

# Структурные графы колец: определения и первые результаты\*

А. Т. ЛИПКОВСКИ

Белградский университет, Сербия

e-mail: acal@matf.bg.ac.rs

УДК 512.552+511.2

**Ключевые слова:** конечные кольца, конечные графы, симметрические многочлены.

## Аннотация

В комплексной геометрии формулы Виета  $(x, y) \mapsto (u, v) = (x + y, xy)$  определяют двулистное накрытие  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , разветвлённое вдоль параболы  $u^2 = 4v$ . Как-то перечитывая статью В. И. Арнольда «Topological content of the Maxwell theorem on multipole representation of spherical functions», в которой это отображение используется, я обратил внимание, что эти формулы описывают алгебраическую структуру, т. е. сложение и умножение, поля комплексных чисел. Естественным образом возникает простой вопрос: а что получится, если вместо  $\mathbb{C}$  взять произвольное коммутативное кольцо с единицей? Иными словами, какие алгебраические свойства кольца  $A$  отражает отображение Виета  $\Phi: A^2 \rightarrow A^2$ , заданное формулой  $\Phi(x, y) = (x + y, xy)$ ? Для начала интересно посмотреть, что получится для простейших колец  $\mathbb{Z}_m$ ,  $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_m$ . Стоит отметить, что в последнее время достаточно активно изучаются графы, которые тем или иным способом строятся по данному конечному кольцу: граф делителей нуля, граф Кэли, граф идеалов и т. п. Отображение Виета тоже задаёт некоторый ориентированный граф, свойства которого мы обсуждаем в настоящей статье.

## Abstract

A. T. Lipkovski, *Structure graphs of rings: definitions and first results*, *Fundamentalnaya i prikladnaya matematika*, vol. 20 (2015), no. 3, pp. 181–190.

The quadratic Vieta formulas  $(x, y) \mapsto (u, v) = (x + y, xy)$  in the complex geometry define a two-fold branched covering  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  ramified over the parabola  $u^2 = 4v$ . Thinking about topics considered in Arnold's paper *Topological content of the Maxwell theorem on multipole representation of spherical functions*, I came to a very simple idea: in fact, these formulas describe the algebraic structure, i.e., addition and multiplication, of the complex numbers. What if, instead of the field of complex numbers, we consider an arbitrary ring? Namely for an arbitrary ring  $A$  (commutative, with unity) consider the mapping  $\Phi: A^2 \rightarrow A^2$  defined by the Vieta formulas  $(x, y) \mapsto (u, v) = (x + y, xy)$ . What kind of algebraic properties of the ring itself does this map reflect? At first, it is interesting to investigate simplest finite rings  $A = \mathbb{Z}_m$  and  $A = \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_m$ . Recently, it has been very popular to consider graphs associated to rings (the zero-divisor graph, the Cayley graph, etc.). In the present paper, we study the directed graph defined by the Vieta mapping  $\Phi$ .

---

\* Автор благодарит Министерство образования, науки и технологического развития Республики Сербии за финансовую поддержку по гранту ОИ174020.

*Автор с благодарностью посвящает эту работу  
Анатолию Тимофеевичу Фоменко, академику РАН,  
в связи с его 70-летием*

**Определение 1.** Структурным графом  $\Gamma(A)$  кольца  $A$  называется направленный граф с множеством вершин

$$V = A^2$$

и множеством рёбер

$$E = \{(a, b) \rightarrow (a + b, ab) : (a, b) \in A^2\}.$$

Каждому ребру  $(a, b) \rightarrow (p, q)$  соответствует квадратный многочлен  $z^2 - pz + q = (z - a)(z - b)$  с парой его корней  $(a, b)$ .

Рёбра, выходящие из  $(a, b)$  и  $(b, a)$ , заканчиваются в одной вершине  $(a + b, ab)$  (это аналог двулистности):

$$(a, b) \rightarrow (a + b, ab) \leftarrow (b, a);$$

но число рёбер, заканчивающихся в вершине  $(p, q)$ , равно числу различных нулей в рассматриваемом кольце квадратного многочлена  $x^2 - px + q$ , может быть больше двух. Разумеется, число рёбер, выходящих из произвольной вершины, всегда равно 1. С помощью китайской теоремы об остатках нетрудно убедиться в следующем.

**Утверждение 2.** Если  $A = \mathbb{Z}_n$ , где  $n$  — свободное от квадратов произведение простых чисел  $n = p_1 \cdots p_r$ , то число рёбер графа  $\Gamma(A)$ , входящих в вершину  $(p, q)$  (т. е. число различных нулей многочлена  $z^2 - pz + q$  в кольце  $\mathbb{Z}_n$ ), не превосходит  $2^r$ .

Графы  $\Gamma(A)$  несвязны, причём число компонент связности не меньше числа элементов кольца, поскольку каждый элемент кольца  $a \in A$  определяет ребро  $(a, 0) \rightarrow (a, 0)$ , которым заканчивается некоторая компонента связности.

В [6] приведены графы  $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$  для небольших  $n$ , и уже для этих случаев они выглядят очень интересно. Приведём два характерных примера компонент связности этих графов (рис. 1 и 2). Первое, что бросается в глаза, — это существование контуров (замкнутых простых путей) различных длин. Так, в графе  $\Gamma(\mathbb{Z}_5)$  существует контур длины 4:

$$(2, 2) \rightarrow (4, 4) \rightarrow (3, 1) \rightarrow (4, 3) \rightarrow (2, 2).$$

Попытаемся разобраться в алгебраической структуре, отвечающей за существование контуров.

**Определение 3.** Контур длины  $k$  (или  $k$ -контур) — это путь

$$(a_1, b_1) \rightarrow (a_2, b_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_k, b_k) \rightarrow (a_1, b_1)$$

в графе  $\Gamma(A)$ , у которого все вершины, кроме начальной и конечной, различны. В такой записи обычно будем опускать последнюю вершину.

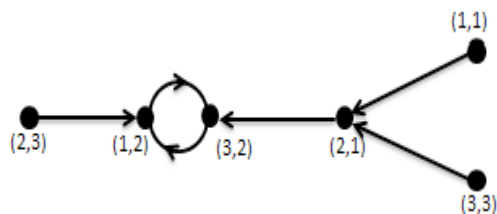


Рис. 1. Компонента связности графа  $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ , содержащая контур максимальной длины 2

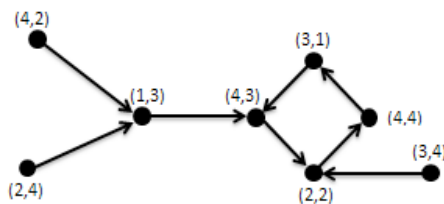


Рис. 2. Компонента связности графа  $\Gamma(\mathbb{Z}_5)$ , содержащая контур максимальной длины 4

Наличие контура длины  $k$  в графе  $\Gamma(A)$  означает существование в нашем кольце нетривиального решения «циклической» системы  $2k$  квадратичных уравнений с  $2k$  неизвестными

$$\begin{cases} x_1 + y_1 = x_2, \\ x_1 y_1 = y_2, \\ \dots \\ x_{k-1} + y_{k-1} = x_k, \\ x_{k-1} y_{k-1} = y_k, \\ x_k + y_k = x_1, \\ x_k y_k = y_1 \end{cases} \quad (1)$$

С каждой парой  $(a_i, b_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) связан квадратный многочлен  $z^2 - a_i z + b_i$  с корнями  $(a_{i-1}, b_{i-1})$ , т. е.  $z^2 - a_i z + b_i = (z - a_{i-1})(z - b_{i-1})$ . Здесь для удобства мы считаем, что  $a_0 = a_k$  и  $b_0 = b_k$ . Перемножая эти многочлены и пользуясь «циклическостью», получаем равенство

$$\prod_{i=1,k} (z^2 - a_i z + b_i) = \prod_{i=1,k} (z - a_i)(z - b_i).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты, приходим к следующему утверждению (см. [6]).

**Утверждение 4.** Для любого  $k$ -контура  $(a_1, b_1) \rightarrow (a_2, b_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_k, b_k)$  имеют место равенства

$$\sigma_1(b) = \sigma_2(b) = \sigma_3(b) = 0, \quad (\sigma_k(a) - 1) \cdot \sigma_k(b) = 0.$$

Здесь использовано стандартное обозначение для элементарных симметрических функций

$$\sigma_i(X) = \sigma_i(X_1, \dots, X_k) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq k} X_{k_1} \cdots X_{k_i}.$$

Как показывает пример  $\mathbb{Z}_5$ , значение  $\sigma_4(b)$  может быть отлично от 0.

В связи с системой (1) можно рассматривать идеалы в кольце

$$A[x, y] = A[x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k]$$

многочленов от двух серий переменных:

$$\begin{aligned} J &= (x_1 + y_1 - x_2, x_1 y_1 - y_2, \dots, x_{k-1} + y_{k-1} - x_k, x_{k-1} y_{k-1} - y_k), \\ I &= J + (x_k + y_k - x_1, x_k y_k - y_1) = \\ &= (x_1 + y_1 - x_2, x_1 y_1 - y_2, \dots, x_k + y_k - x_1, x_k y_k - y_1). \end{aligned}$$

**Определение 5.** Идеал  $J$  назовём *идеалом  $k$ -путей*, а идеал  $I$  — *идеалом  $k$ -контуров*.

Легко проверить, что многочлены

$$y_1 + \dots + y_k, \quad x_1 y_1 + \dots + x_k y_k, \quad y_1^2 + \dots + y_k^2$$

принадлежат  $I$ , но верно более сильное утверждение.

**Утверждение 6.**  $I = J + (y_1 + \dots + y_k, x_1 y_1 + \dots + x_k y_k)$ .

Доказательство вытекает из очевидных тождеств

$$y_1 + \dots + y_k = (x_1 + y_1 - y_2) + \dots + (x_k + y_k - y_1)$$

и

$$x_1 y_1 + \dots + x_k y_k = (x_1 y_1 - y_2) + \dots + (x_k y_k - y_1).$$

Для  $k = 2$  и  $k = 3$  можно вопросы о существовании  $k$ -контуров и базиса идеала решить полностью алгебраически (см. [6]).

**Утверждение 7.** Для  $k \leq 3$  путь

$$(a_1, b_1) \rightarrow \dots \rightarrow (a_k, b_k)$$

дополняется до  $k$ -контуров, т. е. в графе  $\Gamma(A)$  есть ребро  $(a_k, b_k) \rightarrow (a_1, b_1)$ , тогда и только тогда, когда  $\sigma_i(b) = 0$  при всех  $i \leq k$ .

В [6] приведены результаты компьютерных вычислений для колец  $\mathbb{Z}_n$  при  $n \leq 50$ , в [3] для  $n \leq 100$ . Вычислялись число компонент связности  $c_n$ , длина максимального контура  $l_n$ , число максимальных контуров  $m_n$ , а также длина максимального пути  $p_n$ . Недавно эти вычисления были продолжены до  $n < 200$ ,

а также проделаны для колец  $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$  ( $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq 20$ ) (см. [2]). Приведём результаты этих вычислений. Во второй таблице опущены пары  $(n_1, n_2)$  с взаимно простыми  $n_1$  и  $n_2$  и  $n_1 n_2 < 200$ , так как для таких пар  $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \cong \mathbb{Z}_{n_1 n_2}$ , а эти кольца уже присутствуют в первой таблице.

Таблица 1. Параметры графов  $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$  для  $100 \leq n < 200$ 

$n$	$c_n$	$l_n$	$m_n$	$p_n$	$n$	$c_n$	$l_n$	$m_n$	$p_n$
100	271	10	4	14	101	104	10	1	127
102	114	10	6	18	103	106	22	1	135
104	176	4	46	22	105	126	4	21	12
106	112	14	2	67	107	109	13	1	155
108	333	18	3	20	109	113	30	1	157
110	146	12	4	18	111	117	24	3	49
112	210	8	28	16	113	116	8	1	200
114	120	8	6	34	115	145	20	2	42
116	163	14	6	35	117	199	12	2	30
118	130	17	2	130	119	133	10	7	18
120	240	4	90	8	121	343	30	24	36
122	128	17	2	92	123	135	22	3	63
124	161	18	6	44	125	406	25	20	29
126	196	3	28	11	127	132	79	1	205
128	416	64	32	66	129	144	11	3	98
130	174	4	44	22	131	132	18	1	168
132	183	6	18	15	133	140	8	7	34
134	142	39	2	103	135	396	36	3	38
136	240	20	4	24	137	144	26	1	106
138	144	10	6	32	139	142	9	1	219
140	217	4	42	12	141	150	12	3	60
142	148	10	2	96	143	169	12	2	30
144	462	24	8	26	145	197	28	2	49
146	152	30	2	153	147	354	7	18	11
148	197	24	6	49	149	155	22	1	197
150	300	5	24	12	151	155	30	1	221
152	248	8	20	34	153	272	30	2	34
154	168	6	14	14	155	193	36	2	62
156	213	4	18	22	157	160	63	1	178
158	162	28	2	96	159	168	14	3	67
160	520	16	72	20	161	168	10	7	32
162	504	27	18	29	163	169	34	1	206
164	229	22	6	64	165	219	12	6	18
166	170	12	2	144	167	170	56	1	290
168	252	4	42	12	169	552	208	3	226
170	236	20	4	24	171	283	24	2	50

$n$	$c_n$	$l_n$	$m_n$	$p_n$	$n$	$c_n$	$l_n$	$m_n$	$p_n$
172	243	22	1	98	173	180	50	1	219
174	192	14	6	35	175	350	5	28	13
176	374	24	8	30	177	195	17	3	130
178	190	51	2	149	179	184	20	1	241
180	467	12	12	14	181	185	22	1	203
182	196	4	14	22	183	192	17	3	92
184	292	20	4	42	185	240	24	9	49
186	192	18	6	44	187	230	30	2	36
188	253	12	6	61	189	441	9	21	17
190	246	8	18	34	191	196	21	1	305
192	528	32	48	36	193	198	151	1	303
194	204	23	2	139	195	261	4	66	22
196	625	14	6	16	197	205	33	1	285
198	350	6	42	16	199	202	40	1	275

Таблица 2. Параметры графов  $\Gamma(\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2})$  для всех не взаимно простых  $2 \leq n_1, n_2 \leq 20$ 

$n_1$	$n_2$	$c$	$l$	$m$	$p$	$n_1$	$n_2$	$c$	$l$	$m$	$p$
2	2	4	1	4	3	2	4	10	2	2	4
2	6	12	1	12	5	2	8	24	4	4	6
2	10	24	4	4	6	2	12	30	2	6	6
2	14	28	1	28	9	2	16	60	8	8	10
2	18	56	3	8	6	2	20	62	4	12	6
3	3	9	1	9	5	3	6	18	1	18	5
3	9	42	3	6	7	3	12	45	2	9	6
3	15	54	4	9	8	3	18	84	3	12	7
3	20	93	4	18	8	4	4	26	2	10	4
4	6	30	2	6	6	4	8	64	4	12	6
4	10	62	4	12	6	4	12	78	2	30	6
4	14	70	2	14	9	4	16	164	8	24	10
4	18	146	6	4	6	4	20	166	4	36	6
5	5	39	4	14	8	5	10	78	4	28	8
5	15	117	4	42	8	5	20	209	4	84	8
6	6	36	1	36	5	6	8	72	4	12	8
6	9	84	3	12	7	6	10	72	4	12	8
6	12	90	2	18	6	6	14	84	1	84	9
6	15	108	4	18	8	6	16	180	8	24	12
6	18	168	3	24	7	6	20	186	4	36	8
7	7	49	1	49	9	7	14	98	1	98	9
8	8	168	4	64	8	8	10	160	4	60	8
8	12	192	4	36	8	8	14	168	4	28	12
8	16	440	8	80	10	8	18	360	12	8	14

$n_1$	$n_2$	$c$	$l$	$m$	$p$	$n_1$	$n_2$	$c$	$l$	$m$	$p$
8	20	440	4	180	8	9	9	213	6	12	10
9	12	219	6	6	10	9	15	261	12	6	16
9	18	426	6	24	10	9	20	467	12	12	14
10	10	156	4	56	8	10	12	186	4	36	8
10	14	168	4	28	12	10	15	234	4	84	8
10	16	412	8	72	12	10	18	348	12	8	14
10	20	418	4	168	8	11	11	149	6	28	19
11	19	241	24	2	50	11	20	383	12	12	18
12	12	234	2	90	6	12	14	210	2	42	10
12	15	279	4	54	8	12	16	492	8	72	12
12	17	291	10	18	18	12	18	438	6	12	10
12	19	303	8	18	34	12	20	498	4	108	8
13	13	199	4	30	22	13	16	446	8	68	26
13	17	270	20	2	38	13	18	398	12	4	30
13	19	283	8	17	34	13	20	457	4	132	22
14	14	196	1	196	9	14	15	252	4	42	12
14	16	420	8	56	16	14	17	266	10	14	18
14	18	392	3	56	11	14	19	280	8	14	34
14	20	434	4	84	12	15	16	618	8	108	12
15	15	351	4	126	8	15	17	354	20	6	24
15	18	522	12	12	16	15	19	369	8	27	34
15	20	627	4	252	8	16	16	1232	8	448	10
16	17	610	40	8	34	16	18	924	24	16	66
16	19	642	8	148	34	16	20	1156	8	216	12
17	17	375	20	4	34	17	18	544	30	4	34
17	19	384	40	2	66	17	20	623	20	12	24
18	18	852	6	48	10	18	19	566	24	4	50
18	20	934	12	24	14	19	19	704	8	46	34
19	20	643	8	54	34	20	20	1154	4	504	8

Из этих (и опубликованных в [6] и [3]) таблиц видны различные любопытные факты. Например, для всех простых чисел  $n$ , меньших 200 (кроме 3 и 7), число максимальных контуров в графе  $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$  равно 1. Но у двух составных чисел, 4 и  $172 = 4 \cdot 43$ , это число тоже равно 1. Вопрос: для каких  $n$  максимальный контур в графе  $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$  один?

Из таблиц 1 и 2 можно вывести некоторые отношения. Например,

$$c = n + (\text{общее число контуров длины больше 1}),$$

и можно вычислить число контуров длины меньше максимальной (оно равно  $c - n - p$ ). Экспериментальные данные подсказывают гипотезу о том, что длина  $l_n$  максимального контура в  $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$  в определённом смысле очень близка к мультипликативной арифметической функции от  $n$ . По крайней мере, это так

для почти всех графов колец  $\mathbb{Z}_n$  с  $n \leq 200$ . Например,

$$l_8 \cdot l_9 = 4 \cdot 3 = 12 = l_{72}, \quad l_8 \cdot l_{25} = 4 \cdot 5 = 20 = l_{200}.$$

Исследование в [3] частично подтверждает эту гипотезу. Одним из интересных результатов здесь является следующее утверждение.

**Утверждение 8.** *Длина максимального контура в  $\Gamma(\mathbb{Z}_{p^m})$  равна или  $p^{m-1}$ , или  $\alpha \cdot l_p$  для некоторого  $\alpha > 1$ .*

На данный момент нет оценки числа  $\alpha$ . Доказательство основывается на проекциях колец  $\mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ ,  $\mathbb{Z}_{mn} \rightarrow \mathbb{Z}_n$ , которые определяют гомоморфизмы графов  $\Gamma(\mathbb{Z}_{mn}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{Z}_m)$ ,  $\Gamma(\mathbb{Z}_{mn}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{Z}_n)$ , переводящие контуры в контуры. При этом длина исходного контура всегда кратна длине его образа.

В самом деле, нетрудно убедиться, что в  $\mathbb{Z}_{p^2}$  существует цикл длины  $p$ : нужно начать с  $(1, p)$ . В общем случае можно воспользоваться  $p$ -значным ветвлением, порождённым гомоморфизмом  $\mathbb{Z}_{p^m} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^{m-1}}$ , и по индукции показать, что в  $\mathbb{Z}_{p^m}$  есть цикл длины  $p^{m-1}$ . Если этот цикл не максимальный, то с помощью гомоморфизма  $\mathbb{Z}_{p^m} \rightarrow \mathbb{Z}_p$  получим вторую часть утверждения. Заметим, что в  $\mathbb{Z}_{p^2}$  существует и цикл длины  $p-1$ : нужно начать с  $(a, p)$ , где  $a-1$  — обратимый элемент в  $\mathbb{Z}_{p^2}$ , и затем воспользоваться малой теоремой Ферма.

В общем случае при изучении мультипликативности длины максимального контура нужно учитывать длины всех более коротких контуров. Окончательного результата здесь пока нет. Для примера, самый большой обработанный случай —  $n = 425 = 5^2 \cdot 17$ . Вычислены длины и количество всех контуров в кольце  $\mathbb{Z}_{425}$ . Их немного: кроме тривиальных контуров длины 1, есть контуры длины 2, 4, 5, 10 и 20. Интересно, что все длины — делители максимальной длины.

Отметим возможные обобщения и продолжения данной работы. Во-первых, отображение  $\Phi: A^2 \rightarrow A^2$  естественно обобщается на отображение

$$\Phi_m: A^m \rightarrow A^m, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (\sigma_1(x), \dots, \sigma_m(x)),$$

и таким образом получается граф  $\Gamma_m(A)$ . В этом графе  $m!$ -кратное ветвление соответствует действию группы  $S_m$ . Некоторые из предыдущих утверждений переносятся и на общий случай.

**Утверждение 9.** *Если  $A = \mathbb{Z}_n$ , где  $n$  — свободное от квадратов произведение простых чисел  $n = p_1 \cdots p_r$  и  $p_1 < \dots < p_s < m \leq p_{s+1} < \dots < p_r$ , то число рёбер, входящих в произвольную вершину  $(a_1, \dots, a_m)$  графа  $\Gamma_m(A)$ , не превосходит  $(p_1 \cdots p_s)^m \cdot (m^{r-s} \cdots (m^{r-s} - m + 1))$ .*

Действительно, по китайской теореме об остатках число различных корней уравнения  $z^m - a_1 z^{m-1} + \dots + (-1)^m a_m$  по модулю  $n$  равно произведению чисел различных корней этого уравнения по модулям  $p_1, \dots, p_r$  и не превосходит  $p_1 \cdots p_s \cdot m^{r-s}$ , откуда легко выводится наше утверждение. Оценка в случае  $s = 0$  может достигаться.

Естественно вводится понятие контура длины  $k$  как замкнутого пути

$$(a_{11}, \dots, a_{1m}) \rightarrow (a_{21}, \dots, a_{2m}) \rightarrow \dots \rightarrow (a_{k1}, \dots, a_{km}) \rightarrow (a_{11}, \dots, a_{1m})$$



в графе  $\Gamma_m(A)$ . С каждой вершиной  $(a_{i1}, \dots, a_{im})$  ( $i = 1, \dots, k$ ) связан многочлен  $z^m - a_{i1}z^{m-1} + \dots + (-1)^m a_{im}$  с корнями  $(a_{i-1,1}, \dots, a_{i-1,m})$  (здесь для удобства мы считаем, что  $a_{0s} = a_{ns}$ ). Перемножая многочлены и пользуясь «циклическостью», приходим к равенству

$$\prod_{i=1,k} (z^m - a_{i1}z^{m-1} + \dots + (-1)^m a_{im}) = \prod_{i=1,k} (z - a_{i1})(z - a_{i2}) \cdots (z - a_{im}),$$

из которого сравнением коэффициентов при  $z^{km-1}$  и свободных членов получаем следующее утверждение.

**Утверждение 10.** Для любого  $k$ -контура

$$(a_{11}, \dots, a_{1m}) \rightarrow (a_{21}, \dots, a_{2m}) \rightarrow \dots \rightarrow (a_{k1}, \dots, a_{km})$$

имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sigma_1(a^{(2)}) + \dots + \sigma_1(a^{(m)}) &= 0, \\ (\sigma_k(a^{(1)}) \cdots \sigma_k(a^{(m-1)}) - 1) \cdot \sigma_k(a^{(m)}) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $a^{(i)} = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ki})$  — совокупность  $i$ -х координат вершин данного контура, а  $\sigma_i$  — соответствующая симметрическая функция  $k$  переменных. В случае  $m = 3$  Х. Дауб вычислил некоторые графы  $\Gamma_3(A)$ .

В процессе работы над статьёй мне стала известна работа [4], в которой рассматриваются некоторые алгебраические вопросы, связанные с описанной конструкцией структурного графа кольца, в частности поведение при этом идеалов и произведений колец. Заметим, что в [4] есть ссылка на несуществующий препринт, но нет ссылки на работу [6], к тому времени уже опубликованную. Хотелось бы упомянуть также работы [5] и [7].

Автор выражает благодарность рецензентам за примечания, которые намного улучшили качество статьи.

## Литература

- [1] Arnold V. I. Topological content of the Maxwell theorem on multipole representation of spherical functions // Topol. Methods Nonlinear Analysis. — 1996. — Vol. 7. — P. 205—217.
- [2] Daoub H. Коначни прстени и усмерени графови: развој теорије и алгоритама: докторска дисертација. Београд: Унив. у Београду, 2013
- [3] Daoub H., Shafah O., Lipkovski A. An association between digraphs and rings // Filomat. — Accepted.
- [4] Hausken S., Skinner J. Directed graphs of commutative rings // Rose—Hulman Undergrad. Math. J. — 2013. — Vol. 14, no. 2. — P. 167—188.
- [5] Lipkovski A. Digraphs associated with rings and some integer functions // IX конгрес математичара Југославије. Петровац, 22—27. мај 1995. Зборник резимеа. — С. 32.
- [6] Lipkovski A. Digraphs associated with finite rings // Publ. Inst. Math. — 2012. — Vol. 92 (106). — P. 35—41.

- [7] Lipkovski A., Shafah O., Daoub H. Calculation of graphs of finite rings // Proc. of the Int. Conf. «Mathematical and Informational Technologies», Vrnjačka Banja, Serbia — Budva, Montenegro, August 27 — September 5, 2011. — <http://conf.nsc.ru/MIT-2011>. Report 177.