Редукция и интегрируемость стохастических динамических систем

НГУЕН ТЬЕН ЗУНГ
Университет Тулузы III, Франция
e-mail: tienzung.nguyen@math.univ-toulouse.fr

НГУЕН ТХАНЬ ТХЬЕН
Университет Тулузы III, Франция
e-mail: ttnguyen@math.univ-toulouse.fr

УДК 519.216.73

Ключевые слова: интегрируемая система, стохастическая динамическая система, редукция, стохастический процесс.

Аннотация

Данная работа посвящена изучению качественных геометрических свойств стохастических динамических систем, а именно их симметрий, редукции и интегрируемости. В частности, мы показываем, что стохастическая динамическая система, которая является симметричной в смысле диффузии по отношению к собственному действию группы Ли, может быть редуцирована в смысле диффузии к стохастической динамической системе на фактор-пространстве. Мы также находим необходимые и достаточные условия для того, чтобы стохастическая динамическая система могла быть спроецирована при помощи сюръективного отображения. Затем мы вводим понятие интегрируемости стохастической динамической системы и обобщаем результаты о существовании и свойстве сохранения структуры при лиувиллевом действии тора с классического случая на случай интегрируемых стохастических динамических систем. Мы также показываем, как интегрируемые стохастические динамические системы связаны с согласованными семействами интегрируемых римановых метрик на многообразиях.

Abstract

Nguyen Tien Zung, Nguyen Thanh Thien, Reduction and integrability of stochastic dynamical systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 3, pp. 213—249.

This paper is devoted to the study of qualitative geometrical properties of stochastic dynamical systems, namely their symmetries, reduction, and integrability. In particular, we show that an SDS that is diffusion-wise symmetric with respect to a proper Lie group action can be diffusion-wise reduced to an SDS on the quotient space. We also show necessary and sufficient conditions for an SDS to be projectable via a surjective map. We then introduce the notion of integrability of SDS's, and extend the results about the existence and structure-preserving property of Liouville torus actions from the classical case to the case of integrable SDS's. We also show how integrable SDS's are related to compatible families of integrable Riemannian metrics on manifolds.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 3, с. 213—249.

*Посвящается Анатолию Тимофеевичу Фоменко
в связи с его семидесятилетием*

1. Введение

Цель настоящей работы — изучить редукцию и интегрируемость стохастических динамических систем, заданных стохастическими дифференциальными уравнениями на многообразиях. Одной из мотиваций данного исследования послужила задача о сходных с физическими стохастических моделях второго порядка для цен финансовых активов, которая рассматривается в отдельной статье [27]. В настоящей работе мы будем записывать стохастическое дифференциальное уравнение в форме Стратоновича:

$$dx_t = X_0 dt + \sum_{i=1}^{m} X_i \circ dB_t^i, \tag{1.1}$$

где x_t означает точку на многообразии M, зависящую от времени t, $X_0, X_1, \ldots, X_m$ — векторные поля на M, а через $B^1, \ldots, B^m$ обозначены независимые броуновские движения (винеровские процессы) на $\mathbb{R}$ (см., например, [2, 12, 14]). На протяжении данной работы мы будем использовать запись

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{m} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt} \tag{1.2}$$

для обозначения стохастической динамической системы X, порождённой стохастическим дифференциальным уравнением (1.1). Причина использования формы Стратоновича вместо исчисления Ито заключается в том, что системы, записанные в форме Стратоновича, хорошо себя ведут при заменах координат, совсем как обычные векторные поля.

Напомним (см., например, [22]), что линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$A_X = X_0 + \frac{1}{2} \sum X_i^2 \tag{1.3}$$

называется *порождающим* (или *оператором диффузии*) для

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{m} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}.$$

Смысл этого оператора в том, что стохастический процесс x_t, порождённый X на M, полностью определяется оператором A_X. В частности, формула

$$A_X f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(x_t)] - f(x)}{t} \tag{1.4}$$

имеет место для любой функции $f \in C^2(M, \mathbb{R})$ и любой точки $x \in M$, где $\mathbb{E}^x$ означает условное математическое ожидание с начальным условием $x_0 = x$.

Если две стохастические динамические системы

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}, \quad Y = Y_0 + \sum Y_j \circ \frac{dB_t^j}{dt}$$

имеют один и тот же оператор диффузии, т. е.

$$A_X = X_0 + \frac{1}{2}\sum X_i^2 = A_Y = Y_0 + \frac{1}{2}\sum Y_j^2,$$

будем говорить, что X и Y *диффузионно эквивалентны*. В данной работе мы в основном рассматриваем стохастические динамические системы только с точностью до диффузионной эквивалентности.

Раздел 2 настоящей работы посвящён вопросу редукции стохастических динамических систем. Напомним, что для детерминированных динамических систем существует два основных способа понизить их размерность:

1) ограничение на инвариантное подмногообразие (например, заданное поверхностью уровня первого интеграла);
2) проекция на фактор-пространство (например, относительно действия группы Ли, сохраняющего систему).

Мы хотим сделать то же самое, но для стохастических динамических систем.

Понятия первых интегралов и инвариантных подмногообразий могут быть естественным образом перенесены из категории детерминированных систем на категорию стохастических систем, и они уже изучались во многих работах. Мы кратко напомним их в разделе 2.1. Понятие групп симметрий для стохастических динамических систем сложнее. Ранее многие авторы исследовали только жёсткие симметрии, т. е. требовали, чтобы все векторные поля $X_0, X_1, \ldots, X_m$ в выражении (1.2) для стохастической динамической системы X были инвариантны относительно действия группы Ли G (см., например, [1, 9, 15, 21, 23]). В этом случае, конечно, стохастическая динамическая система X может быть спроецирована на фактор M/G. Однако с точки зрения приложений нет никакой разницы между двумя стохастическими динамическими системами

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}, \quad Y = Y_0 + \sum Y_j \circ \frac{dB_t^j}{dt},$$

если им соответствует один и тот же диффузионный процесс, т. е. если они имеют один и тот же оператор диффузии

$$A_X = X_0 + \frac{1}{2}\sum X_i^2 = A_Y = Y_0 + \frac{1}{2}\sum Y_j^2.$$

Более того, существует явление нарушения симметрии: хотя многие естественные стохастические процессы (например, броуновское движение в $\mathbb{R}^n$) обладают большой группой симметрий, стоит только записать их в виде стохастической динамической системы — и соответствующие векторные поля допускают очень мало симметрий. Вот почему нам кажется более естественным редуцировать стохастическую динамическую систему диффузионно, т. е. лишь с точностью до диффузионной эквивалентности. Основной результат раздела 2.2 (теорема 2.10) говорит, что если стохастическая динамическая система диффузионно инвариантна относительно собственного действия группы Ли G на многообразии M, то её можно диффузионно спроектировать в стохастическую динамическую систему на M/G. Знаменитый классический пример — процесс Бесселя

$$Z = \frac{n-1}{2r}\partial_r + \partial_r \circ \frac{dB_t}{dt}$$

на $\mathbb{R}_+$ (здесь $n \in \mathbb{N}$, а r — координата на $\mathbb{R}_+$), который является диффузионной редукцией броуновского движения в $\mathbb{R}^n$ относительно естественного действия группы $\mathrm{SO}(n)$.

В разделе 2.3 мы показываем, что, в отличие от детерминированного случая и случая жёсткой симметрии, геометрические структуры, лежащие в основе стохастических динамических систем, вообще говоря, не сохраняются при диффузионной редукции. Например, вполне возможно, что система, полученная редукцией из гамильтоновой стохастической динамической системы, не допускает гамильтоновой структуры. В разделе 2.4 рассматривается конкретный пример диффузионной симметрии и редукции, а именно затухающий стохастический осциллятор относительно естественного действия $\mathrm{SO}(2)$. Наконец, в разделе 2.5 мы обращаемся к проблеме «потерянных переменных», т. е. возможности проецирования стохастических динамических систем при помощи сюръективного отображения.

В разделе 3 данной работы мы развиваем понятие интегрируемости стохастических динамических систем, следуя как классической, так и квантовой механике. Грубо говоря, мы будем называть стохастическую динамическую систему на многообразии интегрируемой типа (p, q, r), если для неё существует полный коммутативный набор, состоящий из p операторов диффузии, q векторных полей и r сильных первых интегралов, причём $p + q + r = \dim M$. Среди прочих результатов мы доказываем в этом разделе аналог классической теоремы Лиувилля, утверждающий, что при некоторых предположениях существует естественное действие тора (называемое *лиувиллевым*), сохраняющее систему (теорема 3.13). Как и в классическом случае, это лиувиллево действие тора очень важно, поскольку оно обладает фундаментальным свойством сохранения структуры (см. теорему 3.3 и теорему 3.4), позволяет найти координаты действие-угол и выписать полулокальные нормальные формы (см. теорему 3.17 и теорему 3.18) для систем типов $(0, q, r)$ и $(1, q, r)$. Ограничивая интегрируемые стохастические динамические системы на совместные поверхности уровня первых интегралов и редуцируя их по лиувиллевым действиям тора, мы получаем интегрируемые системы типа $(p, 0, 0)$. В разделе 3.5 мы показываем, как интегрируемые системы типа $(p, 0, 0)$, т. е. заданные m коммутирующими операторами диффузии, связаны с согласованными семействами интегрируемых римановых метрик на многообразии. Наконец, в последнем разделе 3.6 мы формулируем гипотезу о редуцированной интегрируемости стохастических динамических систем, которую мы на данный момент не умеем доказывать.

2. Стохастические динамические системы и их редукция

2.1. Первые интегралы и инвариантные подмногообразия

Напомним некоторые определения первых интегралов и инвариантных подмногообразий для стохастических динамических систем (см., например, [2,15]).

Определение 2.1. Рассмотрим стохастическую динамическую систему

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt} \tag{2.1}$$

на многообразии M.

1. Функция $F\colon M \to \mathbb{R}$ называется *сильным первым интегралом* системы X, если F инвариантна относительно $X_0, X_1, \ldots, X_k$, т. е.
$$X_0(F) = X_1(F) = \ldots = X_k(F) = 0. \tag{2.2}$$
2. Функция $F\colon M \to \mathbb{R}$ называется *слабым первым интегралом* системы X, если F инвариантна относительно порождающего оператора
$$A_X = X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} X_i^2$$
для X, т. е.
$$A_X(F) = 0. \tag{2.3}$$
3. Диффузионный морфизм $F\colon (M, X) \to (\mathbb{R}, Z)$, где Z — стохастическая динамическая система на $\mathbb{R}$, называется *стохастическим первым интегралом* системы (M, X). Другими словами, X проецируется на одномерную систему при помощи F.
4. Подмногообразие $N \subset M$ называется *инвариантным* относительно X, если для всякого $x \in N$ имеем $X_0(x), X_1(x), \ldots, X_k(x) \in T_xN$, т. е. все векторные поля $X_0, X_1, \ldots, X_k$ касаются N. Другими словами, если $x \in N$, то почти наверное $\phi_t(\omega, x) \in N$ для любого t.

Имеется следующая характеризация сильных первых интегралов.

Предложение 2.2. *Функция $F\colon M \to \mathbb{R}$ — сильный первый интеграл для стохастической динамической системы*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

тогда и только тогда, когда

$$[A_X, F] = 0, \tag{2.4}$$

где F рассматривается как дифференциальный оператор нулевого порядка, т. е. оператор умножения на F, а

$$A_X = X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \text{ —}$$

оператор диффузии для X.

Заметим, что понятия сильного первого интеграла, слабого первого интеграла и инвариантного подмногообразия зависят только от класса диффузионной эквивалентности стохастической динамической системы. Точнее, имеет место следующее простое утверждение.

Теорема 2.3. *Пусть*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}, \quad Y = Y_0 + \sum_{i=1}^{l} Y_i \circ \frac{dW_t^i}{dt} \text{ —}$$

две диффузионно эквивалентные стохастические динамические системы на многообразии M. Тогда

1) *функция $F\colon M \to \mathbb{R}$ — сильный первый интеграл для X, если и только если она является сильным первым интегралом для Y;*
2) *функция $F\colon M \to \mathbb{R}$ — слабый первый интеграл для X, если и только если она является слабым первым интегралом для Y;*
3) *подмногообразие $N \subseteq M$ инвариантно относительно X, если и только если оно инвариантно относительно Y.*

Упомянем ещё одно очевидное утверждение, точно такое же, как и в случае детерминированных систем.

Предложение 2.4. *Пусть $F_1, \ldots, F_q\colon M \to \mathbb{R}$ — сильные первые интегралы для стохастической динамической системы*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

на многообразии M. Предположим, что поверхность уровня

$$N = \{F_1 = c_1, \ldots,\ F_q = c_q\} \tag{2.5}$$

(*где $c_1, \ldots, c_q$ — константы*) *— подмногообразие в M. Тогда N — инвариантное подмногообразие системы X на M.*

Замечание 2.5. Даже если у детерминированной системы X_0 имеется много первых интегралов, при добавлении стохастических членов

$$X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

результирующая система

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

потеряет первые интегралы. В особенности если диффузия шума невырожденна, т. е. A_X эллиптичен, то сильных первых интегралов не будет вовсе. Вот почему необходимо ослабить понятие первых интегралов для стохастической динамической системы. Заметим, что слабый первый интеграл не обязан быть стохастическим первым интегралом. И наоборот, стохастический первый интеграл не обязательно является первым интегралом. По данному стохастическому первому интегралу $F\colon (M,X) \to (\mathbb{R}, Z)$ можно построить слабый первый интеграл, взяв композицию с монотонной функцией $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такой что $f(Z)$ — мартингальный процесс, так что в некотором смысле стохастические интегралы сильнее, чем слабые первые интегралы. Кроме того, они более полезны в теории редукции, поскольку морфизм $F\colon (M,X) \to (\mathbb{R}, Z)$ сам по себе является редукцией на одномерную систему. Например, в работах М. Фрейдлина и других первые интегралы детерминированных систем становятся стохастическими первыми интегралами после случайного возмущения и перехода к некоторому пределу (так называемые вариационные уравнения) (см., например, [5, 8]).

2.2. Редукция относительно группы симметрий

В этом разделе мы изучаем редукцию стохастической динамической системы на многообразии относительно действия группы Ли, сохраняющего систему. Сперва напомним понятие морфизма для стохастических динамических систем.

Определение 2.6. Пусть (M,X) и (N,Y), где

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}, \quad Y = Y_0 + \sum_{i=1}^{m} Y_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}, \text{ —}$$

две стохастические динамические системы на многообразиях M и N соответственно.

1. Отображение $\Phi\colon (M,X) \to (N,Y)$ называется *морфизмом систем*, если $m = k$ и Φ переводит X_i в Y_i для всех $i = 0, 1, \ldots, k$, т. е. для всех $x \in M$ и $i = 0, 1, \ldots, k$ имеем
$$\Phi_*\bigl(X_i(x)\bigr) = Y_i \Phi(x). \tag{2.6}$$
2. Отображение $\Phi\colon (M,X) \to (N,Y)$ называется *диффузионным морфизмом*, если Φ переводит диффузионный оператор
$$A_X = X_0 + \frac{1}{2} \sum X_i^2$$
для X в диффузионный оператор
$$A_Y = Y_0 + \frac{1}{2} \sum Y_i^2$$
для Y, т. е. для всякой функции f на N имеем
$$A_X\bigl(\Phi^*(f)\bigr) = \Phi^*\bigl(A_Y(f)\bigr). \tag{2.7}$$

Разумеется, морфизм систем является также и диффузионным морфизмом, но обратное, вообще говоря, неверно. Например, если две разные стохастические динамические системы на многообразии M диффузионно эквивалентны, то тождественное отображение — это диффузионный морфизм, но не морфизм этих систем. Поскольку морфизмы систем во многих случаях накладывают слишком много ограничений, мы часто будем вместо них работать с диффузионными морфизмами.

Пусть $\rho\colon G \curvearrowright M$ — (эффективное) действие группы Ли G на M. Будем предполагать, что либо G компактна, либо (для некомпактной G) действие собственное, так что индуцированная топология на фактор-пространстве M/G является хаусдорфовой.

Напомним, что стохастическая динамическая система

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

называется *инвариантной относительно* G, если все векторные поля $X_0, X_1, \ldots, X_k$ инвариантны относительно G. Другими словами, для каждого $g \in G$ отображение $\rho_g\colon (M, X) \to (M, X)$ для действия ρ группы Ли G — изоморфизм систем. В этом случае хорошо известно, что

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

можно спроецировать на стохастическую динамическую систему

$$Z = Z_0 + \sum Z_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

на M/G, где $Z_i = \mathrm{proj}_{M/G}(X_i)$ — проекция X_i на M/G для каждого $i = 0, \ldots, k$. С этого начинается теория редукции для стохастических динамических систем (см., например, [1, 9, 15, 17, 21, 23]).

Возможна ситуация, когда G не сохраняет систему

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt},$$

но сохраняет диффузионный процесс системы, т. е. оператор диффузии

$$X_0 + \frac{1}{2} \sum X_i^2$$

инвариантен относительно G. Мы хотим осуществить редукцию и в этом случае.

Определение 2.7. Будем говорить, что стохастическая динамическая система

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

на многообразии M *диффузионно инвариантна* относительно действия ρ группы Ли G на M, если оператор

$$A_X = X_0 + \frac{1}{2} \sum X_i^2$$

инвариантен относительно G. Другими словами, для каждого $g \in G$ отображение $\rho_g\colon (M,X) \to (M,X)$ для данного действия является диффузионным изоморфизмом.

Пример 2.8. Положим $X_0 = x\partial_y - y\partial_x$, $X_1 = \partial_x$, $X_2 = \partial_y$ на $\mathbb{R}^2$. Тогда система

$$X = X_0 + X_1 \circ \frac{dB_t^1}{dt} + X_2 \circ \frac{dB_t^2}{dt}$$

не инвариантна относительно группы вращений $\mathrm{SO}(2)$, но диффузионно инвариантна относительно неё.

Возникает естественный вопрос: если дана система

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt},$$

диффузионно инвариантная относительно G, существует ли система

$$Y = Y_0 + \sum Y_j \circ \frac{dW_t^j}{dt},$$

инвариантная относительно G и диффузионно эквивалентная X? В некоторых случаях ответ положительный, но, к сожалению, во многих случаях ответ отрицательный, особенно если группа G «слишком большая». Это явление можно рассматривать как *нарушение симметрии*.

Пример 2.9. Пусть $M = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ — единичная $(n-1)$-мерная сфера, а $G = \mathrm{SO}(n)$ действует на M вращениями. В этом случае не существует нетривиального $\mathrm{SO}(n)$-инвариантного векторного поля на S^{n-1}, но броуновское движение на S^{n-1} (относительно стандартной метрики), разумеется, $\mathrm{SO}(n)$-инвариантно. Другими словами, броуновское движение на S^{n-1} является $\mathrm{SO}(n)$-инвариантным как диффузионный процесс, и оно может быть порождено стохастической динамической системой, но не существует соответствующей $\mathrm{SO}(n)$-инвариантной стохастической динамической системы.

Тем не менее, как показывает следующая теорема, мы все равно можем совершить редукцию с точностью до диффузионной эквивалентности для диффузионно-симметричных систем (т. е. инвариантных относительно группового действия).

Теорема 2.10. *Пусть*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt} \ —$$

стохастическая динамическая система на многообразии M, диффузионно инвариантная относительно действия ρ компактной группы Ли G на M. Тогда на регулярной части фактор-пространства M/G существует стохастическая динамическая система

$$Z = Z_0 + \sum_{i=1}^{m} Z_i \circ \frac{dW_t^i}{dt}$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$, *для которой порождающий оператор*

$$Z_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} Z_i^2$$

является проекцией оператора

$$X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} X_i^2,$$

т. е. отображение проекции $\mathrm{proj}\colon (M, X) \to (M/G, Z)$ *— диффузионный морфизм.*

Доказательство. Сначала проверим, что

$$X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

проектируется в дифференциальный оператор второго порядка на (регулярной части) M/G.

Пусть $f\colon M/G \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, а $\pi\colon M \to M/G$ — проекция. Тогда $\pi^* f$ будет G-инвариантна. Поскольку оператор

$$A_X = X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

является G-инвариантным, функция $A_X(\pi^* f)$ тоже G-инвариантна, т. е. существует единственная функция $\hat{f}$ на M/G, такая что $A_X(\pi^* f) = \pi^* \hat{f}$. Поскольку A_X — дифференциальный оператор второго порядка, отображение $f \mapsto \hat{f}$ тоже задаётся дифференциальным оператором второго порядка (т. е. в локальных координатах оно зависит от производных только до второго порядка включительно).

Докажем существование

$$Z_0 + \sum_{i=1}^{m} Z_i \circ \frac{dW_t^i}{dt}.$$

Сперва рассмотрим случай, когда существует глобальное сечение $\mathcal{S} \subseteq M$ для слоения на орбиты группы G в M. Тогда M/G может быть отождествлено с $\mathcal{S}$.

Для каждого $i = 1, \ldots, k$ обозначим через $Z_i = \mathrm{proj}_{\mathcal{S}}(X_i)$ проекцию на M/G вдоль орбит группы G ограничения поля X_i на $\mathcal{S}$. Точнее, для каждой точки $y \in M/G$ обозначим через $y_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}$ такую точку в $\mathcal{S}$, для которой $\Pi(y_{\mathcal{S}}) = y$, и положим

$$Z_i(y) = \pi_*\bigl(X_i(y_{\mathcal{S}})\bigr). \tag{2.8}$$

Теперь легко проверить, что

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

имеет тот же главный символ, что и проекция

$$\mathrm{proj}_{M/G}\Big(X_0 + \frac{1}{2}\sum X_i^2\Big)$$

оператора

$$X_0 + \frac{1}{2}\sum X_i^2$$

на M/G. Значит, разность этих двух дифференциальных операторов есть дифференциальный оператор первого порядка (без членов нулевого порядка), т. е. векторное поле, которое мы обозначим через Z_0. Тогда

$$Z_0 + \sum Z_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

будет удовлетворять условиям теоремы.

В общем случае в силу топологических препятствий такое глобальное сечение не обязано существовать, но локальные сечения существуют, и мы можем использовать разбиение единицы, чтобы построить нашу систему на M/G следующим образом.

Пусть

$$M/G = \bigcup_k U_k \,—$$

конечное покрытие M открытыми (не обязательно связными) множествами вместе с разбиением единицы

$$\sum f_k = 1,$$

где $f_k \colon M/G \to [0,1]$ — функция на M/G с носителем внутри U_k, такая что над U_k существует сечение $\mathcal{S}_k$ для G-слоения на M. Положим

$$Z_{k,i} = \sqrt{f_k}\,\mathrm{proj}_{\mathcal{S}_k}(X_i) \tag{2.9}$$

(и продолжим его на всё M/G, положив равным 0 вне U_k). Тогда

$$\frac{1}{2}\sum_{k,i} Z_{k,i}^2$$

имеет тот же главный символ, что и

$$\mathrm{proj}_{M/G}\big(X_0 + \sum X_i^2\Big),$$

так что существует векторное поле Z_0 на регулярной части M/G, такое что

$$Z_0 + \sum_{k,i} Z_{k,i} \circ \frac{dW_t^{k,i}}{dt}$$

удовлетворяет условиям теоремы. $\square$

Определение 2.11. Система

$$Z_0 + \sum_{k,i} Z_{k,i} \circ \frac{dW_t^{k,i}}{dt}$$

из теоремы 2.10 называется *проекцией с точностью до диффузионной эквивалентности* системы

$$X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

с M на фактор-пространство M/G.

Конечно, все другие стохастические динамические системы на M/G, диффузионно эквивалентные

$$Z_0 + \sum Z_j \circ \frac{dW_t^j}{dt},$$

тоже будут проекцией системы

$$X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

с M на M/G с точностью до диффузионной эквивалентности. Среди всех этих диффузионно эквивалентных систем можно попробовать найти «нормальную форму», т. е. систему простейшего вида.

Замечание 2.12. Пространство M/G — это пространство орбит, которое, вообще говоря, является стратифицированным многообразием с особенностями. В особых точках M/G спроецированная стохастическая динамическая система может тоже вести себя особым образом, например раздуваться.

Пример 2.13. Рассмотрим броуновское движение на $\mathbb{R}^n$, порождённое

$$X = \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} \circ \frac{dB_t^i}{dt}.$$

Эта система диффузионно инвариантна относительно естественного действия группы $\mathrm{SO}(n)$. Фактор-пространством будет $\mathbb{R}^n/\mathrm{SO}(n) \cong \mathbb{R}_+$ с координатой

$$r = \sqrt{\sum x_i^2}.$$

Простые вычисления, подобные приведённым выше, показывают, что редуцированной системой на $\mathbb{R}_+$ является

$$Z = \frac{n-1}{2r}\partial_r + \partial_r \circ \frac{dB_t}{dt}. \tag{2.10}$$

В литературе диффузионный процесс для стохастической динамической системы, заданной формулой (2.10), называется *процессом Бесселя* и может быть иначе определён как процесс $\|W_n\|$, где W_n — n-мерное броуновское движение на $\mathbb{R}^n$ (см., например, [22]).

Хорошо известно, что броуновское движение (или, более общо, всякий $\mathrm{SO}(n)$-инвариантный марковский процесс) на $\mathbb{R}^n$ может быть записано как полупрямое произведение процесса Бесселя (или другого процесса на $\mathbb{R}_+$) и броуновского движения с заменённым временем (или более общим процессом с заменённым временем) на сфере $\mathbb{S}^{n-1}$ (см. [9]). Результат А. Р. Гальмарино [9] о полупрямом произведении был обобщён Э. Пауэлсом и К. Роджерсом [23] и другими на более общий случай марковских процессов, инвариантных относительно действия группы Ли G, в предположении, что существует глобальное сечение для слоения, заданного орбитами действия.

В наших предположениях на стохастическую динамическую систему X, являющуюся диффузионно инвариантной относительно группы симметрий G, это полупрямое произведение, также известное как разложение X в сумму угловой части (касательной к орбитам действия группы) и радиальной части (трансверсальной к орбитам), может быть рассмотрено следующим образом.

В доказательстве теоремы 2.10 предположим, что существует глобальное сечение $\mathcal{S} \subseteq M$. Каждое векторное поле Z_i на $\mathcal{S} \subseteq M$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ может быть превращено в векторное поле на M левыми сдвигами относительно действия G и усреднением по группе изотопий в каждой точке. Тем самым мы получаем векторное поле V_i на M, которое G-инвариантно и проецируется в Z_i на $\mathcal{S}$. Далее можно проверить, что разность

$$L = \Big(X_0 + \frac{1}{2} \sum X_i^2\Big) - \Big(V_0 + \frac{1}{2} \sum V_l^2\Big)$$

касается орбит группы G в том смысле, что для всякой функции f на M и любого $x \in M$ значение $L(f)(x)$ зависит только от ограничения f на орбиты действия G, проходящие через x. Предполагая, что мы можем записать

$$L = U_0 + \frac{1}{2} \sum_j U_j^2,$$

получаем, что система

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

диффузионно эквивалентна сумме

$$U_0 + \sum_j U_j \circ \frac{dB_t^j}{dt}$$

и

$$V_0 + \sum_l V_l \circ \frac{dB_t^l}{dt}.$$

Эти части называются соответственно *угловой частью* и *радиальной частью* системы X.

2.3. Стохастические динамические системы, сохраняющие структуру

Помимо обладания группами симметрий, детерминированные системы могут сохранять различные геометрические структуры, например формы объёма, симплектические структуры, пуассоновы структуры, контактные структуры и т. д. Возникает естественный вопрос: каковы их стохастические аналоги? Про какие типы стохастических динамических систем можно сказать, что они тоже сохраняют какие-нибудь геометрические структуры или обладают какими-нибудь свойствами, связанными с этими структурами?

Для гамильтоновых систем этот вопрос исследовался Ж.-М. Бисмутом [2] и другими. Говорят, что стохастическая динамическая система

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

на симплектическом многообразии (M, ω) — гамильтонова стохастическая динамическая система, если векторные поля $X_0, X_1, \ldots, X_k$ гамильтоновы, т. е. существуют $k+1$ функции $H_0, H_1, \ldots, H_k \colon M \to \mathbb{R}$, такие что $X_i = X_{H_i}$ — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом H_i для каждого i. Ж.-М. Бисмут [2] показал, что случайный поток гамильтоновой стохастической динамической системы почти наверное сохраняет симплектическую структуру. На самом деле он доказал следующую (более общую) теорему.

Теорема 2.14 (Ж.-М. Бисмут [2]). *Пусть Λ — произвольное гладкое тензорное поле на многообразии M, т. е. $\Lambda \in \Gamma\big(\bigotimes^p T^*M \bigotimes^q TM\big)$ для некоторых $p, q \geqslant 0$, инвариантное относительно векторных полей $X_0, X_1, \ldots, X_k$. Тогда случайный поток, соответствующий стохастической динамической системе*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt},$$

почти наверное сохраняет Λ.

В частности, если Π — тензор Пуассона, $f_0, \ldots, f_n \colon M \to \mathbb{R}$ — функции, а $X_i = df_i \lrcorner \Pi$ — их гамильтоновы векторные поля относительно Π, то стохастическая гамильтонова система

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

сохраняет пуассонову структуру Π согласно теореме Бисмута 2.14, поскольку это верно для каждого векторного поля X_i. Симплектические листы пуассонова многообразия (M, Π) являются инвариантными подмногообразиями системы X, а функции Казимира для (M, Π) — сильными первыми интегралами системы X.

Если стохастическая динамическая система X на многообразии M сохраняет мультивекторное поле Λ и X и Λ инвариантны относительно действия группы

Ли G на M, то проекция X на M/G, естественно, сохраняет проекцию Λ на M/G. В частности, в случае инвариантных стохастических гамильтоновых систем (где Λ — тензор Пуассона) имеют место редукционные теоремы, полученные Х.-А. Лазаро-Ками и Х.-П. Ортегой [15].

Отметим, что свойство сохранения структуры не инвариантно относительно диффузионной эквивалентности: из того, что X и Y — две диффузионно эквивалентные стохастические динамические системы и X сохраняет тензорное поле Λ, не следует, что векторные поля системы Y также его сохраняют. Более того, редукция относительно диффузионной группы симметрий может нарушить свойство сохранения структуры, которым обладала исходная система. Например, если исходная система была гамильтоновой, редуцированная система может оказаться диффузионно не эквивалентной ни одной гамильтоновой системе.

Пример 2.15. Рассмотрим гамильтонову стохастическую динамическую систему

$$X = X_h + \sum \partial_{x_i} \circ \frac{dB_t^i}{dt} + \sum \partial_{y_i} \circ \frac{dB_t^{i+n}}{dt}$$

на $\left(\mathbb{R}^{2n},\ \omega = \sum dx_i \wedge dy_i\right)$, где $h = (1/2)\sum(x_i^2 + y_i^2)$, а X_h порождает гамильтоново $\mathbb{T}^1$-действие на $\mathbb{R}^{2n}$, диффузионно сохраняющее X. Редуцированным фазовым пространством будет $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{T}^1 \cong \mathbb{CP}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ с симплектическими листами $\mathbb{CP}^{n-1} \times \{\mathrm{pt}\}$. Заметим, что редуцированные симплектические формы на этих симплектических листах не когомологичны друг другу, так что лист не может быть отображён на другой лист пуассоновым диффеоморфизмом, а потому всякая стохастическая динамическая система на $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{T}^1$, сохраняющая пуассонову структуру, также должна сохранять каждый симплектический лист. С другой стороны, всякий такой симплектический лист не будет инвариантен относительно редукции системы X на $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{T}^1$, поскольку его прообраз при проекции $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{T}^1$ — это сфера $\mathbb{S}^{2n-1}$, которая, разумеется, не сохраняется системой X из-за «шумового» члена

$$\sum \partial_{x_i} \circ \frac{dB_t^i}{dt} + \sum \partial_{y_i} \circ \frac{dB_t^{i+n}}{dt}.$$

2.4. Пример: затухающий стохастический осциллятор

Стохастический осциллятор — чрезвычайно популярная модель, которая многократно исследовалась различными авторами (см., например, [10, 19]).

Как ни странно, затухающий осциллятор (теряющий энергию в силу затухания) может вновь стать консервативным (сохраняющим энергию) в стохастическом смысле, если к нему добавить белый шум. Причина в том, что белый шум имеет свойство повышать математическое ожидание энергии, так что он ликвидирует потери энергии от затухающего слагаемого.

В качестве примера из теории редукции мы опишем в этом разделе простую модель затухающего стохастического осциллятора и проведём редукцию для него относительно естественного действия группы SO(2). Мы начнём с гармонического осциллятора, заданного функцией Гамильтона $h = (1/2)(x^2 + y^2)$ на симплектической плоскости $(\mathbb{R}^2,\ \omega = dx \wedge dy)$. Гамильтоново векторное поле — это векторное поле поворотов $X_h = x\partial_y - y\partial_x$, которое, конечно, SO(2)-инвариантно. Мы добавим затухающий член, которым является векторное поле D на $\mathbb{R}^2$, направленное к началу координат на $\mathbb{R}^2$ (так что $D(h) < 0$). Для простоты предположим, что D тоже SO(2)-инвариантно, так что положим $D = -f(r)(x\partial_x + y\partial_y)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и f — положительная функция. Наконец, добавим стохастический член в систему. Проще всего взять броуновское движение

$$B = \partial_x \circ \frac{dB_t^1}{dt} + \partial_y \circ \frac{dB_t^2}{dt}.$$

Этот член тоже SO(2)-инвариантен в смысле диффузии. Добавляя три указанных члена, получаем систему

$$\begin{aligned} X = X_h + D + B = \\ = (x\partial_y - y\partial_x) - f(r)(x\partial_x + y\partial_y) + \left(\partial_x \circ \frac{dB_t^1}{dt} + \partial_y \circ \frac{dB_t^2}{dt}\right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Из-за наличия затухающего члена система X не является гамильтоновой стохастической динамической системой. С другой стороны, она SO(2)-инвариантна в диффузионном смысле, так что её можно редуцировать на пространство орбит $\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{R}^2/\mathrm{SO}(2)$ с координатой $h = (x^2+y^2)/2$. Простое вычисление показывает, что редуцированная система имеет вид

$$Y = \left(\frac{1}{2} - 2hf\right)\partial_h + \sqrt{2h}\partial_h \circ \frac{dB_t}{dt}. \tag{2.12}$$

Используя координату $r = \sqrt{2h}$ вместо h, получаем, что

$$Y = \left(\frac{1}{2r} - rf\right)\partial_r + \partial_r \circ \frac{dB_t}{dt}. \tag{2.13}$$

Рассмотрим детерминированную часть (дрейфовый член) $Y_0 = g(r)\partial_r$ системы Y, где

$$g(r) = \frac{1}{2r} - rf(r). \tag{2.14}$$

Предположим, что существует значение $r_0 > 0$, такое что $g(r_0) = 0$, $g(r) < 0$ при $r > r_0$ и $g(r) > 0$ при $0 < r < r_0$. (Например, если $f = c$ постоянна, то $r_0 = \sqrt{1/(2c)}$, если $f = c/r$, так что величина затухающего векторного поля D постоянна, то $r_0 = 1/(2c)$.) Тогда r_0 — притягивающая неподвижная точка детерминированной части Y_0 системы Y. Если случайный член $\partial_r \circ dB/dt$ системы Y исчезнет, уровень энергии системы будет стремиться к значению $r_0^2/2$ при стремлении времени к бесконечности и можно сказать, что $r_0^2/2$ — устойчивый уровень энергии системы. Если случайный член $\partial_r \circ dB/dt$ в Y есть, то $r_0^2/2$ всё ещё оказывается устойчивым уровнем энергии системы, но в более слабом смысле: существует функция плотности вероятности p на $\mathbb{R}_+$ «в основном сконцентрированная около r_0», инвариантная относительно диффузионного процесса системы Y, как в процессе Орнштейна—Уленбека.

В полярных координатах (θ, r) ($x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$) имеем $D = rf(r)\partial_r$, $X_h = \partial_\theta$ и

$$(\partial_x)^2 + (\partial_y)^2 = \frac{1}{r}\partial_r + (\partial_r)^2 + \left(\frac{1}{r}\partial_\theta\right)^2,$$

так что наша система $X = X_h + D + B$ диффузионно эквивалентна системе

$$\hat{X} = \left[\left(\frac{1}{2r} - rf\right)\partial_r + \partial_r \circ \frac{dB_t^1}{dt}\right] + \left[\partial_\theta + \frac{1}{r}\partial_\theta \circ \frac{dB_t^2}{dt}\right]. \tag{2.15}$$

Данное выражение есть разложение $\hat{X}$ (т. е. X с точностью до диффузионной эквивалентности) в сумму её радиальной части (которая есть не что иное, как редуцированная система Y) и угловой части

$$\Theta = \partial_\theta + \frac{1}{r}\partial_\theta \circ \frac{dB_t}{dt}. \tag{2.16}$$

Поскольку $1/r$ инвариантна относительно ∂_θ, а ∂_θ коммутирует с $(1/r)\partial_\theta$, мы немедленно получаем следующий факт о смещении угловой координаты в этой модели.

Предложение 2.16. *В вышеописанной модели рассмотрим θ как координатную функцию на $\mathbb{R}$ вместо $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (т. е. рассмотрим полное угловое смещение). Тогда $\theta(t) - t$ — мартингальный процесс. В частности, средняя частота вышеописанного затухающего стохастического осциллятора почти наверное равна 1 для любых начальных условий.*

Пример 2.17. Рассмотрим случай $f(r) = c$. Здесь

$$Y = \left(\frac{1}{2r} - cr\right)\partial_r + \partial_r \circ \frac{dB_t}{dt}. \tag{2.17}$$

Согласно уравнению Фоккера—Планка имеем инвариантную плотность $p(r) = 2cre^{-cr^2}$ на $\mathbb{R}^+$ со средним $\sqrt{\pi/(4c)}$, медианой $\sqrt{(\ln 2)/c}$ и модой $\sqrt{1/(2c)}$ (рис. 1).

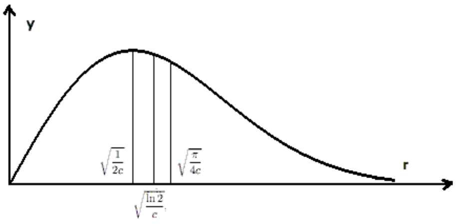

Рис. 1. Функция плотности $p(r) = 2cre^{-cr^2}$ для случая $f(r) = c$

2.5. Проблема потерянных переменных

Рассмотрим стохастическую динамическую систему X на многообразии M и субмерсию $\Phi\colon M \to N$, где $\dim M = m > \dim N = k$. Локально для каждой точки $p \in M$ можно задать систему координат $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_m)$ около p в M, такую что $x_1, \ldots, x_k$ — функции на N (их прообраз при Φ), образующие локальную систему координат в окрестности $\Phi(p)$ в N, а $x_{k+1}, \ldots, x_m$ — дополнительные координатные функции на M.

Теперь предположим, что для каждой точки $p \in M$ мы можем определить $x_1(p), \ldots, x_k(p)$ точно, но мы не знаем ничего о $x_{k+1}(p), \ldots, x_m(p)$ и не имеем возможности вычислить их точно. Например, если x_1 — цена товара, а x_{k+1} — его момент (предполагаем, что он существует), то x_1 можно непосредственно измерить (скажем, при помощи котировок в реальном времени), а x_{k+1} — это нечто, для чего нет непосредственных измерений, а есть только оценки, основанные на различных теориях и формулах. Это то, что мы называем проблемой потерянных переменных: как нам поступать с динамической системой (стохастической или детерминированной), когда часть переменных «потеряна»?

Наивный способ борьбы с этой проблемой — просто забыть о потерянных переменных: вместо того чтобы рассматривать систему на M, мы рассматриваем её как систему на N. Можно сказать, что таким образом мы получим «более случайную» систему на N (если система на M была детерминированной, то система на N все равно будет случайной) из-за нехватки информации. Другими словами, субмерсия $\Phi\colon M \to N$ переводит нашу систему X на M в случайную динамическую систему на N, т. е. мы получим редукцию, попросту забывая (теряя) некоторые переменные.

К сожалению, обычно такой способ не работает. Другими словами, если дано отображение $\Phi\colon M \to N$, а X — произвольная стохастическая динамическая система на M, то, вообще говоря, не существует ни одной случайной динамической системы Z на N, такой что $\Phi\colon (M, X) \to (N, Z)$ — диффузионный морфизм, т. е. морфизм между двумя соответствующими стохастическими процессами. Нельзя редуцировать стохастическую динамическую систему, просто забывая некоторые (произвольные) переменные!

На самом деле имеется следующее непосредственное и довольно ограничительное условие для того, чтобы стохастическая динамическая система X на M могла быть спроецирована на систему на N при помощи данного сюръективного отображения $\Phi\colon M \to N$.

Предложение 2.18. *Пусть $\Phi\colon M \to N$ — гладкое сюръективное отображение гладкого многообразия M на гладкое многообразие N и*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt} -$$

стохастическая динамическая система на M.

1. *Существует стохастическая динамическая система*

$$Y = Y_0 + \sum_i Y_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

на N, такая что $\Phi\colon (M, X) \to (N, Y)$ — морфизм систем, если и только если для любых точек $x, y \in M$, таких что $\Phi(x) = \Phi(y)$, выполнено

$$\Phi_*\bigl(X_i(x)\bigr) = \Phi_*\bigl(X_i(y)\bigr) \quad \text{для всех} \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{2.18}$$

2. *Диффузионный процесс для X может быть спроецирован на марковский процесс на N тогда и только тогда, когда для всякой функции $f\colon N \to \mathbb{R}$ и любой пары точек $x, y \in M$, таких что $\Phi(x) = \Phi(y)$, выполнено*

$$A_X\bigl(\Phi^*(f)(x)\bigr) = A_X\bigl(\Phi^*(f)(y)\bigr), \tag{2.19}$$

где A_X — диффузионный оператор для X. Если это условия выполняется и Φ — субмерсия, то полученный проекцией диффузионный процесс на N порождён стохастической динамической системой на N.

3. *В случае когда $X = X_0$ — гладкая детерминированная система, детерминированный процесс, порождённый X на M, может быть спроецирован на марковский процесс на N тогда и только тогда, когда для любых точек $x, y \in M$, таких что $\Phi(x) = \Phi(y)$, выполнено*

$$\Phi_*\bigl(X(x)\bigr) = \Phi_*\bigl(X(y)\bigr). \tag{2.20}$$

Если это условие выполняется, X проецируется в гладкое векторное поле на N.

Пример 2.19. Положим $M = \mathbb{T}^2$ с двумя периодическими координатами $\theta_1 \pmod 1$, $\theta_2 \pmod 1$, $N = \mathbb{T}^1$ с периодической координатой $\theta_2 \pmod 1$, $\Phi\colon M \to N$ задаётся формулой $\Phi(\theta_1, \theta_2) = \theta_2$. Векторное поле $X = \sin(2\pi\theta_1)\partial_{\theta_2}$ на M не удовлетворяет условию из пункта 3 сформулированного выше предложения, так что детерминированный процесс X на M не проецируется в марковский процесс на N.

3. Интегрируемые стохастические динамические системы

3.1. Интегрируемые динамические системы и лиувиллевы действия торов

В этом разделе мы напомним определение интегрируемости детерминированной динамической системы и докажем фундаментальное свойство сохранения структуры для соответствующего лиувиллева действия тора. В частности, теорема 3.4 об инвариантности линейных дифференциальных операторов относительно лиувиллевых действий торов потребуется для изучения интегрируемых стохастических динамических систем.

Определение 3.1. Говорят, что векторное поле X на многообразии M *интегрируемое типа* (p,q), где $p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, $p+q=\dim M$, если существует p векторных полей $X_1, X_2, \ldots, X_p$ и q функций $F_1, \ldots, F_q$ на M, удовлетворяющих следующим условиям:

1) векторные поля $X_1, \ldots, X_p$ попарно коммутируют и коммутируют с X:

$$[X_i, X_j] = 0 \quad \text{и} \quad [X, X_i] = 0 \quad \text{для всех} \quad i, j; \tag{3.1}$$

2) функции $F_1, \ldots, F_q$ — общие первые интегралы для $X, X_1, \ldots, X_p$:

$$X(F_j) = X_i(F_j) = 0 \quad \text{для всех} \quad i, j; \tag{3.2}$$

3) $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_p \neq 0$ и $dF_1 \wedge \ldots \wedge dF_q \neq 0$ почти всюду.

В случае выполнения указанных условий будем также говорить, что $(X_1, \ldots, X_p, F_1, \ldots, F_q)$ — интегрируемая система типа (p,q).

Множество уровня

$$N = \{F_1 = c_1, \ldots, \ F_q = c_q\} \tag{3.3}$$

интегрируемой системы $(X_1, \ldots, X_p, F_1, \ldots, F_q)$ называется *регулярным множеством уровня*, если $X_1 \wedge \ldots \wedge X_p(x) \neq 0$ и $dF_1 \wedge \ldots \wedge dF_q(x) \neq 0$ для всех $x \in N$. Имеет место следующая теорема, принадлежащая Лиувиллю [18] (Лиувилль доказал её для гамильтоновых систем, но в случае негамильтоновых систем доказательство по сути то же).

Теорема 3.2 (Лиувилль). *Пусть N — связное компактное регулярное множество уровня интегрируемой системы $(X_1, \ldots, X_p, F_1, \ldots, F_q)$. Тогда N диффеоморфно p-мерному тору $\mathbb{T}^p$, а окрестность $\mathcal{U}(N)$ множества N может быть представлена в виде $\mathbb{T}^p \times B^q$ (где B^q — q-мерный шар) с системой координат $(\theta_1, \ldots, \theta_p, r_1, \ldots, r_q)$, где $\theta_1, \ldots, \theta_p$ — периодические координаты на $\mathbb{T}^p$, такие что*

$$X_i = \sum a_{ij}(r_1, \ldots, r_q) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \tag{3.4}$$

и

$$F_i = f_i(r_1, \ldots, r_q) \tag{3.5}$$

не зависят от $\theta_1, \ldots, \theta_p$. В частности, транзитивное действие тора $\mathbb{T}^p$

$$\mathbb{T}^p \times (\mathbb{T}^p \times B^q) \to \mathbb{T}^p \times B^q,$$
$$\big((\rho_1, \ldots, \rho_p), (\theta_1, \ldots, \theta_p, r_1, \ldots, r_q)\big) \mapsto (\rho_1 + \theta_1, \ldots, \rho_p + \theta_p, r_1, \ldots, r_q) \tag{3.6}$$

сохраняет систему.

Действие тора $\mathbb{T}^p$, указанное в этой теореме, определено однозначно с точностью до автоморфизма тора $\mathbb{T}^p$ и называется *лиувиллевым действием тора* для системы в окрестности *тора Лиувилля* N.

Очень важным свойством лиувиллева действия тора является сохранение всех тензорных полей, сохраняемых системой. Точнее, верно следующее утверждение.

Теорема 3.3 [26]. *В предположениях теоремы* 3.2 *пусть* $\mathcal{G}$ — *произвольное тензорное поле на* M, *т. е.* $\mathcal{G} \in \Gamma\big(\bigotimes^k TM \bigotimes^h T^*M\big)$, *удовлетворяющее хотя бы одному из следующих двух условий*:

1) $\mathcal{G}$ *инвариантно относительно векторных полей* $X_1, \ldots, X_p$:
$$\mathcal{L}_{X_i}\mathcal{G} = 0 \text{ для всех } \ i = 1, \ldots, p; \tag{3.7}$$
2) $\mathcal{G}$ *инвариантно относительно векторного поля* X_1 *и, кроме того, орбита поля* X_1 *плотна почти в каждой орбите лиувиллева действия тора* $\mathbb{T}^p$ *около* N.

Тогда $\mathcal{G}$ *также инвариантно относительно лиувиллева действия тора* $\mathbb{T}^p$ *в окрестности* N.

Например, в случае интегрируемой гамильтоновой системы симплектическая форма ω — ковариантный тензор, сохраняемый системой, так что теорема утверждает, что ω сохраняется и при лиувиллевом действии тора $\mathbb{T}^p$. Отсюда легко вывести существование переменных действие-угол (так называемая теорема Арнольда—Лиувилля—Менье).

Поскольку каждая стохастическая динамическая система порождает дифференциальный оператор второго порядка (оператор диффузии), естественным шагом по обобщению теоремы 3.3 на случай интегрируемых стохастических динамических систем оказывается замена инвариантного тензорного поля $\mathcal{G}$ на инвариантный дифференциальный оператор. В результате мы получаем следующую теорему.

Теорема 3.4. *В предположениях теоремы* 3.2 *пусть* Λ — *линейный дифференциальный оператор на* M, *удовлетворяющий хотя бы одному из следующих двух условий*:

1) Λ *инвариантен относительно* $X_1, \ldots, X_p$;
2) Λ *инвариантен относительно* X_1 *и, кроме того, орбита поля* X_1 *плотна в плотном семействе орбит лиувиллева действия тора* $\mathbb{T}^p$ *около* N.

Тогда Λ *инвариантен относительно лиувиллева действия тора* $\mathbb{T}^p$ *в окрестности* N.

Конечно, теорема 3.3 и теорема 3.4 очень похожи, за исключением того, что теорема 3.3 имеет дело с тензорными полями, а теорема 3.4 — с линейными дифференциальными операторами. Напомним, что дифференциальные операторы первого порядка задаются векторными полями. Но дифференциальные операторы более высоких порядков не задаются тензорными полями, так что теорема 3.4 не является следствием теоремы 3.3. Чтобы доказать теорему 3.4, докажем следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть*
$$Z = \sum_{i=1}^{p} a_i(r_1, \ldots, r_q)\partial_{\theta_i} -$$

векторное поле на $\mathcal{U} = \mathbb{T}^p \times B^q$ *с координатами* $(\theta_1 \,(\mathrm{mod}\ 1), \ldots, \theta_p \,(\mathrm{mod}\ 1), r_1, \ldots, r_q)$*, касательное к торам* $\mathbb{T}^p \times \{\mathrm{pt}\}$ *и инвариантное относительно естественного свободного действия тора* $\mathbb{T}^p$ *на* $\mathcal{U} = \mathbb{T}^p \times \mathbb{B}^q$*. Предположим, что функции* $a_1, \ldots, a_p$ *несоизмеримы, т. е. не существует нетривиального набора из* p *целых чисел* $(k_1, \ldots, k_p)$*, такого что* $\sum k_i a_i(r) = 0$ *на открытом подмножестве в* $\mathcal{U}$*. Пусть* Λ *— линейный дифференциальный оператор на* $\mathcal{U}$*, инвариантный относительно* Z*, т. е.*

$$\mathcal{L}_Z \Lambda = Z \circ \Lambda - \Lambda \circ Z = 0. \tag{3.8}$$

Тогда Λ *инвариантен относительно действия тора* $\mathbb{T}^p$ *на* $\mathcal{U}$*.*

Доказательство. Доказательство состоит из тех же шагов, что и доказательство теоремы 3.3 в [26]. Запишем Λ в координатах (θ, r) следующим образом:

$$\Lambda = \sum_{I,J} C_{I,J}(\theta, r) \partial_\theta^I \partial_r^J, \tag{3.9}$$

где $I = (i_1, \ldots, i_p)$ и $J = (j_1, \ldots, j_q)$ — мультииндексы и

$$\partial_\theta^I = (\partial_{\theta_1})^{i_1} (\partial_{\theta_2})^{i_2} \ldots (\partial_{\theta_p})^{i_p}. \tag{3.10}$$

Главный символ оператора Λ — функция

$$\sum_{|I|+|J|=m} C_{I,J} \hat{\theta}^I \hat{r}^J, \tag{3.11}$$

где

$$|I| = \sum_{k=1}^{p} i_k,$$

m — порядок оператора Λ, $\hat{\theta}^I = \hat{\theta}_1^{i_1} \ldots \hat{\theta}_p^{i_p}$ и $\hat{\theta}_i \colon T^*M \to \mathbb{R}$ — линейные функции на T^*M, заданные ∂_{θ_i}.

Докажем сначала, что главный символ оператора Λ инвариантен относительно действия тора $\mathbb{T}^p$.

Обозначим через $\mathcal{O}_m$ пространство линейных дифференциальных операторов порядка не более m на $\mathcal{U} = \mathbb{T}^p \times B^q$. Тогда главный символ оператора Λ можно отождествить с элементом фактора $\mathcal{O}_m/\mathcal{O}_{m-1}$. Проведём некоторые вычисления по модулю $\mathcal{O}_{m-1}$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_Z \Lambda \equiv \\ &\equiv \Big(\sum_i a_i \partial_{\theta_i} \Big) \Big(\sum_{|I|+|J|=m} C_{I,J} \partial_\theta^I \partial_r^J \Big) - \Big(\sum_{|I|+|J|=m} C_{I,J} \partial_\theta^I \partial_r^J \Big) \Big(\sum_i a_i \partial_{\theta_i} \Big) \equiv \\ &\equiv \sum_{i,I,J} a_i \frac{\partial C_{I,J}}{\partial \theta_i} \partial_\theta^I \partial_r^J - \sum_{|I|+|J|=m} \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} C_{I,J} \frac{\partial a_i}{\partial r_k} \partial_\theta^{I+1_i} \partial_r^{J-1_k} \mod \mathcal{O}_{m-1}, \end{aligned}$$

где $1_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ с 1 на i-м месте.

Рассмотрим мультииндекс (I, J), такой что $|J| = h$ наибольший из возможных. Тогда коэффициент при $\partial_\theta^I \partial_r^J$ в выражении для $\mathcal{L}_X \Lambda$ равен

$$\sum_i a_i \frac{C_{I,J}}{\partial \theta_i} = Z(C_{I,J}). \tag{3.12}$$

Поскольку $\mathcal{L}_X \Lambda = 0$, все коэффициенты должны быть нулевыми, в частности, $Z(C_{I,J}) = 0$, т. е. $C_{I,J}$ инвариантен относительно Z. Другими словами, он инвариантен на орбитах Z. Но из условия несоизмеримости на Z следует, что его орбиты плотны на плотном семействе торов $\mathbb{T}^p \times \{\mathrm{pt}\}$, т. е. он инвариантен относительно действия тора $\mathbb{T}^p$.

Теперь рассмотрим такой мультииндекс (I, J), что $|J| = h - 1$ меньше наибольшего возможного значения h на 1. Тогда коэффициент при $\partial_\theta^I \partial_r^J$ в выражении для $\mathcal{L}_X \Lambda$ равен

$$\sum_i a_i \frac{\partial C_{I,J}}{\partial \theta_i} - \sum_{j,k} C_{I-1_j, J+1_k} \frac{\partial a_j}{\partial r_k}, \tag{3.13}$$

что должно быть нулём, поэтому имеем

$$Z(C_{I,J}) = \sum_{j,k} C_{I-1_j, J+1_k} \frac{\partial a_j}{\partial r}. \tag{3.14}$$

Заметим, что правая часть этого уравнения $\mathbb{T}^p$-инвариантна, поскольку функции a_j $\mathbb{T}^p$-инвариантны и функции $C_{I-1_j, J+1_k}$ тоже $\mathbb{T}^p$-инвариантны согласно предыдущим рассуждениям. Отсюда следует, что $Z(C_{I,J})$ тоже $\mathbb{T}^p$-инвариантен. Но среднее значение $Z(C_{I,J})$ на каждом торе $\mathbb{T}^p$ равно 0, поэтому $Z(C_{I,J}) = 0$, что, как мы видели, приводит к тому, что $C_{I,J}$ $\mathbb{T}^p$-инвариантен.

Аналогично индукцией по $h - |J|$ получаем, что $C_{I,J}$ $\mathbb{T}^p$-инвариантен для любого мультииндекса (I, J), такого что $|I| + |J| = m$ — порядок оператора Λ.

Обозначим через $\mathcal{O}_{\mathbb{T}^p}$ пространство $\mathbb{T}^p$-инвариантных операторов и рассмотрим Λ по модулю $\mathcal{O}_{\mathbb{T}^p}$. Поскольку все коэффициенты порядка m в операторе Λ являются $\mathbb{T}^p$-инвариантными, имеем

$$\Lambda \equiv \sum_{|I|+|J| \leqslant m-1} C_{I,J} \partial_\theta^I \partial_r^J \bmod \mathcal{O}_{\mathbb{T}^p}. \tag{3.15}$$

Повторяя процесс для членов порядка $m - 1$, получаем, что $Z(C_{I,J})$ $\mathbb{T}^p$-инвариантен для любого такого мультииндекса (I, J). Обратной индукцией по $|I| + |J|$, используя те же аргументы, что и выше, получаем, что $C_{I,J}$ также $\mathbb{T}^p$-инвариантен для любого мультииндекса (I, J). Таким образом, Λ $\mathbb{T}^p$-инвариантен. □

Доказательство теоремы 3.4. Если орбита векторного поля X_1 плотна в плотном семействе орбит лиувиллева действия тора $\mathbb{T}^p$, то X_1 удовлетворяет условиям на Z из теоремы 3.5. Таким образом, вторая часть теоремы 3.4 немедленно следует из теоремы 3.5.

Доказательство первой части аналогично. Первая часть также легко следует из второй, поскольку мы можем выбрать постоянные коэффициенты a_i так, чтобы орбита векторного поля $Y = \sum a_i X_i$ была плотна в плотном семействе орбит лиувиллева $\mathbb{T}^p$-действия. $\square$

3.2. Что такое интегрируемая стохастическая динамическая система?

С точностью до диффузионной эквивалентности стохастическая динамическая система

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

характеризуется своим оператором диффузии

$$A_X = X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} X_i^2 -$$

линейным дифференциальным оператором второго порядка. Поэтому стохастическую динамическую систему можно воспринимать как нечто среднее между классическими динамическими системами (дифференциальные операторы первого порядка) и квантовыми системами, которые часто задаются (псевдо)дифференциальными операторами. Для квантовых систем понятие интегрируемости обычно означает существование полного семейства коммутирующих операторов. Следуя классической и квантовой механике, мы приходим к следующему понятию интегрируемости стохастической динамической системы.

Определение 3.6. *Интегрируемая стохастическая динамическая система типа (p,q,r)* на многообразии M, где $p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, $p+q+r = \dim M$, состоит из семейства, содержащего

— p операторов диффузии $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$, которые можно записать в виде

$$\Lambda_i = X_i^0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{h_i} (X_k^i)^2, \quad i = 1, \ldots, p,$$

где $X_0^i, \ldots, X_{h_i}^i$ — векторные поля,

— q векторных полей $Z_1, \ldots, Z_q$,

— r функций $F_1, \ldots, F_r$ на M,

которые попарно коммутируют, если их рассматривать как линейные дифференциальные операторы на M (Λ_i — второго порядка, Z_j — первого порядка, F_k — нулевого порядка соответственно), и удовлетворяют условию независимости: главные символы этих операторов образуют семейство, состоящее из $p+q+r = \dim M$ функционально независимых функций на T^*M.

Определение 3.7. Стохастическая динамическая система X на многообразии M называется *интегрируемой* типа (p,q,r), если существует интегрируемая система $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, Z_1, \ldots, Z_q, F_1, \ldots, F_r)$ типа (p,q,r) для некоторых p,

q, r $(p+q+r = \dim M)$, такая что диффузионный порождающий A_X системы X коммутирует со всеми линейными дифференциальными операторами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, Z_1, \ldots, Z_q, F_1, \ldots, F_r$. Будем также говорить, что X интегрируема с помощью интегрируемой стохастической динамической системы $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, Z_1, \ldots, Z_q, F_1, \ldots, F_r)$.

Конечно, в этом определении часто полагают $\Lambda_1 = A_X$. Но может быть и так, что $p = 0$. Если в приведённом определении Λ_i — линейные дифференциальные операторы любого порядка, а не операторы диффузии, будем говорить, что стохастическая динамическая система *интегрируема в квантовом смысле*.

Напомним, что если Z — векторное поле, рассматриваемое как дифференциальный оператор первого порядка на M, то главный символ Z — это само Z, но рассматриваемое как послойная линейная функция $\hat{Z}\colon T^*M \to \mathbb{R}$. Если F — функция на M, то её можно рассматривать как оператор нулевого порядка на M (умножение на F), чей символ есть попросту прообраз $\hat{F}$ функции F. Если

$$\Lambda_i = X_0 + \frac{1}{2}\sum X_k^2 \, -$$

диффузионный порождающий, то его главный символ — это

$$\hat{\Lambda} = \frac{1}{2}\sum \hat{X}_k^2,$$

где $\hat{X}_k\colon T^*M \to \mathbb{R}$ — послойная линейная функция на T^*M, заданная X_k. Условие независимости тогда означает, что функции $\hat{\Lambda}_1, \ldots, \hat{\Lambda}_p, \hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_q, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_r$ функционально независимы на T^*M.

Напомним следующий классический факт из теории линейных дифференциальных операторов (см. [24]): если два линейных дифференциальных оператора Λ и Π на многообразии M коммутируют, то их главные символы $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Pi}$ коммутируют в пуассоновом смысле на T^*M относительно канонической симплектической структуры. В качестве немедленного следствия из этого факта и определения 3.6 имеем следующую связь между интегрируемыми стохастическими динамическими системами и интегрируемыми гамильтоновыми системами.

Предложение 3.8. *Пусть* $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, Z_1, \ldots, Z_q, F_1, \ldots, F_r)$ — *интегрируемая стохастическая динамическая система типа* (p, q, r) *на многообразии* M. *Тогда* $(\hat{\Lambda}_1, \ldots, \hat{\Lambda}_p, \hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_q, \hat{F}_1, \ldots, \hat{F}_r)$ — *интегрируемая гамильтонова система на* T^*M.

Замечание 3.9. В частном случае, когда $p = 0$, интегрируемая стохастическая динамическая система типа $(0, q, r)$ — это на самом деле интегрируемая детерминированная динамическая система типа (q, r) и утверждение 3.8, конечно, тоже применимо.

Пример 3.10. Затухающий стохастический оператор, описанный в разделе 2.4, является интегрируемой стохастической динамической системой типа $(1, 1, 0)$. Интегрируемые стохастические динамические системы, исследованные Сюэмэй Ли [16] в теории усреднения стохастических возмущений, являются интегрируемыми стохастическими динамическими системами типа $(0,n,n)$ на симплектическом $2n$-мерном многообразии.

Предложение 3.11. *Если нетривиальная стохастическая динамическая система*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{k} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

является интегрируемой типа (p,q,r) для некоторых $p,q,r \geqslant 0$, то она является также интегрируемой типа $(p+q+r,0,0)$.

Доказательство. Пусть $(\Lambda_1,\dots,\Lambda_p,Z_1,\dots,Z_q,F_1,\dots,F_r)$ — - интегрируемая стохастическая динамическая система типа (p,q,r), компоненты которой коммутируют с X. Мы хотим построить стохастическую динамическую систему

$$(\Lambda_1,\dots,\Lambda_p,\Lambda_{p+1},\dots,\Lambda_{p+q},\Lambda_{p+q+1},\dots,\Lambda_{p+q+r})$$

типа $(p+q+r,0,0)$, компоненты которой будут коммутировать с X. Это можно сделать, например, следующим образом. Положим $\Lambda_{p+i} = Z_i^2$ $(i=1,\dots,q)$ и $\Lambda_{p+q+i} = F_i^2\Lambda_1$ $(i=1,\dots,r)$, если $p \geqslant 1$ (легко убедиться, что если Λ — оператор диффузии, а F — действительная функция, то $F^2\Lambda$ снова оператор диффузии). Если $p=0$ и $q \geqslant 1$, положим, например, $\Lambda_{p+q+i} = (F_iZ_1)^2$. Случай $p=q=0$ исключается, потому что иначе X будет тривиальной. Проверка функциональной независимости для $\hat\Lambda_1,\dots,\hat\Lambda_{p+q+r}$ проводится непосредственно. $\square$

3.3. Существование лиувиллева действия тора для интегрируемых стохастических динамических систем

Определение 3.12. Пусть $(\Lambda_1,\dots,\Lambda_p,Z_1,\dots,Z_q,F_1,\dots,F_r)$ — интегрируемая стохастическая динамическая система на многообразии M.

1. Точка $x \in M$ называется *полурегулярной точкой* системы, если $dF_1(x)\wedge\ldots\wedge dF_r(x) \neq 0$ и $\operatorname{span}\hat A_1(x),\dots,\operatorname{span}\hat A_p(x), Z_1(x),\dots,Z_q(x)$ порождают пространство

   $$\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} dF_i(x) = \{\alpha \in T_xM \mid \langle \alpha, dF_1(x)\rangle = \ldots = \langle \alpha, dF_r(x)\rangle = 0\}. \quad (3.16)$$

   Здесь

   $$\operatorname{span}\hat\Lambda_i(x) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Vect}\bigl(Y_1(x),\dots,Y_k(x)\bigr),$$

   если

   $$\hat\Lambda = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \hat Y_i^2,$$

   где Y_i — векторные поля, а $\hat Y_i\colon T^*M \to \mathbb{R}$ — соответствующие символы.
2. Если x — такая полурегулярная точка, что $Z_1(x)\wedge\ldots\wedge Z_q(x) \neq 0$, то x называется *регулярной точкой*.

3. Связное множество уровня $N = \{F_1 = c_1, \ldots, \ F_r = c_r\}$ называется *регулярным множеством уровня* системы, если каждая точка $x \in N$ полурегулярна и почти все точки N регулярны.

Теорема 3.13. *Пусть $(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p, Z_1, \ldots, Z_q, F_1, \ldots, F_r)$ — такая интегрируемая стохастическая динамическая система на многообразии M, что отображение $(F_1, \ldots, F_r)\colon M \to \mathbb{R}^r$ является собственным. Тогда для всякого связного регулярного множества уровня $N = \{F_1 = c_1, \ldots, \ F_r = c_r\}$ системы существует действие $\rho\colon \mathbb{T}^l \times \mathcal{U}(N) \to \mathcal{U}(N)$ тора $\mathbb{T}^l$ в окрестности $\mathcal{U}(N)$ множества N, где $l \geqslant q$, сохраняющее систему и такое, что орбиты этого $\mathbb{T}^l$-действия на N заполнены орбитами действия $\mathbb{R}^q$, порождённого $Z_1, \ldots Z_q$ на N (они не обязаны совпадать вне N).*

Замечание 3.14. По аналогии со случаем детерминированных интегрируемых систем будем называть действие тора $\mathbb{T}^l$ в $\mathcal{U}(N)$ из данной теоремы *лиувиллевым действием тора*.

Доказательство. Так как по условию теоремы N регулярно, а рассматриваемое отображение собственное, получаем, что N — компактное подмногообразие в M размерности $p+q$, а оператор второго порядка

$$\Delta_N = \sum_{i=1}^{p} \Lambda_i + \sum_{j=1}^{q} Z_j^2 \tag{3.17}$$

на N (т. е. ограниченный на функции на N) является эллиптическим оператором на N. Следовательно, существует единственная риманова метрика g_0 на N и векторное поле V_N на N, такие что

$$\Delta_N = V_N + \Delta_{g_0}, \tag{3.18}$$

где Δ_{g_0} обозначает оператор Лапласа—Бельтрами для g_0. Поскольку $Z_1, \ldots, Z_q$ сохраняют Δ_N, они должны сохранять и главный символ, т. е. они сохраняют риманову метрику g_0. Поскольку N компактно, группа $\mathcal{O}(g_0)$ изометрий метрики g_0 — компактная группа Ли. Абелева подгруппа

$$\exp\biggl(\sum_{i=1}^{q} t_i Z_i|_N \mid t_i \in \mathbb{R}\biggr)$$

диффеоморфизмов N является связной абелевой подгруппой группы $\mathcal{O}(g_N)$ размерности q (поскольку векторные поля $Z_1, \ldots, Z_q$ независимы почти всюду на N), а потому замыкание

$$T_0 := \overline{\exp\biggl(\sum_{i=1}^{q} t_i Z_i|_N \mid t_i \in \mathbb{R}\biggr)} \tag{3.19}$$

является тором размерности $l \geqslant q$.

Обозначим через $\mathcal{U}(N)$ достаточно малую трубчатую окрестность подмногообразия N в M, заполненную связными множествами уровня отображения

$(F_1, \ldots, F_r)$, такую что каждая точка в $\mathcal{U}(N)$ полурегулярна. В силу того что отображение $(F_1, \ldots, F_r)\colon M \to \mathbb{R}^r$ собственное, а N регулярно, мы можем отождествить $\mathcal{U}(N)$ с $N \times B^r$, где $B^r \subset \mathbb{R}^n$ — малая окрестность нуля в $\mathbb{R}^r$, так что множества уровня отображения $(F_1, \ldots, F_r)$ в $\mathcal{U}(N) = N \times B^r$ имеют вид $N \times \{\alpha\}$, $\alpha \in B^r$, а само N отождествляется с $N \times \{0\}$.

Повторяя этот процесс для всех множеств уровня $N_\alpha = N \times \{\alpha\} \subset \mathcal{U}(N) = N \times B^r$, получаем семейство торов

$$T_\alpha = \overline{\left\{\exp\left(\sum t_i Z_i)|_{N_\alpha} \mid t_i \in \mathbb{R}\right)\right\}} \subset \mathrm{Iso}(g_\alpha), \tag{3.20}$$

где

$$\mathrm{Iso}(g_\alpha) = \{\varphi \in \mathrm{Diffeo}(N_\alpha),\ \varphi_* g_\alpha = g_\alpha\} \tag{3.21}$$

есть группа изометрий римановой метрики g_α, индуцированной эллиптическим оператором

$$\sum_{i=1}^p A_i + \sum_{i=1}^q Z_j^2|_{N_\alpha}$$

на N_α.

Согласно теореме 3.16 (см. далее) о группах изометрий семейства римановых метрик для каждой $\alpha \in B^r$ вблизи 0 существует инъективный гомоморфизм

$$\rho_\alpha\colon \mathrm{Iso}(g_\alpha) \hookrightarrow \mathrm{Iso}(g_0). \tag{3.22}$$

Образ $\rho_\alpha(T_\alpha)$ тора T_α при этом инъективном гомоморфизме — это $l(\alpha)$-мерный тор в $\mathrm{Iso}(g_0)$.

Заметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $K(\varepsilon) > 0$, такое что множество

$$\left\{\exp\left(\sum_{i=1}^q t_i Z_i)|_N \mid t_1, \ldots, t_q \in [-K(\varepsilon), K(\varepsilon)]\right)\right\} \tag{3.23}$$

ε-плотно в T_0, т. е. для каждого $\psi \in T_0$ существует

$$\varphi = \exp\left(\sum_{i=1}^q t_i Z_i\right)\bigg|_N$$

для некоторых $t_1, \ldots, t_q \in [-K(\varepsilon), K(\varepsilon)]$, такое что $d(\varphi, \psi) \leqslant \varepsilon$ относительно расстояния

$$d(\varphi, \psi) := \max_{x \in N} d_{g_0}\big(\varphi(x), \psi(x)\big), \tag{3.24}$$

где d_{g_0} — расстояние на N, порождённое римановой метрикой g_0.

Если B^r достаточно мало, то для каждого $\alpha \in B^r$ получаем, что

$$\exp\left(\sum_{i=1}^q t_i Z_i\right)\bigg|_N, \quad \exp\left(\sum_{i=1}^q t_i Z_i\right)\bigg|_{N \times \{\alpha\}}$$

также ε-близки для всех $t_1, \ldots, t_q \in [-K(\varepsilon), K(\varepsilon)]$ после проецирования $N \times \{\alpha\}$ на N при помощи естественной проекции. Следовательно,

$$\exp\Bigl(\sum t_i Z_i\Bigr)\Big|_N, \quad \rho_\alpha\biggl(\exp\Bigl(\sum_{i=1}^q t_i Z_i\Bigr)\Big|_{N\times\{\alpha\}}\biggr)$$

тоже ε'-близки. При помощи этих близких элементов построим отображение из T_0 в $\rho_\alpha(T_\alpha)$, которое будет почти гомоморфизмом (в смысле [11]) и которое по теореме Грове—Кархера—Ру [11] может быть аппроксимировано настоящим гомоморфизмом

$$\chi_\alpha\colon T_0 \to \rho_\alpha(T_\alpha). \tag{3.25}$$

Этот гомоморфизм инъективен (его ядро тривиально, поскольку это подгруппа компактной группы $\mathrm{Iso}(g_0)$, содержащая только элементы, близкие к единице, а таких нетривиальных подгрупп в компактной группе Ли нет). Из инъективности гомоморфизма $\chi_\alpha\colon T_0 \to \rho(T_\alpha)$, в частности, следует, что

$$\rho_\alpha^{-1} \circ \chi_\alpha\colon T_0 \to T_\alpha \tag{3.26}$$

инъективно и $l(\alpha) \geqslant l = l(0)$ для всех $\alpha \in B^r$ (если B^r достаточно мало). Тем самым мы получаем семейство n-мерных торов

$$\hat{T}_\alpha = \rho_\alpha^{-1} \circ \chi_\alpha(T_0) \subset T_\alpha \subset \mathrm{Iso}(g_\alpha). \tag{3.27}$$

Заметим, что построение $\hat{T}_\alpha$ однозначно в силу коммутативности T_α (что означает жёсткость гомоморфизмов из T_0 в T_α).

Легко убедиться, что семейство $\hat{T}_\alpha$ непрерывно по α. В самом деле, по построению это семейство непрерывно в $\alpha = 0$. Начиная с другого $N \times \{\beta\}$ вместо $N \times \{0\}$, где β достаточно близко к 0, мы получаем другое семейство торов, непрерывное в β. Но торы этого семейства содержат торы семейства $\hat{T}_\alpha$, откуда следует, что семейство $\hat{T}_\alpha$ непрерывно в β.

Непрерывность семейства $\hat{T}_\alpha$ означает, что существует l-мерная торическая подгруппа

$$\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Homeo}\bigl(\mathcal{U}(N)\bigr), \tag{3.28}$$

такая что элемент $\varphi \in \mathcal{T}$ сохраняет каждое множество уровня $N_\alpha = N \times \{\alpha\} \subseteq \subseteq \mathcal{U}(N)$ и

$$\varphi|_{N_\alpha} \in \hat{T}_\alpha \quad \text{для всех} \quad \alpha \in B^r. \tag{3.29}$$

Этот тор $\mathcal{T}$ и есть искомое действие тора. Тот факт, что $\mathcal{T}$ сохраняет систему, немедленно следует из теоремы 3.3 (достаточно посмотреть на действие тора на каждом множестве уровня $N_\alpha = N \times \{\alpha\}$). □

Замечание 3.15. Можно доказать, что действие $\mathcal{T}$ гладкое на каждом множестве уровня N_α и непрерывное в $\mathcal{U}(N)$, но пока мы не можем доказать, что $\mathcal{T}$ гладкое в $\mathcal{U}(N)$, хотя мы полагаем, что это тоже справедливо (доказательство гладкости действия тора $\mathcal{T}$ в $\mathcal{U}(N)$ — непростая задача, требующая, вероятно, использования очень тонких топологических соображений). Тем не менее, для того чтобы сделать редукцию, нам достаточно гладкости действия $\mathcal{T}$ на каждом инвариантном множестве уровня N_α. Если мы начинаем с двух различных множеств уровня N_1 и N_2, мы получим два лиувиллевых действия тора, которые могут действовать в одной и той же области, но иметь разные размерности (каждая из которых больше или равна q).

Теорема 3.16. *Пусть g_α ($\alpha \in \mathbb{R}^k$) — гладкое k-мерное семейство римановых метрик на гладком компактном многообразии N. Обозначим через*

$$\mathrm{Iso}(\alpha) = \{\varphi \in \mathrm{Diffeo}(N) \mid \varphi_* g_\alpha = g_\alpha\} \tag{3.30}$$

группу изометрий метрики g_α. Тогда существует малая окрестность B нуля в $\mathbb{R}^k$, такая что для каждого $\alpha \in B$ существует инъективный групповой гомоморфизм

$$\rho_\alpha \colon \mathrm{Iso}(\alpha) \hookrightarrow \mathrm{Iso}(0), \tag{3.31}$$

такой что

$$\max_{\varphi \in \mathrm{Iso}(\alpha)} \mathrm{d}\big(\varphi, \rho_\alpha(\varphi)\big) \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0,$$

где

$$\mathrm{d}\big(\varphi, \rho_\alpha(\varphi)\big) = \max_{x \in N} \mathrm{d}_0\big(\varphi(x), \rho_\alpha(\varphi)(x)\big),$$

а d_0 — расстояние на N, порождённое g_0.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует малая окрестность B_ε нуля в $\mathbb{R}^k$, такая что для каждого $\alpha \in B_\varepsilon$ и каждого $\varphi \in \mathrm{Iso}(\alpha)$ существует $\varphi' \in \mathrm{Iso}(0)$, такое что φ ε-близко к φ' относительно определённого выше расстояния, т. е.

$$\max_{x \in N} d_0\big(\varphi(x), \varphi'(x)\big) \leqslant \varepsilon.$$

В самом деле, если это не так, то существуют число $\varepsilon > 0$, семейство $\alpha_n \in \mathbb{R}^k$ ($n \in \mathbb{N}$), такое что $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, элемент $\varphi_n \in \mathrm{Iso}(\alpha_n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, такие что φ_n не является ε-близким ни к какому элементу $\mathrm{Iso}(0)$. В силу компактности N существует бесконечная подпоследовательность $(i_n) \subseteq \mathbb{N}$ и точка $x_0 \in N$, такие что $\varphi_{i_n}(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in N$ для некоторого $y \in N$, и, более того, дифференциал $D\varphi_{i_n}(x)$ также сходится при $n \to \infty$. Из того, что $g_{\alpha_n} \xrightarrow{n\to\infty} g_0$, и из жёсткости изометрий легко вывести, что φ_{i_n} сходится к некоторому элементу $\varphi \in \mathrm{Iso}(\alpha)$ при $n \to \infty$. Но это означает, что φ_{i_n} ε-близко к $\varphi \in \mathrm{Iso}(\alpha)$, когда n достаточно велико, что приводит к противоречию.

Таким образом, для всякого малого $\varepsilon > 0$, если $\alpha \in \mathbb{R}^k$ достаточно близко к 0 в $\mathbb{R}^k$, можно построить отображение

$$\mu_\alpha \colon \mathrm{Iso}(\alpha) \to \mathrm{Iso}(0), \tag{3.32}$$

такое что $\mu_\alpha(\varphi)$ ε-близко к φ для всех $\varphi \in \mathrm{Iso}(\alpha)$. Можно сделать так, что это отображение μ_α будет по крайней мере кусочно-непрерывно (для разбиения $\mathrm{Iso}(\alpha)$ на конечное число замкнутых областей). Тогда ясно, что μ_α — почти гомоморфизм, т. е. $\mu_\alpha(\varphi \circ \psi)$ ε-близко к $\mu_\alpha(\varphi) \circ \mu_\alpha(\psi)$ для любых $\varphi, \psi \in \mathrm{Iso}(\alpha)$, где ε' — малое положительное число, зависящее от ε, но не зависящее от φ и ψ ($\varepsilon' \to 0$ при $\varepsilon \to 0$). Согласно классическому результату К. Грове, Г. Кархера и Э. А. Ру [11] всякий такой почти гомоморфизм между двумя компактными группами Ли может быть аппроксимирован настоящим гомоморфизмом. Тем самым мы получаем гомоморфизм

$$\rho_\alpha \colon \operatorname{Iso}(\alpha) \to \operatorname{Iso}(\alpha), \tag{3.33}$$

близкий к μ_α, т. е. $d\big(\rho_\alpha(\phi), \mu_\alpha(\varphi)\big) \leqslant \varepsilon''$ для всех $\varphi \in \operatorname{Iso}(\alpha)$ (для некоторого ε'', такого что $\varepsilon'' \to 0$ при $\varepsilon \to 0$). Но это означает также, что $d(\rho_\alpha(\varphi), \varphi) \leqslant \varepsilon'''$, где $\varepsilon''' \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Из последнего неравенства следует, что ρ_α должно быть инъективным, если α достаточно близко к 0. □

3.4. Нормальная форма интегрируемых стохастических динамических систем типов $(0, q, r)$ и $(1, q, r)$

Согласно определению 3.6 стохастическая динамическая система (M, X) называется интегрируемой типа $(0, q, r)$, если существует детерминированная интегрируемая система $(Z_1, \ldots, Z_q, F_1, \ldots, F_r)$ на M (где $q+r = \dim M$), такая что каждое поле Z_i — инфинитезимальная диффузионная симметрия системы X, а каждая функция F_i — её сильный первый интеграл. Будем предполагать, что отображение $(F_1, \ldots, F_r) \colon M \to \mathbb{R}^r$ собственное. Согласно теоремам 3.2 и 3.13 каждое связное регулярное множество уровня системы является q-мерным тором, в окрестности которого имеется свободное действие тора $\mathbb{T}^q$, сохраняющее X и $Z_1, \ldots, Z_q, F_1, \ldots, F_r$. Как следствие, имеем следующую теорему о нормальной форме.

Теорема 3.17 (нормальная форма стохастической динамической системы типа $(0, q, r)$). *Пусть*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{m} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt} -$$

стохастическая динамическая система типа $(0, q, r)$, интегрируемая при помощи детерминированной интегрируемой системы $(Z_1, \ldots, Z_q, F_1, \ldots, F_r)$ на многообразии M. Предположим, что отображение $(F_1, \ldots, F_r) \colon M \to \mathbb{R}^r$ является собственным и что $N = \{F_1 = c_1, \ldots, F_r = c_r\}$ — связное регулярное множество уровня системы, т. е. $dF_1(x) \wedge \ldots \wedge dF_r(x) \neq 0$ и $Z_1(x) \wedge \ldots \wedge Z_q(x) \neq 0$ для каждой точки $x \in N$. Тогда N диффеоморфно тору $\mathbb{T}^q$, а в трубчатой окрестности $\mathcal{U}(N) \cong \mathbb{T}^q \times B^r$ подмногообразия N существует система координат $(\theta_1 \pmod 1), \ldots, \theta_q \pmod 1), \gamma_1, \ldots \gamma_r)$, в которой X диффузионно эквивалентна системе Y вида

$$Y = Y_0 + \sum_{i=1}^{m} Y_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}, \tag{3.34}$$

где

$$Y_i = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}(\gamma_1, \dots, \gamma_r)\partial_{\theta_k} \quad (i = 0, 1, \dots, m) - \tag{3.35}$$

векторные поля, касательные к торам $\mathbb{T}^q \times \{\mathrm{pt}\}$*, коэффициенты которых постоянны на торах.*

Доказательство. Непосредственно из определения 3.6 и теоремы 3.4 вытекает, что $N \cong \mathbb{T}^q$ и A_X инвариантен относительно лиувиллева действия тора $\mathbb{T}^q$. Пусть $(\theta_1 \pmod 1), \dots, \theta_q \pmod 1), \gamma_1, \dots, \gamma_r)$ — система координат в $\mathcal{U} \cong \mathbb{T}^q \times B^r$, согласованная с лиувиллевым действием тора $\mathbb{T}^q$, т. е. действие задано сдвигами в периодических координатах $\gamma_1, \dots, \gamma_r$.

Для $i = 1, \dots, m$ обозначим через Y_i векторные поля

$$Y_i(\theta_1, \dots, \theta_q, \gamma_1, \dots, \gamma_r) = X_i(0, \dots, 0, \gamma_1, \dots, \gamma_r), \tag{3.36}$$

т. е. Y_i является $\mathbb{T}^q$-инвариантным и совпадает с X_i на сечении $\{\theta_1 = 0, \dots, \theta_q = 0\}$. Тогда $(1/2)\sum Y_i^2$ и A_X имеют одинаковые главные символы на $\{\theta_1 = 0, \dots, \theta_q = 0\}$. Но поскольку $(1/2)\sum Y_i^2$ и A_X $\mathbb{T}^q$-инвариантны, их главные символы совпадают всюду. Значит,

$$A_X - \frac{1}{2}\sum Y_i^2 -$$

$\mathbb{T}^q$-инвариантный оператор первого порядка, т. е. $\mathbb{T}^q$-инвариантное векторное поле. Положив

$$Y_0 = A_X - \frac{1}{2}\sum Y_i^2,$$

получаем, что

$$Y = Y_0 + \sum_{i=1}^{m} Y_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

является $\mathbb{T}^q$-инвариантной и диффузионно эквивалентной системе X. Из того что X касается множеств уровня, следует, что векторные поля $Y_0, \dots, Y_m$ имеют вид

$$Y_i = \sum_{k=1}^{q} a_{ik}(\gamma_1, \dots, \gamma_r)\partial_{\theta_k}. \qquad \square$$

Теперь рассмотрим интегрируемую стохастическую динамическую систему $(A_X, Z_1, \dots, Z_q, F_1, \dots, F_r)$ типа $(1, q, r)$, где

$$A_X = X_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} X_i^2 -$$

оператор диффузии для

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}.$$

Как и раньше, будем предполагать, что N — связное компактное регулярное множество уровня системы. По теореме 3.13 существует либо эффективное

$\mathbb{T}^{q+1}$-действие, либо эффективное $\mathbb{T}^q$-действие, сохраняющее систему, в окрестности N. В случае $\mathbb{T}^{q+1}$-действия X оказывается интегрируемой с помощью системы $(\Theta_1, \ldots, \Theta_{q+1}, F_1, \ldots, F_r)$ типа $(0, q+1, r)$, где $\Theta_1, \ldots, \Theta_{q+1}$ — порождающие $\mathbb{T}^{q+1}$-действия. Теперь рассмотрим случай, когда действие тора имеет размерность q, а не $q+1$. Тогда полулокально в окрестности регулярного множества уровня N мы можем заменить $Z_1, \ldots, Z_q$ на q порождающих $\Theta_1, \ldots, \Theta_q$ действия тора $\mathbb{T}^q$. Редуцируя систему относительно этого $\mathbb{T}^q$-действия, получаем систему типа $(1, 0, r)$, т. е. r-мерное семейство одномерных стохастических динамических систем.

Отметим также, что в силу того, что $\dim N = q+1$ и существует эффективное $\mathbb{T}^q$-действие на N (почти всюду свободное), легко описать топологию множества N: либо N — это $(q+1)$-мерный тор, либо N — «линзовое пространство», получаемое склеиванием двух копий $\mathbb{T}^{q-1} \times D^2$ (где D^2 — двумерный диск) по границе $\mathbb{T}^{q-1} \times \partial D^2 \cong \mathbb{T}^q$ при помощи какого-нибудь автоморфизма тора $\mathbb{T}^q$.

Подобно случаю типа $(0, q, r)$, в случае типа $(1, q, r)$ мы можем получить нормальную форму системы около регулярной орбиты лиувиллева действия тора. Более общо, мы имеем следующий простой результат, доказательство которого полностью аналогично доказательству теоремы 3.17.

Теорема 3.18. *Пусть стохастическая динамическая система*

$$X = X_0 + \sum_{i=1}^{m} X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt}$$

диффузионно инвариантна относительно эффективного действия тора $\mathbb{T}^l$ на многообразии M. Пусть K — регулярная орбита этого действия тора в M. Тогда $K \cong \mathbb{T}^l$, и в окрестности K система X диффузионно эквивалентна системе

$$Y = Y_0 + \sum_{i=1}^{m} Y_i \circ \frac{dB_t^i}{dt},$$

где $Y_0, Y_1, \ldots, Y_m$ инвариантны относительно действия тора $\mathbb{T}^l$.

3.5. Интегрируемые стохастические динамические системы типа $(p, 0, 0)$

Если дана произвольная интегрируемая стохастическая динамическая система типа (p, q, r), её можно редуцировать по лиувиллевому действию тора $\mathbb{T}^l$ по теореме 3.13, где $l \geqslant q$. После редукции мы получим систему типа $(p', 0, r)$, где $p' = p + q - l \leqslant p$. Если рассмотреть ограничение на множества уровня, то после редукции и ограничения система становится интегрируемой системой типа $(p', 0, 0)$.

Теперь рассмотрим интегрируемую стохастическую динамическую систему типа $(p, 0, 0)$. Это означает, что имеется p попарно коммутирующих диффузионных порождающих $A_1, \ldots, A_p$ на p-мерном многообразии M^p. Будем предполагать, что для почти всех $x \in M$ ограничение символов $\hat{A}_i \colon T^*M \to \mathbb{R}$ на T_x^*M — это линейно независимое семейство квадратичных функций на T_x^*M. Это дополнительное предположение нужно, чтобы избежать «фальшивых» типов $(p, 0, 0)$, например заданных семейством вида $(A_1, A_2 = F_1 A_1, \ldots, A_p = F_{p-1} A_1)$, где $F_1, \ldots, F_{p-1}$ — функции, коммутирующие с A_1. (Более естественно рассматривать этот пример как систему типа $(1, 0, p-1)$, заданную семейством $(A_1, F_1, \ldots, F_{p-1})$, а не как систему $(A_1, F_1 A_1, \ldots, F_{p-1} A_1)$ типа $(p, 0, 0)$.)

Предложение 3.19. *В обозначениях и предположениях, данных выше, в каждой точке $x \in M$, где символы $\hat{A}_1|_{T_x^*M}, \hat{A}_2|_{T_x^*M}, \ldots, \hat{A}_p|_{T_x^*M}$ функционально независимы как функции на T^*M, и для любых констант $\alpha_1, \ldots, \alpha_p > 0$ оператор $\sum \alpha_i A_i$ эллиптичен в x, т. е. сумма $\sum \alpha_i \hat{A}_i|_{T_x^*M} \colon T_x^*M \to \mathbb{R}$ является положительно определённой квадратичной формой.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in M$ и оператора диффузии A на M обозначим через $\mathrm{span}_x \hat{A} \subset T_x^*M$ касательное векторное подпространство в T_xM, порождённое $\hat{A}$ в x. Другими словами, $Z \in \mathrm{span}_x \hat{A}$, если и только если $\langle z, \alpha \rangle = 0$ для всех $\alpha \in T_x^*M$, таких что $\hat{A}(\alpha) = 0$.

Если

$$\hat{A} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \hat{X}_i^2,$$

где X_i — векторные поля, то

$$\mathrm{span}_x \hat{A} = \mathrm{Vect}\{X_1(x), \ldots, X_k(x)\}, \tag{3.37}$$

хотя, конечно, определение $\mathrm{span}_x \hat{A}$ внутреннее и не зависит от выбора X_i. Также легко убедиться, что если $\alpha_1, \ldots, \alpha_k > 0$, то $\mathrm{span}_x\bigl(\sum \alpha_i \hat{A}_i\bigr)$ — сумма векторных пространств $\mathrm{span}_x(A_i)$.

Эллиптичность $\sum \alpha_i A_i$ в x означает, что $\sum \alpha_i \hat{A}_i|_{T^*M}$ положительно определённая, т. е.

$$\mathrm{span}_x\Bigl(\sum \alpha_i \hat{A}_i\Bigr) = T_xM. \tag{3.38}$$

Если $x \in M$ — такая точка, что $\mathrm{span}_x\bigl(\sum \alpha_j \hat{A}_j\bigr) \neq T_xM$, то существует функция $f \colon M \to \mathbb{R}$, такая что $df(x) \neq 0$, но $df(x)$ зануляется на $\mathrm{span}_x\bigl(\sum \alpha_i \hat{A}_i\bigr)$, т. е. $\langle df(x), Y \rangle = 0$ для всех j и всех $Y \in \mathrm{span}_x(\hat{A}_j)$. Отсюда следует, что скобка Пуассона $\{\hat{A}_i, F\}0$ равна нулю на T_x^*M. Но $\{\hat{A}_i, \hat{A}_j\} = 0$ по предположению коммутативности. Значит, $d\hat{A}_1, \ldots, d\hat{A}_1, dF$ линейно независимы в каждой точке T_x^*M, т. е. $d\hat{A}_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{A}_p \wedge dF$ зануляется в каждой точке T^*M. Дело в том, что в симплектическом пространстве размерности $2p$ не может быть больше p линейно независимых векторов $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$, таких что $\omega(Y_i, Y_j) = 0$ для всех i, j. Отсюда следует, что ограничения операторов $A_1, \ldots, A_p$ на T_x^*M функционально зависимы. Значит, x не является точкой общего положения в M ввиду наших предположений. В точке общего положения $x \in M$ выполнено

$$\operatorname{span}_x\Big(\sum \alpha_i \hat{A}_i\Big) = T_x M,$$

т. е. оператор $\sum \alpha_i A_i$ эллиптичен в x. □

Семейство главных символов

$$H_{\alpha_1,\ldots,\alpha_p} := \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \hat{A}_i \colon T^*M \to \mathbb{R} \tag{3.39}$$

($\alpha_1, \ldots, \alpha_p > 0$) — коммутативное семейство однородных положительно определённых квадратичных функций Гамильтона на T^*M, а соответствующие им гамильтоновы векторные поля — геодезические потоки семейства римановых метрик на M. Таким образом, мы получаем p-мерное семейство римановых метрик на M, геодезические потоки которых интегрируемы и коммутируют друг с другом.

Проблема нахождения интегрируемых геодезических потоков и квантования их в интегрируемые операторы диффузии — серьёзная геометрическая задача, лежащая вне рамок данной статьи. Отметим лишь, что так называемые *проективно-эквивалентные метрики* (т. е. семейства различных метрик с одинаковыми непараметризованными геодезическими) активно изучались В. С. Матвеевым, А. В. Болсиновым, П. Ж. Топаловым [4, 20] и другими авторами. В частности, показано, что эти метрики интегрируемы, могут быть проквантованы в интегрируемые стохастические динамические системы типа $(p, 0, 0)$ в нашем смысле и, по существу, это то же самое, что так называемые (сепарабельные) системы (Штеккеля—)Бененти, изученные С. Бененти и многими другими авторами в классической и квантовой механике (см., например, [3,4,6,20]). Метрики (индуцированные из $\mathbb{R}^n$) на многомерные эллипсоиды принадлежат семейству интегрируемых метрик, так что броуновское движение на p-мерном эллипсоиде — интегрируемая стохастическая динамическая система типа $(p, 0, 0)$.

3.6. Редуцированная интегрируемость стохастической динамической системы

В гамильтоновой динамике, когда говорят об интегрируемости гамильтоновой системы, часто имеют в виду её *редуцированную интегрируемость*, т. е. интегрируемость не исходной системы, а системы, редуцированной по какому-нибудь собственному действию группы. Например, знаменитый волчок Ковалевской — это гамильтонова система на $T^*\mathrm{SO}(3)$ с тремя степенями свободы, но его часто рассматривают как (редуцированную) интегрируемую систему с двумя степенями свободы (см., например, [7]). В [13, 25] дан ряд теорем о связи интегрируемости и редуцированной интегрируемости. Что касается стохастических динамических систем, сформулируем следующую гипотезу.

Гипотеза 3.20. Пусть

$$X = X_0 + \sum X_i \circ \frac{dB_t^i}{dt} -$$

стохастическая динамическая система на многообразии M, которая интегрируема и диффузионно инвариантна относительно действия компактной группы Ли G на M. Тогда редуцированная система на фактор-пространстве M/G (или его регулярной части) также будет интегрируемой стохастической динамической системой.

Литература

[1] Albeverio S., Fei S. Remark on symmetry of stochastic dynamical systems and their conserved quantities // J. Phys. A. — 1995. — Vol. 28. — P. 6363—6371.

[2] Bismut J. M. Mecanique Aleatoire. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 866).

[3] Błaszak M, Domański Z., Sergyeyev A., Szablikowski B. Integrable quantum Stäckel systems // Phys. Lett. A. — 2013. — Vol. 377, no. 38. — P. 2564—2572.

[4] Bolsinov A. V., Matveev V. S. Geometrical interpretation of Benenti systems // J. Geom. Phys. — 2003. — Vol. 44, no. 4. — P. 489—506.

[5] Borodin A. N., Freidlin M. I. Fast oscillating random perturbations of dynamical systems with conservation laws // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. — 1995. — Vol. 31, no. 3. — P. 485—525.

[6] Duval C., Valent G. Quantum integrability of quadratic Killing tensors // J. Math. Phys. — 2005. — Vol. 46, no. 5. — 053516.

[7] Fomenko A. T., Bolsinov A. V. Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004.

[8] Freidlin M., Weber M. Random perturbations of dynamical systems and diffusion processes with conservation laws // Probab. Theory Related Fields. — 2004. — Vol. 128, no. 3. — P. 441—466.

[9] Galmarino A. R. Representation of an isotropic diffusion as a skew product // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. — 1963. — Vol. 1, no. 4. — P. 359—378.

[10] Gitterman M. The Noisy Oscillator: The First Hundred Years, from Einstein Until Now. — New York: World Scientific, 2005.

[11] Grove K., Karcher H., Ruh E. A. Group actions and curvature // Invent. Math. — 1974. — Vol. 23. — P. 31—48.

[12] Ikeda N., Watanabe S. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. — North-Holland, 1981. — (North-Holland Math. Lib.; Vol. 24).

[13] Jovanovic B. Symmetries and integrability // Publ. Inst. Math. (Beograd). — 2008. — Vol. 84 (98). — P. 1—36.

[14] Kunita H. Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.

[15] Lázaro-Camí J.-A., Ortega J.-P. Reduction, reconstruction, and skew-product decomposition of symmetric stochastic differential equations // Stoch. Dyn. — 2009. — Vol. 9, no. 1. — P. 1—46.

[16] Li Xue-Mei. An averaging principle for a completely integrable stochastic Hamiltonian system // Nonlinearity. — 2008. — Vol. 21, no. 4. — P. 803—822.

[17] Liao M. A decomposition of Markov processes via group action // J. Theor. Probab. — 2009. — Vol. 22, no. 1. — P. 164—185.

[18] Liouville J. Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique // J. Math. Pures Appl. — 1855. — Vol. 20. — P. 137—138.

[19] Markus L., Weerasinghe A. Stochastic oscillators // J. Differ. Equ. — 1988. — Vol. 71, no. 2. — P. 288—314.

[20] Matveev V. S. Quantum integrability of the Beltrami—Laplace operator for geodesically equivalent metrics // Russ. Math. Dokl. — 2000. — Vol. 61, no. 2. — P. 216—219.

[21] Misawa T. Conserved quantities and symmetries related to stochastic dynamical systems // Ann. Inst. Stat. Math. — 1999. — Vol. 51, no. 4. — P. 779—802.

[22] Øksendal B. Stochastic Differential Equations. — Berlin: Springer, 2003.

[23] Pauwels E. J., Rogers L. C. G. Skew-product decompositions of Brownian motions // Contemp. Math. — 1988. — Vol. 73. — P. 237—262.

[24] Taylor M. Pseudodifferential Operators. — New York: Springer, 1996.

[25] Zung N. T. Torus actions and integrable systems // Topological Methods in the Theory of Integrable Systems. — Cambridge: Cambridge Sci. Publ., 2006. — P. 289—328.

[26] Zung N. T. A general approach to the problem of action-angle variables. — In preparation. (Earlier version: Action-angle variables on Dirac manifolds. — arXiv: 1204.3865.)

[27] Zung N. T., Thien N. T. Physics-like second-order models of financial assets prices. — In preparation.