5] Гуревич Г. Б. Канонизация пары бивекторов // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. — 1950. — Вып. 8. — С. 355—363.

[6] Козлов И. К. Элементарное доказательство теоремы Жордана—Кронекера // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 6. — С. 857—870.

[7] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщённый метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 2. — С. 46—56.

[8] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 396—415.

[9] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. — М.: Факториал, 1995.

[10] Panasyuk A. Veronese webs for bihamiltonian structures of higher corank // Banach Center Publ. — 2000. — Vol. 51. — P. 251—261.

[11] Thompson R. C. Pencils of complex and real symmetric and skew matrices // Linear Algebra Its Appl. — 1991. — Vol. 147. — P. 323—371.

[12] Turiel F. J. Classification locale simultanée de deux formes symplectiques compatibles // Manuscripta Math. — 1994. — Vol. 82, no. 1. — P. 349—362.

[13] Turiel F. J. On the local theory of Veronese webs. — `arXiv:1001.3098v1`.

[14] Turiel F. J. The local product theorem for bihamiltonian structures. — `arXiv:1107.2243v1`.

[15] Zakharevich I. S. Kronecker webs, bihamiltonian structures, and the method of argument translation. — `arXiv:math/9908034v3`.

[16] Zhang P. Algebraic properties of compatible Poisson structures: Preprint no. 10-02.— Loughborough Univ., 2010.