

Группы изометрий четырёхмерных нильпотентных групп Ли*

Т. ШУКИЛОВИЧ

Белградский университет, Сербия

e-mail: tijana@matf.bg.ac.rs

УДК 512.813

Ключевые слова: нильпотентная группа Ли, группа изометрий.

Аннотация

Главная задача этой статьи — представить полное описание групп изометрий четырёхмерных односвязных нильпотентных групп Ли. Мы покажем различие между двумя геометрически различными случаями вырожденного и невырожденного центра группы. Поскольку метрики Уолкера возникают как структуры, лежащие в основе метрик нейтральной сигнатуры на нильпотентных группах Ли с вырожденным центром, мы найдём необходимое и достаточное условие того, что они локально допускают нильпотентную группу изометрий.

Abstract

T. Šukilović, Isometry groups of 4-dimensional nilpotent Lie groups, Fundamentalna i prikladna matematika, vol. 20 (2015), no. 3, pp. 257–271.

The main purpose of this paper is to give a complete description of isometry groups on the 4-dimensional simply connected nilpotent Lie groups. We distinguish between two geometrically distinct cases of degenerate and nondegenerate center of the group. Since Walker metrics appear as the underlying structure of neutral signature metrics on the nilpotent Lie groups with degenerate center, we find necessary and sufficient condition for them to locally admit the nilpotent group of isometries.

Геометрия групп Ли с левоинвариантной метрикой усердно изучалась в течение многих лет, начиная с работы Дж. Милнора [17] до более новых работ Х. Лаурета [16], Л. А. Кордеро и Ф. Паркера [9]. То, что между римановым и псевдоримановым случаями существует существенное различие, становится ясно уже из результатов классификационного типа. Например, на четырёхмерных нильпотентных группах Ли есть только один класс неэквивалентных положительно определённых левоинвариантных метрик на каждой группе, тогда как в лоренцевом случае существует несколько семейств метрик (см. [8]). За всесторонним анализом и ссылками на различную литературу, связанную с левоинвариантными метриками на группах Ли малых размерностей, можно

*Работа была частично поддержана проектом 174012 Министерства образования и науки Республики Сербии.

обратиться к книге [1]. Группы и алгебры Ли связаны с различными областями математики, физики и т. д. Например, стоит обратить внимание на работы В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко, посвящённые интегрированию гамильтоновых систем на алгебрах Ли (см. [3, 4]). Эта тематика всё ещё интересна, особенно если иметь в виду её связь с проективной эквивалентностью метрик. Существование проективно эквивалентных метрик, которые не являются геометрически жёсткими или аффинно эквивалентными, всё ещё является открытым вопросом в случае групп Ли.

Другое неожиданное различие между римановым и псевдоримановым случаями видно из свойств групп изометрий. В частности, группа изометрий может быть значительно больше на псевдоримановом многообразии с вырожденным центром, чем на римановом или даже псевдоримановом многообразии с невырожденным центром. Было показано, что в римановом случае группа изометрических автоморфизмов совпадает с группой изометрий двухступенчатой нильпотентной группы Ли N , которые сохраняют единицу и разложение

$$TN = vN \oplus \xi N. \quad (1)$$

Эти подрасслоения получаются левыми сдвигами разбиения на уровне алгебры Ли $\mathfrak{n} = v \oplus \xi$, где $\mathfrak{n}$ — алгебра Ли группы N , ξ — её центр и v — ортогональное дополнение к ξ . Дополнительную информацию относительно положительно определённого случая можно найти в [11, 14].

Полные группы изометрий всех однородных римановых трёхмерных и четырёхмерных нильмногообразий были описаны в [16], в то время как в случае размерности 5 авторы рассмотрели только двухступенчатые нильпотентные многообразия [13].

Группы Ли, действующие изометриями на фиксированной псевдоримановой двухступенчатой нильпотентной группе Ли, наделённой левоинвариантной метрикой, были изучены Л. А. Кордеро и Ф. Паркером в [10]. Их в первую очередь интересовали различия между группой изометрических автоморфизмов, группой изометрий, сохраняющих разбиение (1), и полной группой изометрий. Позже В. дель Барко и Г.-П. Овандо уточнили эти результаты в [5]. Также в этой статье они рассмотрели биинвариантные метрики на двухступенчатых нильпотентных группах Ли и показали, что существуют изометрические автоморфизмы, не сохраняющие никакого разбиения.

Наша задача — дать полное описание изометрий нильпотентных четырёхмерных групп Ли. В разделе 1 вводятся основные понятия. В разделах 2 и 3 отдельно рассматриваются случаи невырожденного и вырожденного центра группы. В начале каждого раздела с точностью до действия группы автоморфизмов классифицируются скалярные произведения на нильпотентных алгебрах Ли $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ и $\mathfrak{g}_4$. Доказывается, что неравенство $I^{\text{aut}} < I$ выполнено для всех метрик на нильпотентных группах Ли с вырожденным центром. Интересно, что pp-волны и метрики Уолкера возникают как структура, лежащая в основе метрик на нильпотентных группах Ли с вырожденным центром. Найдено необходимое и

достаточное условие, при котором метрики Уолкера локально допускают нильпотентную группу изометрий. Плоские волны — это специальная разновидность рр-волн с фиксированной амплитудой в каждом волновом фронте. Такие метрики играют важную роль в общей теории относительности, потому что каждое четырёхмерное пространство-время имеет специальную рр-волну, являющуюся корректно определённым пределом Пенроуза (см. [7, 19]). В общем случае группа изометрий метрики плоской волны совпадает с алгеброй Гейзенберга (см. [7]). Она действует транзитивно на изотропных гиперплоскостях с просто транзитивно действующей абелевой подалгеброй. Однако в некоторых особых случаях, например в случае конформно плоских плоских волн, могут возникать дополнительные киллинговы векторные поля (более подробную информацию можно найти в [15]).

1. Предварительные сведения

Пусть (N, g) — это односвязная нильпотентная группа Ли с левоинвариантной метрикой g , и пусть $\mathfrak{n} = \text{Lie } N$ — её алгебра Ли с индуцированным скалярным произведением произвольной сигнатуры, которое мы обозначим $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Обозначим через $\text{Aut}(\mathfrak{n})$ группу автоморфизмов нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{n}$, которая определяется следующим образом:

$$\text{Aut}(\mathfrak{n}) := \{F: \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n} \mid F \text{ линейно, } [Fx, Fy] = F[x, y], \ x, y \in \mathfrak{n}\}.$$

Так как на односвязной группе Ли экспоненциальное отображение $\exp: \mathfrak{n} \rightarrow N$ является диффеоморфизмом, N диффеоморфно $\mathbb{R}^n$. Как следствие, получаем, что группы автоморфизмов нильпотентной группы Ли и её алгебры совпадают, т. е. $\text{Aut}(N) = \text{Aut}(\mathfrak{n})$ (см. [20]).

Обозначим через $\mathcal{S}(\mathfrak{n})$ множество неэквивалентных скалярных произведений на алгебре $\mathfrak{n}$. Если фиксировать базис нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{n}$, то множество $\mathcal{S}(\mathfrak{n})$ отождествляется с множеством симметричных матриц S произвольной сигнатуры по модулю следующего действия группы автоморфизмов:

$$S \mapsto F^T S F, \quad F \in \text{Aut}(\mathfrak{n}). \quad (2)$$

Это скалярное произведение, представленное симметричной матрицей S на алгебре Ли $\mathfrak{n}$, порождает левоинвариантную метрику g на соответствующей группе Ли.

Пусть $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ — базис нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{n}$, обозначим через X_1, X_2, X_3, X_4 соответствующие левоинвариантные векторные поля на N . Начиная с этого момента мы отождествляем нильпотентную алгебру Ли $\mathfrak{n}$ с алгеброй левоинвариантных векторных полей на N .

С точностью до изоморфизма существуют только две неабелевы нильпотентные алгебры Ли размерности 4, $\mathfrak{g}_4$ и $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$, отвечающие группам Ли G_4 и $H_3 \times \mathbb{R}$ соответственно (см., например, [18]).

Алгебра $\mathfrak{g}_4$ — трёхступенчатая нильпотентная алгебра с одномерным центром $\xi(\mathfrak{g}_4) = \mathcal{L}(x_4)$ и двумерным коммутантом $\mathfrak{g}'_4 := [\mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_4] = \mathcal{L}(x_3, x_4)$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ — это двухступенчатая нильпотентная алгебра с двумерным центром $\xi(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) = \mathcal{L}(x_3, x_4)$ и одномерным коммутантом, натянутым на x_3 .

Автоморфизмы этих групп описываются в двух следующих леммах.

Лемма 1.1 [16]. Группа $\text{Aut}(\mathfrak{g}_4)$ автоморфизмов нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}_4$ в базисе $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ состоит из вещественных матриц вида

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}_4) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & a_1 b_2 & 0 \\ a_4 & b_4 & a_1 b_3 & a_1^2 b_2 \end{pmatrix} \middle| a_1, b_2 \neq 0 \right\}. \quad (3)$$

Лемма 1.2 [16]. Группа $\text{Aut}(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R})$ автоморфизмов нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ в базисе $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ состоит из вещественных матриц вида

$$\text{Aut}(\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ b_1 & \det A & \mu \\ b_2 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle| A \in \text{GL}(2, \mathbb{R}), b_1, b_2 \in \mathbb{R}^2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \right\}. \quad (4)$$

Обозначим через $I(N)$ группу изометрий N . Подгруппа левых сдвигов элементами из N замкнута в $\tilde{O}(N)$ и изоморфна N . Подгруппа изометрий, сохраняющих единицу, обозначаемая через $\tilde{O}(N)$, также является замкнутой подгруппой в $\tilde{O}(N)$, и

$$I(N) = \tilde{O}(N) \cdot N. \quad (5)$$

Также положим $O(N) = \text{Aut}(N) \cap I(N)$, и пусть $I^{\text{aut}}(N) = O(N) \ltimes N$, где N действует левыми сдвигами.

Пусть M — псевдориманово многообразие и g — псевдориманова метрика на нём. Векторное поле X на M называется киллинговым векторным полем, если

$$g(\nabla_V X, W) + g(V, \nabla_W X) = 0 \quad (6)$$

имеет место для любых векторных полей W и V на M .

Так как все левоинвариантные псевдоримановы метрики на $H_3 \times \mathbb{R}$ геодезически полны (см. [12]), множество всех киллинговых полей является алгеброй Ли полной группы изометрий. Также однопараметрическая группа изометрий, порождённая потоком любого киллингова поля, глобальна. Следовательно, изометрии, полученные интегрированием киллинговых полей на $H_3 \times \mathbb{R}$ глобальны. Важно отметить, что метрики на группе G_4 не полны, а следовательно, изометрии локальны.

2. Случай невырожденного центра

Напомним, что центр ξ нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{n}$ *вырожденный*, если он содержит (полностью) изотропное подпространство. Возможная вырожденность

центра вызывает существенные различия между римановым и псевдоримановым случаями.

Лемма 2.1. Если центр алгебры $\mathfrak{g}_4$ невырожденный, то скалярное произведение представляется матрицей

$$S_A^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & b & c \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}, \quad (7)$$

где сигнатура матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

задаётся сигнатурой скалярного произведения и $c \neq 0$, или матрицами

$$S_{3,\lambda}^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda \end{pmatrix}, \quad S_{4,\lambda}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $\lambda > 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$.

Доказательство. Главная идея доказательства — рассмотреть ограничение скалярного произведения на двумерный коммутант $\mathfrak{g}'_4$.

Обозначим через S , $S^T = S$, произвольную симметричную матрицу, представляющую скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в базисе $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, и через F автоморфизм алгебры $\mathfrak{g}_4$, заданный в лемме 1.1. В каждом из случаев мы будем искать новый базис $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ вида

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4, & f_2 &= b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4, \\ f_3 &= a_1 b_2 x_3 + a_1 b_3 x_4, & f_4 &= a_1 b_2^2 x_4, \end{aligned} \quad (9)$$

представляющий столбцы F , такой что скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в этом базисе $S_1 = F^T S F$ представляется как можно проще.

Отметим, что сигнатура $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $\mathfrak{g}'_4$ зависит от определителя правой нижней (2×2) -подматрицы A матрицы S .

Случай 1. Рассмотрим вначале случай, когда $\mathfrak{g}'_4$ невырожденный и имеет сигнатуру $(+, +)$. Два остальных случая, $(+, -)$ и $(-, -)$, рассматриваются аналогично.

а) Риманов/нейтральный случай. У ортогонального дополнения $\mathfrak{g}'_4^\perp$ сигнатура $(+, +)$ в римановом случае или $(-, -)$ в случае нейтральной сигнатуры, и $\mathfrak{g}_4 = \mathfrak{g}'_4 \oplus \mathfrak{g}'_4^\perp$. Пусть $\{e_1, e_2\}$ — ортонормированный базис $\mathfrak{g}'_4^\perp$. Параметр $t \in \mathbb{R}$ евклидова поворота

$$f_1 = \cos t e_1 + \sin t e_2, \quad f_2 = \sin t e_1 + \cos t e_2$$

может быть выбран таким образом, чтобы первая координата f_2 обнулилась и, следовательно, f_2 имел вид (9). Такой выбор f_1, f_2 также определяет базис

$\{f_3, f_4\}$ в $\mathfrak{g}'_4$. Так как все единичные векторы в $\mathfrak{g}'_4{}^\perp$ эквивалентны, получаем, что в новом базисе матрица скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ имеет вид S_A^ε , $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

б) Лоренцев случай. В этом случае ортогональное дополнение $\mathfrak{g}'_4{}^\perp$ имеет сигнатуру $(+, -)$. Доказательство аналогично предыдущему случаю с заменой евклидова поворота на гиперболический. Здесь мы имеем $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ и оба варианта $\varepsilon_2 = 1$ и $\varepsilon_2 = -1$ возможны. Это происходит из-за того, что гиперболические повороты не меняют характеристику f_2 (т. е. $\text{sign}\langle f_2, f_2 \rangle$). Можно показать, что скалярные произведения, представленные матрицами S_A^ε , попарно не эквивалентны относительно действия $F \in \text{Aut}(\mathfrak{g}_4)$.

СЛУЧАЙ 2. В этом случае, когда ограничение скалярного произведения на $\mathfrak{g}'_4$ вырожденное, мы обсудим характер центра $\xi(\mathfrak{g}_4) \subset \mathfrak{g}'_4$. Матрица A ограничения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{ac} \\ \sqrt{ac} & c \end{pmatrix}, \quad c \neq 0. \quad (10)$$

В $\mathfrak{g}'_4$ существует единственный изотропный вектор L , и все остальные векторы $X \in \mathfrak{g}'_4$ ортогональны ему:

$$\langle L, L \rangle = 0, \quad \langle X, X \rangle = \mu \neq 0, \quad \langle L, X \rangle = 0.$$

Интересно, что плоскость $\mathfrak{g}'_4{}^\perp$ также вырожденная и

$$\mathfrak{g}'_4{}^\perp \cap \mathfrak{g}'_4 = \mathcal{L}\langle L \rangle.$$

Следовательно, сумма $\mathfrak{g}'_4{}^\perp + \mathfrak{g}'_4$ является трёхмерным векторным пространством и не порождает $\mathfrak{g}_4$.

После некоторых вычислений можно показать, что скалярные произведения представляются одной из матриц (8). $\square$

Лемма 2.2. Если центр алгебры $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ невырожденный, то множество скалярных произведений из $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ представляется матрицами

$$S_\lambda^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}, \quad S^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где $\lambda > 0$, $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4 \in \{-1, 1\}$.

Доказательство. Центром алгебры является $\xi = \mathcal{L}(x_3, x_4)$, а коммутантом — $\mathcal{L}(x_3)$. Аналогично предыдущей лемме исследуется сигнатура центра ξ и получаются соответствующие скалярные произведения. $\square$

Теорема 2.1.

а) Если центр группы G_4 невырожденный, то $\tilde{O}(G_4)$ дискретна и группа изометрий $I(G_4)$ соответствующей метрики имеет вид

$$I(G_4) \simeq \text{diag}(\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \varepsilon \bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}) \ltimes G_4, \quad \varepsilon, \bar{\varepsilon} \in \{-1, 1\}.$$

- б) В случае метрик g_λ^ε на группе Ли $H_3 \times \mathbb{R}$ её группа изометрий имеет вид $I(H_3 \times \mathbb{R}) = \tilde{O}(H_3 \times \mathbb{R}) \ltimes (H_3 \times \mathbb{R})$, где

$$\tilde{O}(H_3 \times \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon \cos t & -\varepsilon \sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\varepsilon} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}, \varepsilon, \bar{\varepsilon} \in \{-1, 1\} \right\} \quad \text{при } \varepsilon_1 = \varepsilon_2,$$

$$*\tilde{O}(H_3 \times \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon \operatorname{ch} t & \varepsilon \operatorname{sh} t & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\varepsilon} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R}, \varepsilon, \bar{\varepsilon} \in \{-1, 1\} \right\} \quad \text{при } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2.$$

- в) В случае метрики g^ε на группе $H_3 \times \mathbb{R}$ её группа изометрий имеет вид $\tilde{O}(H_3 \times \mathbb{R}) \cdot (H_3 \times \mathbb{R})$, где $\tilde{O}(H_3 \times \mathbb{R})$ — трёхмерная группа Ли с соответствующей алгеброй Ли, определённой структурными уравнениями

$$[\xi^1, \xi^2] = \xi^2, \quad [\xi^1, \xi^3] = 0, \quad [\xi^2, \xi^3] = 0. \quad (12)$$

Доказательство. Докажем утверждение а). Из решения уравнения Киллинга (6) видно, что алгебра изометрий порождается только левыми сдвигами. Группа изометрий, сохраняющих единицу, совпадает с группой изометрических автоморфизмов, что и требовалось доказать.

Докажем утверждение б). Прямыми вычислениями получаем, что для метрики g_λ^ε алгебра киллинговых векторных полей пятимерна. Также $H_3 \times \mathbb{R}$ — нормальная подгруппа $I(H_3 \times \mathbb{R})$, следовательно, в (5) имеем полупрямое произведение.

Докажем утверждение в). Так как $\nabla R \equiv 0$, метрика g^ε на односвязной группе $H_3 \times \mathbb{R}$ превращает её в симметрическое пространство (здесь ∇ обозначает ковариантную производную, соответствующую связности Леви-Чивита, и R — это тензор кривизны). Группа изометрий, сохраняющая единицу, отождествляется с группой линейных изоморфизмов $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$, сохраняющей тензор кривизны, а значит, группа изотропий единицы в $I(H_3 \times \mathbb{R})$ имеет размерность 3. Следовательно, $I(H_3 \times \mathbb{R})$ имеет по крайней мере семь линейно независимых киллинговых векторных полей. Из решения уравнения Киллинга (6) получаем в точности семь киллинговых векторов $\{\xi^1, \dots, \xi^7\}$. Векторы $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ порождают алгебру Ли со структурными уравнениями (12). Остальные четыре вектора порождают алгебру Ли, определённую ненулевым коммутантом $[\xi^4, \xi^5] = \xi^6$, т. е. алгебру Ли $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$. $\square$

Следствие 2.1. Для любой левоинвариантной метрики

$$\dim I(H_3 \times \mathbb{R}) > \dim(H_3 \times \mathbb{R}).$$

Замечание 2.1. Предыдущее следствие не выполняется для группы G_4 .

3. Случай вырожденного центра

Для того чтобы классифицировать скалярные произведения в случае, когда центр алгебры частично или полностью вырожденный, проведём анализ, похожий на тот, что был приведён в предыдущем разделе. Результаты представлены в двух следующих леммах.

Лемма 3.1. Пусть центр алгебры $\mathfrak{g}_4$ изотропный. Если коммутант $\mathfrak{g}'_4$ частично вырожденный, то скалярные произведения имеют одну из следующих форм:

$$S_{1,\lambda}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{2,\lambda}^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda > 0, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}. \quad (13)$$

Если коммутант $\mathfrak{g}'_4$ полностью изотропный, то скалярные произведения имеют нейтральную сигнатуру $(+, +, -, -)$ и задаются матрицами

$$S_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}. \quad (14)$$

Лемма 3.2. Если центр алгебры $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$ частично вырожденный, то скалярные произведения задаются матрицами

$$S_{01}^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad S_{02}^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}. \quad (15)$$

Если центр полностью изотропный, то скалярное произведение имеет нейтральную сигнатуру и имеет вид

$$S_0^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Замечание 3.1. Заметим, что в (13) и (15) если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, то получается лоренцева сигнатура, а если $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, то скалярные произведения имеют нейтральную сигнатуру.

Исследуем соответствующие метрики более подробно.

3.1. Плоские метрики

На любой плоской односвязной группе Ли N группой изометрий является $I(N) \simeq O_q^p \ltimes N$, где O_q^p обозначает псевдоортогональную группу Ли и (p, q) — сигнатура псевдоримановой метрики.

Лемма 3.3. Метрики g_{01}^ε и g_0^0 на группе $H_3 \times \mathbb{R}$, а также метрики g_1^0 и $g_{1,\lambda}^\varepsilon$ (для $\lambda = 1$, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$) на группе G_4 плоские.

Следующая лемма вытекает непосредственно из предыдущей.

Лемма 3.4.

- а) Для метрики g_{01}^ε , $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, на группе $H_3 \times \mathbb{R}$ группой изометрий является $O(3, 1) \ltimes (H_3 \times \mathbb{R})$.
- б) Для метрик g_{01}^ε , $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$ и g_0^0 на группе $H_3 \times \mathbb{R}$ группой изометрий является $O(2, 2) \ltimes (H_3 \times \mathbb{R})$.
- в) Для метрик g_1^0 и $g_{1,\lambda}^\varepsilon$, $\lambda = 1$, $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$, на группе G_4 группой изометрий является $O(2, 2) \ltimes G_4$.

3.2. Метрики Уолкера

Говорят, что псевдориманово многообразие $\mathcal{M} = (M, g)$ является *многообразием Уолкера* и что g — *метрика Уолкера*, если существует нетривиальное полностью изотопное параллельное распределение $\mathcal{D}$. Поскольку $\dim \mathcal{D} \leq n/2$, где $n = \dim M$, в нашем случае параллельные распределения могут быть одномерными или двумерными.

Следствие 3.1. Все левоинвариантные метрики на нильпотентных четырёхмерных группах Ли с вырожденным центром являются метриками Уолкера.

Замечание 3.2. Заметим, что мы также обнаружили пример метрики Уолкера на нильпотентных группах Ли $H_3 \times \mathbb{R}$ с невырожденным центром. Таковой оказалась метрика g^ε , исследованная ранее в пункте в) теоремы 2.1.

Для лоренцевой сигнатуры $\dim \mathcal{D} = 1$, т. е. найдётся ковариантно постоянное, нигде не вырожденное, изотропное векторное поле V , и соответствующие метрики называются *pp-волновыми метриками*. pp-волны имеют тип N или O по Петрову (см. [2]) с многочисленными главными изотропными направлениями, заданными ковариантно постоянным изотропным векторным полем X_4 .

Замечание 3.3. Условие того, что X_4 — параллельное (т. е. ковариантно постоянное) изотропное векторное поле, эквивалентно условию, что X_4 одновременно является вектором Киллинга и градиентным векторным полем.

Хотя известно, что группы изометрий для pp-волн специального вида, так называемых плоских волн, являются обобщёнными группами Гейзенберга [7], подобный результат для pp-волн в общем случае ещё не был сформулирован.

Пример 1. Мы обсудим метрики $g_{1,\lambda}^\varepsilon$ и $g_{2,\lambda}^\varepsilon$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ на группе G_4 . Можно показать, что сигнатура метрики не влияет на размерность группы изометрий.

Более того, алгебра изометрий остаётся той же. Например, киллинговы векторные поля для метрики $g_{2,\lambda}^\varepsilon$ имеют вид

$$\begin{aligned}\xi^1 &= \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon_1 \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \left(y - \varepsilon_1 \frac{x^3}{6} + \varepsilon_2 \frac{x}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x}{24} \left(-24y + \varepsilon_1 x^3 - \varepsilon_2 \frac{12x}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^2 &= \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{x^3}{6} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{x}{\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial z} + \left(\varepsilon_1 z - \frac{x^4}{24} + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{x^2}{2\lambda} \right) \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^3 &= -x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} + \left(y - \frac{x^3}{6} \right) \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^4 &= \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^5 &= \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial z} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^6 &= \frac{\partial}{\partial z} - x \frac{\partial}{\partial w}.\end{aligned}$$

Заметим, что ξ^4 — параллельное изотропное векторное поле. Ясно, что единственная разница между лоренцевой и нейтральной сигнатурой будет отражена в первых двух векторах. Тем не менее векторы $\{\xi^1, \xi^4, \xi^5, \xi^6\}$ порождают трёхступенчатую нильпотентную алгебру Ли с коммутаторами

$$[\xi^1, \xi^5] = -2\xi^6, \quad [\xi^1, \xi^6] = -\xi^4, \quad [\xi^i, \xi^j] = 0 \text{ в остальных случаях.}$$

Подходящая замена базиса даст нам $[\xi^2, \xi^3] = 0$, откуда следует, что алгебра изометрий изоморфна $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathfrak{g}_4$. Поэтому мы подробно рассмотрим только случай нейтральной сигнатуры.

Пример 2. В [10] были построены примеры, в которых выполняется строгие неравенства $I^{\text{split}} < I^{\text{aut}} < I$. Здесь $I^{\text{split}}(N)$ обозначает подгруппу $I(N)$, сохраняющую разложение (1). Рассматривалась метрика g на группе $H_3 \times \mathbb{R}$ с частично вырожденным центром. Эта метрика эквивалентна метрике g_{02} из нашей классификации.

Было доказано, что однопараметрическая группа изометричных автоморфизмов состоит из орициклических трансляций; таким образом, $\dim O = 1$. С другой стороны, алгебра киллинговых векторных полей шестимерна, следовательно, $\dim \tilde{O} = 2$.

На самом деле Л. А. Кордеро и Ф. Паркер рассмотрели оба случая: лоренцевой и нейтральной сигнатуры. Ниже мы подтвердили их результат.

Четырёхмерные пространства с нейтральной сигнатурой обладают инвариантной изотропной плоскостью, т. е. параллельное распределение $\mathcal{D}$ имеет максимальную размерность. В этом случае метрики Уолкера выглядит проще. Напомним, что существуют локальные координаты (x, y, z, w) , такие что метрика Уолкера в базисе

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial w} \right\}$$

имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & c & b \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где a , b и c — гладкие функции. Более того, можно доказать, что если метрика Уолкера обладает параллельным векторным полем, то можно выбрать такие локальные координаты, что функции a , b и c не зависят от переменной x .

Лемма 3.5. *Четырёхмерная метрика Уолкера нейтральной сигнатуры локально обладает нильпотентной группой изометрий, если и только если найдутся координаты (x, y, z, w) , такие что a является квадратичным полиномом вида*

$$a(y, z, w) = A_1(y + A_2 z)^2 + A_3 w^2,$$

b — константа, зависящая только от исходной метрики, и $c = c(y) = y$.

Доказательство. Прямым вычислением можно показать, что любая метрика Уолкера g на нильпотентной четырёхмерной группе Ли зависит от полиномиальных функций a , b , c , где a — полином второй степени, c линейна, а b — константа. Если дополнительно потребуем, чтобы $c = c(y) = y$, то замена координатного базиса

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{\partial z}{\partial \tilde{z}} x + \frac{\partial z}{\partial \tilde{w}} y + S^1(z, w), & \tilde{z} &= \alpha(z, w), \\ \tilde{y} &= \frac{\partial w}{\partial \tilde{z}} x + \frac{\partial w}{\partial \tilde{w}} y + S^2(z, w), & \tilde{w} &= \beta(z, w) \end{aligned} \quad (18)$$

(подробности см. в [6]) даёт нам в точности такой вид a и b , который выписан в табл. 1.

Теперь заметим, что каждая метрика Уолкера g данного вида может быть записана как

$$g = \sum_k \mu_k g_k \quad \text{с} \quad \sum_k \mu_k = 1,$$

где g_k — это метрики из табл. 1 с неотрицательными коэффициентами при y^2 в полиноме a . Таким образом, без ограничения общности всюду ниже мы можем считать, что $A_1 \geq 0$ и $A_1 A_3 = 0$, $A_1^2 + A_3^2 \neq 0$. Действительно, если $A_1 = A_3 = 0$, соответствующая метрика также является метрикой Уолкера и после замены координат можно увидеть, что это в точности метрика g^ε , $\varepsilon = -1$, на группе $H_3 \times \mathbb{R}$. Поскольку она уже обсуждалась, исключим её из дальнейшего анализа.

Рассмотрим векторы Киллинга $X = \{f^1, f^2, f^3, f^4\}$. Решая систему уравнений Киллинга, получаем, что киллинговы векторные поля имеют вид

$$\begin{aligned} f^1 &= -\left(x + \frac{1}{2}yw\right)h_z^3 - (y + bw)h_z^4 + \frac{b}{4}w^2h^3 - w(h^2 + h_z^2) + h^1, \\ f^2 &= -\frac{1}{2}(y + bw)h^3 + h^2, \quad f^3 = h^3 + C_3, \quad f^4 = \frac{1}{2}h^3w + h^4, \end{aligned}$$

Таблица 1. Вид Уолкера метрик

Группа	Метрика	Вид Уолкера
G_4	$g_{1,\lambda}^\varepsilon, \lambda \neq 1$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{\varepsilon_2}{\lambda \pm 1} y^2 & y \\ 0 & 1 & y & \varepsilon_2 \lambda \end{pmatrix}$
	$g_{2,\lambda}^\varepsilon$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{\varepsilon_2}{\lambda} (y+z)^2 & y \\ 0 & 1 & y & \varepsilon_2 \lambda \end{pmatrix}$
	g_2^0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \varepsilon w^2 & y \\ 0 & 1 & y & 2 \end{pmatrix}$
$H_3 \times \mathbb{R}$	g_{02}^ε	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \varepsilon_1 y^2 & y \\ 0 & 1 & y & \varepsilon_1 \end{pmatrix}$

где $h^k = h^k(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $k = \{1, 2, 3, 4\}$, $C_3 \in \mathbb{R}$, и удовлетворяют

$$a_y f^2 + a_z f^3 + a_w f^4 + 2(f_z^1 + a f_z^3 + y f_z^4) = 0. \quad (19)$$

Теперь, используя явный вид полинома a , получаем, что h^3 обращается в ноль, и мы можем выделить два случая.

Случай 1. $A_1 = 0$, $A_3 \neq 0$. Векторные поля Киллинга имеют вид

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & \xi^4 &= -A_3 z w \frac{\partial}{\partial x} + A_3 (z-1) \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^2 &= -w \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, & \xi^5 &= -e^{-z} \frac{\partial}{\partial y}, \\ \xi^3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & \xi^6 &= -e^z (A_3 w + y) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{A_3 - b}{2} e^z \frac{\partial}{\partial y} + e^z \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

Алгебра киллинговых векторных полей шестимерна, натянута на векторы $\{\xi^1, \dots, \xi^6\}$ и содержит трёхступенчатую нильпотентную подалгебру, порождённую $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4\}$. Этот случай представлен метрикой g_2^0 .

СЛУЧАЙ 2. $A_1 > 0$, $A_3 = 0$. Система уравнений Киллинга сводится к

$$A_1 A_2 z (h^2 + A_2 C_1) + h_z^1 = 0, \quad A_1 (h^2 + A_2 C_1) + h_z^4 - h_{zz}^4 = 0, \quad h_z^2 + h_{zz}^2 + b h_{zz}^4 = 0.$$

Для удобства положим $\mu = 1 - A_1 b$.

а) $\mu \neq 0$. Длинное, но прямое вычисление показывает, что соответствующие киллинговы векторные поля образуют нильпотентную алгебру тогда и только тогда, когда $A_2 = 0$. Эта алгебра содержит четырёхмерную трёхступенчатую нильпотентную подалгебру. Примером здесь является метрика $g_{1,\lambda}^\varepsilon$ с $\mu > 0$, если $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -1$, и $\mu < 0$, если $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$, $0 < \lambda < 1$.

б) $\mu = 0$. В этом последнем случае мы также получаем шесть киллинговых векторных полей

$$\begin{aligned} \xi^1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ \xi^2 &= \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^3 &= A_2 w \frac{\partial}{\partial x} - A_2 \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}, \\ \xi^4 &= \left(-y + \frac{A_2}{2} z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^5 &= \frac{1}{3} z (-6y + A_2 z (2z - 3)) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{2}{A_1} (z - 1) \frac{\partial}{\partial y} + z^2 \frac{\partial}{\partial w}, \\ \xi^6 &= \left(-\frac{6}{A_1} w - 3yz^2 + \frac{A_2}{4} z^3 (3z - 8) \right) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{3}{A_1} z (z - 2) \frac{\partial}{\partial y} + z^3 \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

Алгебра, натянута на $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4\}$, является двухступенчатой нильпотентной, если $A_2 = 0$, и трёхступенчатой нильпотентной в противном случае. Заметим, что эти две возможности соответствуют метрикам g_{02}^ε и $g_{2,\lambda}^\varepsilon$ соответственно. $\square$

Следствие 3.2. Если центр нильпотентной четырёхмерной группы Ли N вырожденный, то $\dim \tilde{O}(N) = 2$.

Теорема 3.1. Если центр нильпотентной четырёхмерной группы Ли N вырожденный, соответствующая алгебра изометрий шестимерна и изоморфна $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathfrak{n}$.

Доказательство. В доказательстве леммы 3.5 было показано, что алгебра киллинговых векторных полей шестимерна и что левые сдвиги порождаются первыми четырьмя векторами. Для двух последних векторов выполнено

$$[\xi^5, \xi^6] = C \xi^1, \quad C = \text{const},$$

для всех соответствующих метрик. Поскольку векторы ξ^5 и ξ^6 не порождают подалгебры (для $C \neq 0$), нужно сделать замену базисных векторов. С помощью

несложного вычисления можно показать, что в новом базисе выполнено

$$[\bar{\xi}^5, \bar{\xi}^6] = 0,$$

а значит, алгебры изометрий изоморфны $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathfrak{n}$.

На группе $H_3 \times \mathbb{R}$ есть только одна метрика Уолкера, и её алгебра изометрий нильпотентна. С другой стороны, на группе G_4 метрики $g_{1,\lambda}^\varepsilon$ и g_2^0 имеют разрешимые алгебры изометрий, в то время как алгебра изометрий $g_{2,\lambda}^\varepsilon$ нильпотентна. $\square$

Замечание 3.4. Заметим, что следствие 2.1 выполняется также в случае вырожденного центра, в том числе для плоских метрик.

Следствие 3.3. Если центр нильпотентной четырёхмерной группы Ли N вырожденный и соответствующая метрика не является плоской, то $I^{\text{aut}} < I$.

Доказательство. Используя предыдущую теорему, заключаем, что $\dim I = 6$. Если $S \in \mathcal{S}(\mathfrak{n})$ и $F \in \text{Aut}(\mathfrak{n})$, то, решая уравнение $F^T S F = F$, получаем, что $\dim O = 1$ в случае скалярных произведений $S_{2,\lambda}^\varepsilon$ на алгебре $\mathfrak{g}_4$ и S_{02}^ε на алгебре $\mathfrak{h}_3 \oplus \mathbb{R}$. Очевидно, что $\dim I^{\text{aut}} = 5$. Для оставшихся двух скалярных произведений на алгебре $\mathfrak{g}_4$ получаем, что O дискретно, откуда следует, что $\dim I^{\text{aut}} = 4$. $\square$

Литература

- [1] Балащенко В. В., Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Однородные пространства: теория и приложения. — Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008.
- [2] Петров А. З. Классификация пространств, определяющих поля тяготения // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. — 1954. — Т. 114, № 8. — С. 55—69.
- [3] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемость по Лиувиллю гамильтоновых систем на алгебрах Ли // УМН. — 1984. — Т. 39, № 2. — С. 3—56.
- [4] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Геометрические и алгебраические механизмы интегрируемости гамильтоновых систем на однородных пространствах и алгебрах Ли // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления. — 1987. — Т. 16. — С. 227—299.
- [5] Del Barco V., Ovando G. P. Isometric actions on pseudo-Riemannian nilmanifolds // Ann. Global Anal. Geom. — 2014. — Vol. 45, no. 2. — P. 95—110.
- [6] Bejancu A., Farran H. R. Foliations and Geometric Structures. — Berlin: Springer, 2006. — (Vol. 580).
- [7] Blau M., O’Loughlin M. Homogeneous plane waves // Nuclear Phys. B. — 2003. — Vol. 654. — P. 135—176.
- [8] Bokan N., Šukilović T., Vukmirović S. Lorentz geometry of 4-dimensional nilpotent Lie groups // Geom. Dedicata. — 2015. — Vol. 177. — P. 83—102.
- [9] Cordero L. A., Parker P. E. Left-invariant Lorentz metrics on 3-dimensional Lie groups Rend. Mat. Appl. — 1997. — Vol. 7. — P. 129—155.
- [10] Cordero L. A., Parker P. E. Isometry groups of pseudoriemannian 2-step nilpotent Lie groups // Houston J. Math. — 2009. — Vol. 35, no. 1. — P. 49—72.

- [11] Eberlein P. Geometry of 2-step nilpotent groups with a left invariant metric // *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4). — 1994. — Vol. 27, no. 5. — P. 611–660.
- [12] Guediri M. Sur la complétude des pseudo-métriques invariantes à gauche sur les groupes de Lie nilpotents // *Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino.* — 1994. — Vol. 52. — P. 371–376.
- [13] Homolya Sz., Kowalski O. Simply connected two-step homogeneous nilmanifolds of dimension 5 // *Note Mat.* — 2006. — Vol. 26, no. 1. — P. 69–77.
- [14] Kaplan A. Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules // *Geom. Dedicata.* — 1981. — Vol. 11, no. 2. — P. 127–136.
- [15] Keane A. J., Tupper B. O. Killing tensors in pp-wave spacetimes // *Classical Quantum Gravity.* — 2010. — Vol. 27, no. 24. — 245011.
- [16] Lauret J. Homogeneous nilmanifolds of dimension 3 and 4 // *Geom. Dedicata.* — 1997. — Vol. 68. — P. 145–155.
- [17] Milnor J. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // *Adv. Math.* — 1976. — Vol. 21, no. 3. — P. 293–329.
- [18] Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H. Invariants of real low dimension Lie algebras // *J. Geom. Phys.* — 1976. — Vol. 17, no. 6. — P. 986–994.
- [19] Penrose R. Any space-time has a plane wave as a limit // *Differential Geometry and Relativity.* — Springer Netherlands, 1976. — (Math. Phys. Appl. Math.; Vol. 3). — P. 271–275.
- [20] Warner F. W. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups.* — Glenview: Scott Foresman, 1971.

