Эрмитова алгебраическая K-теория и система корней D

Ф. Ю. ПОПЕЛЕНСКИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: popelens@math.math.msu.su

УДК 515.14+512.66

Ключевые слова: эрмитова K-теория, кольцо с инволюцией, система корней.

Аннотация

По системе корней D строится аналог комплекса Вагонера, использованного им при доказательстве эквивалентности линейных алгебраических K-теорий K_*^Q и K_*^{BN}. Доказывается, что соответствующая эрмитова K-теория KU_*^D в случае ортогональной группы эквивалентна K-теории KU_*^{BN}, построенной Ю. П. Соловьёвым и А. И. Немытовым.

Abstract

Th. Yu. Popelensky, Hermitian algebraic K-theory and the root system D, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 3, pp. 251—256.

For the root system D, we construct an analog of the Wagoner complex used in his proof of the equivalence of K_*^Q and K_*^{BN} (linear) algebraic K-theories. We prove that the corresponding K-theory KU_*^D for the even orthogonal group is naturally isomorphic to the KU_*^{BN}-theory constructed by Yu. P. Solovyov and A. I. Nemytov.

Посвящается 70-летию Анатолия Тимофеевича Фоменко

Введение

Пусть A — ассоциативное кольцо, а $K_*^Q(A)$ — алгебраическая K-теория Квиллена кольца A. В 1977 году в [5] Дж. Вагонер доказал, что естественный гомоморфизм i в последовательности

$$K_*^Q(A) \xrightarrow{i} K_*^{BN}(A) \to K_*^V(A)$$

является изоморфизмом. Группы K_*^{BN} были введены Дж. Вагонером в [4] и являются вариантом K-групп Володина K_*^V. Доказательство Дж. Вагонера существенно опирается на комбинаторику системы корней A и соответствующего разбиения $\mathbb{R}^n$ на ячейки.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 3, с. 251—256.

В 1980 году, опираясь на комбинаторику системы корней C, Ю. П. Соловьёв и А. И. Немытов для колец с инволюцией доказали эквивалентность KU_*^Q — эрмитова аналога K-теории Квиллена — и эрмитова аналога K_*^{BN}-теории. В нашей работе мы рассматриваем аналог K^{BN}-теории, построенный по системе корней D, и показываем, что для чётной ортогональной группы эта K-теория эквивалентна KU_*^Q-теории.

1. Основные определения

Пусть A — ассоциативное кольцо с 1, снабжённое инволюцией $a \mapsto a^*$ со стандартными свойствами:

1) $1^* = 1$;
2) $a^{**} = a$;
3) $(a+b)^* = a^* + b^*$;
4) $(ab)^* = b^* a^*$.

Пусть также выбран центральный элемент ε, для которого $\varepsilon^*\varepsilon = 1 = \varepsilon\varepsilon^*$. Зафиксируем аддитивную подгруппу $\Lambda \subset A$, для которой

1) $a\Lambda a^* \subset \Lambda$ для всех $a \in A$;
2) $\Lambda_{\min} = \{a - \varepsilon a^* \colon a \in A\} \subset \Lambda \subset \Lambda_{\max} = \{a \in A \colon a = -\varepsilon a^*\}$.

Наконец, обозначим через Λ_{2n} аддитивную подгруппу в $\mathrm{M}_{2n}(A)$, состоящую из матриц (x_{ij}), элементы которых удовлетворяют условиям $x_{ij} = -\varepsilon x_{ji}^*$ и $x_{ii} \in \Lambda$.

Множество матриц

$$U_{2n}(A) = U_{2n}(A, \varepsilon, \Lambda) = \\ = \left\{ X \in \mathrm{GL}_{2n}(A) \colon X^* \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mod \Lambda_{2n} \right\},$$

рассматриваемое вместе с обычным матричным умножением, образует так называемую унитарную (или квадратичную) группу. Хотя она зависит от выбора ε и Λ, для краткости мы будем обозначать её $U_{2n}(A)$. В литературе часто используется обозначение ${}_\varepsilon GQ_{2n}(A, \Lambda)$. Варьируя параметры ε и Λ можно получить ряд классических групп: группу обратимых матриц, симплектическую группу, чётную ортогональную группу и т. п.

Переходя к пределу относительно стандартного вложения

$$U_{2n}(A) \to U_{2(n+1)}(A),$$

получаем группу $U(A)$. Элементарной подгруппой называется подгруппа, порождённая элементарными матрицами

$$s_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 + aE_{ij} & 0 \\ 0 & 1 - a^* E_{ji} \end{pmatrix}, \quad r_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & aE_{ij} - \varepsilon^* a^* E_{ji} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$t_{ij}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ aE_{ij} - \varepsilon a^* E_{ji} & 1 \end{pmatrix},$$

$$p_i(b) = \begin{pmatrix} 1 & bE_{ii} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q_i(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cE_{ii} & 1 \end{pmatrix},$$

где $a \in A$, $b^*, c \in \Lambda$. Известно (например, см. [1]), что подгруппа $EU(A)$ совершенна и совпадает с коммутантом $U(A)$:

$$EU(A) = [EU(A), EU(A)] = [U(A), U(A)].$$

Эрмитова алгебраическая K-теория Квиллена определяется с помощью $+$-конструкции: $KU_j^Q(A) = \pi_j(BU(A)^+)$.

Теперь напомним, как определяются группы $KU_*^{BN}(A)$ (см. [2]). В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим гиперплоскости, заданные уравнениями $e_i \pm e_j = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, и $e_j = 0$, где e_i — двойственный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Назовём ячейкой коразмерности j компоненту связности в дополнении объединения всевозможных $(j+1)$-кратных пересечений рассматриваемых гиперплоскостей до объединения всевозможных их j-кратных пересечений. На ячейках задан частичный порядок, а именно $F < G$ тогда и только тогда, когда $F \subseteq \bar{G}$.

Обозначим через $\mathcal{P}_C^n$ симплициальный комплекс, k-симплексами которого являются наборы ячеек вида $F_0 < F_1 < \ldots < F_k$. Вложение $\mathcal{P}_C^n \to \mathcal{P}_C^{n+1}$ определяется повторением последней координаты точки $\mathbb{R}^n$. Переходя к пределу по вложениям, получаем комплекс $\mathcal{P}_C$.

Пусть F — некоторая ячейка в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $G_F \subset U_{2n}(A)$ подгруппу, порождённую всевозможными элементами $s_{ij}(a)$, где $e_i - e_j > 0$ на F; $r_{ij}(a)$, где $e_i + e_j > 0$ на F; $t_{ij}(a)$, где $e_i + e_j < 0$ на F; $p_k(b)$, где $e_k > 0$ на F; $q_k(c)$, где $e_k < 0$ на F. Это так называемая унипотентная группа, соответствующая ячейке F.

На множестве пар (α, F), где $\alpha \in U_{2n}(A)$ и F — ячейка, вводится следующий порядок: мы считаем, что $(\alpha', F') < (\alpha'', F'')$ в том и только в том случае, когда $\alpha' G_{F'} \subset \alpha'' G_{F''}$ и $F' \subset \bar{F}''$.

Симплициальный комплекс с k-симплексами вида

$$(\alpha_0, F_0) < (\alpha_1, F_1) < \ldots < (\alpha_k, F_k),$$

где $F_0, F_1, \ldots, F_k$ — ячейки и все α_j принадлежат $U_{2n}(A)$, обозначим через $U_{2n}^{BN}(A)$. Подкомплекс, определяемый условием $\alpha_j \in EU_{2n}(A)$ для всех j, обозначим $EU_{2n}^{BN}(A)$. Предельные пространства обозначаются через $U^{BN}(A)$ и $EU^{BN}(A)$ соответственно. Несложно проверяется, что

$$U^{BN}(A) = KU_1^Q(A) \times EU^{BN}(A).$$

Положим

$$KU_n^{BN}(A) = \pi_{n-1}\big(U^{BN}(A)\big), \quad \text{где} \quad n \geqslant 1.$$

В [2] показано, что функторы KU_n^{BN} и KU_n^Q ($n \geqslant 2$) эквивалентны, более того, имеет место гомотопическая эквивалентность $U^{BN}(A) \cong \Omega BU(A)^+$.

2. K^D-группы и чётная ортогональная группа

По аналогии с конструкцией, описанной в предыдущем разделе, мы построим группы $K_*^D(A)$, основываясь на системе корней D.

Рассмотрим разбиение $\mathbb{R}^n$ на ячейки, которое определяется гиперплоскостями $e_i \pm e_j = 0$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Будем обозначать эти ячейки через Φ_j, чтобы отличать их от ячеек, заданных системой корней C, и называть их D-ячейками.

Обозначим через $\mathcal{P}_D^n$ симплициальный комплекс, k-симплексами которого являются наборы ячеек вида $\Phi_0 < \Phi_1 < \ldots < \Phi_k$. Для D-ячейки $\Phi \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $G_\Phi \subset U_{2n}(A)$ подгруппу, порождённую элементами $s_{ij}(a)$, где $e_i - e_j > 0$ на Φ; $r_{ij}(a)$, где $e_i + e_j > 0$ на Φ; $t_{ij}(a)$, где $e_i + e_j < 0$ на Φ.

На множестве пар $(\alpha; \Phi)$, где $\alpha \in U_{2n}(A)$ и Φ — D-ячейка, введём порядок: будем считать, что $(\alpha', \Phi') < (\alpha'', \Phi'')$ в том и только в том случае, когда $\alpha' G_{\Phi'} \subset \alpha'' G_{\Phi''}$ и $\Phi' \subset \bar{\Phi}''$.

Симплициальный комплекс с k-симплексами вида

$$(\alpha_0, \Phi_0) < (\alpha_1, \Phi_1) < \ldots < (\alpha_k, \Phi_k),$$

где $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_k$ — D-ячейки и $\alpha_j \in U_{2n}(A)$, обозначим через $U_{2n}^D(A)$. Пусть

$$U^D(A) = \varinjlim U_{2n}^D(A).$$

Определим теперь группы $KU^D(A)$:

$$KU_n^D(A) = \pi_{n-1}\big(U^D(A)\big), \quad \text{где} \quad n \geqslant 1.$$

Пусть A — коммутативное кольцо с 1 с тривиальной инволюцией, $\varepsilon = 1$, $\Lambda = \Lambda_{\min} = 0$. Тогда соответствующая унитарная группа $U_{2n}(A, \varepsilon, \Lambda)$ совпадает с чётной ортогональной группой $O_{2n}(A)$.

Теорема 1. *Имеет место естественный изоморфизм $K_n^D(A) = K_n^{BN}(A)$.*

Напомним (см. [2, 3]), что имеют место декартовы квадраты

$$\begin{array}{ccc} W_C(\alpha G_F) & \longrightarrow & E\big(U(A)\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_C(A) & \longrightarrow & BU(A) \end{array} \tag{1}$$

и

$$\begin{array}{ccc} W_D(\alpha G_\Phi) & \longrightarrow & E\big(U(A)\big) \\ \downarrow & & \downarrow \\ W_D(A) & \longrightarrow & BU(A) \end{array} . \tag{2}$$

Опишем пространства, которые участвуют в этих диаграммах. Комплекс $W_C(A)$ — это геометрическая реализация симплициального комплекса, у которого k-симплексами служат $(F_0 < \ldots < F_k) \times BG_{F_0}$. Комплекс $W_C(\alpha G_F)$ — это геометрическая реализация комплекса,у которого k-симплексы имеют вид

$\big((\alpha_0, F_0) < \ldots < (\alpha_k, F_k)\big) \times E(\alpha_0 G_{F_0})$. Аналогичным образом определяются $W_D(A)$ и $W_D(\alpha G_\Phi)$. Универсальное расслоение $E(G) \to BG$ на симплициальном уровне определяется соответствием $(g_0, g_1, \ldots, g_k) \mapsto (g_0^{-1} g_1, \ldots, g_{k-1}^{-1} g_k)$. Наконец, $E(\alpha G_F)$ — это геометрическая реализация симплициального подкомплекса в $E\big(U(A)\big)$, у которого k-симплексы имеют вид $(g_0, \ldots, g_k)$, где все g_k принадлежат αG_F. Аналогично определяется $E(\alpha G_\phi)$.

Иными словами, декартов квадрат (1) на уровне бисимплициальных множеств определяется соответствиями

$$\begin{array}{ccc}
\big((\alpha_0, F_0) < \ldots < (\alpha_k, F_k); (g_0, \ldots, g_l)\big) & \longrightarrow & (g_0, \ldots, g_l) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\big(F_0 < \ldots < F_k; (g_0^{-1} g_1, \ldots, g_{l-1}^{-1} g_l)\big) & \longrightarrow & (g_0^{-1} g_1, \ldots, g_{l-1}^{-1} g_l)
\end{array}$$

а декартов квадрат (2) — аналогичными соответствиями с заменой F_j на Φ_j.

Пространства $E(\alpha G_F)$ и $E(\alpha G_\Phi)$ стягиваемы, поэтому имеют место гомотопические эквивалентности $W_C(\alpha G_F) \simeq U^{BN}(A)$ и $W_D(\alpha G_\Phi) \simeq U^D(A)$.

Тем самым сравнение групп $K_*^{BN}(A)$ и $K_*^D(A)$ сводится к сравнению декартовых квадратов (1) и (2), так что для доказательства теоремы 1 нам достаточно доказать гомотопическую эквивалентность их левых нижних углов — пространств $W_C(A)$ и $W_D(A)$.

Напомним, что пучком X пространств над симплициальным комплексом K называется набор пространств $\{X_\sigma \colon \sigma \in K\}$ и отображений $i_{\sigma\tau} \colon X_\tau \to X_\sigma$, заданных для всех $\sigma < \tau$, удовлетворяющих условиям согласования $i_{\gamma\sigma} i_{\sigma\tau} = i_{\gamma\tau}$ для всех $\gamma < \sigma < \tau$. Если комплекс K' получен измельчением комплекса K, то на нём можно определить индуцированный пучок X' следующим образом. Для $\sigma' \in K'$ положим $X'_{\sigma'} = X_\sigma$, где $\sigma \in K$ — симплекс наименьшей размерности, содержащий σ'. Если $\sigma' < \tau'$ — симплексы в K' и $\sigma, \tau \in K$ — симплексы наименьшей размерности, содержащие σ и τ соответственно, то $\sigma < \tau$, и мы полагаем по определению $i_{\sigma'\tau'} = i_{\sigma\tau}$. Для пучка X определена геометрическая реализация $|X|$. Она получается отождествлением в дизъюнктном объединении $\coprod\limits_{\sigma \in K} \sigma \times X_\sigma$ точек вида (s, x) и $\big(s, i_{\sigma\tau}(x)\big)$, где $s \in \sigma < \tau$ и $x \in X_\tau$. Естественное отображение $|X'| \to |X|$ является гомеоморфизмом.

Как легко убедиться, оба пространства $W_C(A)$ и $W_D(A)$ являются геометрическими реализациями пучков пространств над $\mathcal{P}_C$ и $\mathcal{P}_D$ соответственно.

Пересечение единичной сферы с центром в начале координат с D-ячейками (C-ячейками) индуцирует на ней структуру симплициального комплекса $\mathcal{Q}_D^n$ (соответственно $\mathcal{Q}_C^n$). Комплексы $\mathcal{P}_D^n$ и $\mathcal{P}_C^n$ представляют собой барицентрические подразделения комплексов $\mathcal{Q}_D^n$ и $\mathcal{Q}_C^n$ соответственно. Комплекс $\mathcal{Q}_C^n$ является измельчением комплекса $\mathcal{Q}_D^n$. Более точно, симплекс комплекса $\mathcal{Q}_D^n$ либо является симплексом комплекса $\mathcal{Q}_C^n$, либо разбивается на два симплекса одной из гиперплоскостей $e_k = 0$. В самом деле, если симплекс комплекса $\mathcal{Q}_D^n$ трансверсально пересекают две гиперплоскости $e_k = 0$ и $e_l = 0$, то в соответствующей ячейке существуют точки, для которых $e_k + e_l$ положительно, и точки, для которых $e_k + e_l$ отрицательно (или точки, для которых $e_k - e_l$ положительно, и точки, для которых, $e_k - e_l$ отрицательно).

Легко проверить, что если $F - C$-ячейка, а $\Phi - D$-ячейка наименьшей размерности, содержащая F, то $G_F = G_\Phi$. Заметим, что для колец с инволюцией общего вида это утверждение, вообще говоря, неверно.

Из этого следует, что существует общее подразбиение $\hat{\mathcal{P}}^n$ комплексов $\mathcal{P}^n_D$ и $\mathcal{P}^n_C$, над которым индуцированные пучки одинаковы. Переходя к геометрическим реализациям, получаем требуемое утверждение.

Литература

[1] Клейн И. С., Михалёв А. В. Унитарная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 5. — С. 510—519.

[2] Немытов А. И., Соловьев Ю. П. BN-пары и эрмитова K-теория // Алгебра. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. — С. 102—118.

[3] Anderson D., Karoubi M., Wagoner J. Relations between algebraic K-theories //

[4] Wagoner J. Buildings, stratifications, and higher K-theory // Algebraic K-theory. I. — Berlin: Springer, 1973. — (Lect. Notes Math.; Vol. 341). — P. 148—165.

[5] Wagoner J. Equivalence of algebraic K-theories // J. Pure Appl. Algebra. — 1977. — Vol. 11. — P. 245—269.