Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к многомерной сфере и приложения*

М. В. ШАМОЛИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: shamolin@imec.msu.ru

УДК 517+531.01

Ключевые слова: интегрируемая система, система с переменной диссипацией, трансцендентный первый интеграл.

Аннотация

Работа представляет собой обзор по полученным ранее, а также новым случаям интегрируемости в динамике двумерного, трёхмерного и четырёхмерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним. Задача поиска полного набора трансцендентных первых интегралов систем с диссипацией также является достаточно актуальной, и ей было ранее посвящено множество работ. Введён в рассмотрение новый класс динамических систем, имеющих периодическую координату. Наличие в таких системах нетривиальных групп симметрий позволило показать, что рассматриваемые системы обладают переменной диссипацией с нулевым средним, означающей, что в среднем за период по имеющейся периодической координате диссипация в системе равна нулю, хотя в разных областях фазового пространства в системе может присутствовать как подкачка энергии, так и её рассеяние. На базе полученного материала проанализированы динамические системы, возникающие в динамике твёрдого тела. В результате обнаружен ряд случаев полной интегрируемости уравнений движения в трансцендентных функциях, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций. Получены некоторые обобщения на условия интегрируемости более общих классов неконсервативных динамических систем (динамика четырёхмерного твёрдого тела). В качестве приложений изучаются динамические уравнения движения, возникающие в плоской и пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, а также возможное обобщение полученных методов исследования на общие системы, возникающие как в качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, так и в теории колебаний.

Abstract

M. V. Shamolin, Integrable variable dissipation systems on the tangent bundle of a multi-dimensional sphere and some applications, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 4, pp. 3—231.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 12-01-00020-а).

© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

This paper is a survey of integrable cases in dynamics of a multi-dimensional rigid body under the action of a nonconservative force field. We review both new results and results obtained earlier. Problems examined are described by dynamical systems with so-called variable dissipation with zero mean. The problem of the search for complete sets of transcendental first integrals of systems with dissipation is quite topical; a large number of works are devoted to it. We introduce a new class of dynamical systems that have a periodic coordinate. Due to the existence of nontrivial symmetry groups of such systems, we can prove that these systems possess variable dissipation with zero mean, which means that on the average for a period with respect to the periodic coordinate, the dissipation in the system is equal to zero, although in various domains of the phase space, either the energy pumping or dissipation can occur. Based on the facts obtained, we analyze dynamical systems that appear in dynamics of a multi-dimensional rigid body and obtain a series of new cases of complete integrability of the equations of motion in transcendental functions, which can be expressed through a finite combination of elementary functions. As applications, we study dynamical equations of motion arising in the study of the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium and also a possible generalization of the obtained methods for the study of general systems arising in the qualitative theory of ordinary differential equations, in the theory of dynamical systems, and also in oscillation theory.

Содержание

Светлой памяти профессора Олега Васильевича Мантурова

Но лучше всякого обмана —
В беседе с умным человеком
Сказать ему простую правду.
Лопе де Вега

Введение

Работа представляет собой обзор по полученным ранее, а также новым случаям интегрируемости в динамике многомерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Исследуемые задачи описываются динамическими системами с так называемой переменной диссипацией с нулевым средним.

При этом изучаются неконсервативные системы, для которых методика исследования, например, гамильтоновых систем, вообще говоря, неприменима.

Таким образом, для таких систем необходимо в некотором смысле «в лоб» интегрировать основное уравнение динамики. При этом предлагается более универсальное изложение известных, а также полученных новых случаев полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике n-мерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил.

Конечно, в общем случае построить какую-либо теорию интегрирования неконсервативных систем (хотя бы и невысокой размерности) довольно затруднительно. Но в ряде случаев, когда исследуемые системы обладают дополнительными симметриями, удаётся найти первые интегралы через конечные комбинации элементарных функций (см., например, [168, 180]).

Получен ряд случаев полной интегрируемости неконсервативных динамических систем, обладающих нетривиальными симметриями. При этом почти во всех случаях интегрируемости каждый из первых интегралов выражается через конечную комбинацию элементарных функций, являясь одновременно трансцендентной функцией своих переменных. Трансцендентность в данном случае понимается в смысле комплексного анализа, когда после продолжения данных функций в комплексную область у них имеются существенно особые точки. Последний факт обусловливается наличием в системе притягивающих и отталкивающих предельных множеств (как, например, притягивающих и отталкивающих фокусов).

Обнаружены новые интегрируемые случаи движения n-мерного твёрдого тела, в том числе в классической задаче о движении многомерного маятника в неконсервативном поле сил.

Работы [83, 109, 168, 184, 191] посвящены общим вопросам интегрируемости так называемых динамических систем с переменной диссипацией. Для начала давалась наглядная характеристика таких систем. При этом говорилось о системах с переменной диссипацией, где термин «переменный» относится не столько к величине коэффициента диссипации, сколько к возможной смене его знака (поэтому разумнее было бы употреблять термин «знакопеременный»).

В дальнейшем давалось одно из возможных определений системы с переменной диссипацией с нулевым (ненулевым) средним через такую характеристику векторного поля системы, как дивергенция, которая, как известно, связана с изменением фазового объёма в фазовом пространстве рассматриваемой системы (см. [94—96, 98—100, 168, 180]).

В [168, 180] был введён класс автономных динамических систем, имеющих одну периодическую координату и при этом обладающих определёнными симметриями, характерными для систем маятникового типа. Было показано, что данный класс систем погружается естественным образом в класс динамических систем с переменной диссипацией с нулевым средним, т. е. в среднем за период по имеющейся периодической координате подкачка и рассеяние энергии в системе в некотором смысле уравновешивают друг друга. Приводились примеры систем маятникового типа на маломерных многообразиях из динамики твёрдого тела в неконсервативном поле сил (см. [19, 81, 216]).

В дальнейшем изучались некоторые общие условия интегрируемости в элементарных функциях для систем на двумерной плоскости и касательных расслоениях одномерной сферы (двумерный цилиндр) и двумерной сферы (четырёхмерное многообразие). При этом приводился интересный пример трёхмерного фазового портрета системы маятникового типа, которая описывает движение сферического маятника, помещённого в поток набегающей среды (см. [168]).

В [184] приводились достаточные условия существования первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, для многопараметрических систем третьего порядка.

В приводимых ранее случаях полной интегрируемости в динамике пространственного движения тела в неконсервативном поле мы имеем дело с тремя, на первый взгляд, независимыми свойствами:

1) выделенный класс систем с симметриями;
2) обладание этим классом систем переменной диссипацией с нулевым средним (по имеющейся периодической переменной), что позволяет их рассматривать как «почти» консервативные системы;
3) в некоторых (пусть и достаточно маломерных) случаях обладание ими полным набором, вообще говоря, трансцендентных (с точки зрения комплексного анализа) первых интегралов.

В [87, 89, 116] систематизируются полученные результаты по исследованию динамических уравнений движения симметричного двумерного твёрдого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твёрдых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по закону струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, которая или заставляет величину скорости некоторой характерной точки твёрдого тела оставаться постоянной во времени во всё время движения, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи, или заставляет центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно во всё время движения, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (см. также [216]).

В [87,223] в дополнение к имеющейся аналитической неинтегрируемой связи найден трансцендентный первый интеграл, выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, а в [116, 223] сделано то же самое, но только в дополнение к имеющемуся аналитическому первому интегралу (квадрату скорости центра масс). Полученные результаты подавались в инвариантном виде. При этом была введена дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

В [131, 138, 216, 223] систематизируются полученные результаты по исследованию динамических уравнений движения осесимметричного трёхмерного твёрдого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид также заимствован из динамики реальных твёрдых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по закону струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, которая или заставляет величину скорости некоторой характерной точки твёрдого тела оставаться постоянной во всё время движения, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи, или заставляет центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно во всё время движения, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (см. также [229, 249]).

В [131, 138, 223] в дополнение к имеющимся аналитическим инвариантным соотношениям (неинтегрируемой связи и интегралу о равенстве нулю одной из компонент угловой скорости) найдены три трансцендентных первых интеграла, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, а в [197, 214, 217, 223] сделано то же самое, но только в дополнение к имеющимся аналитическим первым интегралам (квадрату скорости центра масс и интегралу о равенстве нулю одной из компонент угловой скорости). Полученные результаты также подавались в инвариантном виде. При этом была введена дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от компонент угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

В [30,32,33,43,223] излагаются некоторые общие аспекты динамики свободного многомерного твёрдого тела: понятие тензора угловой скорости тела, совместные динамические уравнения движения на прямом произведении $\mathbf{R}^n \times \mathrm{so}(n)$, формулы Эйлера и Ривальса в многомерном случае.

Рассмотрен вопрос о тензоре инерции четырёхмерного твёрдого тела. В [189, 223] предлагалось изучать два логически возможных случая на главные моменты инерции (когда имеются *два* соотношения на главные моменты инерции):

(i) когда имеется *тройка* равных главных моментов инерции ($I_2 = I_3 = I_4$);
(ii) когда имеется *две пары* равных момента инерции ($I_1 = I_2$, $I_3 = I_4$).

В [206, 207, 209, 223] систематизируются полученные результаты по исследованию уравнений движения четырёхмерного твёрдого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил, для случая (i). Его вид также заимствован из динамики реальных твёрдых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по закону струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, которая или заставляет величину скорости некоторой характерной точки твёрдого тела оставаться постоянной во всё время движения, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи, или заставляет центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно во всё время движения, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (см. также [156, 176, 179, 182, 183, 186, 193, 199, 202, 213, 215, 226]).

В [191,202,223] в дополнение к четырём имеющимся аналитическим инвариантным соотношениям (неинтегрируемой связи и трём интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости) найдены четыре трансцендентных первых интеграла, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, а в [223, 228] сделано то же самое, только в дополнение к четырём имеющимся аналитическим первым интегралам (квадрату скорости центра масс и трём интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости).

Результаты относились к случаю, когда всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму трёхмерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, перпендикулярном данному диску. Данные результаты систематизировались и подавались в инвариантном виде. При этом вводилась дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

В разделе 1 вначале излагаются общие аспекты динамики свободного многомерного твёрдого тела: понятие тензора угловой скорости тела, совместные динамические уравнения движения на прямом произведении $\mathbf{R}^n \times \mathrm{so}(n)$, формулы Эйлера и Ривальса в многомерном случае. Также рассматривается вопрос о тензоре инерции n-мерного (в частности, пятимерного) твёрдого тела. Мы изучаем основной логически возможный случай для главных моментов инерции (когда имеются $n-2$ соотношения на главные моменты инерции):

имеются $n-1$ равных главных моментов инерции ($I_2 = \ldots = I_n$).

Мы систематизируем полученные результаты по исследованию уравнений движения n-мерного твёрдого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид также заимствован из динамики реальных твёрдых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по закону струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, которая или заставляет величину скорости некоторой характерной точки твёрдого тела оставаться постоянной во всё время движения, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи (раздел 1), или заставляет центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно во всё время движения, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (раздел 2) (см. также [224, 230, 231]).

В разделе 1 в дополнение к $1 + (n-1)(n-2)/2$ имеющимся аналитическим инвариантным соотношениям (неинтегрируемой связи и $(n-1)(n-2)/2$ интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости) найдены n трансцендентных первых интегралов, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций, а в разделе 2 сделано то же самое, но в дополнение к $1 + (n-1)(n-2)/2$ имеющимся аналитическим первым интегралам (квадрату скорости центра масс и $(n-1)(n-2)/2$ интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости).

Результаты относятся к случаю, когда всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, перпендикулярном данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости.

В третьем разделе систематизируются результаты исследования уравнений движения четырёхмерного твёрдого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил, для случая (ii). Его вид также заимствован из динамики реальных твёрдых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по закону струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая оставаться постоянными во всё время движения как величину скорости некоторой характерной точки твёрдого тела, так и некоторую другую фазовую переменную. Последний факт означает наличие в системе неинтегрируемых сервосвязей (см. [43, 80, 159, 164]).

Более того, в дополнение к четырём имеющимся аналитическим инвариантным соотношениям (двум неинтегрируемым связям и двум интегралам о равенстве нулю компонент тензора угловой скорости) найдены два аналитических и три трансцендентных первых интеграла, выражающихся через конечную комбинацию элементарных функций.

Результаты относятся к случаю, когда всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости, перпендикулярной данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом также вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

В четвёртом разделе проводится качественный анализ плоскопараллельной и пространственной задач о движении реальных твёрдых тел в сопротивляющейся среде. Построена нелинейная модель воздействия среды на твёрдое тело, учитывающая зависимость плеча силы от приведённой угловой скорости тела, при этом сам момент данной силы является также функцией угла атаки. Как показала обработка эксперимента о движении в воде однородных круговых цилиндров, данные обстоятельства необходимо учитывать при моделировании [92]. При изучении плоской и пространственной модели взаимодействия твёрдого тела со средой (как при наличии, так и при отсутствии дополнительной следящей силы) найдены достаточные условия устойчивости одного из ключевых режимов движения — прямолинейного поступательного движения. Показано, что при некоторых условиях возможно также присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательного режима.

Аналогичные условия получены и для ключевого режима движения многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил, при этом отмечаются механическая и топологическая аналогия между движением маломерных тел в сопротивляющейся среде, а также многомерных тел в соответствующем неконсервативном поле.

Раздел 5 представляет собой очередной этап исследования задачи плоскопараллельного движения твёрдого тела, взаимодействующего со средой лишь через передний плоский участок своей внешней поверхности. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности (например, о входе однородных круговых цилиндров в воду). Движение среды не изучается; рассматривается задача динамики твёрдого тела, в которой характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра. Если в четвёртом разделе предъявляются условия асимптотической устойчивости прямолинейного поступательного торможения, в [185, 205] получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов в пространстве квазискоростей, то в разделе 5 подготовлен количественный материал для проведения дальнейших натурных экспериментов о движении в среде полых круговых цилиндров.

Итак, в предыдущих работах автора, а также в разделах 1—3 описаны случаи интегрируемости в маломерной и многомерной динамике твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил. Чтобы их систематизировать, занесём их все в следующую таблицу.

Таблица 1. Классификация случаев интегрируемости от динамики симметричного двумерного твёрдого тела в $\mathbf{E}^2$ до динамики динамически симметричного n-мерного твёрдого тела в $\mathbf{E}^n$

Размерность твёрдого тела	Условия связей	
	$v \equiv \mathrm{const}$ $(\beta_2 \equiv \mathrm{const})$	$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const}$
$\mathbf{E}^2$	$h = 0 \oplus$	$h = 0 \oplus$
	$h \neq 0 \oplus$	$h \neq 0 \oplus$
$\mathbf{E}^3$ $(I_2 = I_3)$	$h = 0 \oplus$	$h = 0 \oplus$
	$h \neq 0 \oplus$	$h \neq 0 \oplus$
$\mathbf{E}^4$ $(I_2 = I_3 = I_4)$	$h = 0 \oplus$	$h = 0 \oplus$
	$h \neq 0 \oplus$	$h \neq 0 \oplus$
$\mathbf{E}^4$ $(I_1 = I_2,\ I_3 = I_4)$	$h = 0 \bigoplus$	$h = 0 \ominus$
	$h \neq 0 \bigoplus$	$h \neq 0 \ominus$
$\mathbf{E}^n$ $(I_2 = \ldots = I_n)$	$h = 0 \bigoplus$	$h = 0 \bigoplus$
	$h \neq 0 \bigoplus$	$h \neq 0 \bigoplus$

Через $h = 0$ и $h \neq 0$ обозначен факт присутствия или отсутствия в системе зависимости силового поля от компонент тензора угловой скорости тела. Знак $\oplus$ означает, что по данному случаю получены соответствующие результаты, но он рассматривается в другом обзоре. Знак $\bigoplus$ означает, что по данному случаю получены соответствующие результаты и он рассматривается в данном обзоре. Знак $\ominus$ означает, что по данному случаю получены соответствующие результаты, но он пока никуда не помещён.

Многие результаты данной работы регулярно докладывались на множестве семинаров, в том числе на семинаре механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» имени профессора В. В. Трофимова [34] под руководством Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина (см. [1, 2, 7, 10, 26—29, 31, 35—42, 44, 147, 166, 167, 171, 172, 188, 194]).

1. Случаи интегрируемости, соответствующие движению твёрдого тела в n-мерном пространстве. I

В данном разделе систематизируются результаты исследования уравнений движения динамически симметричного n-мерного твёрдого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твёрдых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по закону струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая во всё время движения величину скорости некоторой характерной точки твёрдого тела оставаться постоянной во времени, что означает наличие в системе неинтегрируемой сервосвязи (см. [25,30,43,87—90]).

1.1. Предварительные сведения

Ранее в [25, 89] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее в [126, 129, 131] плоская задача была обобщена на пространственный (трёхмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

Затем в [82, 140—142, 144, 148, 158] была исследована динамическая часть уравнений движения различных динамически симметричных четырёхмерных твёрдых тел, где силовое поле сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного (трёхмерного) диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости (одномерной прямой), перпендикулярной данному диску.

В данной работе результаты относятся к случаю, когда всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, перпендикулярном данному диску. Результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость как раз и распространена со случаев движения в пространствах меньшей размерности.

Материал раздела 1 публикуется также в [233].

1.2. Некоторые общие рассуждения

1.2.1. Случаи динамической симметрии многомерного тела

Пусть n-мерное твёрдое тело Θ массы m с гладкой $(n-1)$-мерной границей $\partial\Theta$ находится в некотором (вообще говоря, неконсервативном) поле сил (это можно интерпретировать как движение тела в сопротивляющейся среде, заполняющей n-мерную область евклидова пространства $\mathbf{E}^n$). Предположим, что оно является динамически симметричным. Так, например, для четырёхмерного тела имеются две логические возможности представления его тензора инерции в случае наличия *двух* независимых равенств главных моментов инерции: в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4$ оператор инерции имеет либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2\} \tag{1}$$

(так называемый случай (1—3)), либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\} \tag{2}$$

(случай (2—2)). В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии), а во втором случае двумерные плоскости Dx_1x_2 и Dx_3x_4 являются плоскостями динамической симметрии тела.

Для пятимерного тела было бы логично рассмотреть случаи *трёх* независимых равенств главных моментов инерции: в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1x_2x_3x_4x_5$ оператор инерции имеет либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_2, I_2, I_2, I_2\} \tag{3}$$

(случай (1—4)), либо вид

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3, I_3\} \tag{4}$$

(случай (2—3)). В первом случае в гиперплоскости $Dx_2x_3x_4x_5$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии), а во втором случае двумерная и трёхмерная плоскости Dx_1x_2 и $Dx_3x_4x_5$ являются плоскостями динамической симметрии тела.

Соответственно, для n-мерного тела было бы логично рассмотреть случаи $n-1$ независимых равенств главных моментов инерции. При этом возможны $[n/2]$ (здесь $[\ldots]$ — целая часть) вариантов вида (1), (2) (или (3), (4)). Так, например, для шестимерного тела возможны три случая: (1—5), (2—4), (3—3).

При рассмотрении n-мерного твёрдого тела нас будет прежде всего интересовать случай (1—$(n-1)$), т. е. случай, когда в некоторой связанной с телом системе координат $Dx_1\ldots x_n$ оператор инерции имеет вид

$$\operatorname{diag}\{I_1, I_2, \ldots, I_2\}, \tag{5}$$

а именно, в гиперплоскости $Dx_2\ldots x_n$ тело динамически симметрично (другими словами, Dx_1 — ось динамической симметрии).

1.2.2. Динамика на $\mathrm{so}(n)$ и $\mathbf{R}^n$

Конфигурационным пространством свободного n-мерного твёрдого тела является прямое произведение пространства $\mathbf{R}^n$ (определяющего координаты центра масс тела) на группу его вращений $\mathrm{SO}(n)$ (определяющую вращение тела вокруг центра масс)

$$\mathbf{R}^n \times \mathrm{SO}(n), \tag{6}$$

оно имеет размерность

$$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Размерность фазового пространства равна $n(n+1)$. В частности, если Ω — тензор угловой скорости n-мерного твёрдого тела (а он является тензором второго ранга [30, 32, 33]), $\Omega \in \mathrm{so}(n)$, то та часть динамических уравнений движения, которая отвечает алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, имеет вид [49, 50, 105, 107, 109]

$$\dot\Omega\Lambda + \Lambda\dot\Omega + [\Omega, \Omega\Lambda + \Lambda\Omega] = M, \tag{7}$$

где

$$\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}, \tag{8}$$

$$\lambda_1 = \frac{-I_1 + I_2 + \ldots + I_n}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{I_1 - I_2 + I_3 + \ldots + I_n}{2}, \ldots,$$
$$\lambda_{n-1} = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-2} - I_{n-1} + I_n}{2}, \quad \lambda_n = \frac{I_1 + \ldots + I_{n-1} - I_n}{2},$$

$M = M_F$ — момент внешних сил $\mathbf{F}$, действующих на тело в $\mathbf{R}^n$, спроектированный на естественные координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, $[\cdot,\cdot]$ — коммутатор в $\mathrm{so}(n)$. Так, например, кососимметрическую матрицу (соответствующую данному тензору второго ранга) $\Omega \in \mathrm{so}(5)$ будем представлять в виде (см. [21])

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_{10} & \omega_9 & -\omega_7 & \omega_4 \\ \omega_{10} & 0 & -\omega_8 & \omega_6 & -\omega_3 \\ -\omega_9 & \omega_8 & 0 & -\omega_5 & \omega_2 \\ \omega_7 & -\omega_6 & \omega_5 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_4 & \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{10}$ — компоненты тензора угловой скорости в проекциях на координаты в алгебре Ли $\mathrm{so}(5)$. При этом, очевидно, выполнены равенства

$$\lambda_i - \lambda_j = I_j - I_i \tag{10}$$

для любых $i, j = 1, \ldots, n$.

При вычислении момента внешней силы, действующей на тело, необходимо построить отображение

$$\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathrm{so}(n), \tag{11}$$

переводящее пару векторов

$$(\mathbf{DN}, \mathbf{F}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \tag{12}$$

из $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ в некоторый элемент из алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$, где

$$\mathbf{DN} = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}, \quad \mathbf{F} = \{F_1, F_2, \ldots, F_n\}, \tag{13}$$

$\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (здесь $\mathbf{DN}$ — вектор, идущий из начала D координат системы $Dx_1 \ldots x_n$ в точку N приложения силы). При этом строится соответствующая вспомогательная матрица

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \ldots & \delta_n \\ F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Всевозможные миноры второго порядка (а их в точности $n(n-1)/2$ штук) со знаком данной матрицы — это координаты момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$, а сам момент отождествляется с некоторым элементом алгебры Ли $\mathrm{so}(n)$.

Поскольку введена упорядоченность координат $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ на алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$, то введём такую же упорядоченность и для вычисления момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$. Действительно, первая группа G_1 координат искомого момента состоит из $n-1$ знакочередующихся миноров:

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-1} & \delta_n \\ F_{n-1} & F_n \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_n \\ F_{n-2} & F_n \end{vmatrix},\ +\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_n \\ F_{n-3} & F_n \end{vmatrix}, \ldots,\ (-1)^n \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_n \\ F_1 & F_n \end{vmatrix}.$$

Вторая группа G_2 координат состоит из $n-2$ знакочередующихся миноров:

$$+\begin{vmatrix} \delta_{n-2} & \delta_{n-1} \\ F_{n-2} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix} \delta_{n-3} & \delta_{n-1} \\ F_{n-3} & F_{n-1} \end{vmatrix},\ +\begin{vmatrix} \delta_{n-4} & \delta_{n-1} \\ F_{n-4} & F_{n-1} \end{vmatrix}, \ldots,\ (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_{n-1} \\ F_1 & F_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Заключительная группа G_{n-1} координат состоит из одного минора

$$+\begin{vmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}.$$

Как видно, первые миноры в любой группе начинаются со знака «+». Полученное упорядоченное множество из $n(n-1)/2$ величин будем называть координатами момента $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ силы $\mathbf{F}$.

Исследуемые в дальнейшем динамические системы, вообще говоря, неконсервативны и являются динамическими системами с переменной диссипацией с нулевым средним [168, 169, 180, 195, 204, 211, 223]. Нам потребуется практически «в лоб» исследовать часть основного уравнения динамики, а именно в данном случае уравнение Ньютона. Здесь оно предстаёт перед нами как уравнение движения центра масс — *та часть динамических уравнений движения, которая отвечает пространству* $\mathbf{R}^n$:

$$m\mathbf{w}_C = \mathbf{F}, \tag{15}$$

где $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра масс C тела, m — его масса, при этом по многомерной формуле Ривальса (которую в данном случае несложно вывести операторным методом) справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{w}_C = \mathbf{w}_D + \Omega^2\mathbf{DC} + E\mathbf{DC}, \quad \mathbf{w}_D = \dot{\mathbf{v}}_D + \Omega\mathbf{v}_D, \quad E = \dot{\Omega}, \tag{16}$$

здесь $\mathbf{w}_D$ — ускорение точки D, $\mathbf{F}$ — внешняя сила, действующая на тело (в нашем случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$), E — тензор углового ускорения (тензор второго ранга).

Если положение тела Θ в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$ определяется функциями, которые являются циклическими (в том смысле, что обобщённая сила $\mathbf{F}$ и её момент $(\mathbf{DN}, \mathbf{F})$ зависят лишь от обобщённых скоростей (квазискоростей) и не зависят от положения тела в пространстве), то система уравнений (7), (15) на многообразии $\mathbf{R}^n \times \mathrm{so}(n)$ определяет *замкнутую* систему динамических уравнений движения свободного n-мерного твёрдого тела под действием внешней силы $\mathbf{F}$. Данная система отделяется от кинематической части уравнений движения на многообразии (6) и может быть исследована самостоятельно.

1.3. Более общая задача о движении со следящей силой

1.3.1. Динамическая часть уравнений движения

Рассмотрим движение однородного динамически симметричного (случай (5)) твёрдого тела с «передним торцом» ($(n-1)$-мерным диском, «взаимодействующим со средой, заполняющей n-мерное пространство») в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности [48, 54, 55, 63, 73, 75, 93, 103].

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщённые) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твёрдого тела (D — центр $(n-1)$-мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), Ω — тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, Dx_3, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, I_1, I_2, $I_3 = I_2, \ldots, I_n = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_n$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, \ldots, 0\},$$

$$\mathbf{v}_D = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha\cos\beta_1 \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ v\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} = v\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{17}$$

где

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} - \tag{18}$$

единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$. При этом в случае (5) имеем также разложение для функции воздействия среды на n-мерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, \ldots, 0\}, \tag{19}$$

т. е. в данном случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$. Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [113, 114], см. далее), которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbf{R}^n$, при этом касательные силы воздействия среды на $(n-1)$-мерный диск отсутствуют. Так, например, в случае $n = 5$ данная система примет вид

$$\begin{aligned} &\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha - \omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_9 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \\ &\quad - \omega_7 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ &\quad + \sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = -\frac{S}{m}, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ &\quad + \omega_{10}v\cos\alpha - \omega_8 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_6 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\ &\quad - \omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_9\omega_8 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) - \sigma\dot{\omega}_{10} = 0, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\ &\quad - \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \omega_8 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\ &\quad - \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \\ &\quad - \sigma(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) + \sigma\dot{\omega}_9 = 0, \end{aligned} \tag{22}$$

$$
\begin{gathered}
\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\\
+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3+\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3-\\
-\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\omega_7 v\cos\alpha-\omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1+\\
+\omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2-\omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\\
+\sigma(\omega_6\omega_{10}+\omega_5\omega_9-\omega_1\omega_4)-\sigma\dot\omega_7=0, \qquad (23)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\dot v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\\
+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3+\dot\beta_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3+\\
+\dot\beta_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_4 v\cos\alpha+\omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1-\\
-\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\\
-\sigma(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)+\sigma\dot\omega_4=0, \qquad (24)
\end{gathered}
$$

где

$$
S=s(\alpha)v^2,\quad \sigma=CD,\quad v>0. \qquad (25)
$$

Далее, вспомогательная матрица (14) для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$
\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN}\\ -S & 0 & \ldots & 0\end{pmatrix}, \qquad (26)
$$

тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$. Так, например, в случае $n=5$ данная система примет вид

$$
(\lambda_4+\lambda_5)\dot\omega_1+(\lambda_4-\lambda_5)(\omega_4\omega_7+\omega_3\omega_6+\omega_2\omega_5)=0, \qquad (27)
$$

$$
(\lambda_3+\lambda_5)\dot\omega_2+(\lambda_5-\lambda_3)(\omega_1\omega_5-\omega_3\omega_8-\omega_4\omega_9)=0, \qquad (28)
$$

$$
(\lambda_2+\lambda_5)\dot\omega_3+(\lambda_2-\lambda_5)(\omega_4\omega_{10}-\omega_2\omega_8-\omega_1\omega_6)=0, \qquad (29)
$$

$$
\begin{gathered}
(\lambda_1+\lambda_5)\dot\omega_4+(\lambda_5-\lambda_1)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)=\\
=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \qquad (30)
\end{gathered}
$$

$$
(\lambda_3+\lambda_4)\dot\omega_5+(\lambda_3-\lambda_4)(\omega_7\omega_9+\omega_6\omega_8+\omega_1\omega_2)=0, \qquad (31)
$$

$$
(\lambda_2+\lambda_4)\dot\omega_6+(\lambda_4-\lambda_2)(\omega_5\omega_8-\omega_7\omega_{10}-\omega_1\omega_3)=0, \qquad (32)
$$

$$
\begin{gathered}
(\lambda_1+\lambda_4)\dot\omega_7+(\lambda_1-\lambda_4)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=\\
=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \qquad (33)
\end{gathered}
$$

$$
(\lambda_2+\lambda_3)\dot\omega_8+(\lambda_2-\lambda_3)(\omega_9\omega_{10}+\omega_5\omega_6+\omega_2\omega_3)=0, \qquad (34)
$$

$$
\begin{gathered}
(\lambda_1+\lambda_3)\dot\omega_9+(\lambda_3-\lambda_1)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=\\
=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \qquad (35)
\end{gathered}
$$

$$(\lambda_1+\lambda_2)\dot\omega_{10}+(\lambda_1-\lambda_2)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=$$
$$=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2. \tag{36}$$

Таким образом, фазовым пространством системы (20)—(24), (27)—(36) 15-го порядка является прямое произведение 5-мерного многообразия на алгебру Ли so(5):

$$\mathbf{R}^1\times\mathbf{S}^4\times\mathrm{so}(5), \tag{37}$$

а в общем случае это пространство

$$\mathbf{R}^1\times\mathbf{S}^{n-1}\times\mathrm{so}(n). \tag{38}$$

1.3.2. Следствия динамической симметрии

Сразу же заметим, что система (7), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2=\ldots=I_n \tag{39}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1}\equiv\omega_{k_1}^0=\mathrm{const},\ldots,\ \omega_{k_s}\equiv\omega_{k_s}^0=\mathrm{const},\quad s=\frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{40}$$

При этом $k_1=1,\ldots,k_s$ — некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W_1=\{1,2,\ldots,n(n-1)/2\}$. Рассмотрим набор (40) первых интегралов на своих нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0=\ldots=\omega_{k_s}^0=0. \tag{41}$$

В частности, система (20)—(24), (27)—(36) обладает первыми интегралами

$$\omega_1\equiv\omega_1^0,\quad\omega_2\equiv\omega_2^0,\quad\omega_3\equiv\omega_3^0,\quad\omega_5\equiv\omega_5^0,\quad\omega_6\equiv\omega_6^0,\quad\omega_8\equiv\omega_8^0, \tag{42}$$

рассматриваемых на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0=\omega_2^0=\omega_3^0=\omega_5^0=\omega_6^0=\omega_8^0=0. \tag{43}$$

Ненулевых же компонент $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_p}$ тензора Ω осталось

$$p=\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=n-1$$

штук (здесь $r_1,\ldots,r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W_1, не равные $k_1,\ldots,k_s$).

1.3.3. Неинтегрируемая связь и выбор следящей силы

Если же рассматривается *более общая задача* о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD=Dx_1$ и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенства

$$v\equiv\mathrm{const} \tag{44}$$

(см. также [128, 138, 153]), то в системе (7), (15) (или, в частности, при $n = 5$ в системе (20)—(24), (27)—(36)) вместо F_1 будет стоять величина

$$T - s(\alpha)v^2, \quad \sigma = DC. \tag{45}$$

В результате соответствующего выбора величины T следящей силы можно формально добиться выполнения равенства (44) во всё время движения. Действительно, формально выражая величину T с учётом системы (7), (15), получаем при $\cos\alpha \neq 0$, $n > 2$, что

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = m\sigma(\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_p}^2) + \\ + s(\alpha)v^2 \left[1 - \frac{m\sigma}{(n-2)I_2} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{46}$$

где

$$\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = |\mathbf{r}_N| = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\right) = \\ = 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN} \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}). \tag{47}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \ldots, n$ ($i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0$), — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ (заданной равенством (44)), а именно:

$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ i_{2N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{3N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ \ldots \\ i_{n-1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \\ i_{nN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\beta_1 \\ \sin\beta_1 \cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3} \cos\beta_{n-2} \\ \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} = \mathbf{i}_v \left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right) \tag{48}$$

(см. (18)).

При получении равенства (46) используются условия (40)—(44).

1.3.4. Редукции в системе

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы за счёт наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующего нас класса движений (44). Во-вторых, эта процедура позволяет понизить порядок системы. Действительно, система (7), (15) в результате действий (выполнения равенств (44), (40), (41)) порождает независимую систему порядка

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = 2(n-1). \tag{49}$$

В частности, при $n = 5$ система (20)—(24), (27)—(36) в результате действий порождает независимую систему восьмого порядка следующего вида:

$$\dot\alpha v \cos\alpha \cos\beta_1 - \dot\beta_1 v \sin\alpha \sin\beta_1 + \omega_{10} v \cos\alpha - \sigma\dot\omega_{10} = 0, \tag{50}$$

$$\begin{gathered}\dot\alpha v \cos\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 + \dot\beta_1 v \sin\alpha \cos\beta_1 \cos\beta_2 - \\ - \dot\beta_2 v \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 - \omega_9 v \cos\alpha + \sigma\dot\omega_9 = 0,\end{gathered} \tag{51}$$

$$\begin{gathered}\dot\alpha v \cos\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\beta_3 + \dot\beta_1 v \sin\alpha \cos\beta_1 \sin\beta_2 \cos\beta_3 + \\ + \dot\beta_2 v \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 \cos\beta_3 - \dot\beta_3 v \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 + \\ + \omega_7 v \cos\alpha - \sigma\dot\omega_7 = 0,\end{gathered} \tag{52}$$

$$\begin{gathered}\dot\alpha v \cos\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 + \dot\beta_1 v \sin\alpha \cos\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3 + \\ + \dot\beta_2 v \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 \sin\beta_3 + \dot\beta_3 v \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\beta_3 - \\ - \omega_4 v \cos\alpha + \sigma\dot\omega_4 = 0,\end{gathered} \tag{53}$$

$$3I_2\dot\omega_4 = -x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \tag{54}$$

$$3I_2\dot\omega_7 = x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \tag{55}$$

$$3I_2\dot\omega_9 = -x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \tag{56}$$

$$3I_2\dot\omega_{10} = x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) v^2, \tag{57}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляется параметр v.

Система (50)—(57) эквивалентна системе

$$\begin{gathered}\dot\alpha v \cos\alpha + v\cos\alpha\{\omega_{10}\cos\beta_1 + [(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2]\sin\beta_1\} + \\ + \sigma\{-\dot\omega_{10}\cos\beta_1 + [\dot\omega_9\cos\beta_2 - (\dot\omega_7\cos\beta_3 - \dot\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2]\sin\beta_1\} = 0,\end{gathered} \tag{58}$$

$$\begin{gathered}\dot\beta_1 v \sin\alpha + v\cos\alpha\{[(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2]\cos\beta_1 - \omega_{10}\sin\beta_1\} + \\ + \sigma\{[\dot\omega_9\cos\beta_2 - (\dot\omega_7\cos\beta_3 - \dot\omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2]\cos\beta_1 + \dot\omega_{10}\sin\beta_1 t\} = 0,\end{gathered} \tag{59}$$

$$\begin{gathered}\dot\beta_2 v \sin\alpha \sin\beta_1 + v\cos\alpha\{[\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3]\cos\beta_2 + \omega_9\sin\beta_2\} + \\ + \sigma\{-[\dot\omega_7\cos\beta_3 - \dot\omega_4\sin\beta_3]\cos\beta_2 - \dot\omega_9\sin\beta_2\} = 0,\end{gathered} \tag{60}$$

$$\dot{\beta}_3 v \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 + v\cos\alpha \left\{-\omega_4 \cos\beta_3 - \omega_7 \sin\beta_3\right\} + \\ + \sigma\left\{\dot{\omega}_4 \cos\beta_3 + \dot{\omega}_7 \sin\beta_3\right\} = 0, \tag{61}$$

$$\dot{\omega}_4 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{5N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \tag{62}$$

$$\dot{\omega}_7 = \frac{v^2}{3I_2} x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \tag{63}$$

$$\dot{\omega}_9 = -\frac{v^2}{3I_2} x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha), \tag{64}$$

$$\dot{\omega}_{10} = \frac{v^2}{3I_2} x_{2N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha). \tag{65}$$

1.3.5. Новые квазискорости в системе

Введём новые квазискорости в системе (7), (15). Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции $n-2$ поворотов

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{66}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, отличается от единичной присутствием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{67}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix},$$

$$m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\beta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\beta.$$

В частности, при $n = 5$ вводятся новые квазискорости в системе (20)—(24), (27)—(36). Для этого величины ω_4, ω_7, ω_9, ω_{10} преобразуются посредством композиции следующих трёх поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = T_{3,4}(-\beta_1) \circ T_{2,3}(-\beta_2) \circ T_{1,2}(-\beta_3) \begin{pmatrix} \omega_4 \\ \omega_7 \\ \omega_9 \\ \omega_{10} \end{pmatrix}, \tag{68}$$

где

$$T_{3,4}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad T_{2,3}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T_{1,2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в частности, для системы (20)—(24), (27)—(36) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} z_1 &= \omega_4 \cos\beta_3 + \omega_7 \sin\beta_3, \\ z_2 &= (\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3)\cos\beta_2 + \omega_9 \sin\beta_2, \\ z_3 &= [(-\omega_7 \cos\beta_3 + \omega_4 \sin\beta_3)\sin\beta_2 + \omega_9 \cos\beta_2]\cos\beta_1 + \omega_{10}\sin\beta_1, \\ z_4 &= [(\omega_7 \cos\beta_3 - \omega_4 \sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9 \cos\beta_2]\sin\beta_1 + \omega_{10}\cos\beta_1. \end{aligned} \tag{69}$$

1.3.6. Системы нормального вида

Как видно из (58)—(65), на многообразии

$$O_1 = \Big\{(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \omega_4, \omega_7, \omega_9, \omega_{10}) \in \mathbf{R}^8 : \\ \alpha = \frac{\pi}{2}k,\ \beta_1 = \pi l,\ \beta_2 = \pi m,\ k, l, m \in \mathbf{Z}\Big\} \tag{70}$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha$, $\dot\beta_1$, $\dot\beta_2$, $\dot\beta_3$. Формально, таким образом, на многообразии (70) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при чётном k и любых l, m неопределённость возникает по причине вырождения сферических координат $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$, а при нечётном k происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (58) вырождается. Из этого следует, что система (58)—(65) вне и только вне многообразия (70) эквивалентна системе

$$\dot\alpha = -z_4 + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{71}$$

$$\begin{aligned} \dot z_4 = {}& \frac{v^2}{3I_2}s(\alpha)\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ &+ \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Big\{-z_3\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) + z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right) - \\ &- z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \frac{\Omega}{v}\right)\Big\}, \end{aligned} \tag{72}$$

$$\dot z_3 = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2+z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Big\{z_4\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) -$$
$$- z_2\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\Big\} -$$
$$- \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha)\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{73}$$

$$\dot z_2 = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$
$$+ \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_4 + z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\} +$$
$$+ \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{-z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\} +$$
$$+ \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{74}$$

$$\dot z_1 = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +$$
$$+ \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)\left\{z_4 - z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\} -$$
$$- \frac{v^2}{3I_2} s(\alpha)\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{75}$$

$$\dot\beta_1 = z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{76}$$

$$\dot\beta_2 = -z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{77}$$

$$\dot\beta_3 = z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} + \frac{\sigma v}{3I_2}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{78}$$

где

$$\begin{gathered}
\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\beta_3\right)\right),\\
\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3\right)\right),\\
\Delta_{v,3}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\beta_3+\frac{\pi}{2}\right)\right),
\end{gathered} \tag{79}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\Omega/v)$ представляется в виде (47).

На многообразии

$$O_1' = \Big\{ (\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}) \in \mathbf{R}^{2(n-1)} : \\ \alpha = \frac{\pi}{2} k,\ \beta_1 = \pi l_1, \ldots, \beta_{n-3} = \pi l_{n-3},\ k, l_1, \ldots, l_{n-3} \in \mathbf{Z} \Big\} \quad (80)$$

нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot\alpha, \dot\beta_1, \ldots, \dot\beta_{n-2}$. Формально, таким образом, на многообразии (80) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, при чётном k и любых $l_1, \ldots, l_{n-3}$ неопределённость возникает по причине вырождения сферических координат $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, а при нечётном k происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом одно уравнение вырождается. Из этого следует, что система (7), (15) вне и только вне многообразия (80) может быть приведена к виду $(n > 2)$

$$\dot\alpha = -z_{n-1} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos\alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (81)$$

$$\dot z_{n-1} = \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^s z_{n-1-s} \Delta_{v,s} \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \right\}, \quad (82)$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2} z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos\alpha} \Big\{ z_{n-1} \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) + \\ + \sum_{s=2}^{n-2} (-1)^{s+1} z_{n-1-s} \Delta_{v,s} \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \Big\} - \\ - \frac{v^2}{(n-2)I_2} s(\alpha) \Delta_{v,1} \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right), \quad (83)$$

$$\dot z_{n-3} = z_{n-3} z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3} z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2} \frac{s(\alpha)}{\cos\alpha} \Big\{ \Delta_{v,2} \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v} \right) \left[-z_{n-1} + z_{n-2} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} \right] +$$

$$+ \sum_{s=3}^{n-2}(-1)^s z_{n-1-s}\Delta_{v,s}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\Bigg\} -$$

$$+ \frac{v^2}{(n-2)I_2}\,s(\alpha)\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \tag{84}$$

. . .

$$\dot z_1 = \dot\beta_{n-2}(-\omega_{r_1}\sin\beta_{n-2}+\omega_{r_2}\cos\beta_{n-2}) +$$

$$+ (-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}\,s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right) =$$

$$= z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} +$$

$$+ \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}(-1)^{n+1}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{s=2}^{n-1}(-1)^s z_{n+1-s}\,\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} +$$

$$+ (-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}\,s(\alpha)\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \tag{85}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \tag{86}$$

$$\dot\beta_2 = -z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} +$$

$$+ \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right), \tag{87}$$

. . .

$$\dot\beta_{n-2} = (-1)^{n+1}z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}} +$$

$$+ \frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right), \tag{88}$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\beta_1+\frac{\pi}{2},\beta_2,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),\\
&\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\beta_2+\frac{\pi}{2},\beta_3,\ldots,\beta_{n-2}\right)\right),\\
&\ldots\\
&\Delta_{v,n-3}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},],\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-3}+\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}\right)\right),\\
&\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=\left(\mathbf{r}_N,\mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2},\ldots,\frac{\pi}{2},\beta_{n-2}+\frac{\pi}{2}\right)\right),
\end{aligned}
\tag{89}
$$

а функция $\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ представляется в виде (47). Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1/v,\ldots,z_{n-1}/v)$ согласно (68).

1.3.7. Замечания о распределении индексов

В правую часть системы (81)—(88) после общего множителя

$$\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}\,\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и их всегда ровно $n-2$ штуки). Так, например, в уравнение (82) (с левой частью $\dot z_{n-1}$) входят функции (89) со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс):

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2. \tag{90}$$

Однако в уравнения (83)—(85) функции (89) входят в разных наборах. Так, например, в уравнение для $\dot z_{n-2}$ по-прежнему входит набор функций (89) с индексами (90). А в уравнение для $\dot z_{n-3}$ входит уже набор с индексами

$$2\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2, \tag{91}$$

т. е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)$ повторяется дважды. Общее распределение индексов даётся таблицей 2.

Минор

$$(1)$$

первого порядка в левом верхнем углу таблицы 2 соответствует случаю $n=3$ и указывает на то, что в динамических уравнениях присутствует лишь функция (89) (при $s=1$). Минор второго порядка

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$$

Таблица 2. Общее распределение индексов набора функций (89)

Левая часть системы (81)—(88)	Распределение индексов s набора функций (89)					
$\dot{z}_{n-2}$	1	2	3	4	$\ldots$	$n-2$
$\dot{z}_{n-3}$	2	2	3	4	$\ldots$	$n-2$
$\dot{z}_{n-4}$	3	3	3	4	$\ldots$	$n-2$
$\dot{z}_{n-5}$	4	4	4	4	$\ldots$	$n-2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\dot{z}_1$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$\ldots$	$n-2$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (89) (при $s = 1, 2$). Минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (71)—(78) функций (89) (при $s = 1, 2, 3$) и т. д.

1.3.8. Нарушение теоремы единственности

Теорема единственности для системы (7), (15) на многообразии (80) при нечётном k нарушается в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (80) при нечётном k проходит неособая фазовая траектория системы (7), (15), пересекая многообразие (80) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как отмечено выше, для поддержания связи вида (44) необходимо выбрать значение T при $\cos\alpha \neq 0$ в виде (46). Пусть

$$\lim_{\alpha\to\pi/2} \frac{s(\alpha)}{\cos\alpha} \Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = L\left(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right). \tag{92}$$

Заметим, что $|L| < +\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha\to\pi/2} \left| \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\Gamma_v \left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha) \right) \right| < +\infty. \tag{93}$$

При $\alpha = \pi/2$ нужная величина следящей силы найдётся из равенства

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega\right) = m\sigma(\omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{n-1}^2) - \frac{m\sigma L v^2}{(n-2)I_2}, \quad n > 2, \tag{94}$$

где значения $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{n-1}$ произвольны. С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W, необходимо выбрать следящую силу в виде

$$T = T_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_0}, \tag{95}$$

где R_0 — расстояние CW.

Равенства (94) и (95) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (80), что и доказывает сделанное замечание.

1.4. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

1.4.1. Приведённая система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [113, 114], пользуясь (48), динамические функции s, $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \quad A, B > 0, \tag{96}$$

говорящем о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$). При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $s = 1, \ldots, n-2$, входящие в систему (81)—(88), примут вид

$$\begin{gathered} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = R(\alpha) = A\sin\alpha, \\ \Delta_{v,s}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, n-2. \end{gathered} \tag{97}$$

Тогда благодаря неинтегрируемой связи (44) вне и только вне многообразия (80) динамическая часть уравнений движения (система (81)—(88)) примет вид аналитической системы

$$\dot\alpha = -z_{n-1} + \frac{\sigma ABv}{(n-2)I_2}\sin\alpha, \tag{98}$$

$$\dot z_{n-1} = \frac{ABv^2}{(n-2)I_2}\sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{99}$$

$$\dot z_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{100}$$

$$\dot z_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3}z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - $$
$$- (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{101}$$

$\ldots$

$$\dot z_1 = z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\,\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{102}$$

$$\dot\beta_1 = z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{103}$$

$$\dot\beta_2 = -z_{n-3}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{104}$$

$\ldots$

$$\dot\beta_{n-3} = (-1)^n z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{105}$$

$$\dot\beta_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{106}$$

Вводя безразмерные переменные, параметры и дифференцирование

$$z_k \mapsto n_0 v z_k,\quad k = 1,\ldots,n-1,\quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2},\quad n > 2,\quad b = \sigma n_0,\quad \langle\cdot\rangle = n_0 v\langle'\rangle, \tag{107}$$

приведём систему (98)—(106) к виду

$$\alpha' = -z_{n-1} + b\sin\alpha, \tag{108}$$

$$z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{109}$$

$$z'_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{110}$$

$$z'_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3}z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - $$
$$- (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{111}$$

$\ldots$

$$z'_1 = z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\,\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{112}$$

$$\beta'_1 = z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{113}$$

$$\beta'_2 = -z_{n-3}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{114}$$

$\ldots$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{115}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{116}$$

В частности, при $n=5$ получим следующую систему восьмого порядка:

$$\alpha' = -z_4 + b\sin\alpha, \tag{117}$$

$$z'_4 = \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{118}$$

$$z'_3 = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{119}$$

$$z'_2 = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{120}$$

$$z'_1 = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{121}$$

$$\beta'_1 = z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{122}$$

$$\beta'_2 = -z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{123}$$

$$\beta'_3 = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{124}$$

Видно, что в системе (108)—(116) порядка $2(n-1)$, которую можно рассматривать на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$, образовалась независимая система (108)—(115) порядка $2n-3$ на своём $(2n-3)$-мерном многообразии (в частности, в системе восьмого порядка (117)—(124), которую можно рассматривать на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4$ к четырёхмерной сфере $\mathbf{S}^4$, образовалась независимая система седьмого порядка (117)—(123) на своём семимерном многообразии). В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Система* (7), (15) *при условиях* (44), (40), (41) *редуцируется к динамической системе* (81)—(88) *на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$*-мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. *В частности, при условии* (96) *она редуцируется к системе* (108)—(116).

1.4.2. Общие замечания об интегрируемости системы

Для полного интегрирования системы (108)—(116) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы восьмого порядка (117)—(124) необходимо, вообще говоря, знать семь независимых первых интегралов). Но рассматриваемые системы имеют симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n (в частности, до пяти) для интегрирования систем.

Система при отсутствии силового поля. Для начала рассмотрим систему (117)—(124) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырёхмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Получим из неё консервативную систему. Более того, будем считать, что функция (47) тождественно равна нулю (в частности, $b = 0$ и коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (118) отсутствует). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -z_4, \tag{125}$$

$$z_4' = -(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{126}$$

$$z_3' = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{127}$$

$$z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{128}$$

$$z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{129}$$

$$\beta_1' = z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{130}$$

$$\beta_2' = -z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{131}$$

$$\beta_3' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{132}$$

Система (125)—(132) описывает движение твёрдого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 1.2. *Система* (125)—(132) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{133}$$

$$\Phi_2(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{134}$$

$$\Phi_3(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{135}$$

$$\Phi_4(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = z_1 \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{136}$$

$$\Phi_5(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{137}$$

Первые четыре первых интеграла (133)—(136) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твёрдого тела, а именно:

$$\omega_4 \equiv \omega_4^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_7 \equiv \omega_7^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_9 \equiv \omega_9^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0 = \mathrm{const}. \tag{138}$$

В частности, наличие первого интеграла (133) объясняется равенством

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = \omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2 \equiv C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{139}$$

Пятый первый интеграл (137) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = -\frac{z_1}{z_2}\frac{1}{\sin\beta_2}. \tag{140}$$

При этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (135), (136) и получить равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}, \tag{141}$$

то квадратура (140) примет вид

$$\beta_3 = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_3^2}{C_4^2} - 1\right) - \frac{C_3^2}{C_4^2}u^2}}, \quad u = \cos\beta_2. \tag{142}$$

Её вычисление приводит к соотношению

$$\beta_3 + C_5 = \pm\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos\beta_2}{\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}}, \quad C_5 = \mathrm{const}, \tag{143}$$

позволяющему получить первый интеграл (137). Преобразуя последнее равенство, имеем следующее инвариантное соотношение:

$$\mathrm{tg}^2(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4^2}{(C_3^2 - C_4^2)\,\mathrm{tg}^2\beta_2 - C_4^2}. \tag{144}$$

Теперь переформулируем теорему 1.2.

Теорема 1.3. *Система* (125)–(132) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{145}$$

$$\Psi_2(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{146}$$

$$\Psi_3(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1\sin\beta_2} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{147}$$

$$\Psi_4(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \mathrm{const}, \tag{148}$$

$$\Psi_5(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \mathrm{const}. \tag{149}$$

Пятый первый интеграл (149) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_3, а функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 1.3 (в отличие от теоремы 1.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (145)—(149) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.3 преобразованный набор первых интегралов (145)—(149) системы (125)—(132) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остаётся набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (125)—(132) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \\ w_4 = z_4, \quad w_3 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad w_2 = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_1 = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \end{gathered} \tag{150}$$

система (125)—(132) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4, \tag{151}$$

$$w_4' = -w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{152}$$

$$w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{153}$$

$$\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\, \frac{1 + w_2^2}{w_2}\, \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{154}$$

$$\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\, \frac{1 + w_1^2}{w_1}\, \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{155}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{156}$$

где

$$\begin{aligned}
&d_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = Z_3(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
&d_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = -Z_2(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\\
&d_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = Z_1(w_4,w_3,w_2,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2},
\end{aligned} \tag{157}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_4,w_3,w_2,w_1), \quad k=1,2,3, \text{ —} \tag{158}$$

функции согласно замене (150).

Видно, что система восьмого порядка (151)—(156) распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (151)—(153) — третьего, а системы (154), (155) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (151)—(156) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (151)—(153), по одному для систем (154), (155) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (156) (т. е. всего пять).

Замечание 1.1. Выпишем первые интегралы (145)—(149) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 согласно (150). Получим

$$\Theta_1(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \frac{w_3^2+w_4^2}{w_3\sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{159}$$

$$\Theta_2(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = w_3\sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{160}$$

$$\Theta_3(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \text{const}, \tag{161}$$

$$\Theta_4(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \text{const}, \tag{162}$$

$$\Theta_5(w_4,w_3,w_2,w_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = C_5'' = \text{const}. \tag{163}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (159), (160) достаточны для интегрирования системы (151)—(153), первые интегралы (161), (162) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s=1,2, \tag{164}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (154), (155), и, наконец, первый интеграл (163) достаточен для «привязывания» уравнения (156). Доказана следующая теорема.

Теорема 1.4. *Система* (125)—(132) *восьмого порядка обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (*пятью*).

Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (117)—(124) при условии $b = 0$. При этом получим консервативную систему. А именно, на наличие силового поля указывает коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (118) (в отличие от системы (125)—(132)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -z_4, \tag{165}$$

$$z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{166}$$

$$z_3' = z_3 z_4\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + z_2^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{167}$$

$$z_2' = z_2 z_4\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{168}$$

$$z_1' = z_1 z_4\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{169}$$

$$\beta_1' = z_3\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{170}$$

$$\beta_2' = -z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{171}$$

$$\beta_3' = z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{172}$$

Итак, система (165)—(172) описывает движение твёрдого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 1.5. *Система* (165)—(172) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + \sin^2\alpha = C_1 = \mathrm{const}, \tag{173}$$

$$\Phi_2(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{174}$$

$$\Phi_3(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{175}$$

$$\Phi_4(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{176}$$

$$\Phi_5(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{177}$$

Первый интеграл (173) является интегралом полной энергии. Пятый первый интеграл (177) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и найден выше.

Теперь переформулируем теорему 1.5.

Теорема 1.6. *Система* (165)—(172) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + \sin^2\alpha}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\sin\alpha} = \\ = C_1' = \text{const}, \tag{178}$$

$$\Psi_2(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \text{const}, \tag{179}$$

$$\Psi_3(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1 \sin\beta_2} = C_3' = \text{const}, \tag{180}$$

$$\Psi_4(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \text{const}, \tag{181}$$

$$\Psi_5(z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \text{const}. \tag{182}$$

Функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 1.6 (в отличие от теоремы 1.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (178)—(182) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто не могут быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

Согласно теореме 1.6 преобразованный набор первых интегралов (178)—(182) системы (165)—(172) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остаётся набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (165)—(172) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (150) система (165)—(172) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4, \tag{183}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{184}$$

$$w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{185}$$

$$\begin{gathered} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\,\frac{1 + w_2^2}{w_2}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{186}$$

$$\begin{gathered} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\,\frac{1 + w_1^2}{w_1}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{187}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{188}$$

где выполнены условия (157).

Видно, что система восьмого порядка (183)—(188) распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (183)—(185) — третьего, а системы (186), (187) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (183)—(188) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (183)—(185), по одному для систем (186), (187) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (188) (т. е. всего пять).

Замечание 1.2. Выпишем первые интегралы (178)—(182) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 согласно (150). Получим

$$\Theta_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2 + \sin^2\alpha}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{189}$$

$$\Theta_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = w_3 \sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{190}$$

$$\Theta_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \text{const}, \tag{191}$$

$$\Theta_4(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \text{const}, \tag{192}$$

$$\Theta_5(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \text{const}. \tag{193}$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (189), (190) достаточны для интегрирования системы (183)—(185), первые интегралы (191), (192) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{194}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (186), (187), и, наконец, первый интеграл (193) достаточен для «привязывания» уравнения (188). Доказана следующая теорема.

Теорема 1.7. *Система* (165)—(172) *восьмого порядка обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (*пятью*).

1.4.3. Полный список инвариантных соотношений

Перейдём теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (117)—(124) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Для полного интегрирования системы (117)—(124) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (150) система (117)—(124) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b\sin\alpha, \tag{195}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{196}$$

$$w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{197}$$

$$\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_2^2}{w_2}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{198}$$

$$\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_1^2}{w_1}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{199}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{200}$$

где выполнены условия (157).

Видно, что система восьмого порядка (195)—(200) распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (195)—(197) — третьего, а системы (198), (199) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (195)—(200) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (195)—(197), по одному для систем (198), (199) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (200) (т. е. всего пять).

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (195)—(197) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b\sin\alpha}, \\ \frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{w_3 w_4\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b\sin\alpha}. \end{aligned} \tag{201}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (201) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned} \frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{\tau - w_3^2/\tau}{-w_4 + b\tau}, \\ \frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{w_3 w_4/\tau}{-w_4 + b\tau}. \end{aligned} \tag{202}$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$w_3 = u_1\tau, \quad w_4 = u_2\tau, \tag{203}$$

приводим систему (202) к виду

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - u_1^2}{-u_2 + b}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1 u_2}{-u_2 + b}, \end{aligned} \tag{204}$$

что эквивалентно

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{-u_2+b},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2-bu_1}{-u_2+b}.
\end{aligned}
\tag{205}
$$

Поставим системе второго порядка (205) неавтономное уравнение первого порядка

$$
\frac{du_2}{du_1} = \frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{2u_1u_2-bu_1}, \tag{206}
$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$
d\left(\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}\right) = 0. \tag{207}
$$

Итак, уравнение (206) имеет первый интеграл

$$
\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{208}
$$

который в прежних переменных выглядит как

$$
\Theta_1(w_4,w_3;\alpha) = \frac{w_4^2+w_3^2-bw_4\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{209}
$$

Замечание 1.3. При $b=0$ первый интеграл (209) системы (195)—(197) совпадает с первым интегралом (189) системы (183)—(185), но при $b\neq 0$ ни числитель выражения (209), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (195)—(197) по отдельности (хотя при $b=0$ и числитель и знаменатель выражения (209) являются первыми интегралами системы (183)—(185)).

Найдём явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (195)—(197). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (208) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$
\left(u_2-\frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2+C_1^2}{4} - 1. \tag{210}
$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$
b^2+C_1^2-4 \geqslant 0, \tag{211}
$$

и фазовое пространство системы (195)—(197) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых в координатах u_1, u_2 равенством (210).

Таким образом, в силу соотношения (208) первое уравнение системы (205) примет вид

$$
\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1-bu_2+u_2^2)-C_1U_1(C_1,u_2)}{-u_2+b}, \tag{212}
$$

где

$$
U_1(C_1,u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2-4(u_2^2-bu_2+1)}\}, \tag{213}
$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (211). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (195)—(197) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \int \frac{(b-u_2)du_2}{2(1-bu_2+u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}/2}. \tag{214}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \tag{215}$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \tag{216}$$

то правая часть равенства (214) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4r_1^2)}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} - b\int \frac{dr_1}{(b_1^2 - 4r_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b}{2} I_1, \tag{217}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}(r_3 \pm C_1)}, \quad r_3 = \sqrt{b_1^2 - 4r_1^2}. \tag{218}$$

При вычислении интеграла (218) возможны три случая.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} + \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4} - \sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{r_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right| + \mathrm{const}. \tag{219}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin\frac{\pm C_1 r_3 + b_1^2}{b_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{220}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2 - r_3^2}}{C_1(r_3 \pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{221}$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1 = \frac{w_4}{\sin\alpha} - \frac{b}{2}, \tag{222}$$

получаем окончательный вид для величины I_1.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} \pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} \mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \mathrm{const}. \quad (223)$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2-4r_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \quad (224)$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2} \pm C_1)} + \mathrm{const}. \quad (225)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (195)—(197), мы предъявили полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 1.4. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (208). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_4}{\sin\alpha}, \frac{w_3}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \quad (226)$$

Итак, найдены два первых интеграла (209), (226) независимой системы третьего порядка (195)—(197). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (198), (199) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (200).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (191)—(193), а именно:

$$\Theta_3(w_2; \beta_2) = \frac{\sqrt{1+w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3 = \mathrm{const}, \quad (227)$$

$$\Theta_4(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1+w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4 = \mathrm{const}, \quad (228)$$

$$\Theta_5(w_2, w_1; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \mathrm{arctg}\, \frac{C_4\cos\beta_2}{\sqrt{C_3^2\sin^2\beta_2 - C_4^2}} = C_5 = \mathrm{const}, \quad (229)$$

при этом в левую часть равенства (229) вместо C_3, C_4 необходимо подставить интегралы (227), (228).

Теорема 1.8. *Система* (195)—(200) *восьмого порядка обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (*пятью*): (209), (226), (227)—(229).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (20)—(24), (27)—(36) при условии (96) имеет 12 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (44), циклические первые интегралы вида (42), (43), первый интеграл вида (209), также имеется первый интеграл, выражающийся соотношениями (219)—(226), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (227)—(229).

Теорема 1.9. *Система* (20)—(24), (27)—(36) *при условиях* (44), (96), (42), (43) *обладает* 12 *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

1.4.4. Структура уравнений на касательных расслоениях к конечномерной сфере

Исследование полной системы (117)—(124) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырёхмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ было начато с исследования упрощённой системы (125)—(132), которая описывает динамику при отсутствии какого-либо силового поля. Таким образом, коэффициенты в правой части системы (125)—(132) носят лишь геометрический смысл и порождаются выбором координат z_4, z_3, z_2, z_1, α, β_1, β_2, β_3 на касательном расслоении.

Поставим вопрос: как меняются коэффициенты соответствующих систем при индуктивном увеличении размерности $n-1$ сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$? Другими словами, системами какого вида описываются фазовые (геодезические) потоки на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ именно в выбранных нами координатах $z_{n-1}, \ldots, z_1$, α, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$?

Несмотря на то что (и в этой, и в ряде предыдущих работ автора) нами рассмотрена явно структура соответствующих уравнений до $n = 5$ включительно, начнём со случая $n = 2$. Это позволит произвести индуктивный переход от n к $n+1$ и «конструировать» аналогичные системы любого высокого порядка.

Замечание 1.5 (об аналитических первых интегралах при отсутствии силового поля). При построении систем на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ используется факт наличия в системе следующего набора аналитических первых интегралов:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2} = C_1 = \mathrm{const},\\
&\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const},\\
&\Phi_3(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 =\\
&\quad = C_3 = \mathrm{const},\\
&\ldots\\
&\Phi_{n-2}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} =\\
&\quad = C_{n-2} = \mathrm{const},\\
&\Phi_{n-1}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} =\\
&\quad = C_{n-1} = \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{230}
$$

Первые интегралы (230) констатируют тот факт, что, поскольку внешнего поля сил нет, сохраняются $n-1$ компонента (вообще говоря, ненулевые) тензора угловой скорости n-мерного твёрдого тела, а именно:

$$
\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \mathrm{const},\ldots,\ \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \mathrm{const}. \tag{231}
$$

В частности, наличие первого интеграла $\Phi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_1$ из (230) объясняется равенством

$$
z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2 = \omega_{r_1}^2+\ldots+\omega_{r_{n-1}}^2 \equiv C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{232}
$$

При этом первые интегралы (230) являются функциями от компонент $\omega_{r_1},\ldots,\omega_{r_{n-1}}$.

Начало при $n=2$. При $n=2$ следующая система задаёт геодезический поток на двумерном цилиндре $T_*\mathbf{S}^1\{z_1;\alpha\}$ как касательном расслоении одномерной сферы $\mathbf{S}^1\{\alpha\}$:

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= -z_1,\\
z_1' &= 0.
\end{aligned} \tag{233}
$$

При этом в силу замечания 1.5 существует естественный первый интеграл

$$
z_1 = C_1 = \mathrm{const}. \tag{234}
$$

Уравнение $\dot\alpha = -z_1$ является кинематическим соотношением и задаёт координаты α, z_1 в фазовом пространстве системы (233) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^1\{z_1;\alpha\}$).

Переход по n: $2\to 3$. При переходе от $n=2$ к $n=3$ производится переобозначение

$$
z_1 \mapsto z_2,
$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчёркиваются.

Предложение 1.1. *При $n = 3$ следующая система задаёт геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta_1\}$ двумерной сферы $\mathbf{S}^2\{\alpha, \beta_1\}$:*

$$\alpha' = -z_2, \tag{235}$$

$$z_2' = \underline{-z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}, \tag{236}$$

$$\underline{z_1' = z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}, \tag{237}$$

$$\beta_1' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{238}$$

При этом в силу замечания 1.5 *существуют первые интегралы*

$$z_1^2 + z_2^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{239}$$

$$z_1 \sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}. \tag{240}$$

Действительно, в силу (239) имеем

$$z_1' z_1 + z_2' z_2 = 0,$$

поэтому существует такая функция $N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2)$, что

$$z_2' = -z_1 N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2), \quad z_1' = z_2 N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2),$$

а в силу (240) должно выполняться равенство (ввиду системы (235)—(238))

$$z_1' \sin\alpha + z_1 \alpha' \cos\alpha = z_2 N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2) \sin\alpha - z_1 z_2 \cos\alpha = 0,$$

откуда следует, что

$$N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2) = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

что и требовалось.

Уравнения (235), (238) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, z_1, z_2 в фазовом пространстве системы (235)—(238) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{z_2, z_1; \alpha, \beta_1\}$).

Переход по n: $3 \to 4$ При переходе от $n = 3$ к $n = 4$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчёркиваются.

Предложение 1.2. *При $n = 4$ следующая система задаёт геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^3\{z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ трёхмерной сферы $\mathbf{S}^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$:*

$$\alpha' = -z_3, \tag{241}$$

$$z_3' = -(z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{242}$$

$$z_2' = z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \underline{z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}}, \tag{243}$$

$$\underline{z_1' = z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}}, \tag{244}$$

$$\beta_1' = z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{245}$$

$$\beta_2' = -z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}. \tag{246}$$

При этом в силу замечания 1.5 *существуют первые интегралы*

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{247}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{248}$$

$$z_1 \sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}. \tag{249}$$

Действительно, в силу (247), (248) аналогично доказательству предложения 1.1 находится подчёркнутый коэффициент в уравнении (242), а также делается вывод об уравнениях (243) и (244), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} z_2' &= z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,z_1,z_2,z_3),\\ z_1' &= z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,z_1,z_2,z_3). \end{aligned} \tag{250}$$

Далее, в силу (249) должно выполняться равенство (ввиду системы (241)—(246))

$$\begin{gathered} z_1' \sin\alpha\sin\beta_1 + z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1 + z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1 = \\ = z_1 z_2 \cos\alpha[\cos\beta_1 - N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,z_1,z_2,z_3)\sin\beta_1] = 0, \end{gathered}$$

откуда следует, что

$$N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,z_1,z_2,z_3) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$

что и требовалось.

Уравнения (241), (245), (246) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, β_2, z_1, z_2, z_3 в фазовом пространстве системы (241)—(246) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^3\{z_3,z_2,z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$).

Переход по n: $4 \to 5$ При переходе от $n = 4$ к $n = 5$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_3\\ z_2\\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_4\\ z_3\\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчёркиваются.

Предложение 1.3. *При* $n = 5$ *следующая система задаёт геодезический поток на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ *четырёхмерной сферы* $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$:

$$\alpha' = -z_4, \tag{251}$$

$$z_4' = -(z_3^2 + z_2^2 + \underline{z_1^2})\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{252}$$

$$z_3' = z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_2^2 + \underline{z_1^2})\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{253}$$

$$z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \underline{z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}}, \tag{254}$$

$$\underline{z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}}, \tag{255}$$

$$\beta_1' = z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{256}$$

$$\beta_2' = -z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{257}$$

$$\beta_3' = z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{258}$$

При этом в силу замечания 1.5 *существуют первые интегралы*

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{259}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{260}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{261}$$

$$z_1 \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}. \tag{262}$$

Действительно, согласно (259)—(261) аналогично доказательству предложений 1.1, 1.2 находятся подчёркнутые коэффициенты в уравнениях (252), (253), а также делается вывод об уравнениях (254) и (255), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
z_2' = z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4), \\
z_1' = z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4).
\end{gathered} \tag{263}$$

В силу (262) должно выполняться равенство (ввиду системы (251)—(258))

$$\begin{aligned}&z_1' \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 + z_1\alpha' \cos\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 + \\ &+ z_1\beta_1' \sin\alpha \cos\beta_1 \sin\beta_2 + z_1\beta_2' \sin\alpha \sin\beta_1 \cos\beta_2 = \\ &= z_1 z_2 \cos\alpha [N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4) \sin\beta_1 \sin\beta_2 - \cos\beta_2] = 0,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$N_3(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},$$

что и требовалось.

Уравнения (251), (256)—(258) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, β_2, β_3, z_1, z_2, z_3, z_4 в фазовом пространстве системы (251)—(258) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$).

Переход по n: $5 \to 6$. При переходе от $n = 5$ к $n = 6$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_4 \\ z_3 \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_5 \\ z_4 \\ z_3 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчёркиваются.

Предложение 1.4. *При $n = 6$ следующая система задаёт геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{z_5, z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$:*

$$\alpha' = -z_5, \tag{264}$$

$$z_5' = -(z_4^2 + z_3^2 + z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{265}$$

$$z_4' = z_4 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_3^2 + z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{266}$$

$$z_3' = z_3 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_3 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - (z_2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \tag{267}$$

$$\begin{aligned}z_2' = {}& z_2 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ &+ \underline{z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3}},\end{aligned} \tag{268}$$

$$\begin{aligned}&\underline{z_1' = z_1 z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} -} \\ &\quad \underline{- z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3}},\end{aligned} \tag{269}$$

$$\beta_1' = z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{270}$$

$$\beta_2' = -z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{271}$$

$$\beta_3' = z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{272}$$

$$\beta_4' = -z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3}. \tag{273}$$

При этом в силу замечания 1.5 *существуют первые интегралы*

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{274}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{275}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{276}$$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{277}$$

$$z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 = C_5 = \mathrm{const}. \tag{278}$$

Действительно, согласно (274)—(277) аналогично доказательству предложений 1.1—1.3 находятся подчёркнутые коэффициенты в уравнениях (265)—(267), а также делается вывод об уравнениях (268) и (269), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
z_2' = z_2z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\
+ z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5), \\
z_1' = z_1z_5\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \\
- z_1z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5).
\end{gathered} \tag{279}$$

В силу (278) должно выполняться равенство (ввиду системы (264)—(273))

$$\begin{gathered}
z_1'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\
+ z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + z_1\beta_2'\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \\
+ z_1\beta_3'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 = z_1z_2\cos\alpha[\cos\beta_3 - \\
- N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5)\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3] = 0,
\end{gathered}$$

откуда следует, что

$$N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) = \frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3},$$

что и требовалось.

Уравнения (264), (270)—(273) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, β_2, β_3, β_4, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 в фазовом пространстве системы (264)—(273) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{z_5, z_4, z_3, z_2, z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$).

Переход по n: $n \to n+1$. При индуктивном переходе от n к $n+1$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \dots \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n-1} \\ \dots \\ z_2 \end{pmatrix},$$

при этом вводится новая переменная z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчёркиваются.

Предложение 1.5. *При $n > 2$ следующая система задаёт геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^n\{z_n, z_{n-1}, \dots, z_1; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ n-мерной сферы $\mathbf{S}^n\{\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$:*

$$\alpha' = -z_n, \tag{280}$$

$$z_n' = -(z_{n-1}^2 + \dots + z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{281}$$

$$z_{n-1}' = z_{n-1} z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_{n-2}^2 + \dots + z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{282}$$

$$\begin{gathered} z_{n-2}' = z_{n-2} z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-2} z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (z_{n-3}^2 + \dots + z_2^2 + \underline{z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{283}$$

$\dots$

$$\begin{gathered} z_2' = z_2 z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2 z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \dots + \\ + (-1)^{n+1} z_2 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \dots \frac{1}{\sin\beta_{n-4}} \frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} + \\ + (-1)^{n+1} z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \dots \frac{1}{\sin\beta_{n-3}} \frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}, \end{gathered} \tag{284}$$

$$\begin{gathered} \underline{z_1' = z_1 z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \dots +} \\ \underline{+ (-1)^{n+1} z_1 z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \dots \frac{1}{\sin\beta_{n-4}} \frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} +} \\ \underline{+ (-1)^{n} z_1 z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \dots \frac{1}{\sin\beta_{n-3}} \frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}},} \end{gathered} \tag{285}$$

$$\beta_1' = z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{286}$$

$$\beta_2' = -z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{287}$$

$\ldots$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{288}$$

$$\beta_{n-1}' = (-1)^{n} z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}}. \tag{289}$$

При этом в силу замечания 1.5 *существуют первые интегралы*

$$z_1^2 + \ldots + z_n^2 = C_1 = \mathrm{const}, \tag{290}$$

$$\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{291}$$

$$\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{292}$$

$\ldots$

$$\sqrt{z_1^2 + z_2^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}. \tag{293}$$

$$z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} = C_n = \mathrm{const}. \tag{294}$$

Действительно, согласно (290)—(293) аналогично доказательству предложений 1.1—1.4 находятся подчёркнутые коэффициенты во всех уравнениях до (284) и (285), а также делается вывод об уравнениях (284) и (285), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
z_2' = z_2 z_n\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_2 z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_2 z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \ldots + \\
+ (-1)^{n+1} z_2 z_3\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\cdots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\,\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} + \\
+ (-1)^{n+1} z_1^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},z_1,\ldots,z_n), \\
z_1' = z_1 z_n\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_1 z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + z_1 z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \ldots + \\
+ (-1)^{n+1} z_1 z_3\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\cdots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\,\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} + \\
+ (-1)^{n} z_1 z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},z_1,\ldots,z_n).
\end{gathered} \tag{295}$$

В силу (294) должно выполняться равенство (ввиду системы (280)—(289))

$$\begin{gathered}
z_1'\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} + z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} + \\
+ z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\ldots\sin\beta_{n-2} + \ldots +
\end{gathered}$$

$$+\, z_1\beta'_{n-3}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}\cos\beta_{n-3}\sin\beta_{n-2} +$$
$$+\, z_1\beta'_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2}$$
$$= z_1z_2\cos\alpha[\cos\beta_{n-2} - N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},z_1,\ldots,z_n)\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}] = 0,$$

откуда следует, что

$$N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},z_1,\ldots,z_n) = \frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{1}{\sin\beta_2}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\,\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}},$$

что и требовалось.

Уравнения (280), (286)—(289) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, $\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}$, $z_1,\ldots,z_n$ в фазовом пространстве системы (280)—(289) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^n\{z_n,\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}\}$).

1.4.5. Общие замечания об интегрируемости системы при любом конечном n

Как уже было указано, для полного интегрирования системы (108)—(116) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов для интегрирования систем до n.

Система при отсутствии силового поля. Рассмотрим систему (108)—(116) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ и получим из неё консервативную систему. Будем считать, что функция (47) тождественно равна нулю (в частности, $b=0$, а также отсутствует коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (109)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -z_{n-1}, \tag{296}$$

$$z'_{n-1} = -(z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{297}$$

$$z'_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{298}$$

$$\begin{gathered} z'_{n-3} = z_{n-3}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3}z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ -\,(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{299}$$

$$\ldots$$

$$z'_1 = z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\,\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{300}$$

$$\beta'_1 = z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{301}$$

$$\beta_2' = -z_{n-3} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \tag{302}$$

$$\ldots$$

$$\beta_{n-3}' = (-1)^n z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{303}$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{304}$$

Система (296)—(304) описывает движение твёрдого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 1.10. *Система* (296)—(304) *обладает* n *независимыми аналитическими первыми интегралами вида*

$$\Phi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{305}$$

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{306}$$

$$\Phi_3(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\ = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{307}$$

$$\ldots$$

$$\Phi_{n-2}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\ = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = C_{n-2} = \mathrm{const}, \tag{308}$$

$$\Phi_{n-1}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\ = z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}, \tag{309}$$

$$\Phi_n(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}. \tag{310}$$

Первые $n-1$ первых интеграла (305)—(309) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются $n-1$ (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости n-мерного твёрдого тела, а именно:

$$\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \mathrm{const},\ldots,\ \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \mathrm{const}. \tag{311}$$

В частности, наличие первого интеграла (305) объясняется равенством

$$z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2 = \omega_{r_1}^2+\ldots+\omega_{r_{n-1}}^2 \equiv C_1^2 = \mathrm{const}. \tag{312}$$

Последний первый интеграл (310) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_{n-2} и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{z_1}{z_2}\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}. \tag{313}$$

При этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (308), (309) и получить равенство

$$\frac{z_1}{z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\beta_{n-3} - 1}, \tag{314}$$

то квадратура (313) примет вид

$$\beta_{n-2} = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2} - 1\right) - \frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}u^2}}, \quad u = \cos\beta_{n-3}. \tag{315}$$

Её вычисление приводит к соотношению

$$\beta_{n-2} + C_n = \pm\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2}\sin^2\beta_{n-3} - 1}}, \quad C_n = \mathrm{const}, \tag{316}$$

позволяющему получить первый интеграл (310). Преобразуя последнее равенство, получаем следующее инвариантное соотношение:

$$\operatorname{tg}^2(\beta_{n-2} + C_n) = \frac{C_{n-1}^2}{(C_{n-2}^2 - C_{n-1}^2)\operatorname{tg}^2\beta_{n-3} - C_{n-1}^2}. \tag{317}$$

Теперь переформулируем теорему 1.10.

Теорема 1.11. *Система* (296)—(304) *обладает* n *независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\Phi_1^2}{\Phi_2} = \frac{z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}\sin\alpha} = C_1' = \mathrm{const}, \tag{318}$$

$$\Psi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{319}$$

$$\Psi_3(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}{z_1\sin\beta_{n-3}} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{320}$$

$$\ldots$$

$$\Psi_{n-2}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2}\sin\beta_2} =$$
$$= C_{n-2}' = \mathrm{const}, \tag{321}$$

$$\Psi_{n-1}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\sin\beta_1} = $$

$$= C'_{n-1} = \mathrm{const}, \tag{322}$$

$$\Psi_n(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C'_n = \mathrm{const}. \tag{323}$$

Последний первый интеграл (323) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_{n-2}, а функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 1.11 (в отличие от теоремы 1.10) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (318)—(323) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто могут не быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

Согласно теореме 1.11 преобразованный набор первых интегралов (318)—(323) системы (296)—(304) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остаётся набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (296)—(304) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{gathered}
\begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \cdots \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \cdots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \\
w_{n-1} = z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}, \\
w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}, \ldots, \\
w_2 = \frac{z_{n-3}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}},
\end{gathered} \tag{324}$$

система (296)—(304) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1}, \tag{325}$$

$$w'_{n-1} = -w_{n-2}^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{326}$$

$$w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{327}$$

$$
\begin{aligned}
&w_s' = d_s(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},\\
&\beta_s' = d_s(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),\quad s=1,\dots,n-3,
\end{aligned}
\tag{328}
$$

$$
\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}),
\tag{329}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&d_1(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) = Z_{n-2}(w_{n-1},\dots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
&d_2(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) = -Z_{n-3}(w_{n-1},\dots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1},\\
&\dots\\
&d_{n-2}(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) =\\
&\quad = (-1)^{n+1}Z_1(w_{n-1},\dots,w_1)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}},
\end{aligned}
\tag{330}
$$

при этом

$$
z_k = Z_k(w_{n-1},\dots,w_1),\quad k=1,\dots,n-2, -
\tag{331}
$$

функции согласно замене (324).

Видно, что система (325)—(329) порядка $3+2(n-3)+1 = 2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (325)—(327) — третьего, а системы (328) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (325)—(329) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (325)—(327), по одному для систем (328) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (329) (т. е. всего n).

Замечание 1.6. Выпишем первые интегралы (318)—(323) в переменных $w_1,\dots,w_{n-1}$ согласно (324). Получим

$$
\Theta_1(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2+w_{n-1}^2}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1'' = \mathrm{const},
\tag{332}
$$

$$
\Theta_2(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\alpha = C_2'' = \mathrm{const},
\tag{333}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Theta_{s+2}(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} =\\
&\quad = C_{s+2}'' = \mathrm{const},\quad s=1,\dots,n-3,
\end{aligned}
\tag{334}
$$

$$
\Theta_n(w_{n-1},\dots,w_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) = C_n'' = \mathrm{const}.
\tag{335}
$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (332), (333) достаточны для интегрирования системы (325)—(327), первые интегралы (334) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$
\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},\quad s=1,\dots,n-3,
\tag{336}
$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (328), и, наконец, первый интеграл (335) достаточен для «привязывания» уравнения (329). Доказана следующая теорема.

Теорема 1.12. *Система* (296)—(304) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (n).

Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (108)—(116) при условии $b=0$. При этом получим консервативную систему. А именно, на наличие силового поля указывает коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (109) (в отличие от системы (296)—(304)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -z_{n-1}, \tag{337}$$

$$z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{338}$$

$$z'_{n-2} = z_{n-2}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \tag{339}$$

$$\begin{aligned} z'_{n-3} = {} & z_{n-3}z_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - z_{n-3}z_{n-2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ & - (z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \end{aligned} \tag{340}$$

$$\ldots$$

$$z'_1 = z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\,\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\}, \tag{341}$$

$$\beta'_1 = z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{342}$$

$$\beta'_2 = -z_{n-3}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{343}$$

$$\ldots$$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n z_2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{344}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} z_1\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{345}$$

Итак, система (337)—(345) описывает движение твёрдого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 1.13. *Система* (337)—(345) *обладает* n *независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2+\sin^2\alpha = C_1 = \mathrm{const}, \tag{346}$$

$$\Phi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{347}$$

$$\Phi_3(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = \\ = C_3 = \mathrm{const}, \tag{348}$$

$\ldots$

$$\Phi_{n-2}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \sqrt{z_1^2+z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = \\ = C_{n-2} = \mathrm{const}, \tag{349}$$

$$\Phi_{n-1}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = \\ = C_{n-1} = \mathrm{const}, \tag{350}$$

$$\Phi_n(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}. \tag{351}$$

Первый интеграл (346) является интегралом полной энергии. Последний первый интеграл (351) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_{n-2} и найден выше.

Теперь переформулируем теорему 1.13.

Теорема 1.14. *Система* (337)—(345) *обладает* n *независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2+\sin^2\alpha}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}\sin\alpha} = \\ = C_1' = \mathrm{const}, \tag{352}$$

$$\Psi_2(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{353}$$

$$\Psi_3(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}{z_1\sin\beta_{n-3}} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{354}$$

$\ldots$

$$\Psi_{n-2}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2}\sin\beta_2} = \\ = C_{n-2}' = \mathrm{const}, \tag{355}$$

$$\Psi_{n-1}(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2}}{\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2}\sin\beta_1} = \\ = C_{n-1}' = \mathrm{const}, \tag{356}$$

$$\Psi_n(z_{n-1},\ldots,z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_n' = \mathrm{const}. \tag{357}$$

Функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 1.14 (в отличие от теоремы 1.13) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (352)—(357) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто могут не быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

В силу теоремы 1.14 преобразованный набор первых интегралов (352)—(357) системы (337)—(345) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остаётся набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (337)—(345) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (324) система (337)—(345) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1}, \tag{358}$$

$$w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{359}$$

$$w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{360}$$

$$\begin{gathered} w'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\,\frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s},\\ \beta'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}),\quad s=1,\ldots,n-3, \end{gathered} \tag{361}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{362}$$

где выполнены условия (330).

Видно, что система (358)—(362) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (358)—(360) — третьего, а системы (361) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (358)—(362) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (358)—(360), по одному для систем (361) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (362) (т. е. всего n).

Замечание 1.7. Выпишем первые интегралы (352)—(357) в переменных $w_1,\ldots,w_{n-1}$ согласно (324). Получим

$$\begin{gathered} \Theta_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2+w_{n-1}^2+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = \\ = C_1'' = \text{const}, \end{gathered} \tag{363}$$

$$\Theta_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{364}$$

$$
\Theta_{s+2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = \\
= C''_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1,\ldots,n-3, \tag{365}
$$

$$
\Theta_n(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C''_n = \mathrm{const}. \tag{366}
$$

Таким образом, два независимых первых интеграла (363), (364) достаточны для интегрирования системы (358)—(360), первые интегралы (365) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$
\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1,\ldots,n-3, \tag{367}
$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (361), и, наконец, первый интеграл (366) достаточен для «привязывания» уравнения (362). Доказана следующая теорема.

Теорема 1.15. *Система* (337)—(345) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (n).

1.4.6. Полный список инвариантных соотношений при любом конечном n

Перейдём теперь к интегрированию искомой системы (108)—(116) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Для полного интегрирования системы (108)—(116) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (324) система (108)—(116) распадается следующим образом:

$$
\alpha' = -w_{n-1} + b\sin\alpha, \tag{368}
$$

$$
w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{369}
$$

$$
w'_{n-2} = w_{n-2}w_{n-1}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{370}
$$

$$
\begin{gathered}
w'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\,\frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\
\beta'_s = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \quad s = 1,\ldots,n-3,
\end{gathered} \tag{371}
$$

$$
\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{372}
$$

где выполнены условия (330).

Видно, что система (368)—(372) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (368)—(370) — третьего, а системы (371) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (368)—(372) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (368)—(370), по одному для систем (371) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (372) (т. е. всего n).

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (368)—(370) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dw_{n-1}}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_{n-1}+b\sin\alpha}, \\ \frac{dw_{n-2}}{d\alpha} &= \frac{w_{n-2}w_{n-1}\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_{n-1}+b\sin\alpha}. \end{aligned} \tag{373}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (373) в алгебраическом виде:

$$\begin{aligned} \frac{dw_{n-1}}{d\tau} &= \frac{\tau - w_{n-1}^2/\tau}{-w_{n-1}+b\tau}, \\ \frac{dw_{n-2}}{d\tau} &= \frac{w_{n-2}w_{n-1}/\tau}{-w_{n-1}+b\tau}. \end{aligned} \tag{374}$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2} = u_1\tau, \quad w_{n-1} = u_2\tau, \tag{375}$$

приводим систему (374) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1-u_1^2}{-u_2+b}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1u_2}{-u_2+b}, \end{aligned} \tag{376}$$

что эквивалентно

$$\begin{aligned} \tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{-u_2+b}, \\ \tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2-bu_1}{-u_2+b}. \end{aligned} \tag{377}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (377) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1-u_1^2+u_2^2-bu_2}{2u_1u_2-bu_1}, \tag{378}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}\right) = 0. \tag{379}$$

Итак, уравнение (378) имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{380}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \frac{w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2 - bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const.} \quad (381)$$

Замечание 1.8. При $b = 0$ первый интеграл (381) системы (368)—(370) совпадает с первым интегралом (363) системы (358)—(360), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (381), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (368)—(370) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель и знаменатель выражения (381) являются первыми интегралами системы (358)—(360)).

Найдём явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (368)—(370). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (380) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \quad (382)$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \quad (383)$$

и фазовое пространство системы (368)—(370) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых в координатах u_1, u_2 равенством (382).

Таким образом, в силу соотношения (380) первое уравнение системы (377) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \quad (384)$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\Big\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\Big\}. \quad (385)$$

При этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (383). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (368)—(370) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau} = \int\frac{(b - u_2)du_2}{2(1 - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\}/2}. \quad (386)$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \quad (387)$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = r_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4, \quad (388)$$

то правая часть равенства (386) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4r_1^2)}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}-b\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}=$$
$$=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}}{C_1}\pm 1\right|\pm\frac{b}{2}I_1, \quad (389)$$

где

$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)}, \quad r_3=\sqrt{b_1^2-4r_1^2}. \quad (390)$$

При вычислении интеграла (390) возможны три случая.

I. $b>2$.

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right|+\mathrm{const}. \quad (391)$$

II. $b<2$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-b^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}. \quad (392)$$

III. $b=2$.

$$I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\mathrm{const}. \quad (393)$$

Возвращаясь к переменной

$$r_1=\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}-\frac{b}{2}, \quad (394)$$

имеем окончательный вид для величины I_1.

I. $b>2$.

$$I_1=-\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4}\pm 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right|+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4}\mp 2r_1}{\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}}\right|+\mathrm{const}. \quad (395)$$

II. $b<2$.

$$I_1=\frac{1}{\sqrt{4-b^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}. \quad (396)$$

III. $b=2$.

$$I_1=\mp\frac{2r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4r_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}. \quad (397)$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (368)—(370), мы предъявили полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 1.9. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (380). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \qquad (398)$$

Итак, найдены два первых интеграла (381), (398) независимой системы третьего порядка (368)—(370). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (371) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (372).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (365), (366), а именно:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \qquad (399)$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \mathrm{const}. \qquad (400)$$

При этом в левую часть равенства (400) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (399) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 1.16. *Система* (368)—(372) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (n): (381), (398), (399), (400).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (7), (15) при условии (96) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2-n+4}{2}, \quad n > 2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (44), циклические первые интегралы вида (40), (41), первый интеграл вида (381), также имеется первый интеграл, выражающийся соотношениями (391)—(398), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (399), (400).

Теорема 1.17. *Система* (7), (15) *при условиях* (44), (96), (40), (41) *обладает* $(n^2-n+4)/2$, $n > 2$, *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), n *из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

1.4.7. Топологические аналогии

Рассмотрим следующую систему уравнений порядка $2n-3$:

$$
\begin{gathered}
\ddot{\xi} + b_*\dot{\xi}\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - [\dot{\eta}_1{}^2 + \dot{\eta}_2{}^2\sin^2\eta_1 + \dot{\eta}_3{}^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \ldots + \\
+ \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
\ddot{\eta}_1 + b_*\dot{\eta}_1\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_1\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - [\dot{\eta}_2{}^2 + \dot{\eta}_3{}^2\sin^2\eta_2 + \dot{\eta}_4{}^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots + \\
+ \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
\ddot{\eta}_2 + b_*\dot{\eta}_2\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_2\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \\
- [\dot{\eta}_3{}^2 + \dot{\eta}_4{}^2\sin^2\eta_3 + \dot{\eta}_5{}^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}] \times \\
\times \sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
\ddot{\eta}_3 + b_*\dot{\eta}_3\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_3\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_3\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\dot{\eta}_2\dot{\eta}_3\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - \\
- [\dot{\eta}_4{}^2 + \dot{\eta}_5{}^2\sin^2\eta_4 + \dot{\eta}_6{}^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}] \times \\
\times \sin\eta_3\cos\eta_3 = 0, \\
\ldots \\
\ddot{\eta}_{n-4} + b_*\dot{\eta}_{n-4}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-4}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-4}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + \\
+ 2\dot{\eta}_{n-5}\dot{\eta}_{n-4}\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}} - [\dot{\eta}_{n-3}^2 + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4} = 0, \\
\ddot{\eta}_{n-3} + b_*\dot{\eta}_{n-3}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-3}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + \\
+ 2\dot{\eta}_{n-4}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} - \dot{\eta}_{n-2}^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0, \\
\ddot{\eta}_{n-2} + b_*\dot{\eta}_{n-2}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-2}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\dot{\eta}_{n-3}\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0, \quad b_* > 0,
\end{gathered}
\tag{401}
$$

описывающую закреплённый n-мерный маятник, помещённый в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т. е. механическую систему в неконсервативном поле сил (см. также [15, 17, 74, 102, 112, 151, 155, 170, 173, 174, 178, 181, 197, 210, 214, 227, 245, 253, 267, 269]). Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен $2(n-1)$, но фазовая переменная η_{n-2} является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка. Фазовым пространством этой системы является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^{n-1}\{\dot{\xi},\dot{\eta}_1,\ldots,\dot{\eta}_{n-2},\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\} \tag{402}$$

к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi,\eta_1,\ldots,\eta_{n-2}\}$, при этом уравнения, переводящие систему (401) в систему на касательном расслоении к двумерной сфере

$$\dot{\eta}_2 \equiv \dot{\eta}_3 \equiv \ldots \equiv \dot{\eta}_{n-2} \equiv 0, \tag{403}$$

и уравнения больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0,\ \dot{\eta}_2 \equiv 0,\ldots,\ \dot{\eta}_{n-2} \equiv 0 \tag{404}$$

задают семейства интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (401) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (402) к $(n-1)$-мерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.18. *Система* (7), (15) *при условиях* (44), (96), (40), (41) *эквивалентна динамической системе* (401).

Действительно, достаточно положить $\alpha=\xi$, $\beta_1=\eta_1,\ldots$, $\beta_{n-2}=\eta_{n-2}$, $b=-b_*$.

О более общих топологических аналогиях см. также [16, 24, 64, 65, 69, 70, 116, 130, 152, 168, 187].

1.5. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

1.5.1. Введение зависимости от угловой скорости

Данный раздел посвящён динамике n-мерного твёрдого тела в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Но, поскольку данный раздел посвящён исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введём такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x=(x_{1N},\ldots,x_{nN})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на $(n-1)$-мерный диск, $Q=(Q_1,\ldots,Q_n)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N},\ldots,x_{nN})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [5, 13, 14, 22, 23, 56, 59, 62].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{405}$$

где $R=(R_1,\ldots,R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \dots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{406}$$

Здесь Ω — тензор угловой скорости, $(h_1, \dots, h_n)$ — некоторые положительные параметры (ср. с [51—53, 61]). Применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$, имеем

$$x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{r_{n-1}}}{v},\ x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_{r_{n-2}}}{v}, \dots,$$
$$x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1}h_1\frac{\omega_{r_1}}{v}. \tag{407}$$

Здесь $\omega_{r_1}, \dots, \omega_{r_{n-1}}$ — оставшиеся (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости Ω. В частности, при $n = 5$ имеем:

$$\begin{gathered} x_{2N} = Q_2 - h_1\frac{\omega_{10}}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1\frac{\omega_9}{v}, \\ x_{4N} = Q_4 - h_1\frac{\omega_7}{v}, \quad x_{5N} = Q_5 + h_1\frac{\omega_4}{v}. \end{gathered} \tag{408}$$

1.5.2. Приведённая система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [113, 114], пользуясь (48), имеем

$$Q = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{409}$$

а динамические функции s, $x_{2N}, \dots, x_{nN}$ примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \qquad A, B > 0. \tag{410}$$

говорящем о том, что в рассматриваемой системе присутствует дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости), причём $h_2 = \ldots = h_n$ ввиду динамической симметрии тела. При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $s = 1, \dots, n-2$, входящие в систему (81)—(88), примут следующий вид:

$$\begin{gathered} \Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha - \frac{h_1}{v}z_{n-1}, \\ \Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \frac{h_1}{v}z_{n-2}, \dots, \\ \Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = (-1)^{n+1}\frac{h_1}{v}z_1. \end{gathered} \tag{411}$$

Тогда благодаря неинтегрируемой связи (44) вне и только вне многообразия (80) динамическая часть уравнений движения (система (81)—(88)) примет вид аналитической системы

$$\dot\alpha = -\left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)z_{n-1} + \frac{\sigma ABv}{(n-2)I_2}\sin\alpha, \tag{412}$$

$$\dot z_{n-1} = \frac{ABv^2}{(n-2)I_2}\sin\alpha\cos\alpha - \left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)(z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \\ - \frac{Bh_1v}{(n-2)I_2}z_{n-1}\cos\alpha, \tag{413}$$

$$\dot z_{n-2} = \left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ + \left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)(z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \frac{Bh_1v}{(n-2)I_2}z_{n-2}\cos\alpha, \tag{414}$$

$$\dot z_{n-3} = \left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \\ - \left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \frac{Bh_1v}{(n-2)I_2}z_{n-3}\cos\alpha, \tag{415}$$

$$\ldots$$

$$\dot z_1 = \left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} - \\ - \frac{Bh_1v}{(n-2)I_2}z_1\cos\alpha, \tag{416}$$

$$\dot\beta_1 = \left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{417}$$

$$\dot\beta_2 = -\left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{418}$$

$$\ldots$$

$$\dot\beta_{n-2} = (-1)^{n+1}\left(1+\frac{\sigma Bh_1}{(n-2)I_2}\right)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{419}$$

Вводя безразмерные переменные, параметры и дифференцирование

$$
\begin{gathered}
z_k \mapsto n_0 v z_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2} \quad n > 2, \quad b = \sigma n_0, \\
H_1 = \frac{Bh_1}{(n-2)I_2 n_0}, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle ' \rangle,
\end{gathered} \tag{420}
$$

приведём систему (412)—(419) к виду

$$
\alpha' = -(1 + bH_1) z_{n-1} + b \sin\alpha, \tag{421}
$$

$$
z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)(z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 z_{n-1}\cos\alpha, \tag{422}
$$

$$
\begin{gathered}
z'_{n-2} = (1 + bH_1) z_{n-2} z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (1 + bH_1)(z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\
- H_1 z_{n-2}\cos\alpha,
\end{gathered} \tag{423}
$$

$$
\begin{gathered}
z'_{n-3} = (1 + bH_1) z_{n-3} z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1 + bH_1) z_{n-3} z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\
- (1 + bH_1)(z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - H_1 z_{n-3}\cos\alpha,
\end{gathered} \tag{424}
$$

$\ldots$

$$
z'_1 = (1 + bH_1) z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1} z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} - H_1 z_1\cos\alpha, \tag{425}
$$

$$
\beta'_1 = (1 + bH_1) z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{426}
$$

$$
\beta'_2 = -(1 + bH_1) z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{427}
$$

$\ldots$

$$
\beta'_{n-3} = (-1)^n (1 + bH_1) z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{428}
$$

$$
\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} (1 + bH_1) z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \tag{429}
$$

Видно, что в системе (421)—(429) порядка $2(n-1)$, которую можно рассматривать на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, образовалась независимая система (421)—(428) порядка $2n-3$ на своём $(2n-3)$-мерном многообразии. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.19. *Система* (7), (15) *при условиях* (44), (40), (41) *редуцируется к динамической системе* (81)—(88) *на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{z_{n-1}, \ldots, z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ *$(n-1)$-мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. *В частности, при условии* (410) *она редуцируется к системе* (421)—(429).

1.5.3. Полный список инвариантных соотношений при любом конечном n

Для полного интегрирования системы (421)—(429) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов для интегрирования систем до n.

Действительно, после замены переменных

$$
\begin{gathered}
\begin{pmatrix} z_{n-1} \\ z_{n-2} \\ \ldots \\ z_2 \\ z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \\
w_{n-1} = z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-2}^2}, \\
w_{n-3} = \frac{z_2}{z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{z_3}{\sqrt{z_1^2 + z_2^2}}, \ldots, \\
w_2 = \frac{z_{n-3}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{z_{n-2}}{\sqrt{z_1^2 + \ldots + z_{n-3}^2}},
\end{gathered} \tag{430}
$$

система (421)—(429) распадается следующим образом:

$$
\alpha' = -(1 + bH_1) w_{n-1} + b \sin\alpha, \tag{431}
$$

$$
w'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1) w_{n-2}^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_{n-1} \cos\alpha, \tag{432}
$$

$$
w'_{n-2} = (1 + bH_1) w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_{n-2} \cos\alpha, \tag{433}
$$

$$
\begin{aligned}
w'_s &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\
\beta'_s &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \quad s = 1, \ldots, n-3,
\end{aligned} \tag{434}
$$

$$
\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}). \tag{435}
$$

При этом выполнены условия

$$
\begin{aligned}
&d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\
&d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \\
&\ldots \\
&d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\
&\quad = (-1)^{n+1} Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}}
\end{aligned} \tag{436}
$$

и

$$z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \quad k = 1, \ldots, n-2, \text{ —} \tag{437}$$

функции согласно замене (430).

Видно, что система (431)—(435) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (431)—(433) — третьего, а системы (434) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (431)—(435) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (431)—(433), по одному для систем (434) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (435) (т. е. всего n).

Поставим в соответствие системе третьего порядка (431)—(433) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{gathered}
\frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_{n-2}^2\cos\alpha/\sin\alpha - H_1 w_{n-1}\cos\alpha}{-(1+bH_1)w_{n-1} + b\sin\alpha}, \\
\frac{dw_{n-2}}{d\alpha} = \frac{(1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\cos\alpha/\sin\alpha - H_1 w_{n-2}\cos\alpha}{-(1+bH_1)w_{n-1} + b\sin\alpha}.
\end{gathered} \tag{438}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (438) в алгебраическом виде:

$$\begin{gathered}
\frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \frac{\tau - (1+bH_1)w_{n-2}^2/\tau - H_1 w_{n-1}}{-(1+bH_1)w_{n-1} + b\tau}, \\
\frac{dw_{n-2}}{d\tau} = \frac{(1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}/\tau - H_1 w_{n-2}}{-(1+bH_1)w_{n-1} + b\tau}.
\end{gathered} \tag{439}$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2} = u_1\tau, \quad w_{n-1} = u_2\tau, \tag{440}$$

приводим систему (439) к виду

$$\begin{gathered}
\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - (1+bH_1)u_1^2 - H_1 u_2}{-(1+bH_1)u_2 + b}, \\
\tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{(1+bH_1)u_1 u_2 - H_1 u_1}{-(1+bH_1)u_2 + b},
\end{gathered} \tag{441}$$

эквивалентному

$$\begin{gathered}
\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{(1+bH_1)(u_2^2 - u_1^2) - (b+H_1)u_2 + 1}{-(1+bH_1)u_2 + b}, \\
\tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2(1+bH_1)u_1 u_2 - (b+H_1)u_1}{-(1+bH_1)u_2 + b}.
\end{gathered} \tag{442}$$

Поставим системе второго порядка (442) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (1+bH_1)(u_1^2 - u_2^2) - (b+H_1)u_2}{2(1+bH_1)u_1 u_2 - (b+H_1)u_1}, \tag{443}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1+bH_1)(u_2^2+u_1^2)-(b+H_1)u_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{444}$$

Итак, уравнение (443) имеет первый интеграл

$$\frac{(1+bH_1)(u_2^2+u_1^2)-(b+H_1)u_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{445}$$

который в прежних переменных имеет вид

$$\Theta_1(w_{n-1},w_{n-2};\alpha)= \\ =\frac{(1+bH_1)(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)-(b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}. \tag{446}$$

Замечание 1.10. Рассмотрим систему (431)—(433) с переменной диссипацией с нулевым средним [83, 108, 110, 111, 168], становящуюся консервативной при $b=H_1$:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -(1+b^2)w_{n-1}+b\sin\alpha,\\
w_{n-1}' &= \sin\alpha\cos\alpha-(1+b^2)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-bw_{n-1}\cos\alpha,\\
w_{n-2}' &= (1+b^2)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-bw_{n-2}\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{447}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$(1+b^2)(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)-2bw_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha=C_1^*=\mathrm{const}, \tag{448}$$

$$w_{n-2}\sin\alpha=C_2^*=\mathrm{const}. \tag{449}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (448), (449) также является первым интегралом системы (447). Но при $b\neq H_1$ каждая из функций

$$(1+bH_1)(w_{n-1}^2+w_{n-2}^2)-(b+H_1)w_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha \tag{450}$$

и (449) по отдельности не является первым интегралом системы (431)—(433). Однако отношение функций (450), (449) является первым интегралом системы (431)—(433) при любых b, H_1.

Найдём явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (431)—(433). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (445) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2-\frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2=\frac{(b-H_1)^2+C_1^2-4}{4(1+bH_1)^2}. \tag{451}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b-H_1)^2+C_1^2-4\geqslant 0, \tag{452}$$

и фазовое пространство системы (431)—(433) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (451). Таким образом, в силу соотношения (445) первое уравнение системы (442) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{2(1+bH_1)u_2^2-2(b+H_1)u_2+2-C_1U_1(C_1,u_2)}{b-(1+bH_1)u_2}, \tag{453}$$

где

$$\begin{gathered}U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2(1+bH_1)}\{C_1\pm U_2(C_1,u_2)\},\\ U_2(C_1,u_2)=\sqrt{C_1^2-4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2}),\end{gathered} \tag{454}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (452). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (431)—(433) примет вид

$$\begin{gathered}\int\frac{d\tau}{\tau}=\\ =\int\frac{(b-(1+bH_1)u_2)du_2}{2(1-(b+H_1)u_2+(1+bH_1)u_2^2)-C_1\{C_1\pm U_2(C_1,u_2)\}/(2(1+bH_1))}.\end{gathered} \tag{455}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \tag{456}$$

Если

$$u_2-\frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}=r_1,\quad b_1^2=(b-H_1)^2+C_1^2-4, \tag{457}$$

то правая часть равенства (455) примет вид

$$\begin{gathered}-\frac{1}{4}\int\frac{d(b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2)}{(b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2}}-\\ -(b-H_1)(1+bH_1)\int\frac{dr_1}{(b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2}}=\\ =-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2}}{C_1}\pm 1\right|\pm\frac{b-H_1}{2}I_1,\end{gathered} \tag{458}$$

где

$$I_1=\int\frac{dr_3}{\sqrt{b_1^2-r_3^2}(r_3\pm C_1)},\quad r_3=\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)r_1^2}. \tag{459}$$

При вычислении интеграла (459) возможны три случая.

I. $|b-H_1|>2$.

$$
\begin{aligned}
I_1 = &-\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\times\\
&\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}+\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+\\
&+\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\times\\
&\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}-\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{r_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+\text{const}.
\end{aligned}
\tag{460}
$$

II. $|b-H_1|<2$.

$$
I_1=\frac{1}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1r_3+b_1^2}{b_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}.
\tag{461}
$$

III. $|b-H_1|=2$.

$$
I_1=\mp\frac{\sqrt{b_1^2-r_3^2}}{C_1(r_3\pm C_1)}+\text{const}.
\tag{462}
$$

Возвращаясь к переменной

$$
r_1=\frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}-\frac{b+H_1}{2(1+bH_1)},
\tag{463}
$$

получаем окончательный вид для величины I_1.

I. $|b-H_1|>2$.

$$
\begin{aligned}
I_1 = &-\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\times\\
&\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}\pm 2(1+bH_1)r_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2r_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+\\
&+\frac{1}{2\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\times\\
&\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b-H_1)^2-4}\mp 2(1+bH_1)r_1}{\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2r_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b-H_1)^2-4}}\right|+\text{const}.
\end{aligned}
\tag{464}
$$

II. $|b-H_1|<2$.

$$
I_1=\frac{1}{\sqrt{4-(b-H_1)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2r_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4(1+bH_1)^2r_1^2}\pm C_1)}+\text{const}.
\tag{465}
$$

III. $|b - H_1| = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2(1 + bH_1)r_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4(1 + bH_1)^2 r_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{466}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (431)—(433), мы предъявили полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 1.11. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (445). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{467}$$

Итак, найдены два первых интеграла (446), (467) независимой системы третьего порядка (431)—(433). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (434) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (435).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (365), (366), а именно:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1 + w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{468}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \text{const}, \tag{469}$$

при этом в левую часть равенства (469) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (468) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 1.20. *Система* (431)—(435) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (n): (446), (467), (468), (469).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (7), (15) при условии (410) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 4}{2}, \quad n > 2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (44), циклические первые интегралы вида (40), (41), первый интеграл вида (446), также имеется первый интеграл, выражающийся соотношениями (460)—(467), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (468), (469).

Теорема 1.21. *Система* (7), (15) *при условиях* (44), (410), (40), (41) *обладает* $(n^2-n+4)/2$, $n > 2$, *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), n *из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного* *анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

1.5.4. Топологические аналогии

Рассмотрим следующую систему уравнений порядка $2n-3$:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{\xi} + (b_* - H_1^*)\dot{\xi}\cos\xi + \sin\xi\cos\xi - \\
&\quad - [\dot{\eta}_1{}^2 + \dot{\eta}_2{}^2\sin^2\eta_1 + \dot{\eta}_3{}^2\sin^2\eta_1\sin^2\eta_2 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_1\ldots\sin^2\eta_{n-3}] \times \\
&\quad \times \frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0, \\
&\ddot{\eta}_1 + (b_* - H_1^*)\dot{\eta}_1\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_1\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} - \\
&\quad - [\dot{\eta}_2{}^2 + \dot{\eta}_3{}^2\sin^2\eta_2 + \dot{\eta}_4{}^2\sin^2\eta_2\sin^2\eta_3 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_2\ldots\sin^2\eta_{n-3}] \times \\
&\quad \times \sin\eta_1\cos\eta_1 = 0, \\
&\ddot{\eta}_2 + (b_* - H_1^*)\dot{\eta}_2\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_2\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_2\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} - \\
&\quad - [\dot{\eta}_3{}^2 + \dot{\eta}_4{}^2\sin^2\eta_3 + \dot{\eta}_5{}^2\sin^2\eta_3\sin^2\eta_4 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_3\ldots\sin^2\eta_{n-3}] \times \\
&\quad \times \sin\eta_2\cos\eta_2 = 0, \\
&\ddot{\eta}_3 + (b_* - H_1^*)\dot{\eta}_3\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_3\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_3\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + 2\dot{\eta}_2\dot{\eta}_3\frac{\cos\eta_2}{\sin\eta_2} - \\
&\quad - [\dot{\eta}_4{}^2 + \dot{\eta}_5{}^2\sin^2\eta_4 + \dot{\eta}_6{}^2\sin^2\eta_4\sin^2\eta_5 + \ldots + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_4\ldots\sin^2\eta_{n-3}] \times \\
&\quad \times \sin\eta_3\cos\eta_3 = 0, \\
&\ldots \\
&\ddot{\eta}_{n-4} + (b_* - H_1^*)\dot{\eta}_{n-4}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-4}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-4}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + \\
&\quad + 2\dot{\eta}_{n-5}\dot{\eta}_{n-4}\frac{\cos\eta_{n-5}}{\sin\eta_{n-5}} - [\dot{\eta}_{n-3}^2 + \dot{\eta}_{n-2}^2\sin^2\eta_{n-3}]\sin\eta_{n-4}\cos\eta_{n-4} = 0, \\
&\ddot{\eta}_{n-3} + (b_* - H_1^*)\dot{\eta}_{n-3}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-3}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + \\
&\quad + 2\dot{\eta}_{n-4}\dot{\eta}_{n-3}\frac{\cos\eta_{n-4}}{\sin\eta_{n-4}} - \dot{\eta}_{n-2}^2\sin\eta_{n-3}\cos\eta_{n-3} = 0, \\
&\ddot{\eta}_{n-2} + (b_* - H_1^*)\dot{\eta}_{n-2}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta}_{n-2}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
&\quad + 2\dot{\eta}_1\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_1}{\sin\eta_1} + \ldots + 2\dot{\eta}_{n-3}\dot{\eta}_{n-2}\frac{\cos\eta_{n-3}}{\sin\eta_{n-3}} = 0, \quad b_* > 0, \quad H_1^* > 0,
\end{aligned}
\tag{470}
$$

описывающую закреплённый n-мерный маятник, помещённый в поток набегающей среды при наличии зависимости момента сил от угловой скорости, т. е.

механическую систему в неконсервативном поле сил (см. также [180, 198, 207]). Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен $2(n-1)$, но фазовая переменная η_{n-2} является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка. Фазовым пространством этой системы является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^{n-1}\{\dot{\xi}, \dot{\eta}_1, \ldots, \dot{\eta}_{n-2}, \xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\} \tag{471}$$

к $(n-1)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-1}\{\xi, \eta_1, \ldots, \eta_{n-2}\}$, при этом уравнения, переводящие систему (470) в систему на касательном расслоении к двумерной сфере

$$\dot{\eta}_2 \equiv \dot{\eta}_3 \equiv \ldots \equiv \dot{\eta}_{n-2} \equiv 0, \tag{472}$$

и уравнения больших кругов

$$\dot{\eta}_1 \equiv 0,\ \dot{\eta}_2 \equiv 0, \ldots, \quad \dot{\eta}_{n-2} \equiv 0 \tag{473}$$

задают семейства интегральных многообразий.

Нетрудно убедиться, что система (470) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (471) к $(n-1)$-мерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.22. *Система* (7), (15) *при условиях* (44), (410), (40), (41) *эквивалентна динамической системе* (470).

Действительно, достаточно положить $\alpha = \xi$, $\beta_1 = \eta_1$, $\ldots$, $\beta_{n-2} = \eta_{n-2}$, $b = -b_*$, $H_1 = -H_1^*$.

О более общих топологических аналогиях см. [222, 228, 232, 242, 244, 249, 255, 259, 271].

2. Случаи интегрируемости, соответствующие движению твёрдого тела в n-мерном пространстве. II

В данном разделе систематизируются результаты по исследованию уравнений движения динамически симметричного n-мерного твёрдого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил. Его вид заимствован из динамики реальных твёрдых тел, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая во всё время движения центр масс тела двигаться прямолинейно и равномерно, что означает наличие в системе неконсервативной пары сил (см. также [45, 47, 89, 116, 161, 168, 190]).

2.1. Предварительные сведения

Ранее в [116] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [168] плоская задача была обобщена на пространственный (трёхмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данном разделе результаты относятся к случаю, когда всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму $(n-1)$-мерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено в направлении, перпендикулярном данному диску. Данные результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость распространена со случаев движения в пространствах меньшей размерности.

2.2. Более общая задача о движении со следящей силой

2.2.1. Динамическая часть уравнений движения

Рассмотрим движение однородного динамически симметричного (случай (5)) твёрдого тела с «передним торцом» ($(n-1)$-мерным диском, «взаимодействующим со средой, заполняющей n-мерное пространство») в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности [48].

Пусть $(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ — (обобщённые) сферические координаты вектора скорости некоторой характерной точки D твёрдого тела (D — центр $(n-1)$-мерного диска, лежащий на оси динамической симметрии тела), Ω — тензор угловой скорости тела, $Dx_1 \ldots x_n$ — система координат, связанная с телом, при этом ось симметрии CD совпадает с осью Dx_1 (C — центр масс), а оси $Dx_2, Dx_3, \ldots, Dx_n$ лежат в гиперплоскости диска, I_1, I_2, $I_3 = I_2, \ldots$, $I_n = I_2$, m — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1 \ldots x_n$:

$$\mathbf{DC} = \{-\sigma, 0, \ldots, 0\},$$

$$\mathbf{v}_D = v\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{474}$$

где по-прежнему

$$\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta_1 \\ \sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 \\ \ldots \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} \\ \sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} \end{pmatrix} — \tag{475}$$

единичный вектор по оси вектора $\mathbf{v}$. При этом в случае (5) примем также разложение для функции воздействия среды на n-мерное тело:

$$\mathbf{S} = \{-S, 0, \ldots, 0\}, \tag{476}$$

т. е. в данном случае внешняя сила $\mathbf{F}$ равна $\mathbf{S}$. Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [113, 114], см. далее), которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbf{R}^n$, при этом касательные силы воздействия среды на $(n-1)$-мерный диск отсутствуют. Напомним, что в случае $n = 5$ данная система примет вид

$$\begin{aligned} &\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha - \omega_{10}v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_9 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \\ &\quad - \omega_7 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_4 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ &\quad + \sigma(\omega_{10}^2 + \omega_9^2 + \omega_7^2 + \omega_4^2) = \frac{F_x}{m} = -\frac{S}{m}, \end{aligned} \tag{477}$$

$$\begin{aligned} &\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \\ &\quad + \omega_{10}v\cos\alpha - \omega_8 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \omega_6 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - \\ &\quad - \omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \sigma(\omega_9\omega_8 + \omega_6\omega_7 + \omega_3\omega_4) - \sigma\dot{\omega}_{10} = 0, \end{aligned} \tag{478}$$

$$\begin{aligned} &\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 - \\ &\quad - \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_9 v\cos\alpha + \omega_8 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \\ &\quad - \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 - \\ &\quad - \sigma(\omega_8\omega_{10} - \omega_5\omega_7 - \omega_2\omega_4) + \sigma\dot{\omega}_9 = 0, \end{aligned} \tag{479}$$

$$\begin{aligned} &\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \\ &\quad + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 + \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\cos\beta_3 - \\ &\quad - \dot{\beta}_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \omega_7 v\cos\alpha - \omega_6 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \\ &\quad + \omega_5 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ &\quad + \sigma(\omega_6\omega_{10} + \omega_5\omega_9 - \omega_1\omega_4) - \sigma\dot{\omega}_7 = 0, \end{aligned} \tag{480}$$

$$\begin{aligned} &\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ &\quad + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \dot{\beta}_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \end{aligned}$$

$$
\begin{gathered}
+\dot{\beta}_3 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\omega_4 v\cos\alpha+\omega_3 v\sin\alpha\cos\beta_1-\\
-\omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2+\omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3-\\
-\sigma(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)+\sigma\dot{\omega}_4=0, \qquad (481)
\end{gathered}
$$

где

$$
S=s(\alpha)v^2, \quad \sigma=CD, \quad v>0. \qquad (482)
$$

Вспомогательная матрица (14) для вычисления момента силы сопротивления (приложенной в точке N) примет вид

$$
\begin{pmatrix} 0 & x_{2N} & \ldots & x_{nN} \\ -S & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (483)
$$

Тогда может быть получена часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствуют алгебре Ли $\mathrm{so}(n)$. Напомним, что в случае $n=5$ данная система примет вид (см. также [104, 106])

$$
(\lambda_4+\lambda_5)\dot{\omega}_1+(\lambda_4-\lambda_5)(\omega_4\omega_7+\omega_3\omega_6+\omega_2\omega_5)=0, \qquad (484)
$$

$$
(\lambda_3+\lambda_5)\dot{\omega}_2+(\lambda_5-\lambda_3)(\omega_1\omega_5-\omega_3\omega_8-\omega_4\omega_9)=0, \qquad (485)
$$

$$
(\lambda_2+\lambda_5)\dot{\omega}_3+(\lambda_2-\lambda_5)(\omega_4\omega_{10}-\omega_2\omega_8-\omega_1\omega_6)=0, \qquad (486)
$$

$$
\begin{gathered}
(\lambda_1+\lambda_5)\dot{\omega}_4+(\lambda_5-\lambda_1)(\omega_3\omega_{10}+\omega_2\omega_9+\omega_1\omega_7)=\\
=-x_{5N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \qquad (487)
\end{gathered}
$$

$$
(\lambda_3+\lambda_4)\dot{\omega}_5+(\lambda_3-\lambda_4)(\omega_7\omega_9+\omega_6\omega_8+\omega_1\omega_2)=0, \qquad (488)
$$

$$
(\lambda_2+\lambda_4)\dot{\omega}_6+(\lambda_4-\lambda_2)(\omega_5\omega_8-\omega_7\omega_{10}-\omega_1\omega_3)=0, \qquad (489)
$$

$$
\begin{gathered}
(\lambda_1+\lambda_4)\dot{\omega}_7+(\lambda_1-\lambda_4)(\omega_1\omega_4-\omega_6\omega_{10}-\omega_5\omega_9)=\\
=x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \qquad (490)
\end{gathered}
$$

$$
(\lambda_2+\lambda_3)\dot{\omega}_8+(\lambda_2-\lambda_3)(\omega_9\omega_{10}+\omega_5\omega_6+\omega_2\omega_3)=0, \qquad (491)
$$

$$
\begin{gathered}
(\lambda_1+\lambda_3)\dot{\omega}_9+(\lambda_3-\lambda_1)(\omega_8\omega_{10}-\omega_5\omega_7-\omega_2\omega_4)=\\
=-x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2, \qquad (492)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
(\lambda_1+\lambda_2)\dot{\omega}_{10}+(\lambda_1-\lambda_2)(\omega_8\omega_9+\omega_6\omega_7+\omega_3\omega_4)=\\
=x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2. \qquad (493)
\end{gathered}
$$

Таким образом, фазовым пространством системы (477)—(481), (484)—(493) 15-го порядка является прямое произведение 5-мерного многообразия на алгебру Ли $\mathrm{so}(5)$:

$$
\mathbf{R}^1\times\mathbf{S}^4\times\mathrm{so}(5), \qquad (494)
$$

а в общем случае это пространство

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{S}^{n-1} \times \mathrm{so}(n). \tag{495}$$

2.2.2. Следствия динамической симметрии

Также напомним, что система (7), в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_2 = \ldots = I_n, \tag{496}$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_{k_1} \equiv \omega_{k_1}^0 = \mathrm{const}, \ldots, \ \omega_{k_s} \equiv \omega_{k_s}^0 = \mathrm{const}, \quad s = \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \tag{497}$$

При этом $k_1 = 1, \ldots, k_s$ — некоторые s неповторяющихся чисел из множества $W_1 = \{1, 2, \ldots, n(n-1)/2\}$. Рассмотрим набор (497) первых интегралов на своих нулевых уровнях:

$$\omega_{k_1}^0 = \ldots = \omega_{k_s}^0 = 0. \tag{498}$$

В частности, система (477)—(481), (484)—(493) обладает первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0, \quad \omega_2 \equiv \omega_2^0, \quad \omega_3 \equiv \omega_3^0, \quad \omega_5 \equiv \omega_5^0, \quad \omega_6 \equiv \omega_6^0, \quad \omega_8 \equiv \omega_8^0. \tag{499}$$

Рассмотрим их на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0 = \omega_5^0 = \omega_6^0 = \omega_8^0 = 0. \tag{500}$$

Ненулевых компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_p}$ тензора Ω осталось

$$p = \frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n - 1$$

штук (здесь $r_1, \ldots, r_p$ — оставшиеся p чисел из множества W_1, не равные $k_1, \ldots, k_s$).

2.2.3. Выбор следящей силы и новые квазискорости в системе

Если рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, лежащей на прямой $CD = Dx_1$ и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенства

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const} \tag{501}$$

($\mathbf{V}_C$ — скорость центра масс, см. также [168]), то в системе (7), (15) (в частности, в системе (477)—(481), (484)—(493)) вместо F_x должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \tag{502}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{503}$$

Случай (503) выбора величины T следящей силы является частным случаем возможности отделения независимой подсистемы меньшего порядка в системе (7), (15) (в частности, в системе (477)—(481), (484)—(493)) после некоторого преобразования.

Укажем на достаточное условие такого отделения. Пусть выполнено следующее условие на величину T:

$$\begin{aligned} T = T_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega) = \sum_{i,j=0,\ i\leqslant j}^{n-1} \tau_{i,j}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)\omega_{r_i}\omega_{r_j} = \\ = T_1\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right)v^2, \quad \omega_0 = v. \end{aligned} \tag{504}$$

Введём новые квазискорости в системе (7), (15). Для этого преобразуем величины $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ посредством композиции следующих $n-2$ поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \ldots \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = T_{n-2,n-1}(-\beta_1) \circ T_{n-3,n-2}(-\beta_2) \circ \ldots \circ T_{1,2}(-\beta_{n-2}) \begin{pmatrix} \omega_{r_1} \\ \omega_{r_2} \\ \ldots \\ \omega_{r_{n-1}} \end{pmatrix}, \tag{505}$$

где матрица $T_{k,k+1}(\beta)$, $k = 1, \ldots, n-2$, отличается от единичной присутствием минора второго порядка $M_{k,k+1}$:

$$T_{k,k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{k,k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{506}$$

$$M_{k,k+1} = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix},$$

$$m_{k,k} = m_{k+1,k+1} = \cos\beta, \quad m_{k+1,k} = -m_{k,k+1} = \sin\beta.$$

В частности, для системы (477)—(481), (484)—(493) справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &z_1 = \omega_4\cos\beta_3 + \omega_7\sin\beta_3, \\ &z_2 = (\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\cos\beta_2 + \omega_9\sin\beta_2, \\ &z_3 = [(-\omega_7\cos\beta_3 + \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 + \omega_9\cos\beta_2]\cos\beta_1 + \omega_{10}\sin\beta_1, \\ &z_4 = [(\omega_7\cos\beta_3 - \omega_4\sin\beta_3)\sin\beta_2 - \omega_9\cos\beta_2]\sin\beta_1 + \omega_{10}\cos\beta_1. \end{aligned} \tag{507}$$

2.2.4. Редукции в системе и системы нормального вида

Систему (7), (15) в случаях (496)—(498), (504) можно переписать в виде

$$
\dot v+\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\cos\alpha-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=
$$
$$
=\frac{T_1(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)v^2-s(\alpha)v^2}{m}\cos\alpha, \tag{508}
$$

$$
\dot\alpha v+z_{n-1}v-\sigma\left(\sum_{s=1}^{n-1}z_s^2\right)\sin\alpha-
$$
$$
-\sigma\frac{v^2}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cos\alpha\cdot\Gamma_v\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=
$$
$$
=\frac{s(\alpha)v^2-T_1(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\Omega/v)v^2}{m}\sin\alpha, \tag{509}
$$

$$
\dot\beta_1\sin\alpha-z_{n-2}\cos\alpha-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,1}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0, \tag{510}
$$

$$
\dot\beta_2\sin\alpha\sin\beta_1+z_{n-3}\cos\alpha-
$$
$$
-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0, \tag{511}
$$

$\ldots$

$$
\dot\beta_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}+(-1)^n z_1\cos\alpha-
$$
$$
-\frac{\sigma v}{(n-2)I_2}s(\alpha)\cdot\Delta_{v,n-2}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)=0, \tag{512}
$$

$$
\dot\omega_{r_1}=(-1)^n\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{nN}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{513}
$$

$$
\dot\omega_{r_2}=(-1)^{n+1}\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{(n-1)N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha), \tag{514}
$$

$\ldots$

$$
\dot\omega_{r_{n-1}}=\frac{v^2}{(n-2)I_2}x_{2N}\left(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha). \tag{515}
$$

Здесь, как и ранее, введены функции

$$\begin{aligned}
&\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\beta_1 + \frac{\pi}{2}, \beta_2, \ldots, \beta_{n-2}\right)\right),\\
&\Delta_{v,2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \beta_2 + \frac{\pi}{2}, \beta_3, \ldots, \beta_{n-2}\right)\right),\\
&\ldots\\
&\Delta_{v,n-3}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \beta_{n-3} + \frac{\pi}{2}, \beta_{n-2}\right)\right),\\
&\Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \left(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N\left(\frac{\pi}{2}, \ldots, \frac{\pi}{2}, \beta_{n-2} + \frac{\pi}{2}\right)\right),
\end{aligned} \tag{516}$$

а функция $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ представляется в виде

$$\begin{aligned}
\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) &= |\mathbf{r}_N| = \big(\mathbf{r}_N, \mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\big) =\\
&= 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \sum_{s=2}^{n} x_{sN}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}).
\end{aligned} \tag{517}$$

Здесь $i_{sN}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$, $s = 1, \ldots, n$ $(i_{1N}(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \equiv 0)$, — компоненты единичного вектора по оси вектора $\mathbf{r}_N = \{0, x_{2N}, \ldots, x_{nN}\}$ на $(n-2)$-мерной сфере $\mathbf{S}^{n-2}\{\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$, заданной равенством $\alpha = \pi/2$, как экваториальном сечении соответствующей $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. Таким образом, по-прежнему

$$\mathbf{i}_N(\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \mathbf{i}_v\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\right), \tag{518}$$

а вектор $\mathbf{i}_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})$ определяется в (475).

Зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ по-прежнему понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1/v, \ldots, z_{n-1}/v)$ согласно (505).

Вводя новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_1 v Z_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad \langle\cdot\rangle = n_1 v \langle'\rangle, \quad n_1 > 0, \quad n_1 = \mathrm{const}, \tag{519}$$

приведём систему (508)—(515) к виду

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{520}$$

$$\begin{aligned}
\alpha' = -Z_{n-1} &+ \sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right) \sin\alpha +\\
&+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha)\cos\alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) -\\
&- \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1}\sin\alpha,
\end{aligned} \tag{521}$$

$$
\begin{aligned}
Z'_{n-1} &= \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2}\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\
&+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^s Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\right\} - \\
&- Z_{n-1}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z),
\end{aligned} \tag{522}
$$

$$
\begin{aligned}
Z'_{n-2} &= Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\
&+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{Z_{n-1}\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) + \right. \\
&+ \left.\sum_{s=2}^{n-2}(-1)^{s+1} Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right\} \\
&- \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2}\cdot\Delta_{v,1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - \\
&- Z_{n-2}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z),
\end{aligned} \tag{523}
$$

$$
\begin{aligned}
Z'_{n-3} &= Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\
&- \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\
&+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\left\{\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\left[-Z_{n-1} + Z_{n-2}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right] + \right. \\
&+ \left.\sum_{s=3}^{n-2}(-1)^s Z_{n-1-s}\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\} + \\
&+ \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2}\cdot\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z) - \\
&- Z_{n-3}\cdot\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z),
\end{aligned} \tag{524}
$$

$\ldots$

$$
\begin{aligned}
Z_1' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \left\{ \sum_{s=1}^{n-2} (-1)^{s+1} Z_{n-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\} + \\
+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} (-1)^{n+1} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \times \\
\times \left\{ \sum_{s=2}^{n-1} (-1)^s Z_{n+1-s} \frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{s-1}} \right\} + \\
+ (-1)^n \frac{s(\alpha)}{(n-2)I_2 n_1^2} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - \\
- Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z),
\end{aligned} \tag{525}
$$

$$
\beta_1' = Z_{n-2} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z), \tag{526}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_2' = -Z_{n-3} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1} + \\
+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta_1} \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z),
\end{aligned} \tag{527}
$$

$$\ldots$$

$$
\begin{aligned}
\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}} + \\
+ \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}} \Delta_{v,n-2}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z),
\end{aligned} \tag{528}
$$

где

$$
\begin{aligned}
\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = \\
= -\sigma n_1 \left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2 \right) \cos\alpha + \frac{\sigma}{(n-2)I_2 n_1} s(\alpha) \sin\alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) + \\
+ \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{m n_1} \cos\alpha.
\end{aligned} \tag{529}
$$

Видно, что в системе (520)—(528) порядка $2(n-1)+1$ может быть выделена независимая подсистема (521)—(528) порядка $2(n-1)$, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своём $2(n-1)$-мерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. В частности, при выполнении условия (503) только что рассмотренный приём выделения независимой подсистемы порядка $2(n-1)$ также возможен.

В дальнейшем зависимость от групп переменных $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1/v, \ldots, z_{n-1}/v)$ (и, далее, от $(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z_1, \ldots, n_1 Z_{n-1})$) согласно (505) и (519).

В частности, при $n = 5$ система (520)—(528) примет вид

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{530}$$

$$\begin{aligned}\alpha' = &-Z_4 + \sigma n_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha + \\ &+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1} s(\alpha)\cos\alpha \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_2, n_1 Z) - \\ &- \frac{T_1(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) - s(\alpha)}{mn_1}\sin\alpha,\end{aligned} \tag{531}$$

$$\begin{aligned}Z_4' = &\frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ &+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\{-Z_3\Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) + Z_2\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - \\ &- Z_1\Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)\} - Z_4 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z),\end{aligned} \tag{532}$$

$$\begin{aligned}Z_3' = &Z_3 Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ &+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Big\{Z_4\Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - \\ &- Z_2\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1\Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\Big\} - \\ &- \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_3 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z),\end{aligned} \tag{533}$$

$$\begin{aligned}Z_2' = &Z_2 Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ &+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)\left[-Z_4 + Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}\right] + \\ &+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)\left[-Z_1\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right] + \\ &+ \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2} \cdot \Delta_{v,2}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_2 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z),\end{aligned} \tag{534}$$

$$\begin{aligned}Z_1' = &Z_1 Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ &+ \frac{\sigma}{3I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z)\left\{Z_4 - Z_3\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_2\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}\right\} - \\ &- \frac{s(\alpha)}{3I_2 n_1^2}\Delta_{v,3}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z) - Z_1 \cdot \Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z),\end{aligned} \tag{535}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma}{3I_2 n_1}\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\Delta_{v,1}(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, n_1 Z), \tag{536}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1} + \frac{\sigma}{3I_2n_1}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1}\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z), \tag{537}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2} + \frac{\sigma}{3I_2n_1}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}\Delta_{v,3}(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z), \tag{538}$$

где

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z) = -\sigma n_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha + \\ + \frac{\sigma}{3I_2n_1}s(\alpha)\sin\alpha\cdot\Gamma_v(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z) + \\ + \frac{T_1(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,n_1Z)-s(\alpha)}{mn_1}\cos\alpha.\end{aligned} \tag{539}$$

В системе (530)—(538) девятого порядка может быть выделена независимая подсистема (531)—(538) восьмого порядка, которая может быть самостоятельно рассмотрена на своём восьмимерном фазовом пространстве — касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ четырёхмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$. В частности, при выполнении условия (503) только что рассмотренный приём выделения независимой подсистемы восьмого порядка также возможен.

2.2.5. Замечания о распределении индексов

В правую части системы (521)—(528) после общего множителя

$$\frac{\sigma}{(n-2)I_2n_1}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}$$

величины $\Delta_{v,s}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)$, $s=1,\ldots,n-2$, входят линейным образом (и их всегда ровно $n-2$ штуки). Так, например, в уравнение (522) (с левой частью Z_{n-1}') входят функции (516) со всеми индексами s от 1 до $n-2$ (по одному разу каждый индекс):

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2. \tag{540}$$

Однако в уравнения (523)—(525) функции (516) входят в разных наборах. Так, например, в уравнение для Z_{n-2}' по-прежнему входит набор функций (516) с индексами (540). А в уравнение для Z_{n-3}' входит уже набор с индексами

$$2\quad 2\quad 3\quad 4\quad \ldots\quad n-2, \tag{541}$$

т. е. функция $\Delta_{v,2}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},n_1Z)$ повторяется дважды. Общее распределение индексов даётся таблицей 3.

Минор

$$(1)$$

Таблица 3. Общее распределение индексов набора функций (516)

Левая часть системы (521)—(528)	Распределение индексов s набора функций (516)					
Z'_{n-2}	1	2	3	4	$\ldots$	$n-2$
Z'_{n-3}	2	2	3	4	$\ldots$	$n-2$
Z'_{n-4}	3	3	3	4	$\ldots$	$n-2$
Z'_{n-5}	4	4	4	4	$\ldots$	$n-2$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
Z'_1	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$n-2$	$\ldots$	$n-2$

первого порядка в левом верхнем углу таблицы 3 соответствует случаю $n = 3$ и указывает на то, что в динамических уравнениях присутствует лишь функция (516) (при $s = 1$). Минор второго порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 4$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях функций (516) (при $s = 1, 2$). Минор третьего порядка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

соответствует случаю $n = 5$ и указывает на присутствие в динамических уравнениях (521)—(528) функций (516) (при $s = 1, 2, 3$) и т. д.

2.3. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

2.3.1. Приведённая система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [113, 114], пользуясь (475), (518), динамические функции s, $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \qquad A, B > 0, \tag{542}$$

говорящем о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$). При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z)$, $s = 1, \ldots, n-2$, входящие в систему (520)—(528), примут вид

$$\begin{gathered} \Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) = R(\alpha) = A\sin\alpha, \\ \Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, n_1 Z) \equiv 0, \quad s = 1, \ldots, n-2. \end{gathered} \tag{543}$$

Тогда благодаря условиям (501), (542) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (520)—(528)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{544}$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{545}$$

$$Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{546}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{547}$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{548}$$

$\ldots$

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{549}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{550}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{551}$$

$\ldots$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{552}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{553}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

При этом, как и выше, безразмерный параметр b и постоянная n_1 выбираются следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad n_1 = n_0. \tag{554}$$

Итак, система (544)—(553) может быть рассмотрена на своём фазовом $(2(n-1)+1)$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \pi, \ldots,\\ 0 \leqslant \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_{n-2} < 2\pi\}, \tag{555}$$

т. е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере.

Видно, что в системе (544)—(553) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (545)—(553) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (545)—(553) порядка $2(n-1)$ образовалась ещё одна независимая система (545)—(552) порядка $2n-3$ на своём $(2n-3)$-мерном многообразии.

В частности, при $n = 5$ получим следующую систему девятого порядка:

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z), \tag{556}$$

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{557}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} +\\ + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{558}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} +\\ + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{559}$$

$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +\\ + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_2\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{560}$$

$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +\\ + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{561}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{562}$$

$$\beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{563}$$

$$\beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{564}$$

где

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z) = -b(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Итак, система (556)—(564) может быть рассмотрена на своём фазовом девятимерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\}\times T_*\mathbf{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\ 0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\\ 0\leqslant\beta_1\leqslant\pi,\ 0\leqslant\beta_2\leqslant\pi,\ 0\leqslant\beta_3<2\pi\}, \tag{565}$$

т. е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к четырёхмерной сфере.

Видно, что в системе (556)—(564) девятого порядка образовалась независимая система (557)—(564) восьмого порядка на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ четырёхмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$. При этом в независимой системе (557)—(564) восьмого порядка образовалась ещё одна независимая система (557)—(563) седьмого порядка на своём семимерном многообразии.

В общем случае справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *У системы* (7), (15) *при условиях* (501), (497), (498) *выделяется динамическая система* (521)—(528) *на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$ *$(n-1)$-мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}\}$. *В частности, при условии* (542) *выделяется система* (545)—(553).

2.3.2. Об аналитическом первом интеграле

Согласно (501) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (508)—(515) (при условии (503)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},z_1,\ldots,z_{n-1}) =\\ = v^2+\sigma^2(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1}v\sin\alpha = V_C^2 \tag{566}$$

постоянна на её фазовых траекториях (при этом величины $z_1,\ldots,z_{n-1}$ выбираются согласно (505)).

После невырожденной замены независимого переменного (при $v\neq 0$) у системы (544)—(553) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z_1,\ldots,Z_{n-1}) =\\ = v^2(1+b^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \tag{567}$$

постоянна на её фазовых траекториях.

Равенство (567) позволяет, не решая системы (544)—(553), найти зависимость скорости характерной точки твёрдого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1 + b^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) - 2bZ_{n-1}\sin\alpha}. \tag{568}$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (544)—(553) существуют асимптотические предельные множества, то равенство (567) задаёт единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (544)—(553) во всём фазовом пространстве (ср. с [11, 12, 20, 46, 67, 68, 71, 85, 135, 146, 154, 165]).

Таким образом, ввиду отделения уравнения на величину v и наличия аналитического первого интеграла (567) система (545)—(553) (или (557)—(564)) может быть рассмотрена самостоятельно на своём фазовом пространстве.

2.3.3. Общие замечания об интегрируемости системы

Для полного интегрирования системы (545)—(553) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов (в частности, для полного интегрирования системы восьмого порядка (557)—(564) необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов). Но рассматриваемые системы имеют симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов для интегрирования систем до n (в частности, до пяти).

Система при отсутствии силового поля. Для начала рассмотрим систему (557)—(564) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырёхмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$. Получим из неё консервативную систему. Будем считать, что функция (517) тождественно равна нулю. В частности, коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (558) отсутствует, $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2.$$

Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\sin\alpha, \tag{569}$$

$$Z_4' = -(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{570}$$

$$\begin{aligned} Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2 + Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + bZ_3(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \end{aligned} \tag{571}$$

$$\begin{aligned} Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \end{aligned} \tag{572}$$

$$Z_1' = Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha, \tag{573}$$

$$\beta_1' = Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{574}$$

$$\beta_2' = -Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{575}$$

$$\beta_3' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{576}$$

при этом во вспомогательном уравнении (556) на величину v следует выбрать

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3, Z) = -b(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2)\cos\alpha.$$

Система (569)—(576) описывает движение твёрдого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 2.2. *Система* (569)—(576) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{577}$$

$$\Phi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{578}$$

$$\Phi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{579}$$

$$\Phi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 Z_1 \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{580}$$

$$\Phi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{581}$$

Замечание 2.1. Поскольку в первые интегралы (577)—(581), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (569)—(576) нужно использовать вспомогательное уравнение (556).

Первые четыре первых интеграла (577)—(580) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются четыре (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости пятимерного твёрдого тела, а именно:

$$\omega_4 \equiv \omega_4^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_7 \equiv \omega_7^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_9 \equiv \omega_9^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_{10} \equiv \omega_{10}^0 = \mathrm{const}. \tag{582}$$

В частности, наличие первого интеграла (577) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2) = \omega_4^2 + \omega_7^2 + \omega_9^2 + \omega_{10}^2 \equiv n_0^2 C_1 = \mathrm{const}. \tag{583}$$

Пятый первый интеграл (581) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и может быть найден из квадратуры

$$\frac{d\beta_3}{d\beta_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}\frac{1}{\sin\beta_2}. \tag{584}$$

При этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (579), (580) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}, \tag{585}$$

то квадратура (584) примет вид

$$\beta_3 = \pm\int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_3^2}{C_4^2} - 1\right) - \frac{C_3^2}{C_4^2}u^2}}, \quad u = \cos\beta_2. \tag{586}$$

Её вычисление приводит к соотношению

$$\beta_3 + C_5 = \pm\operatorname{arctg}\frac{\cos\beta_2}{\sqrt{\frac{C_3^2}{C_4^2}\sin^2\beta_2 - 1}}, \quad C_5 = \text{const}, \tag{587}$$

позволяющему получить первый интеграл (581). Преобразуя последнее равенство, приходим к следующему инвариантному соотношению:

$$\operatorname{tg}^2(\beta_3 + C_5) = \frac{C_4^2}{(C_3^2 - C_4^2)\operatorname{tg}^2\beta_2 - C_4^2}. \tag{588}$$

Теперь переформулируем теорему 2.2.

Теорема 2.3. *Система* (569)—(576) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha} =$$
$$= C_1' = \text{const}, \tag{589}$$

$$\Psi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \text{const}, \tag{590}$$

$$\Psi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_2} = C_3' = \text{const}, \tag{591}$$

$$\Psi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \text{const}, \tag{592}$$

$$\Psi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \text{const}. \tag{593}$$

Замечание 2.2. Поскольку в первые интегралы (589)—(593), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (569)—(576) нужно использовать вспомогательное уравнение (556).

Пятый первый интеграл (593) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_3, а функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 2.3 (в отличие от теоремы 2.2) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (589)—(593) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто могут не быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

Согласно теореме 2.3 преобразованный набор первых интегралов (589)—(593) системы (569)—(576) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остаётся набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (569)—(576) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_4 \\ w_3 \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}, \tag{594}$$

$$w_4 = Z_4, \quad w_3 = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}, \quad w_2 = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_1 = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}},$$

система (569)—(576) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha, \tag{595}$$

$$w_4' = -w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{596}$$

$$w_3' = w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{597}$$

$$\begin{gathered} w_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_2^2}{w_2}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' = d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{598}$$

$$\begin{gathered} w_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_1^2}{w_1}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' = d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{gathered} \tag{599}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{600}$$

где

$$\begin{gathered} d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \mathcal{Z}_3(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = -\mathcal{Z}_2(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \mathcal{Z}_1(w_4, w_3, w_2, w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \end{gathered} \tag{601}$$

при этом
$$Z_k = \mathcal{Z}_k(w_4, w_3, w_2, w_1), \quad k = 1, 2, 3, - \tag{602}$$
функции согласно замене (594).

Видно, что система восьмого порядка (595)—(600) распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (595)—(597) — третьего, а системы (598), (599) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (595)—(600) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (595)—(597), по одному для систем (598), (599) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (600) (т. е. всего пять).

Замечание 2.3. Выпишем первые интегралы (589)—(593) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 согласно (594). Получим
$$\Theta_1(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \mathrm{const}, \tag{603}$$
$$\Theta_2(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 w_3 \sin\alpha = C_2'' = \mathrm{const}, \tag{604}$$
$$\Theta_3(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \mathrm{const}, \tag{605}$$
$$\Theta_4(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \mathrm{const}, \tag{606}$$
$$\Theta_5(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \mathrm{const}. \tag{607}$$

Замечание 2.4. Поскольку в первые интегралы (603)—(607), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (595)—(600) нужно использовать вспомогательное уравнение (556).

Таким образом, два независимых первых интеграла (603), (604) достаточны для интегрирования системы (595)—(597), первые интегралы (605), (606) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка
$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{608}$$
после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (598), (599), и, наконец, первый интеграл (607) достаточен для «привязывания» уравнения (600). Доказана следующая теорема.

Теорема 2.4. *Система* (569)—(576) *восьмого порядка обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (*пятью*).

Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (557)—(564) при условии $b = 0$ за исключением слагаемых, содержащих
$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2.$$

При этом получим консервативную систему. А именно, на наличие силового поля указывает коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (558) (в отличие от системы (569)—(576)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_4 + b(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\sin\alpha, \tag{609}$$

$$Z_4' = \sin\alpha\cos\alpha - (Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \tag{610}$$

$$Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_1^2+Z_2^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + bZ_3(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \tag{611}$$

$$Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \tag{612}$$

$$Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + bZ_1\left(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2\right)\cos\alpha, \tag{613}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{614}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{615}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}, \tag{616}$$

при этом во вспомогательном уравнении (556) на величину v следует выбрать

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z) = -b(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha.$$

Итак, система (609)—(616) описывает движение твёрдого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 2.5. *Система* (609)—(616) *обладает пятью независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(v;Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = v^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+\sin^2\alpha) = \\ = C_1 = \mathrm{const}, \tag{617}$$

$$\Phi_2(v;Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{618}$$

$$\Phi_3(v;Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{619}$$

$$\Phi_4(v;Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = v^2Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}, \tag{620}$$

$$\Phi_5(v;Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{621}$$

Замечание 2.5. Поскольку в первые интегралы (617)—(621), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (609)—(616) нужно использовать вспомогательное уравнение (556).

Первый интеграл (617) является интегралом полной энергии. Пятый первый интеграл (621) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_3 и найден выше.

Теперь переформулируем теорему 2.5.

Теорема 2.6. *Система* (609)—(616) *обладает пятью независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + \sin^2\alpha}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}\sin\alpha} = $$

$$= C_1' = \text{const}, \tag{622}$$

$$\Psi_2(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_2' = \text{const}, \tag{623}$$

$$\Psi_3(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin\beta_2} = C_3' = \text{const}, \tag{624}$$

$$\Psi_4(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\beta_1} = C_4' = \text{const}, \tag{625}$$

$$\Psi_5(v; Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5' = \text{const}. \tag{626}$$

Замечание 2.6. Поскольку в первые интегралы (622)—(626), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (609)—(616) нужно использовать вспомогательное уравнение (556).

Функции Ψ_2, Ψ_5 можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_5.

В формулировке теоремы 2.6 (в отличие от теоремы 2.5) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (622)—(626) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто могут не быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

Согласно теореме 2.6 преобразованный набор первых интегралов (622)—(626) системы (609)—(616) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остаётся набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (609)—(616) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (594) система (609)—(616) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha, \tag{627}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{628}$$

$$w_3' = w_3 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + b w_3 (w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha, \tag{629}$$

$$\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_2^2}{w_2} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{630}$$

$$\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \frac{1 + w_1^2}{w_1} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{631}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{632}$$

где выполнены условия (601).

Видно, что система восьмого порядка (627)—(632) распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (627)—(629) — третьего, а системы (630), (631) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (627)—(632) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (627)—(629), по одному для систем (630), (631) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (632) (т. е. всего пять).

Замечание 2.7. Выпишем первые интегралы (622)—(626) в переменных w_1, w_2, w_3, w_4 согласно (594). Получим

$$\Theta_1(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{w_3^2 + w_4^2 + \sin^2\alpha}{w_3 \sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{633}$$

$$\Theta_2(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = v^2 w_3 \sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{634}$$

$$\Theta_3(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3'' = \text{const}, \tag{635}$$

$$\Theta_4(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4'' = \text{const}, \tag{636}$$

$$\Theta_5(v; w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = C_5'' = \text{const}. \tag{637}$$

Замечание 2.8. Поскольку в первые интегралы (633)—(637), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (627)—(632) нужно использовать вспомогательное уравнение (556).

Таким образом, два независимых первых интеграла (633), (634) достаточны для интегрирования системы (627)—(629), первые интегралы (635), (636) достаточны для интегрирования двух независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, 2, \tag{638}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (630), (631), и, наконец, первый интеграл (637) достаточен для «привязывания» уравнения (632). Доказана следующая теорема.

Теорема 2.7. *Система* (609)—(616) *восьмого порядка обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (*пятью*).

2.3.4. Полный список первых интегралов

Перейдём теперь к интегрированию искомой системы восьмого порядка (557)—(564) (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Для полного интегрирования системы (557)—(564) восьмого порядка необходимо знать, вообще говоря, семь независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (594) система (557)—(564) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_4 + b(w_3^2 + w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{639}$$

$$w_4' = \sin\alpha\cos\alpha - w_3^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_4(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{640}$$

$$w_3' = w_3w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_3(w_3^2 + w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha, \tag{641}$$

$$\begin{aligned} w_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_2^2}{w_2}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}, \\ \beta_2' &= d_2(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{642}$$

$$\begin{aligned} w_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3)\frac{1 + w_1^2}{w_1}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}, \\ \beta_1' &= d_1(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \end{aligned} \tag{643}$$

$$\beta_3' = d_3(w_4, w_3, w_2, w_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3), \tag{644}$$

где выполнены условия (601).

Видно, что система восьмого порядка (639)—(644) распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (639)—(641) — третьего, а системы (642), (643) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (639)—(644) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (639)—(641), по одному для систем (642), (643) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (644) (т. е. всего пять).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (595)—(597) неавтономную систему второго порядка

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_4}{d\alpha} &= \frac{\sin\alpha\cos\alpha + bw_4(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_4\sin^2\alpha\cos\alpha - w_3^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha},\\
\frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{bw_3(w_3^2+w_4^2)\cos\alpha - bw_3\sin^2\alpha\cos\alpha + w_3w_4\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_4 + b(w_3^2+w_4^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}.
\end{aligned}
\tag{645}
$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (645) в алгебраическом виде:

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_4}{d\tau} &= \frac{\tau + bw_4(w_3^2+w_4^2) - bw_4\tau^2 - w_3^2/\tau}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2+w_4^2)},\\
\frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{bw_3(w_3^2+w_4^2) - bw_3\tau^2 + w_3w_4/\tau}{-w_4 + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_3^2+w_4^2)}.
\end{aligned}
\tag{646}
$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$
w_3 = u_1\tau, \quad w_4 = u_2\tau, \tag{647}
$$

приводим систему (646) к виду

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2+u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)},
\end{aligned}
\tag{648}
$$

что эквивалентно

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2+u_2^2) + b(1-\tau^2)}.
\end{aligned}
\tag{649}
$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (649) неавтономное уравнение первого порядка

$$
\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{650}
$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$
d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{651}
$$

Итак, уравнение (650) имеет первый интеграл

$$
\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + 1}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{652}
$$

который в прежних переменных имеет вид

$$
\Theta_1(w_4, w_3; \alpha) = \frac{w_4^2 + w_3^2 - bw_4\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_3\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{653}
$$

Замечание 2.9. При $b = 0$ первый интеграл (653) системы (639)—(641) совпадает с первым интегралом (633) системы (627)—(629), но при $b \neq 0$ ни числитель выражения (653), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (639)—(641) по отдельности (хотя при $b = 0$ и числитель и знаменатель выражения (653) являются первыми интегралами системы (627)—(629)).

Будем искать дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (639)—(641). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (652) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - 1. \tag{654}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{655}$$

и фазовое пространство системы (639)—(641) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (654).

Таким образом, в силу соотношения (652) первое уравнение системы (649) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}{-u_2 + b(1 - \tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1, u_2) + u_2^2)}, \tag{656}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + 1)}\right\}, \tag{657}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (655), или вид уравнения Бернулли

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b - u_2)\tau - b\tau^3(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}. \tag{658}$$

Уравнение (658) (при помощи (657)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2(u_2 - b)p + 2b(1 - U_1^2(C_1, u_2) - u_2^2)}{1 - bu_2 + u_2^2 - U_1^2(C_1, u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{659}$$

Последний факт означает, что может быть найден ещё один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т. е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (659) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметим лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (659), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1 - (u_2 - 1)^2} \pm 1] \exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}{1 \pm \sqrt{1 - (u_2 - 1)^2}}}\right], \quad C = \mathrm{const}. \tag{660}$$

Замечание 2.10. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (653). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_4, w_3; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_4}{\sin\alpha}, \frac{w_3}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{661}$$

Итак, найдены два первых интеграла (653), (661) независимой системы третьего порядка (639)—(641). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (642), (643) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (644).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (635)—(637), а именно:

$$\Theta_3(w_2; \beta_2) = \frac{\sqrt{1 + w_2^2}}{\sin\beta_2} = C_3 = \text{const}, \tag{662}$$

$$\Theta_4(w_1; \beta_1) = \frac{\sqrt{1 + w_1^2}}{\sin\beta_1} = C_4 = \text{const}, \tag{663}$$

$$\Theta_5(w_2, w_1; \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \beta_3 \pm \operatorname{arctg} \frac{C_4 \cos\beta_2}{\sqrt{C_3^2 \sin^2\beta_2 - C_4^2}} = C_5 = \text{const}, \tag{664}$$

при этом в левую часть равенства (664) вместо C_3, C_4 необходимо подставить интегралы (662), (663).

Теорема 2.8. *Система* (639)—(644) *восьмого порядка обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (*пятью*): (653), (661), (662)—(664).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (477)—(481), (484)—(493) при условии (542) имеет 12 инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (501), соответствующая аналитическому первому интегралу (566), циклические первые интегралы вида (499), (500), первый интеграл вида (653), также имеется первый интеграл (661), который может быть найден из уравнения (659), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (662)—(664).

Теорема 2.9. *Система* (477)—(481), (484)—(493) *при условиях* (501), (542), (499), (500) *обладает* 12 *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *пять из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

2.3.5. Структура уравнений на касательных расслоениях к конечномерной сфере

Исследование полной системы (557)—(564) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4, Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ четырёхмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ было начато с анализа упрощённой системы (569)—(576), описывающей динамику при отсутствии какого-либо силового поля. Таким образом, коэффициенты в правой части системы (569)—(576) носят лишь геометрический смысл и порождаются выбором координат Z_4, Z_3, Z_2, Z_1, α, β_1, β_2, β_3 на касательном расслоении.

Поставим вопрос: как меняются коэффициенты соответствующих систем при индуктивном увеличении размерности $n-1$ сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$? Другими словами, системами какого вида описываются фазовые (геодезические) потоки на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ именно в выбранных нами координатах $Z_{n-1}, \ldots, Z_1$, α, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-2}$?

Несмотря на то, что (и в этой работе, и в ряде других работ автора) нами рассмотрена явно структура соответствующих уравнений до $n = 5$ включительно, начнём со случая $n = 2$. Это позволит произвести индуктивный переход от n к $n+1$ и «конструировать» аналогичные системы любого высокого порядка.

Замечание 2.11 (об аналитических первых интегралах при отсутствии силового поля). При построении систем на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ используется факт наличия в системе следующего набора аналитических первых интегралов:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = C_1 = \mathrm{const},\\
&\Phi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\,\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const},\\
&\Phi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1 =\\
&\qquad = C_3 = \mathrm{const},\\
&\ldots\\
&\Phi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\,\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} =\\
&\qquad = C_{n-2} = \mathrm{const},\\
&\Phi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} =\\
&\qquad = C_{n-1} = \mathrm{const}.
\end{aligned}
\tag{665}
$$

Замечание 2.12. Поскольку в первые интегралы (665), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой нужно использовать соответствующее вспомогательное уравнение (544).

Первые интегралы (665) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняется $n-1$ (вообще говоря, ненулевых) компонент тензора угловой скорости n-мерного твёрдого тела, а именно:

$$\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \text{const}, \ldots, \ \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \text{const}. \tag{666}$$

В частности, наличие первого интеграла

$$\Phi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_1$$

из (665) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2 (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = \omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_{n-1}}^2 = \text{const}. \tag{667}$$

При этом первые интегралы (665) являются функциями от компонент $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$.

Начало при $n = 2$. Итак, при $n = 2$ при наличии вспомогательного уравнения

$$v' = -bvZ_1^2 \cos\alpha \tag{668}$$

следующая система задаёт геодезический поток на двумерном цилиндре $T_*\mathbf{S}^1\{Z_1; \alpha\}$ как касательном расслоении одномерной сферы $\mathbf{S}^1\{\alpha\}$:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -Z_1 + bZ_1^2 \sin\alpha, \\ Z_1' &= bZ_1^3 \cos\alpha. \end{aligned} \tag{669}$$

При этом согласно замечанию 2.11 существует естественный первый интеграл

$$v^2 Z_1^2 = C_1 = \text{const}. \tag{670}$$

Уравнение $\alpha' = -Z_1 + bZ_1^2 \sin\alpha$ является кинематическим соотношением и задаёт координаты α, Z_1 в фазовом пространстве системы (669) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^1\{Z_1; \alpha\}$).

Переход по n*:* $2 \to 3$. При переходе от $n = 2$ к $n = 3$ производится переобозначение

$$Z_1 \mapsto Z_2,$$

при этом вводится новая переменная Z_1. Более того, в искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчёркиваются.

Предложение 2.1. *При* $n = 3$ *при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2 + Z_2^2) \cos\alpha \tag{671}$$

следующая система задаёт геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1\}$ *двумерной сферы* $\mathbf{S}^2\{\alpha, \beta_1\}$:

$$\alpha' = -Z_2 + b(\underline{Z_1^2} + Z_2^2) \sin\alpha, \tag{672}$$

$$Z_2' = \underline{-Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} + bZ_2(\underline{Z_1^2} + Z_2^2) \cos\alpha, \tag{673}$$

$$\underline{Z_1' = Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha,} \tag{674}$$

$$\beta_1' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{675}$$

При этом согласно замечанию 2.11 *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2 + Z_2^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{676}$$

$$v^2(Z_1 \sin\alpha) = C_2 = \mathrm{const}. \tag{677}$$

Действительно, в силу (676)

$$2v^2(Z_1'Z_1 + Z_2'Z_2) - 2bv^2(Z_1^2 + Z_2^2)^2\cos\alpha = 0,$$

поэтому существует такая функция $N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2)$, что

$$Z_2' = -Z_1 N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha,$$
$$Z_1' = Z_2 N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2) + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha,$$

а в силу (677) должно выполняться равенство (ввиду системы (671)—(675))

$$v^2(Z_1'\sin\alpha + Z_1\alpha'\cos\alpha - 2bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha\cos\alpha) =$$
$$= v^2(Z_2 N_1(\alpha, \beta_1, Z_1, Z_2)\sin\alpha - Z_1 Z_2\cos\alpha) = 0,$$

откуда следует, что

$$N_1(\alpha, \beta_1, z_1, z_2) = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

что и требовалось.

Уравнения (672), (675) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, Z_1, Z_2 в фазовом пространстве системы (672)—(675) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^2\{Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1\}$).

Переход по n: $3 \to 4$. При переходе от $n = 3$ к $n = 4$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

и вводится новая переменная Z_1. В искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчёркиваются.

Предложение 2.2. *При $n = 4$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha \tag{678}$$

следующая система задаёт геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^3\{Z_3, Z_2, Z_1; \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ трёхмерной сферы $\mathbf{S}^3\{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$:

$$\alpha' = -Z_3 + b(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2)\sin\alpha, \tag{679}$$

$$Z_3' = -(Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_3(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha, \tag{680}$$

$$Z_2' = Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \underline{Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1}} + bZ_2(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha, \tag{681}$$

$$\underline{Z_1' = Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha,} \tag{682}$$

$$\beta_1' = Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{683}$$

$$\beta_2' = -Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}. \tag{684}$$

При этом согласно замечанию 2.11 *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{685}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{686}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1) = C_3 = \mathrm{const}. \tag{687}$$

Действительно, ввиду (685), (686) аналогично доказательству предложения 2.1 находятся подчёркнутые коэффициенты в уравнении (680), а также делается вывод об уравнениях (681) и (682), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered} Z_2' = Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3) + bZ_2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha, \\ Z_1' = Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3) + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\cos\alpha. \end{gathered} \tag{688}$$

Согласно (687) должно выполняться равенство (ввиду системы (678)—(684))

$$\begin{aligned} &v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1 + Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1 + \\ &\quad + Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1 - 2bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1) = \\ &\quad = v^2Z_1Z_2\cos\alpha[\cos\beta_1 - N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3)\sin\beta_1] = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$N_2(\alpha,\beta_1,\beta_2,Z_1,Z_2,Z_3) = \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1},$$

что и требовалось.

Уравнения (679), (683), (684) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, β_2, Z_1, Z_2, Z_3 в фазовом пространстве системы (679)—(684) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^3\{Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2\}$).

Переход по n: $4 \to 5$. При переходе от $n = 4$ к $n = 5$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_3 \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_4 \\ Z_3 \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

и вводится новая переменная Z_1. В искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчёркиваются.

Предложение 2.3. *При $n=5$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha \tag{689}$$

следующая система задаёт геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ четырёхмерной сферы $\mathbf{S}^4\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$:

$$\alpha' = -Z_4 + b(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\sin\alpha, \tag{690}$$

$$Z_4' = -(Z_3^2+Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_4(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \tag{691}$$

$$\begin{aligned} Z_3' = Z_3Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + bZ_3(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \end{aligned} \tag{692}$$

$$\begin{aligned} Z_2' = Z_2Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \underline{Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2}} + \\ + bZ_2(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \end{aligned} \tag{693}$$

$$\begin{aligned} \underline{Z_1' = Z_1Z_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} +} \\ \underline{+ bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha}, \end{aligned} \tag{694}$$

$$\beta_1' = Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{695}$$

$$\beta_2' = -Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{696}$$

$$\beta_3' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2}. \tag{697}$$

При этом согласно замечанию 2.11 существуют первые интегралы

$$v^2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{698}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{699}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{700}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2) = C_4 = \mathrm{const}. \tag{701}$$

Действительно, ввиду (698)—(700) аналогично доказательству предложений 2.1, 2.2 находятся подчёркнутые коэффициенты в уравнениях (691), (692), а также делается вывод об уравнениях (693) и (694), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
Z_2' = Z_2 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\
- Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) + bZ_2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha, \\
Z_1' = Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\
+ Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) + bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\cos\alpha.
\end{gathered} \tag{702}$$

Ввиду (701) должно выполняться равенство (согласно системе (689)—(697))

$$\begin{gathered}
v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 + Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2 + \\
+ Z_1\beta_2'\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - 2bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2) = \\
= v^2 z_1 z_2 \cos\alpha[N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4)\sin\beta_1\sin\beta_2 - \cos\beta_2] = 0,
\end{gathered}$$

откуда следует, что

$$N_3(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4) = \frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2},$$

что и требовалось.

Уравнения (690), (695)—(697) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, β_2, β_3, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 в фазовом пространстве системы (690)—(697) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^4\{Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$).

Переход по n: $5\to 6$ При переходе от $n=5$ к $n=6$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_4\\ Z_3\\ Z_2\\ Z_1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_5\\ Z_4\\ Z_3\\ Z_2\end{pmatrix},$$

и вводится новая переменная Z_1. В искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчёркиваются.

Предложение 2.4. *При $n=6$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2)\cos\alpha \tag{703}$$

следующая система задаёт геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$ пятимерной сферы $\mathbf{S}^5\{\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$:

$$\alpha' = -Z_5 + b(\underline{Z_1^2} + Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2)\sin\alpha, \tag{704}$$

$$Z_5' = -(Z_4^2+Z_3^2+Z_2^2+\underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_5(\underline{Z_1^2}+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2)\cos\alpha, \tag{705}$$

$$Z_4' = Z_4 Z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_3^2 + Z_2^2 + \underline{Z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + bZ_4(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \tag{706}$$

$$Z_3' = Z_3 Z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_3 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (Z_2^2 + \underline{Z_1^2}) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_3(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \tag{707}$$

$$Z_2' = Z_2 Z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ + \underline{Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3}} + bZ_2(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha, \tag{708}$$

$$\underline{Z_1' = Z_1 Z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} -} \\ \underline{- Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3} + bZ_1(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2)\cos\alpha,} \tag{709}$$

$$\beta_1' = Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{710}$$

$$\beta_2' = -Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \tag{711}$$

$$\beta_3' = Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2}, \tag{712}$$

$$\beta_4' = -Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3}. \tag{713}$$

При этом согласно замечанию 2.11 *существуют первые интегралы*

$$v^2(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 + Z_5^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{714}$$

$$v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2} \sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{715}$$

$$v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2} \sin\alpha \sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{716}$$

$$v^2 \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 = C_4 = \mathrm{const}. \tag{717}$$

$$v^2(Z_1 \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \sin\beta_3) = C_5 = \mathrm{const}. \tag{718}$$

Действительно, ввиду (714)—(717) аналогично доказательству предложений 2.1—2.3 находятся подчёркнутые коэффициенты в уравнениях (705)—(707), а также делается вывод об уравнениях (708) и (709), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} Z_2' &= Z_2 Z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ &+ Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5) + \\ &+ bZ_2(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2)\cos\alpha, \\ Z_1' &= Z_1 Z_5 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \\ &- Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5) + \\ &+ bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{719}$$

В силу (718) должно выполняться равенство (ввиду системы (703)—(713))

$$\begin{aligned} &v^2(Z_1'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + \\ &+ Z_1\beta_1'\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3 + Z_1\beta_2'\sin\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2\sin\beta_3 + \\ &+ Z_1\beta_3'\sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_3 - 2bZ_1(Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2+Z_4^2+Z_5^2)\times \\ &\times\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3) = v^2 Z_1 Z_2\cos\alpha\times \\ &\times[\cos\beta_3 - N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,z_5)\sin\beta_1\sin\beta_2\sin\beta_3] = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$N_4(\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,Z_1,Z_2,Z_3,Z_4,Z_5) = \frac{1}{\sin\beta_1}\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\cos\beta_3}{\sin\beta_3},$$

что и требовалось.

Уравнения (704), (710)—(713) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, β_1, β_2, β_3, β_4, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 в фазовом пространстве системы (704)—(713) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^5\{Z_5,Z_4,Z_3,Z_2,Z_1;\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$).

Переход по n: $n\to n+1$. При индуктивном переходе от n к $n+1$ производится переобозначение

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Z_n \\ Z_{n-1} \\ \ldots \\ Z_2 \end{pmatrix}$$

и вводится новая переменная Z_1. В искомой системе новые члены, появляющиеся при увеличении n, подчёркиваются.

Предложение 2.5. *При $n>2$ при наличии вспомогательного уравнения*

$$v' = -bv(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\cos\alpha \tag{720}$$

следующая система задаёт геодезический поток на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^n\{Z_n, Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ *n-мерной сферы* $\mathbf{S}^n\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$:

$$\alpha' = -Z_n + b(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2)\sin\alpha, \tag{721}$$

$$Z_n' = -(Z_{n-1}^2 + \ldots + Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_n(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2)\sin\alpha, \tag{722}$$

$$\begin{aligned} Z_{n-1}' = {} & Z_{n-1}Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + (Z_{n-2}^2 + \ldots + Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ & + bZ_{n-1}(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2)\sin\alpha, \end{aligned} \tag{723}$$

$$\begin{aligned} Z_{n-2}' = {} & Z_{n-2}Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ & - (Z_{n-3}^2 + \ldots + Z_2^2 + \underline{Z_1^2})\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \\ & + bZ_{n-2}(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2)\sin\alpha, \end{aligned} \tag{724}$$

$\ldots$

$$\begin{aligned} Z_2' = {} & Z_2Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_2Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \ldots + \\ & + (-1)^{n+1}Z_2Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\cdots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\,\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} + \\ & + \underline{(-1)^{n+1}Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\cdots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\,\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}}} + \\ & + bZ_2(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2)\sin\alpha, \end{aligned} \tag{725}$$

$$\begin{aligned} & \underline{Z_1' = Z_1Z_n\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \ldots +} \\ & \quad \underline{+ (-1)^{n+1}Z_1Z_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\cdots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\,\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} +} \\ & \quad \underline{+ (-1)^{n}Z_1Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\cdots\frac{1}{\sin\beta_{n-3}}\,\frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}} +} \\ & \quad \underline{+ bZ_1(\underline{Z_1^2} + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2)\sin\alpha,} \end{aligned} \tag{726}$$

$$\beta_1' = Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{727}$$

$$\beta_2' = -Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{728}$$

$\ldots$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}}, \tag{729}$$

$$\beta'_{n-1} = (-1)^{n} Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2}}. \tag{730}$$

При этом согласно замечанию 2.11 существуют первые интегралы

$$v^2(Z_1^2 + \ldots + Z_n^2) = C_1 = \mathrm{const}, \tag{731}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}\sin\alpha = C_2 = \mathrm{const}, \tag{732}$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = C_3 = \mathrm{const}, \tag{733}$$

$$\ldots$$

$$v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = C_{n-1} = \mathrm{const}. \tag{734}$$

$$v^2(Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}. \tag{735}$$

Действительно, согласно (731)—(734) аналогично доказательству предложений 2.1—2.4 находятся подчёркнутые коэффициенты во всех уравнениях до (725) и (726), а также делается вывод об уравнениях (725) и (726), которые будут иметь следующий вид:

$$\begin{gathered}
Z'_2 = Z_2 z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_2 Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_2 Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \ldots + \\
+ (-1)^{n+1} Z_2 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} + \\
+ (-1)^{n+1} Z_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n) + \\
+ bZ_2(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha, \\
Z'_1 = Z_1 Z_n \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_1 Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + Z_1 Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \ldots + \\
+ (-1)^{n+1} Z_1 Z_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\ldots\frac{1}{\sin\beta_{n-4}}\frac{\cos\beta_{n-3}}{\sin\beta_{n-3}} + \\
+ (-1)^{n} Z_1 Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} N_{n-1}(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-1},Z_1,\ldots,Z_n) + \\
+ bZ_1(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha.
\end{gathered} \tag{736}$$

В силу (735) должно выполняться равенство (ввиду системы (720)—(730))

$$\begin{gathered}
v^2(Z'_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} + Z_1\alpha'\cos\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2} + \\
+ Z_1\beta'_1\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\ldots\sin\beta_{n-2} + \ldots + \\
+ Z_1\beta'_{n-3}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}\cos\beta_{n-3}\sin\beta_{n-2} + \\
+ Z_1\beta'_{n-2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}\cos\beta_{n-2} - \\
- 2bZ_1(Z_1^2+\ldots+Z_n^2)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-2}) =
\end{gathered}$$

$$= (-1)^{n+1} v^2 Z_1 Z_2 \cos\alpha \times$$
$$\times [\cos\beta_{n-2} - N_{n-1}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, Z_1, \ldots, Z_n) \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-2}] = 0,$$

откуда следует, что

$$N_{n-1}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, Z_1, \ldots, Z_n) = \frac{1}{\sin\beta_1} \frac{1}{\sin\beta_2} \ldots \frac{1}{\sin\beta_{n-3}} \frac{\cos\beta_{n-2}}{\sin\beta_{n-2}},$$

что и требовалось.

Уравнения (721), (727)—(730) являются кинематическими соотношениями и задают координаты α, $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$, $Z_1, \ldots, Z_n$ в фазовом пространстве системы (721)—(730) (касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^n\{Z_n, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$).

2.3.6. Общие замечания об интегрируемости системы при любом конечном n

Как уже было указано, для полного интегрирования системы (545)—(553) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем.

Система при отсутствии силового поля. Рассмотрим систему (545)—(553) на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ и получим из неё консервативную систему. Более того, будем считать, что функция (517) тождественно равна нулю. В частности, коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (546) отсутствует, $b = 0$, за исключением слагаемых, содержащих $\sum\limits_{s=1}^{n-1} Z_s^2$.

Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha, \tag{737}$$

$$Z'_{n-1} = -\left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{738}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{739}$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$
$$- \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sin\beta_1}\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{740}$$

$\ldots$

$$Z_1' = Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1} Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \quad (741)$$

$$\beta_1' = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (742)$$

$$\beta_2' = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \quad (743)$$

$$\ldots$$

$$\beta_{n-3}' = (-1)^n Z_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \quad (744)$$

$$\beta_{n-2}' = (-1)^{n+1} Z_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}. \quad (745)$$

При этом во вспомогательном уравнении (544) на величину v следует выбрать

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z) = -b(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2)\cos\alpha.$$

Система (737)—(745) описывает движение твёрдого тела при отсутствии внешнего поля сил.

Теорема 2.10. *Система* (737)—(745) *обладает* n *независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2) = C_1 = \mathrm{const}, \quad (746)$$

$$\Phi_2(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}\sin\alpha = \\ = C_2 = \mathrm{const}, \quad (747)$$

$$\Phi_3(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = \\ = C_3 = \mathrm{const}, \quad (748)$$

$$\ldots$$

$$\Phi_{n-2}(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} = \\ = C_{n-2} = \mathrm{const}, \quad (749)$$

$$\Phi_{n-1}(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} = \\ = C_{n-1} = \mathrm{const}, \quad (750)$$

$$\Phi_n(v;Z_{n-1},\ldots,Z_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}. \quad (751)$$

Замечание 2.13. Поскольку в первые интегралы (746)—(751), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (737)—(745) нужно использовать вспомогательное уравнение (544).

Первые $n-1$ первых интеграла (746)—(750) констатируют тот факт, что поскольку внешнего поля сил нет, то сохраняются $n-1$ (вообще говоря, ненулевые) компоненты тензора угловой скорости n-мерного твёрдого тела, а именно:

$$\omega_{r_1} \equiv \omega_{r_1}^0 = \text{const}, \ldots, \ \omega_{r_{n-1}} \equiv \omega_{r_{n-1}}^0 = \text{const}. \tag{752}$$

В частности, наличие первого интеграла (746) объясняется равенством

$$n_0^2 v^2 (Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) = \omega_{r_1}^2 + \ldots + \omega_{r_{n-1}}^2 = \text{const}. \tag{753}$$

Последний первый интеграл (751) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_{n-2} и может быть найден из следующей квадратуры:

$$\frac{d\beta_{n-2}}{d\beta_{n-3}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \frac{1}{\sin \beta_{n-3}}. \tag{754}$$

При этом если воспользоваться уровнями первых интегралов (749), (750) и получить равенство

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \pm \sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2} \sin^2 \beta_{n-3} - 1}, \tag{755}$$

то квадратура (754) примет вид

$$\beta_{n-2} = \pm \int \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{\left(\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2} - 1\right) - \frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2} u^2}}, \quad u = \cos \beta_{n-3}. \tag{756}$$

Её вычисление приводит к соотношению

$$\beta_{n-2} + C_n = \pm \operatorname{arctg} \frac{\cos \beta_{n-3}}{\sqrt{\frac{C_{n-2}^2}{C_{n-1}^2} \sin^2 \beta_{n-3} - 1}}, \quad C_n = \text{const}, \tag{757}$$

позволяющему получить первый интеграл (751). Преобразуя последнее равенство, имеем инвариантное соотношение

$$\operatorname{tg}^2(\beta_{n-2} + C_n) = \frac{C_{n-1}^2}{(C_{n-2}^2 - C_{n-1}^2) \operatorname{tg}^2 \beta_{n-3} - C_{n-1}^2}. \tag{758}$$

Теперь переформулируем теорему 2.10.

Теорема 2.11. *Система* (737)—(745) *обладает n независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2} \sin\alpha} =$$
$$= C_1' = \mathrm{const}, \tag{759}$$

$$\Psi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{760}$$

$$\Psi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1 \sin\beta_{n-3}} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{761}$$

$\ldots$

$$\Psi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2} \sin\beta_2} =$$
$$= C_{n-2}' = \mathrm{const}, \tag{762}$$

$$\Psi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2} \sin\beta_1} =$$
$$= C_{n-1}' = \mathrm{const}, \tag{763}$$

$$\Psi_n(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n' = \mathrm{const}. \tag{764}$$

Замечание 2.14. Поскольку в первые интегралы (759)—(764), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (737)—(745) нужно использовать вспомогательное уравнение (544).

Последний первый интеграл (764) также имеет кинематический смысл и «привязывает» уравнение на β_{n-2}, а функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 2.11 (в отличие от теоремы 2.10) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (759)—(764) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто могут не быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

Согласно теореме 2.11 преобразованный набор первых интегралов (759)—(764) системы (737)—(745) (системы при отсутствии силового поля) по-прежнему остаётся набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (737)—(745) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{gathered} w_{n-1} = Z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}, \\ w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}, \ldots, \\ w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}, \end{gathered} \tag{765}$$

система (737)—(745) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha, \tag{766}$$

$$w_{n-1}' = -w_{n-2}^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + b w_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha, \tag{767}$$

$$w_{n-2}' = w_{n-2} w_{n-1} \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + b w_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha, \tag{768}$$

$$\begin{gathered} w_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) \frac{1 + w_s^2}{w_s} \frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta_s' = d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \quad s = 1, \ldots, n-3, \end{gathered} \tag{769}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{770}$$

где

$$\begin{aligned} & d_1(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = Z_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ & d_2(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = -Z_{n-3}(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1}, \\ & \ldots \\ & d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ & \quad = (-1)^{n+1} Z_1(w_{n-1}, \ldots, w_1) \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha \sin\beta_1 \ldots \sin\beta_{n-3}}, \end{aligned} \tag{771}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_{n-1}, \ldots, w_1), \quad k = 1, \ldots, n-2, \text{ —} \tag{772}$$

функции согласно замене (765).

Видно, что система (766)—(770) порядка $3+2(n-3)+1 = 2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (766)—(768) — третьего, а системы (769) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (766)—(770) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (766)—(768), по одному для систем (769) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (770) (т. е. всего n).

Замечание 2.15. Выпишем первые интегралы (759)—(764) в переменных $w_1, \ldots, w_{n-1}$ согласно (765). Получим

$$\Theta_1(v; w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1'' = \text{const}, \tag{773}$$

$$\Theta_2(v; w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\alpha = C_2'' = \text{const}, \tag{774}$$

$$\Theta_{s+2}(v; w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \\ = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C_{s+2}'' = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{775}$$

$$\Theta_n(v; w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n'' = \text{const}. \tag{776}$$

Замечание 2.16. Поскольку в первые интегралы (773)—(776), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (766)—(770) нужно использовать вспомогательное уравнение (544).

Таким образом, два независимых первых интеграла (773), (774) достаточны для интегрирования системы (766)—(768), первые интегралы (775) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{777}$$

после замены независимого переменного эквивалентных соответственно системам (769), и, наконец, первый интеграл (776) достаточен для «привязывания» уравнения (770). Доказана следующая теорема.

Теорема 2.12. *Система* (737)—(745) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (n).

Система при наличии консервативного силового поля. Теперь рассмотрим систему (545)—(553) при условии $b = 0$, за исключением слагаемых, содержащих $\sum\limits_{s=1}^{n-1} Z_s^2$. При этом получим консервативную систему. А именно, наличие силового поля характеризует коэффициент $\sin\alpha\cos\alpha$ в уравнении (546) (в отличие от системы (737)—(745)). Рассматриваемая система примет вид

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha, \tag{778}$$

$$Z_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - \left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{779}$$

$$Z'_{n-2} = Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \\ + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{780}$$

$$Z'_{n-3} = Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - \left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{781}$$

$\dots$

$$Z'_1 = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\dots\sin\beta_{s-1}}\right\} + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha, \tag{782}$$

$$\beta'_1 = Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{783}$$

$$\beta'_2 = -Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{784}$$

$\dots$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-4}}, \tag{785}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1} Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\dots\sin\beta_{n-3}}, \tag{786}$$

при этом во вспомогательном уравнении (544) на величину v следует выбрать

$$\Psi(\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2},Z) = -b(Z_1^2+\dots+Z_{n-1}^2)\cos\alpha.$$

Итак, система (778)—(786) описывает движение твёрдого тела в консервативном внешнем поле сил.

Теорема 2.13. *Система* (778)—(786) *обладает* n *независимыми аналитическими первыми интегралами следующего вида*:

$$\Phi_1(v;Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) = v^2(Z_1^2+\dots+Z_{n-1}^2+\sin^2\alpha) = \\ = C_1 = \text{const}, \tag{787}$$

$$\Phi_2(v;Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+\dots+Z_{n-2}^2}\sin\alpha = \\ = C_2 = \text{const}, \tag{788}$$

$$\Phi_3(v;Z_{n-1},\dots,Z_1;\alpha,\beta_1,\dots,\beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2+\dots+Z_{n-3}^2}\sin\alpha\sin\beta_1 = \\ = C_3 = \text{const}, \tag{789}$$

$\dots$

$$\Phi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4} =$$
$$= C_{n-2} = \mathrm{const}, \tag{790}$$

$$\Phi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = v^2 Z_1\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3} =$$
$$= C_{n-1} = \mathrm{const}, \tag{791}$$

$$\Phi_n(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n = \mathrm{const}. \tag{792}$$

Замечание 2.17. Поскольку в первые интегралы (787)—(792), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (778)—(786) нужно использовать вспомогательное уравнение (544).

Первый интеграл (787) является интегралом полной энергии. Последний первый интеграл (792) имеет кинематический смысл, «привязывает» уравнение на β_{n-2} и найден выше.

Теперь переформулируем теорему 2.13.

Теорема 2.14. *Система* (778)—(786) *обладает* n *независимыми первыми интегралами следующего вида*:

$$\Psi_1(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2 + \sin^2\alpha}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}\sin\alpha} =$$
$$= C_1' = \mathrm{const}, \tag{793}$$

$$\Psi_2(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_2' = \mathrm{const}, \tag{794}$$

$$\Psi_3(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_{n-2}}{\Phi_{n-1}} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}}{Z_1\sin\beta_{n-3}} = C_3' = \mathrm{const}, \tag{795}$$

$\ldots$

$$\Psi_{n-2}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_3}{\Phi_4} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-4}^2}\sin\beta_2} =$$
$$= C_{n-2}' = \mathrm{const}, \tag{796}$$

$$\Psi_{n-1}(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = \frac{\Phi_2}{\Phi_3} = \frac{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-2}^2}}{\sqrt{Z_1^2 + \ldots + Z_{n-3}^2}\sin\beta_1} =$$
$$= C_{n-1}' = \mathrm{const}, \tag{797}$$

$$\Psi_n(v; Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C_n' = \mathrm{const}. \tag{798}$$

Замечание 2.18. Поскольку в первые интегралы (793)—(798), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (778)—(786) нужно использовать вспомогательное уравнение (544).

Функции Ψ_2, Ψ_n можно выбрать соответственно равными Φ_2, Φ_n.

В формулировке теоремы 2.14 (в отличие от теоремы 2.13) отсутствует характеристика гладкости первых интегралов. А именно, там, где знаменатели (или числители и знаменатели одновременно) первых интегралов (793)—(798) обращаются в нуль, сами интегралы как функции имеют особенности. Более того, они часто могут не быть, вообще говоря, даже непрерывными функциями.

Согласно теореме 2.14 преобразованный набор первых интегралов (793)—(798) системы (778)—(786) (системы при наличии консервативного силового поля) по-прежнему остаётся набором первых интегралов данной системы.

Для полного интегрирования системы (778)—(786) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (765) система (778)—(786) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha, \tag{799}$$

$$w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha, \tag{800}$$

$$w_{n-2}' = w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha, \tag{801}$$

$$\begin{gathered} w_s' = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta_s' = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \quad s=1,\ldots,n-3, \end{gathered} \tag{802}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{803}$$

где выполнены условия (771).

Видно, что система (799)—(803) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (799)—(801) — третьего, а системы (802) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (799)—(803) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (799)—(801), по одному для систем (802) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (803) (т. е. всего n).

Замечание 2.19. Выпишем первые интегралы (793)—(798) в переменных $w_1,\ldots,w_{n-1}$ согласно (765). Получим

$$\begin{gathered} \Theta_1(v;w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \frac{w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2 + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = \\ = C_1'' = \mathrm{const}, \end{gathered} \tag{804}$$

$$\Theta_2(v;w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = w_{n-2}\sin\alpha = C_2'' = \mathrm{const}, \tag{805}$$

$$\Theta_{s+2}(v; w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) =$$
$$= \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{806}$$

$$\Theta_n(v; w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \text{const}. \tag{807}$$

Замечание 2.20. Поскольку в первые интегралы (804)—(807), вообще говоря, входит величина v, то либо её следует выразить в данных соотношениях в соответствии с равенством (568), либо вместе с системой (799)—(803) нужно использовать вспомогательное уравнение (544).

Таким образом, два независимых первых интеграла (804), (805) достаточны для интегрирования системы (799)—(801), первые интегралы (806) (их $n-3$ штук) достаточны для интегрирования независимых уравнений первого порядка

$$\frac{dw_s}{d\beta_s} = \frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{808}$$

после замены независимого переменного эквивалентных системам (802), и, наконец, первый интеграл (807) достаточен для «привязывания» уравнения (803). Доказана следующая теорема.

Теорема 2.15. *Система* (778)—(786) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (n).

2.3.7. Полный список первых интегралов при любом конечном n

Перейдём теперь к интегрированию искомой системы (545)—(553) порядка $2(n-1)$ (без всяких упрощений — при наличии всех коэффициентов).

Для полного интегрирования системы (545)—(553) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Однако после замены переменных (765) система (545)—(553) распадается следующим образом:

$$\alpha' = -w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha, \tag{809}$$

$$\begin{aligned} w'_{n-1} &= \sin\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\ &\quad - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{aligned} \tag{810}$$

$$\begin{aligned} w'_{n-2} &= w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\ &\quad - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha, \end{aligned} \tag{811}$$

$$\begin{aligned} w'_s &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\,\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta'_s &= d_s(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \quad s = 1, \ldots, n-3, \end{aligned} \tag{812}$$

$$\beta'_{n-2} = d_{n-2}(w_{n-1}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}), \tag{813}$$

где выполнены условия (771).

Видно, что система (809)—(813) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (809)—(811) — третьего, а системы (812) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (809)—(813) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (809)—(811), по одному для систем (812) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (813) (т. е. всего n).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (809)—(811) неавтономную систему второго порядка

$$\frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha - w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha},$$

$$\frac{dw_{n-2}}{d\alpha} = \frac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + w_{n-1}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha}. \tag{814}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (814) в алгебраическом виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dw_{n-1}}{d\tau} &= \frac{\tau + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-1}\tau^2 - \frac{w_{n-1}^2}{\tau}}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-1}^2 + w_{n-1}^2)},\\
\frac{dw_{n-1}}{d\tau} &= \frac{bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-2}\tau^2 + \frac{w_{n-2}w_{n-1}}{\tau}}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)}.
\end{aligned} \tag{815}$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$w_{n-2} = u_1\tau, \quad w_{n-1} = u_2\tau, \tag{816}$$

приводим систему (815) к виду

$$\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + u_1u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)},
\end{aligned} \tag{817}$$

эквивалентному

$$\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2)}.
\end{aligned} \tag{818}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (818) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - bu_2 + u_2^2 - u_1^2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{819}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}\right)=0. \tag{820}$$

Итак, уравнение (819) имеет первый интеграл

$$\frac{u_2^2+u_1^2-bu_2+1}{u_1}=C_1=\mathrm{const}, \tag{821}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1},w_{n-2};\alpha)=\frac{w_{n-1}^2+w_{n-2}^2-bw_{n-1}\sin\alpha+\sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha}=C_1=\mathrm{const}. \tag{822}$$

Замечание 2.21. При $b=0$ первый интеграл (822) системы (809)—(811) совпадает с первым интегралом (804) системы (799)—(801), но при $b\neq 0$ ни числитель выражения (822), ни его знаменатель не являются первыми интегралами системы (809)—(811) по отдельности (хотя при $b=0$ и числитель и знаменатель выражения (822) являются первыми интегралами системы (799)—(801)).

Произведём поиск дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (809)—(811). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (821) при $u_1\neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2-\frac{b}{2}\right)^2+\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2=\frac{b^2+C_1^2}{4}-1. \tag{823}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2+C_1^2-4\geqslant 0, \tag{824}$$

и фазовое пространство системы (809)—(811) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (823).

Таким образом, согласно соотношению (821) первое уравнение системы (818) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau}=\frac{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2+b(1-\tau^2)+b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2)}, \tag{825}$$

где

$$U_1(C_1,u_2)=\frac{1}{2}\{C_1\pm\sqrt{C_1^2-4(u_2^2-bu_2+1)}\}, \tag{826}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (824), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2}=\frac{(b-u_2)\tau-b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2)}{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)}. \tag{827}$$

Уравнение (827) (при помощи (826)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2}=\frac{2(u_2-b)p+2b(1-U_1^2(C_1,u_2)-u_2^2)}{1-bu_2+u_2^2-U_1^2(C_1,u_2)},\quad p=\frac{1}{\tau^2}. \tag{828}$$

Последний факт означает, что может быть найден ещё один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т. е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (828) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (828), даже в частном случае $b = C_1 = 2$ имеет следующее решение:

$$p = p_0(u_2) = C[\sqrt{1-(u_2-1)^2} \pm 1] \exp\left[\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-(u_2-1)^2}}{1 \pm \sqrt{1-(u_2-1)^2}}}\right], \quad C = \text{const}. \tag{829}$$

Замечание 2.22. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (822).

Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{830}$$

Итак, найдены два первых интеграла (822), (830) независимой системы третьего порядка (809)—(811). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (812) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (813).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (806), (807), а именно:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \tag{831}$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \text{const}, \tag{832}$$

при этом в левую часть равенства (832) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (831) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 2.16. *Система* (809)—(813) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (n): (822), (830), (831), (832).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (7), (15) при условии (542) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2-n+4}{2}, \quad n > 2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (501), соответствующая аналитическому первому интегралу (566), циклические первые интегралы вида (497), (498), первый интеграл вида (822), также имеется первый интеграл (830), который может быть найден из уравнения (828), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа), и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (831), (832).

Теорема 2.17. *Система* (7), (15) *при условиях* (501), (542), (497), (498) *обладает* $(n^2 - n + 4)/2$, $n > 2$, *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), n *из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

2.3.8. Топологические аналогии

Покажем, что существует ещё одна механическая и топологическая аналогия.

Теорема 2.18. *Первый интеграл* (822) *системы* (7), (15) *при условиях* (501), (542), (498), (497) *постоянен на фазовых траекториях системы* (108)—(116).

Доказательство. Действительно, первый интеграл (822) может быть получен заменой координат через соотношение (821), а первый интеграл (209) может быть получен заменой координат через соотношение (208). Но соотношения (821) и (208) совпадают. Теорема доказана. □

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1. Движение свободного n-мерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).
2. Движение закреплённого n-мерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).
3. Вращение n-мерного твёрдого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [168, 220, 230, 251, 256].

2.4. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

2.4.1. Введение зависимости от угловой скорости и приведённая система

Мы продолжаем изучать динамику n-мерного твёрдого тела в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Но, поскольку данный раздел посвящён исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введём такую зависимость с более общих позиций.

Пусть $x = (x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на $(n-1)$-мерный диск (задаваемый равенством $x_{1N} = 0$), $Q = (Q_1, \ldots, Q_n)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, \ldots, x_{nN})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [57, 58].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{833}$$

где $R = (R_1, \ldots, R_n)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdots \\ R_n \end{pmatrix} = -\frac{1}{v}\Omega h, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}. \tag{834}$$

Здесь Ω — тензор угловой скорости, $(h_1, \ldots, h_n)$ — некоторые положительные параметры (ср. с [57, 58]).

Применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv 0$,

$$x_{2N} = Q_2 - h_1 \frac{\omega_{r_{n-1}}}{v},\ x_{3N} = Q_3 + h_1 \frac{\omega_{r_{n-2}}}{v}, \ldots,\ x_{nN} = Q_n + (-1)^{n+1} h_1 \frac{\omega_{r_1}}{v}. \tag{835}$$

Здесь $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_{n-1}}$ — оставшиеся, вообще говоря ненулевые, компоненты тензора угловой скорости Ω. В частности, при $n = 5$ имеем:

$$x_{2N} = Q_2 - h_1 \frac{\omega_{10}}{v}, \quad x_{3N} = Q_3 + h_1 \frac{\omega_9}{v}, \quad x_{4N} = Q_4 - h_1 \frac{\omega_7}{v}, \quad x_{5N} = Q_5 + h_1 \frac{\omega_4}{v}. \tag{836}$$

2.4.2. Приведённая система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [113, 114], пользуясь (518), имеем

$$Q = R(\alpha)\mathbf{i}_N, \tag{837}$$

а динамические функции s, $x_{2N}, \ldots, x_{nN}$ примем в виде

$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad \mathbf{r}_N = Q - \frac{1}{v}\Omega h, \quad R(\alpha) = A\sin\alpha, \qquad A, B > 0, \tag{838}$$

говорящем о том, что в рассматриваемой системе присутствует также дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости), причём $h_2 = \ldots = h_n$ ввиду динамической симметрии тела. При этом функции $\Gamma_v(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $\Delta_{v,s}(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \Omega/v)$, $s = 1, \ldots, n-2$, входящие в систему (521)—(528), примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_v\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha - \frac{h_1}{v} z_{n-1}, \\
&\Delta_{v,1}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = \frac{h_1}{v} z_{n-2}, \\
&\cdots \\
&\Delta_{v,n-2}\left(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, \frac{\Omega}{v}\right) = (-1)^{n+1} \frac{h_1}{v} z_1.
\end{aligned} \tag{839}$$

Тогда благодаря условиям (501), (838) преобразованная динамическая часть уравнений движения (система (520)—(528)) примет вид аналитической системы

$$v' = v\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z), \tag{840}$$

$$\alpha' = -Z_{n-1} + b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 Z_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{841}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bZ_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - bZ_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 Z_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_{n-1}\cos\alpha, \end{gathered} \tag{842}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-2} = (1+bH_1)Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ + (1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + bZ_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - bZ_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 Z_{n-2}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_{n-2}\cos\alpha, \end{gathered} \tag{843}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-3} = (1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+bH_1)Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (1+bH_1)\left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + bZ_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - bZ_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 Z_{n-3}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 Z_{n-3}\cos\alpha, \end{gathered} \tag{844}$$

$\ldots$

$$\begin{gathered} Z'_1 = (1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + \\ + bZ_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - bZ_1\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 Z_1 Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - \\ - H_1 Z_1\cos\alpha, \end{gathered} \tag{845}$$

$$\beta'_1 = (1+bH_1)Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{846}$$

$$\beta'_2 = -(1+bH_1)Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{847}$$

$\ldots$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n(1+bH_1)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{848}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}(1+bH_1)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{849}$$

где

$$\Psi(\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, Z) = -b\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha + b\sin^2\alpha\cos\alpha - bH_1 Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Как и выше, мы выбрали безразмерные параметры b, H_1 и постоянную n_1 следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{(n-2)I_2 n_0}, \quad n_1 = n_0. \tag{850}$$

Итак, система (840)—(849) может быть рассмотрена на своём фазовом $(2(n-1)+1)$-мерном многообразии

$$W_1 = \mathbf{R}_+^1\{v\} \times T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 \leqslant \pi, \ldots,\ 0 \leqslant \beta_{n-3} \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \beta_{n-2} < 2\pi\}, \tag{851}$$

т. е. на прямом произведении числового луча на касательное расслоение к $(n-1)$-мерной сфере.

Видно, что в системе (840)—(849) порядка $2(n-1)+1$ образовалась независимая система (841)—(849) порядка $2(n-1)$ на касательном расслоении $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$-мерной сферы $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. При этом в независимой системе (841)—(849) порядка $2(n-1)$ образовалась ещё одна независимая система (841)—(848) порядка $2n-3$ на своём $(2n-3)$-мерном многообразии.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.19. *У системы* (7), (15) *при условиях* (501), (497), (498) *выделяется динамическая система* (521)—(528) *на касательном расслоении* $T_*\mathbf{S}^{n-1}\{Z_{n-1}, \ldots, Z_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$ $(n-1)$*-мерной сферы* $\mathbf{S}^{n-1}\{\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}\}$. *В частности, при условии* (838) *выделяется система* (841)—(849).

2.4.3. Об аналитическом первом интеграле

В силу (501) значение скорости центра масс является первым интегралом системы (508)—(515) (при условии (503)), а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_0(v, \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}, z_1, \ldots, z_{n-1}) = \\ = v^2 + \sigma^2(z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2) - 2\sigma z_{n-1} v \sin\alpha = V_C^2 \tag{852}$$

постоянна на её фазовых траекториях (при этом величины $z_1, \ldots, z_{n-1}$ выбираются согласно (505)).

После невырожденной замены независимого переменного (при $v \neq 0$) у системы (840)—(849) также существует аналитический интеграл, а именно, функция фазовых переменных

$$\Psi_1(v,\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2},Z_1,\ldots,Z_{n-1}) = \\ = v^2(1+b^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2)-2bZ_{n-1}\sin\alpha) = V_C^2 \quad (853)$$

постоянна на её фазовых траекториях.

Равенство (853) позволяет, не решая системы (840)—(849), найти зависимость скорости характерной точки твёрдого тела (центра D диска) от других фазовых переменных, а именно, при $V_C \neq 0$ выполнено равенство

$$v^2 = \frac{V_C^2}{1+b^2(Z_1^2+\ldots+Z_{n-1}^2)-2bZ_{n-1}\sin\alpha}. \quad (854)$$

Поскольку в фазовом пространстве системы (840)—(849) существуют асимптотические предельные множества, то равенство (853) задаёт единственный аналитический (даже непрерывный) первый интеграл системы (840)—(849) во всём фазовом пространстве (ср. с [139, 184, 236]).

Таким образом, благодаря отделению уравнения на величину v, а также наличию аналитического первого интеграла (853) система (841)—(849) может быть рассмотрена самостоятельно на своём фазовом пространстве.

2.4.4. Полный список первых интегралов при любом конечном n

Для полного интегрирования системы (841)—(849) порядка $2(n-1)$ необходимо знать, вообще говоря, $2n-3$ независимых первых интегралов. Но рассматриваемые системы имеют симметрии, которые позволяют снизить достаточное количество первых интегралов до n для интегрирования систем.

Действительно, после замены переменных

$$\begin{pmatrix} Z_{n-1} \\ Z_{n-2} \\ \ldots \\ Z_2 \\ Z_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \ldots \\ w_2 \\ w_1 \end{pmatrix},$$

$$w_{n-1} = Z_{n-1}, \quad w_{n-2} = \sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-2}^2}, \quad (855)$$

$$w_{n-3} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad w_{n-4} = \frac{Z_3}{\sqrt{Z_1^2+Z_2^2}}, \ldots,$$

$$w_2 = \frac{Z_{n-3}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-4}^2}}, \quad w_1 = \frac{Z_{n-2}}{\sqrt{Z_1^2+\ldots+Z_{n-3}^2}},$$

система (841)—(849) распадается следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha' = -(1+bH_1)w_{n-1} + b\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\sin\alpha + \\ + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha, \end{aligned} \tag{856}$$

$$\begin{aligned} w_{n-1}' = \sin\alpha\cos\alpha - (1+bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\ - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-1}\cos\alpha, \end{aligned} \tag{857}$$

$$\begin{aligned} w_{n-2}' = (1+bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\cos\alpha - \\ - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-2}\cos\alpha, \end{aligned} \tag{858}$$

$$\begin{aligned} w_s' = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2})\frac{1+w_s^2}{w_s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta_s}, \\ \beta_s' = d_s(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \quad s = 1,\ldots,n-3, \end{aligned} \tag{859}$$

$$\beta_{n-2}' = d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}), \tag{860}$$

где выполнены условия

$$\begin{aligned} & d_1(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = (1+bH_1)Z_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \\ & d_2(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\ & \quad = -(1+bH_1)Z_{n-3}(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \\ & \ldots \\ & d_{n-2}(w_{n-1},\ldots,w_1;\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_{n-2}) = \\ & \quad = (-1)^{n+1}(1+bH_1)Z_1(w_{n-1},\ldots,w_1)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \end{aligned} \tag{861}$$

при этом

$$z_k = Z_k(w_{n-1},\ldots,w_1), \quad k = 1,\ldots,n-2, \text{ —} \tag{862}$$

функции после замены (855).

Видно, что система (856)—(860) порядка $2(n-1)$ распадается на независимые подсистемы ещё более низкого порядка: система (856)—(858) — третьего, а системы (859) (конечно, после замены независимого переменного) — второго. Таким образом, для полной интегрируемости системы (856)—(860) достаточно указать два независимых первых интеграла системы (856)—(858), по одному для систем (859) (всего $n-3$ штуки) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (860) (т. е. всего n).

Для начала поставим в соответствие независимой подсистеме третьего порядка (856)—(858) неавтономную систему второго порядка

$$
\begin{gathered}
\frac{dw_{n-1}}{d\alpha} = \frac{R_2(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1})}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha},\\
\frac{dw_{n-2}}{d\alpha} = \frac{R_1(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1})}{-w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - bH_1 w_{n-1}\cos^2\alpha},\\
R_2(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1}) = \sin\alpha\cos\alpha + \\
+ bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha - \\
- (1 + bH_1)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-1}\cos\alpha,\\
R_1(\alpha, w_{n-2}, w_{n-1}) = bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + \\
+ (1 + bH_1)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - H_1 w_{n-2}\cos\alpha.
\end{gathered} \tag{863}
$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (863) в алгебраическом виде:

$$
\begin{gathered}
\frac{dw_{n-1}}{d\tau} = \\
= \frac{\tau + bw_{n-1}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-1}\tau^2 - (1 + bH_1)\frac{w_{n-2}^2}{\tau} + bH_1 w_{n-1}^2\tau - H_1 w_{n-1}}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bH_1 w_{n-1}(1-\tau^2)},\\
\frac{dw_{n-2}}{d\tau} = \\
= \frac{bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bw_{n-2}\tau^2 + (1 + bH_1)w_{n-2}\frac{w_{n-1}}{\tau} + bH_1 w_{n-2}w_{n-1}\tau - H_1 w_{n-2}}{-w_{n-1} + b\tau(1-\tau^2) + b\tau(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2) - bH_1 w_{n-1}(1-\tau^2)}.
\end{gathered} \tag{864}
$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$
w_{n-2} = u_1\tau, \quad w_{n-1} = u_2\tau, \tag{865}
$$

приводим систему (864) к следующему виду:

$$
\begin{gathered}
\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 = \frac{1 - bu_2\tau^2 + bu_2(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - (1 + bH_1)u_1^2 - H_1 u_2 + bH_1 u_2^2\tau^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2) - bH_1 u_2(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 = \frac{bu_1(u_1^2 + u_2^2)\tau^2 - bu_1\tau^2 + (1 + bH_1)u_1 u_2 - H_1 u_1 + bH_1 u_1 u_2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2) - bH_1 u_2(1-\tau^2)},
\end{gathered} \tag{866}
$$

эквивалентному

$$
\begin{gathered}
\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2) - bH_1 u_2(1-\tau^2)},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} = \frac{2(1 + bH_1)u_1 u_2 - (b + H_1)u_1}{-u_2 + b\tau^2(u_1^2 + u_2^2) + b(1-\tau^2) - bH_1 u_2(1-\tau^2)}.
\end{gathered} \tag{867}
$$

Поставим системе второго порядка (867) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{1 - (b + H_1)u_2 + (1 + bH_1)u_2^2 - (1 + bH_1)u_1^2}{2(1 + bH_1)u_1u_2 - (b + H_1)u_1}, \tag{868}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1}\right) = 0. \tag{869}$$

Итак, уравнение (868) имеет первый интеграл

$$\frac{(1 + bH_1)u_2^2 + (1 + bH_1)u_1^2 - (b + H_1)u_2 + 1}{u_1} = C_1 = \text{const}, \tag{870}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\Theta_1(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \\ = \frac{(1 + bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b + H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha}{w_{n-2}\sin\alpha} = C_1 = \text{const}. \tag{871}$$

Замечание 2.23. Рассмотрим систему (856)—(858) с переменной диссипацией с нулевым средним [168,254,258,260,264,272], становящейся консервативной при $b = H_1$:

$$\begin{aligned}
\alpha' &= -(1 + b^2)w_{n-1} + b(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\sin\alpha + b\sin\alpha\cos^2\alpha - b^2 w_{n-1}\cos^2\alpha,\\
w_{n-1}' &= \sin\alpha\cos\alpha - (1 + b^2)w_{n-2}^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-1}\left(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2\right)\cos\alpha - \\
&\quad - bw_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2 w_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - bw_{n-1}\cos\alpha,\\
w_{n-2}' &= (1 + b^2)w_{n-2}w_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + bw_{n-2}(w_{n-2}^2 + w_{n-1}^2)\cos\alpha - \\
&\quad - bw_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + b^2 w_{n-2}w_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - bw_{n-2}\cos\alpha.
\end{aligned} \tag{872}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами:

$$(1 + b^2)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - 2bw_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha = C_1^* = \text{const}, \tag{873}$$

$$w_{n-2}\sin\alpha = C_2^* = \text{const}. \tag{874}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (873), (874) также является первым интегралом системы (872). Но при $b \neq H_1$ каждая из функций

$$(1 + bH_1)(w_{n-1}^2 + w_{n-2}^2) - (b + H_1)w_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha \tag{875}$$

и (874) по отдельности не является первым интегралом системы (856)—(858). Однако отношение функций (875), (874) является первым интегралом системы (856)—(858) при любых b, H_1.

Будем искать дополнительный первый интеграл системы третьего порядка (856)—(858). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (870) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b+H_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2(1+bH_1)}\right)^2 = \frac{(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4}{4(1+bH_1)^2}. \tag{876}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b-H_1)^2 + C_1^2 - 4 \geqslant 0, \tag{877}$$

и фазовое пространство системы (856)—(858) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (876).

Таким образом, в силу соотношения (870) первое уравнение системы (867) примет вид

$$\tau\frac{du_2}{d\tau} = \frac{1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}{-u_2 + b(1-\tau^2) + b\tau^2(U_1^2(C_1,u_2)+u_2^2) - bH_1u_2(1-\tau^2)}, \tag{878}$$

где

$$U_1(C_1,u_2) = \frac{1}{2}\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(1+bH_1)(1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2)}\}, \tag{879}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (877), или вид уравнения Бернулли:

$$\frac{d\tau}{du_2} = \frac{(b-(1+bH_1)u_2)\tau - b\tau^3(1-U_1^2(C_1,u_2) - u_2^2 - H_1u_2)}{1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}. \tag{880}$$

Уравнение (880) (при помощи (879)) легко приводится к линейному неоднородному уравнению:

$$\frac{dp}{du_2} = \frac{2((1+bH_1)u_2 - b)p + 2b(1-H_1u_2 - u_2^2 - U_1^2(C_1,u_2))}{1-(b+H_1)u_2 + (1+bH_1)u_2^2 - (1+bH_1)U_1^2(C_1,u_2)}, \quad p = \frac{1}{\tau^2}. \tag{881}$$

Последний факт означает, что может быть найден ещё один трансцендентный первый интеграл в явном виде (т. е. через конечную комбинацию квадратур). При этом общее решение уравнения (881) зависит от произвольной постоянной C_2. Полные выкладки в данном месте приводить не будем, отметив лишь для примера, что общее решение линейного однородного уравнения, полученного из (881), даже в частном случае

$$|b-H_1| = 2, \quad C_1 = \frac{1-A_1^4}{1+A_1^4}, \quad A_1 = \frac{1}{2}(b+H_1)$$

имеет вид

$$p = p_0(u_2) = C[1-A_1u_2]^{2/(1+A_1^4)} \left|\frac{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1-A_1u_2)^2} \pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 4A_1^2(1-A_1u_2)^2} \mp C_1}\right|^{\pm A_1^4/(1+A_1^4)} \times$$
$$\times \exp\frac{2(A_1-b)}{(1+A_1^4)A_1(A_1u_2-1)}, \quad C = \text{const}. \tag{882}$$

Замечание 2.24. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (871). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид:

$$\Theta_2(w_{n-1}, w_{n-2}; \alpha) = \ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_{n-1}}{\sin\alpha}, \frac{w_{n-2}}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \mathrm{const}. \quad (883)$$

Итак, найдены два первых интеграла (871), (883) независимой системы третьего порядка (856)—(858). Осталось указать по одному первому интегралу для систем (859) (их всего $n-3$) и дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (860).

Действительно, искомые первые интегралы совпадают с первыми интегралами (806), (807), а именно:

$$\Theta_{s+2}(w_s; \beta_s) = \frac{\sqrt{1+w_s^2}}{\sin\beta_s} = C''_{s+2} = \mathrm{const}, \quad s = 1, \ldots, n-3, \quad (884)$$

$$\Theta_n(w_{n-3}, \ldots, w_1; \alpha, \beta_1, \ldots, \beta_{n-2}) = C''_n = \mathrm{const}, \quad (885)$$

при этом в левую часть равенства (885) вместо C_{n-2}, C_{n-1} необходимо подставить интегралы (884) при $s = n-4, n-3$.

Теорема 2.20. *Система* (856)—(860) *порядка* $2(n-1)$ *обладает достаточным количеством независимых первых интегралов* (n): (871), (883), (884), (885).

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (7), (15) при условии (838) имеет

$$1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n = \frac{n^2 - n + 4}{2}, \quad n > 2,$$

инвариантных соотношений: имеются аналитическая неинтегрируемая связь вида (501), соответствующая аналитическому первому интегралу (566), циклические первые интегралы вида (497), (498), первый интеграл вида (871), также имеется первый интеграл (883), который может быть найден из уравнения (881), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа), и, наконец, трансцендентные первые интегралы вида (884), (885).

Теорема 2.21. *Система* (7), (15) *при условиях* (501), (838), (497), (498) *обладает* $(n^2 - n + 4)/2$, $n > 2$, *инвариантными соотношениями* (*полным набором*), n *из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа.*

2.4.5. Топологические аналогии

Покажем, что существует ещё одна механическая и топологическая аналогия.

Теорема 2.22. *Первый интеграл* (871) *системы* (7), (15) *при условиях* (501), (838), (498), (497) *постоянен на фазовых траекториях системы* (412)—(419).

Доказательство. Действительно, первый интеграл (871) может быть получен заменой координат через соотношение (870), а первый интеграл (446) может быть получен заменой координат через соотношение (445). Но соотношения (870) и (445) совпадают. Теорема доказана. □

Итак, мы имеем следующие топологические и механические аналогии в том смысле, в котором они объяснены выше.

1. Движение свободного n-мерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил со следящей силой (при наличии неинтегрируемой связи).
2. Движение закреплённого n-мерного физического маятника в потоке набегающей среды (неконсервативное поле сил).
3. Вращение n-мерного твёрдого тела вокруг центра масс, движущегося прямолинейно и равномерно, и находящегося в неконсервативном поле сил.

О более общих топологических аналогиях см. также [168].

3. Случаи интегрируемости, соответствующие движению твёрдого тела в n-мерном пространстве. III

В данном разделе систематизируются новые результаты исследования уравнений движения динамически симметричного четырёхмерного твёрдого тела, находящегося в некотором неконсервативном поле сил в случае особой динамической симметрии. Вид поля сил заимствован из динамики реальных твёрдых тел меньшей размерности, взаимодействующих с сопротивляющейся средой по законам струйного обтекания, при котором на тело действует неконсервативная следящая сила, заставляющая оставаться постоянными во всё время движения как величину скорости некоторой характерной точки твёрдого тела, так и некоторую другую фазовую переменную. Последний факт означает наличие в системе неинтегрируемых сервосвязей (см. [82, 87, 102, 132, 149, 157]).

Ранее в [87, 168] автором уже была показана полная интегрируемость уравнений плоскопараллельного движения тела в сопротивляющейся среде в условиях струйного обтекания, когда у системы динамических уравнений существует первый интеграл, являющийся трансцендентной (в смысле теории функций комплексного переменного, имеющей существенно особые точки) функцией квазискоростей. Тогда предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму (одномерной) пластины.

Позднее [168, 175, 177, 197, 200, 201] плоская задача была обобщена на пространственный (трёхмерный) случай, при этом у системы динамических уравнений существует полный набор трансцендентных первых интегралов. Здесь уже предполагалось, что всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму плоского (двумерного) диска.

В данном разделе результаты относятся к случаю, когда всё взаимодействие среды с телом сосредоточено на той части поверхности тела, которая имеет форму двумерного диска, при этом силовое воздействие сосредоточено на двумерной плоскости, перпендикулярной данному диску. Результаты систематизируются и подаются в инвариантном виде. При этом вводится дополнительная зависимость момента неконсервативной силы от угловой скорости. Данная зависимость в дальнейшем может быть распространена и на случаи движения в пространствах высшей размерности.

3.1. Более общая задача о движении со следящей силой

Рассмотрим движение однородного динамически симметричного твёрдого тела с «передним торцом» (двумерным диском, «взаимодействующим со средой, заполняющей четырёхмерное пространство») в поле силы $\mathbf{S}$ сопротивления в условиях квазистационарности в случае, когда тензор инерции твёрдого тела представляется в виде

$$\mathrm{diag}\{I_1, I_1, I_3, I_3\}. \tag{886}$$

Пусть $(v, \alpha, \beta_2, \beta_1)$ — координаты вектора скорости $\mathbf{v}_D$ некоторой характерной точки D твёрдого тела (D — центр двумерного диска), такие что α — угол между вектором $\mathbf{v}_D$ и плоскостью Dx_1x_2, β_2 — угол, измеряемый в плоскости Dx_1x_2 до проекции вектора $\mathbf{v}_D$ на плоскость Dx_1x_2, β_1 — угол, измеряемый в плоскости Dx_3x_4 до проекции вектора $\mathbf{v}_D$ на плоскость Dx_3x_4,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} -$$

тензор угловой скорости тела, $Dx_1x_2x_3x_4$ — система координат, связанная с телом, при этом прямая CD лежит в плоскости Dx_1x_2 (C — центр масс), а оси Dx_3, Dx_4 лежат в гиперплоскости диска, I_1, $I_2 = I_1$, I_3, $I_4 = I_3$, m — инерционно-массовые характеристики.

Примем следующие разложения в проекциях на оси системы координат $Dx_1x_2x_3x_4$:

$$\begin{gathered} \mathbf{DC} = \{\sigma \sin\gamma, -\sigma\cos\gamma, 0, 0\}, \\ \mathbf{v}_D = \{v\cos\alpha\sin\beta_2,\, v\cos\alpha\cos\beta_2,\, v\sin\alpha\cos\beta_1,\, v\sin\alpha\sin\beta_1\}. \end{gathered} \tag{887}$$

При этом в случае (886) также будет справедливо разложение для функции воздействия среды на четырёхмерное тело

$$\mathbf{S} = \{S_1, S_2, 0, 0\}, \tag{888}$$

при этом

$$S_1 = S\sin\gamma, \quad S_2 = -S\cos\gamma, \quad \gamma = \mathrm{const}, \tag{889}$$

т. е. в данном случае $\mathbf{F} = \mathbf{S}$ и угол γ измеряется в плоскости Dx_1x_2. Тогда та часть динамических уравнений движения тела (в том числе и в случае аналитических функций Чаплыгина [113, 114], см. ниже), которая описывает движение центра масс и соответствует пространству $\mathbf{R}^4$, при котором касательные силы воздействия среды на двумерный диск отсутствуют, примет вид

$$\begin{aligned}&\dot{v}\cos\alpha\sin\beta_2 - \dot{\alpha}v\sin\alpha\sin\beta_2 + \dot{\beta}_2 v\cos\alpha\cos\beta_2 - \omega_6 v\cos\alpha\cos\beta_2 + \\ &\quad + \omega_5 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \omega_3 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \sigma(\omega_6^2 + \omega_5^2 + \omega_3^2)\sin\gamma - \\ &\quad - \sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3)\cos\gamma + \sigma\dot{\omega}_6\cos\gamma = \frac{S_1}{m},\end{aligned} \tag{890}$$

$$\begin{aligned}&\dot{v}\cos\alpha\cos\beta_2 - \dot{\alpha}v\sin\alpha\cos\beta_2 - \dot{\beta}_2 v\cos\alpha\sin\beta_2 + \omega_6 v\cos\alpha\sin\beta_2 - \\ &\quad - \omega_4 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_2 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \sigma(\omega_6^2 + \omega_4^2 + \omega_2^2)\cos\gamma + \\ &\quad + \sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3)\sin\gamma + \sigma\dot{\omega}_6\sin\gamma = \frac{S_2}{m},\end{aligned} \tag{891}$$

$$\begin{aligned}&\dot{v}\sin\alpha\cos\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \omega_5 v\cos\alpha\sin\beta_2 + \\ &\quad + \omega_4 v\cos\alpha\cos\beta_2 - \omega_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \sigma(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3)\sin\gamma - \\ &\quad - \sigma(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2)\cos\gamma - \sigma\dot{\omega}_5\sin\gamma - \sigma\dot{\omega}_4\cos\gamma = 0,\end{aligned} \tag{892}$$

$$\begin{aligned}&\dot{v}\sin\alpha\sin\beta_1 + \dot{\alpha}v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_3 v\cos\alpha\sin\beta_2 - \\ &\quad - \omega_2 v\cos\alpha\cos\beta_2 + \omega_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \sigma(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5)\sin\gamma + \\ &\quad + \sigma(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4)\cos\gamma + \sigma\dot{\omega}_3\sin\gamma + \sigma\dot{\omega}_2\cos\gamma = 0,\end{aligned} \tag{893}$$

где

$$S = s(\alpha)v^2, \quad \sigma = CD, \quad v > 0. \tag{894}$$

Вспомогательная матрица для вычисления момента силы сопротивления примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_{3N} & x_{4N} \\ S_1 & S_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{895}$$

Тогда та часть динамических уравнений движения тела, которая описывает движение тела вокруг центра масс и соответствует алгебре Ли $\mathrm{so}(4)$, примет вид

$$(\lambda_4 + \lambda_3)\dot{\omega}_1 + (\lambda_3 - \lambda_4)(\omega_3\omega_5 + \omega_2\omega_4) = 0, \tag{896}$$

$$\begin{aligned}&(\lambda_2 + \lambda_4)\dot{\omega}_2 + (\lambda_2 - \lambda_4)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) = \\ &\quad = -x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\cos\gamma,\end{aligned} \tag{897}$$

$$\begin{aligned}&(\lambda_4 + \lambda_1)\dot{\omega}_3 + (\lambda_4 - \lambda_1)(\omega_2\omega_6 + \omega_1\omega_5) = \\ &\quad = -x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\sin\gamma,\end{aligned} \tag{898}$$

$$(\lambda_3 + \lambda_2)\dot{\omega}_4 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\omega_5\omega_6 + \omega_1\omega_2) = x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\cos\gamma, \tag{899}$$

$$(\lambda_1 + \lambda_3)\dot{\omega}_5 + (\lambda_3 - \lambda_1)(\omega_4\omega_6 - \omega_1\omega_3) = x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)v^2 \sin\gamma, \quad (900)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\dot{\omega}_6 + (\lambda_1 - \lambda_2)(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3) = 0. \quad (901)$$

Таким образом, фазовым пространством системы (890)—(893), (896)—(901) десятого порядка является прямое произведение четырёхмерного многообразия на алгебру Ли so(4):

$$\mathbf{R}^1 \times \mathbf{M}^3 \times \mathrm{so}(4). \quad (902)$$

Сразу же заметим, что система (890)—(893), (896)—(901) в силу имеющейся динамической симметрии

$$I_1 = I_2, \quad I_3 = I_4 \quad (903)$$

обладает циклическими первыми интегралами

$$\omega_1 \equiv \omega_1^0 = \mathrm{const}, \quad \omega_6 \equiv \omega_6^0 = \mathrm{const}. \quad (904)$$

При этом в дальнейшем будем рассматривать динамику системы на нулевых уровнях:

$$\omega_1^0 = \omega_6^0 = 0. \quad (905)$$

Если же рассматривается более общая задача о движении тела при наличии некоторой следящей силы $\mathbf{T}$, действующей на плоскости Dx_1x_2 и обеспечивающей во всё время движения выполнение равенств (см. также [206, 208, 209, 212, 217—219])

$$v \equiv \mathrm{const}, \quad \beta_2 \equiv \mathrm{const}, \quad (906)$$

то в системе (890)—(893), (896)—(901) вместо F_1 и F_2 будут стоять соответственно величины

$$T_1 + S_1, \quad T_2 + S_2. \quad (907)$$

Соответствующим выбором величины T следящей силы можно формально добиться выполнения во всё время движения равенств (906). Действительно, формально выражая величину T согласно системе (890)—(893), (896)—(901), получим при $\cos\alpha \neq 0$

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{1,v,\beta 2}(\alpha, \beta_1, \Omega) = \\ &= -m\sigma(\omega_5^2 + \omega_3^2)\sin\gamma - m\sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3)\cos\gamma + m\omega_5 v \sin\alpha\cos\beta_1\cos^2\beta_2 - \\ &- m\omega_3 v \sin\alpha \sin\beta_1 \cos^2\beta_2 + m\omega_4 v \sin\alpha\cos\beta_1 \sin\beta_2\cos\beta_2 - \\ &- m\omega_2 v \sin\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_2 - \\ &- s(\alpha)v^2\left[\sin\gamma - \frac{m\sigma}{I_1 + I_3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\beta_2 \cdot \Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \end{aligned} \quad (908)$$

$$\begin{aligned} T_2 &= T_{2,v,\beta 2}(\alpha, \beta_1, \Omega) = \\ &= m\sigma(\omega_4^2 + \omega_2^2)\cos\gamma + m\sigma(\omega_4\omega_5 + \omega_2\omega_3)\sin\gamma - m\omega_4 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin^2\beta_2 + \\ &+ m\omega_2 v \sin\alpha\sin\beta_1\sin^2\beta_2 - m\omega_5 v\sin\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_2 + \end{aligned}$$

$$+ m\omega_3 v \sin\alpha \sin\beta_1 \sin\beta_2 \cos\beta_2$$

$$+ s(\alpha)v^2 \left[\cos\gamma - \frac{m\sigma}{I_1+I_3}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\beta_2 \cdot \Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{909}$$

где

$$\Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right) = x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1 + x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1. \tag{910}$$

При получении равенств (908) и (909) используются условия (904)—(906).

На данную процедуру можно посмотреть с двух позиций. Во-первых, произошло преобразование системы за счёт наличия в системе следящей силы (управления), обеспечивающей рассмотрение интересующих нас классов движений (906). Во-вторых, эта процедура позволяет понизить порядок системы. Действительно, система (890)—(893), (896)—(901) в результате действий порождает независимую систему шестого порядка

$$\begin{aligned}&\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 - \omega_5 v\cos\alpha\sin\beta_2 + \omega_4 v\cos\alpha\cos\beta_2 - \\ &\quad - \sigma\dot\omega_5\sin\gamma - \sigma\dot\omega_4\cos\gamma = 0,\end{aligned} \tag{911}$$

$$\begin{aligned}&\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 + \omega_3 v\cos\alpha\sin\beta_2 - \omega_2 v\cos\alpha\cos\beta_2 + \\ &\quad + \sigma\dot\omega_3\sin\gamma + \sigma\dot\omega_2\cos\gamma = 0,\end{aligned} \tag{912}$$

$$(I_1+I_3)\dot\omega_2 = -x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\cos\gamma, \tag{913}$$

$$(I_1+I_3)\dot\omega_3 = -x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\sin\gamma, \tag{914}$$

$$(I_1+I_3)\dot\omega_4 = x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\cos\gamma, \tag{915}$$

$$(I_1+I_3)\dot\omega_5 = x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)v^2\sin\gamma, \tag{916}$$

в которой к постоянным параметрам, указанным выше, добавляются параметры v, β_2.

3.1.1. Две системы рассуждений об интегрируемости

Замечание 3.1 (об аналитических первых интегралах). Видно, что система (911)—(916) обладает двумя аналитическими первыми интегралами, выражающимися через конечную комбинацию элементарных функций:

$$\omega_2\sin\gamma - \omega_3\cos\gamma = W_1' = \text{const}, \tag{917}$$

$$\omega_4\sin\gamma - \omega_5\cos\gamma = W_2' = \text{const}. \tag{918}$$

Прежде всего это означает, что систему (911)—(916) можно редуцировать к системе четвёртого порядка на своём четырёхмерном фазовом многообразии.

В дальнейшем при исследовании системы (911)—(916) можно пойти следующими путями (т. е. принять следующие системы рассуждений).

I. Можно «не замечать» наличие в системе первых интегралов вида (917), (918). Тогда, проведя ряд эквивалентных преобразований, можно попытаться привести исследуемую систему (911)—(916) к эквивалентной системе, в которой произойдёт отделение систем меньших размерностей. При этом для полного её интегрирования достаточно будет получить независимых первых интегралов в количестве, меньшем на две единицы, согласно (917), (918).
II. Можно сразу же воспользоваться первыми интегралами (917), (918), выразив две интересующие фазовые переменные из списка ω_2, ω_3, ω_4, ω_5. Получим как раз систему четвёртого порядка как систему, являющуюся редукцией системы (911)—(916) на некоторое четырёхмерное фазовое многообразие.

Для начала выберем систему рассуждений I.

Система (911)—(916) эквивалентна

$$\begin{gathered}\dot{\alpha} v\cos\alpha - \omega_5 v\cos\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2 + \omega_4 v\cos\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 + \\ + \omega_3 v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_2 v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 - \sigma\dot{\omega}_5\sin\gamma\cos\beta_1 - \\ - \sigma\dot{\omega}_4\cos\gamma\cos\beta_1 + \sigma\dot{\omega}_3\sin\gamma\sin\beta_1 + \sigma\dot{\omega}_2\cos\gamma\sin\beta_1 = 0,\end{gathered} \tag{919}$$

$$\begin{gathered}\dot{\beta}_1 v\sin\alpha + \omega_3 v\cos\alpha\cos\beta_1\sin\beta_2 - \omega_2 v\cos\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2 + \\ + \omega_5 v\cos\alpha\sin\beta_1\sin\beta_2 - \omega_4 v\cos\alpha\sin\beta_1\cos\beta_2 + \sigma\dot{\omega}_3\sin\gamma\cos\beta_1 + \\ + \sigma\dot{\omega}_2\cos\gamma\cos\beta_1 + \sigma\dot{\omega}_5\sin\gamma\sin\beta_1 + \sigma\dot{\omega}_4\cos\gamma\sin\beta_1 = 0,\end{gathered} \tag{920}$$

$$\dot{\omega}_2 = -\frac{v^2}{I_1+I_3} x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\cos\gamma, \tag{921}$$

$$\dot{\omega}_3 = -\frac{v^2}{I_1+I_3} x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\sin\gamma, \tag{922}$$

$$\dot{\omega}_4 = \frac{v^2}{I_1+I_3} x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\cos\gamma, \tag{923}$$

$$\dot{\omega}_5 = \frac{v^2}{I_1+I_3} x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) s(\alpha)\sin\gamma. \tag{924}$$

Введём новые квазискорости в системе. Для этого преобразуем величины ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 посредством композиции следующих поворотов:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ -z_2 \end{pmatrix} = T_*(-\beta_1)\begin{pmatrix} \omega_3 \\ \omega_5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_3 \\ -z_4 \end{pmatrix} = T_*(-\beta_1)\begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_4 \end{pmatrix}, \tag{925}$$

где

$$T_*(\beta_1) = \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & -\sin\beta_1 \\ \sin\beta_1 & \cos\beta_1 \end{pmatrix}, \tag{926}$$

а также
$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = T_*(\beta_2) \begin{pmatrix} z_3 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = T_*(-\beta_2) \begin{pmatrix} -z_4 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{927}$$

Таким образом, справедливы следующие соотношения:
$$\begin{aligned} &z_1 = \omega_3 \cos\beta_1 + \omega_5 \sin\beta_1, && z_2 = \omega_3 \sin\beta_1 - \omega_5 \cos\beta_1, \\ &z_3 = \omega_2 \cos\beta_1 + \omega_4 \sin\beta_1, && z_4 = \omega_2 \sin\beta_1 - \omega_4 \cos\beta_1, \\ &w_1 = -z_1 \sin\beta_2 + z_3 \cos\beta_2, && w_2 = z_3 \sin\beta_2 + z_1 \cos\beta_2, \\ &w_3 = z_2 \sin\beta_2 - z_4 \cos\beta_2, && w_4 = z_4 \sin\beta_2 + z_2 \cos\beta_2. \end{aligned} \tag{928}$$

Как видно из (919)—(924), на многообразии
$$O_2 = \left\{ (\alpha, \beta_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \in \mathbf{R}^6 \colon \alpha = \frac{\pi}{2}k, \ k \in \mathbf{Z} \right\} \tag{929}$$
нельзя однозначно разрешить систему относительно $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}_1$. Формально, таким образом, на многообразии (929) происходит нарушение теоремы единственности. Более того, во-первых, при чётном или нечётном k неопределённость возникает по причине вырождения координат $(v, \alpha, \beta_1, \beta_2)$, параметризующих трёхмерную сферу (но не являющихся классическими сферическими координатами), а во-вторых, при нечётном k происходит явное нарушение теоремы единственности, поскольку при этом первое уравнение (919) вырождается.

Действительно, якобиан преобразования
$$\begin{gathered} x_1, x_2, x_3, x_4 \to v, \alpha, \beta_1, \beta_2, \\ x_1 = v \cos\alpha \sin\beta_2, \\ x_2 = v \cos\alpha \cos\beta_2, \\ x_3 = v \sin\alpha \cos\beta_1, \\ x_4 = v \sin\alpha \sin\beta_1, \end{gathered} \tag{930}$$
равен
$$v^3 \cos\alpha \sin\alpha.$$

Он отличается от якобиана преобразования при переходе к обобщённым сферическим координатам v, α, β_1, β_2, равного
$$v^3 \sin\alpha \sin\beta_1.$$

Из этого следует, что система (919)—(924) вне и только вне многообразия (929) эквивалентна системе
$$\dot{\alpha} = -w_3 + \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\cos\alpha} \cdot \Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{931}$$
$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = -\frac{v^2}{I_1 + I_3} s(\alpha) \cos\gamma \cdot \Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) + \\ + z_3 \left[w_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1 + I_3} \frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} \cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) \right], \end{aligned} \tag{932}$$

$$\dot{z}_3 = \frac{v^2}{I_1+I_3} s(\alpha)\cos\gamma \cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) - \\ - z_4\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{933}$$

$$\dot{z}_2 = -\frac{v^2}{I_1+I_3} s(\alpha)\sin\gamma \cdot \Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) + \\ + z_1\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{934}$$

$$\dot{z}_1 = \frac{v^2}{I_1+I_3} s(\alpha)\sin\gamma \cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) - \\ - z_2\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{935}$$

$$\dot{\beta}_1 = w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{936}$$

или окончательно

$$\dot{\alpha} = -w_3 + \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\,\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\cdot \Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{937}$$

$$\dot{w}_4 = -\frac{v^2}{I_1+I_3} s(\alpha)\sin(\beta_2+\gamma) \cdot \Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) + \\ + w_2\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{938}$$

$$\dot{w}_3 = \frac{v^2}{I_1+I_3} s(\alpha)\cos(\beta_2+\gamma) \cdot \Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) - \\ - w_1\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{939}$$

$$\dot{w}_2 = \frac{v^2}{I_1+I_3} s(\alpha)\sin(\beta_2+\gamma) \cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) - \\ - w_4\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{940}$$

$$\dot{w}_1 = \frac{v^2}{I_1+I_3} s(\alpha)\cos(\beta_2+\gamma) \cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) + \\ + w_3\left[w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right)\right], \tag{941}$$

$$\dot{\beta}_1 = w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma v}{I_1+I_3}\,\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}\cdot \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right), \tag{942}$$

где

$$\Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)=-x_{4N}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\cos\beta_1+x_{3N}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)\sin\beta_1, \tag{943}$$

а функция $\Lambda_{v,\beta_2}(\alpha,\beta_1,\Omega/v)$ представляется в виде (910). Здесь и далее зависимость от групп переменных $(\alpha,\beta_1,\beta_2,\Omega/v)$ понимается как сложная зависимость от $(\alpha,\beta_1,\beta_2,z_1/v,z_2/v,z_3/v,z_4/v)$ (или $(\alpha,\beta_1,\beta_2,w_1/v,w_2/v,w_3/v,w_4/v)$) ввиду (928).

Нарушение теоремы единственности для системы (919)—(924) на многообразии (929) при нечётном k происходит в следующем смысле: почти через любую точку из многообразия (929) при нечётном k проходит неособая фазовая траектория системы (919)—(924), пересекая многообразие (929) под прямым углом, а также существует фазовая траектория, полностью совпадающая во все моменты времени с указанной точкой. Но физически это различные траектории, так как им отвечают разные значения следящей силы. Покажем это.

Как указано выше, для поддержания связей вида (906) необходимо выбрать значения T_1 и T_2 при $\cos\alpha\neq 0$ вида (908) и (909).

Пусть

$$\lim_{\alpha\to\pi/2}\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)=L\left(\beta_1,\beta_2,\frac{\Omega}{v}\right). \tag{944}$$

Заметим, что $|L|<+\infty$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{\alpha\to\pi/2}\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha,\beta_1,\frac{\Omega}{v}\right)s(\alpha)\right)\right|<+\infty. \tag{945}$$

При $\alpha=\pi/2$ нужные величины проекций следящей силы найдутся из равенств

$$\begin{aligned}T_1=T_{1,v,\beta 2}\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\Omega\right)&=-m\sigma(\omega_5^2+\omega_3^2)\sin\gamma-m\sigma(\omega_4\omega_5+\omega_2\omega_3)\cos\gamma+\\&+m\omega_5 v\cos\beta_1\cos^2\beta_2-m\omega_3 v\sin\beta_1\cos^2\beta_2+m\omega_4 v\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_2-\\&-m\omega_2 v\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_2+v^2\frac{m\sigma}{I_1+I_3}\sin\beta_2\cdot L,\end{aligned} \tag{946}$$

$$\begin{aligned}T_2=T_{2,v,\beta 2}\left(\frac{\pi}{2},\beta_1,\Omega\right)&=m\sigma(\omega_4^2+\omega_2^2)\cos\gamma+m\sigma(\omega_4\omega_5+\omega_2\omega_3)\sin\gamma-\\&-m\omega_4 v\cos\beta_1\sin^2\beta_2+m\omega_2 v\sin\beta_1\sin^2\beta_2-m\omega_5 v\cos\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_2+\\&+m\omega_3 v\sin\beta_1\sin\beta_2\cos\beta_2-v^2\frac{m\sigma}{I_1+I_3}\cos\beta_2\cdot L,\end{aligned} \tag{947}$$

где значения ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 произвольны.

С другой стороны, поддерживая с помощью следящей силы вращение вокруг некоторой точки W, необходимо выбрать проекции следящей силы в виде

$$T = T_1\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_{01}}, \tag{948}$$

$$T = T_2\left(\frac{\pi}{2}, \beta_1, \beta_2, \Omega\right) = \frac{mv^2}{R_{02}}, \tag{949}$$

где R_{01}, R_{02} — проекции отрезка CW на соответствующие оси координат.

Равенства (908), (909) и (948) (949) определяют, вообще говоря, различные значения следящей силы T для почти всех точек многообразия (929), что и доказывает сделанное замечание.

3.2. Случай отсутствия зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

3.2.1. Приведённая система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [113, 114], динамические функции s, x_{3N} и x_{4N} примем в виде

$$\begin{gathered}
s(\alpha) = B\cos\alpha, \\
x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{3N0}(\alpha, \beta_1) = A\sin\alpha\cos\beta_1, \\
x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = x_{4N0}(\alpha, \beta_1) = A\sin\alpha\sin\beta_1, \quad A, B > 0, \quad v \neq 0.
\end{gathered} \tag{950}$$

говорящем о том, что в рассматриваемой системе отсутствует зависимость момента неконсервативных сил от угловой скорости (имеется лишь зависимость от углов α, β_1, β_2). При этом функции $\Lambda_{v,\beta_2}(\alpha, \beta_1, \Omega/v)$, $\Pi_{v,\beta_2}(\alpha, \beta_1, \Omega/v)$, входящие в систему (937)—(942), примут вид

$$\Lambda_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha, \quad \Pi_{v,\beta_2}\left(\alpha, \beta_1, \frac{\Omega}{v}\right) \equiv 0. \tag{951}$$

Тогда благодаря неинтегрируемым связям (906) вне и только вне многообразия (929) динамическая часть уравнений движения (система (937)—(942)) примет вид аналитической системы

$$\dot\alpha = -w_3 + \frac{\sigma ABv}{I_1 + I_3}\sin\alpha, \tag{952}$$

$$\dot w_4 = -\frac{ABv^2}{I_1 + I_3}\sin(\beta_2 + \gamma)\sin\alpha\cos\alpha + w_1 w_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{953}$$

$$\dot w_3 = \frac{ABv^2}{I_1 + I_3}\cos(\beta_2 + \gamma)\sin\alpha\cos\alpha - w_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{954}$$

$$\dot w_2 = -w_1 w_4\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{955}$$

$$\dot{w}_1 = w_1 w_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{956}$$

$$\dot{\beta}_1 = w_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{957}$$

Вводя безразмерные переменные, параметры и дифференцирование

$$w_k \mapsto n_0 v w_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_1 + I_3}, \quad b = \sigma n_0, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle ' \rangle, \tag{958}$$

приведём систему (952)—(957) к виду

$$\alpha' = -w_3 + b \sin\alpha, \tag{959}$$

$$w_4' = -\sin(\beta_2 + \gamma)\sin\alpha\cos\alpha + w_1 w_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{960}$$

$$w_3' = \cos(\beta_2 + \gamma)\sin\alpha\cos\alpha - w_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{961}$$

$$w_2' = -w_1 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{962}$$

$$w_1' = w_1 w_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{963}$$

$$\beta_1' = w_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{964}$$

Видно, что в системе шестого порядка (959)—(964), которую можно рассматривать на своём шестимерном многообразии

$$T\mathbf{S}^2 \times \mathbf{R}^2 - \tag{965}$$

прямом произведении касательного расслоения $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2$ на двумерную плоскость, образовалась независимая система пятого порядка (959)—(963) на своём пятимерном многообразии. Более того, у системы шестого порядка (959)—(964) появилась независимая подсистема третьего порядка

$$\alpha' = -w_3 + b \sin\alpha, \tag{966}$$

$$w_3' = \cos(\beta_2 + \gamma)\sin\alpha\cos\alpha - w_1^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{967}$$

$$w_1' = w_1 w_3 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{968}$$

а также могут быть выделены (пока зависимая) система второго порядка

$$w_4' = -\sin(\beta_2 + \gamma)\sin\alpha\cos\alpha + w_1 w_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{969}$$

$$w_2' = -w_1 w_4 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{970}$$

и уравнение

$$\beta_1' = w_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{971}$$

Для полного интегрирования системы (959)—(964) необходимо знать, вообще говоря, пять независимых первых интегралов. Однако после разбиения системы на три части (система (966)—(968), система (969), (970) и уравнение (971)) для полного интегрирования достаточно знать два независимых первых интеграла системы (966)—(968), один — системы (969), (970) (после приведения последней к независимой подсистеме) и один первый интеграл, «присоединяющий» уравнение (971).

Сразу же заметим, что последние рассуждения характерны для выбора системы рассуждений I (см. выше). Действительно, мы пока «не замечаем» наличия двух аналитических первых интегралов (917), (918). Поэтому, получая два независимых первых интеграла независимой системы третьего порядка (966)—(968), а также первый интеграл, «присоединяющий» уравнение (971), имеем полный набор независимых первых интегралов системы четвёртого порядка (966)—(968), (971). Полученный данный полный набор (три интеграла) вместе с аналитическими первыми интегралами (917), (918) и образует полный набор пяти первых интегралов системы шестого порядка (966)—(971).

В дальнейшем, в частности, будет видно, что композиция аналитических первых интегралов (917), (918) даёт первый интеграл (потенциально отделившейся) системы (969), (970).

3.2.2. Полный список инвариантных соотношений

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (966)—(968) неавтономную систему второго порядка

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_3}{d\alpha} &= \frac{\cos(\beta_2+\gamma)\sin\alpha\cos\alpha - w_1^2\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_3+b\sin\alpha},\\
\frac{dw_1}{d\alpha} &= \frac{w_1 w_3\cos\alpha/\sin\alpha}{-w_3+b\sin\alpha}.
\end{aligned} \tag{972}
$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (972) в алгебраическом виде:

$$
\begin{aligned}
\frac{dw_3}{d\tau} &= \frac{\cos(\beta_2+\gamma)\tau - w_1^2/\tau}{-w_3+b\tau},\\
\frac{dw_1}{d\tau} &= \frac{w_1 w_3/\tau}{-w_3+b\tau}.
\end{aligned} \tag{973}
$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$
w_1 = u_1\tau, \quad w_3 = u_2\tau, \tag{974}
$$

приводим систему (973) к виду

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} + u_2 &= \frac{\cos(\beta_2+\gamma) - u_1^2}{-u_2+b},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} + u_1 &= \frac{u_1 u_2}{-u_2+b},
\end{aligned} \tag{975}
$$

эквивалентному

$$
\begin{aligned}
\tau\frac{du_2}{d\tau} &= \frac{\cos(\beta_2+\gamma) - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{-u_2+b},\\
\tau\frac{du_1}{d\tau} &= \frac{2u_1u_2 - bu_1}{-u_2+b}.
\end{aligned} \tag{976}
$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (976) неавтономное уравнение первого порядка

$$
\frac{du_2}{du_1} = \frac{\cos(\beta_2+\gamma) - u_1^2 + u_2^2 - bu_2}{2u_1u_2 - bu_1}, \tag{977}
$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$
d\left(\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + \cos(\beta_2+\gamma)}{u_1}\right) = 0. \tag{978}
$$

Итак, уравнение (977) имеет первый интеграл

$$
\frac{u_2^2 + u_1^2 - bu_2 + \cos(\beta_2+\gamma)}{u_1} = C_1 = \mathrm{const}, \tag{979}
$$

который в прежних переменных выглядит как

$$
\frac{w_3^2 + w_1^2 - bw_3\sin\alpha + \cos(\beta_2+\gamma)\sin^2\alpha}{w_1\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}. \tag{980}
$$

Замечание 3.2. Рассмотрим систему (966)—(968) с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [225, 229, 243, 252, 257, 261, 263, 270]), становящейся консервативной при $b=0$:

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= -w_3,\\
w_3' &= \cos(\beta_2+\gamma)\sin\alpha\cos\alpha - w_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\\
w_1' &= w_1w_3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.
\end{aligned} \tag{981}
$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$
w_3^2 + w_1^2 + \cos(\beta_2+\gamma)\sin^2\alpha = C_1^* = \mathrm{const}, \tag{982}
$$

$$
w_1\sin\alpha = C_2^* = \mathrm{const}. \tag{983}
$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (982), (983) также является первым интегралом системы (981). Но при $b \neq 0$ каждая из функций

$$
w_3^2 + w_1^2 - bw_3\sin\alpha + \cos(\beta_2+\gamma)\sin^2\alpha \tag{984}
$$

и (983) по отдельности не является первым интегралом системы (966)—(968). Однако отношение функций (984), (983) является первым интегралом системы (966)—(968) при любом b.

Найдём явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (966)—(968). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (979) при $u_1 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(u_2 - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(u_1 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + C_1^2}{4} - \cos(\beta_2 + \gamma). \tag{985}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$b^2 + C_1^2 - 4\cos(\beta_2 + \gamma) \geqslant 0, \tag{986}$$

и фазовое пространство системы (966)—(968) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (985).

Таким образом, в силу соотношения (979) первое уравнение системы (976) примет вид

$$\tau \frac{du_2}{d\tau} = \frac{2(\cos(\beta_2 + \gamma) - bu_2 + u_2^2) - C_1 U_1(C_1, u_2)}{-u_2 + b}, \tag{987}$$

где

$$U_1(C_1, u_2) = \frac{1}{2}\left\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4\big(u_2^2 - bu_2 + \cos(\beta_2 + \gamma)\big)}\right\}; \tag{988}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (986). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (966)—(968) примет вид

$$\int \frac{d\tau}{\tau} = \\ = \int \frac{(b - u_2)du_2}{2(\cos(\beta_2 + \gamma) - bu_2 + u_2^2) - C_1\{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4(u_2^2 - bu_2 + \cos(\beta_2 + \gamma))}\}/2}. \tag{989}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \tag{990}$$

Если

$$u_2 - \frac{b}{2} = p_1, \quad b_1^2 = b^2 + C_1^2 - 4\cos(\beta_2 + \gamma), \tag{991}$$

то правая часть равенства (989) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2 - 4p_1^2)}{(b_1^2 - 4p_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4p_1^2}} - b\int \frac{dp_1}{(b_1^2 - 4p_1^2) \pm C_1\sqrt{b_1^2 - 4p_1^2}} = \\ = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2 - 4p_1^2}}{C_1} \pm 1\right| \pm \frac{b}{2} I_1, \tag{992}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dp_3}{\sqrt{b_1^2 - p_3^2}(p_3 \pm C_1)}, \quad p_3 = \sqrt{b_1^2 - 4p_1^2}. \tag{993}$$

При вычислении интеграла (993) возможны три случая.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} + \sqrt{b_1^2 - p_3^2}}{p_3 \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} - \sqrt{b_1^2 - p_3^2}}{p_3 \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \text{const}. \tag{994}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 p_3 + b_1^2}{b_1(p_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{995}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{\sqrt{b_1^2 - p_3^2}}{C_1(p_3 \pm C_1)} + \text{const}. \tag{996}$$

Возвращаясь к переменной

$$p_1 = \frac{w_3}{\sin\alpha} - \frac{b}{2}, \tag{997}$$

имеем окончательный вид для величины I_1.

I. $b > 2$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} \pm 2p_1}{\sqrt{b_1^2 - 4p_1^2} \pm C_1} \pm \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \\ + \frac{1}{2\sqrt{b^2-4}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-4} \mp 2p_1}{\sqrt{b_1^2 - 4p_1^2} \pm C_1} \mp \frac{C_1}{\sqrt{b^2-4}} \right| + \text{const}. \tag{998}$$

II. $b < 2$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4-b^2}} \arcsin \frac{\pm C_1 \sqrt{b_1^2 - 4p_1^2} + b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2 - 4p_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{999}$$

III. $b = 2$.

$$I_1 = \mp \frac{2p_1}{C_1(\sqrt{b_1^2 - 4p_1^2} \pm C_1)} + \text{const}. \tag{1000}$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (966)—(968), мы предъявили полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 3.3. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (979). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$\ln|\sin\alpha| + G_2\left(\sin\alpha, \frac{w_3}{\sin\alpha}, \frac{w_1}{\sin\alpha}\right) = C_2 = \text{const}. \tag{1001}$$

Таким образом, для интегрирования системы шестого порядка (966)—(971) уже найдены два независимых первых интеграла. Теперь при принятии типа рассуждений I (когда мы «не замечаем» наличия двух аналитических первых интегралов (917), (918)) для полной её интегрируемости достаточно найти один первый интеграл для (потенциально отделившейся) системы (969), (970), а также дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (971).

После замены переменных

$$\begin{gathered} w_* = w_3\sin(\gamma+\beta_2) + w_4\cos(\gamma+\beta_2), \\ w_{**} = w_1\sin(\gamma+\beta_2) - w_2\cos(\gamma+\beta_2) \end{gathered} \tag{1002}$$

система (969), (970) может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \frac{dw_*}{d\beta_1} &= -w_{**}, \\ \frac{dw_{**}}{d\beta_1} &= w_*, \end{aligned} \tag{1003}$$

который предполагает наличие аналитического первого интеграла:

$$w_*^2 + w_{**}^2 = C_3 = \text{const}. \tag{1004}$$

Зададим вопрос: как связан только что полученный первый интеграл (1004) с аналитическими первыми интегралами вида (917), (918)?

Типы рассуждений I и II соответствуют следующим двум альтернативам. Для полного интегрирования системы шестого порядка (911)—(916)

1) или мы находим пять независимых первых интегралов системы шестого порядка (911)—(916);
2) или мы преобразуем систему шестого порядка (911)—(916) так, что в ней выделяются независимые подсистемы более низкого порядка.

Так, например, поскольку после нахождения координат w_*, w_{**} происходит расслоение векторного поля системы таким образом, что образуется независимая подсистема второго порядка (1003), вместо пяти независимых первых интегралов нужно найти четыре (три для интегрирования системы четвёртого порядка (966)—(968), (971) и один для интегрирования отделившейся системы второго порядка (1003)).

Теперь запишем окончательный вид аналитических первых интегралов вида (917), (918) в новых переменных:

$$w_{**}\cos\beta_1 - w_*\sin\beta_1 = W_1'' = \text{const}, \tag{1005}$$

$$w_{**}\sin\beta_1 + w_*\cos\beta_1 = W_2'' = \text{const}. \tag{1006}$$

Видно, что из аналитических первых интегралов (1005), (1006) вытекает найденный аналитический первый интеграл (1004) (для этого достаточно сложить квадраты левых частей равенств (1005), (1006)).

Итак, для интегрирования системы четвёртого порядка (966)—(968), (971) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же её интегрируемости достаточно найти ещё один (дополнительный) первый интеграл, «привязывающий» уравнение (971).

Поскольку
$$\frac{du_1}{d\tau}=\frac{u_1(2u_2-b)}{(b-u_2)\tau},\quad \frac{d\beta_1}{d\tau}=\frac{u_1}{(b-u_2)\tau},\tag{1007}$$
то
$$\frac{du_1}{d\beta_1}=2u_2-b.\tag{1008}$$
Очевидно, что при $u_1\neq 0$ выполнено равенство
$$u_2=\frac{1}{2}\left(b\pm\sqrt{b_1^2-4\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2}\right),\quad b_1^2=b^2+C_1^2-4\cos(\beta_2+\gamma),\tag{1009}$$
тогда интегрирование квадратуры
$$\beta_1+\mathrm{const}=\pm\int\frac{du_1}{\sqrt{b_1^2-4\left(u_1-\frac{C_1}{2}\right)^2}}\tag{1010}$$
приведёт к инвариантному соотношению
$$2(\beta_1+C_4)=\pm\arcsin\frac{2u_1-C_1}{\sqrt{b^2+C_1^2-4\cos(\beta_2+\gamma)}},\quad C_4=\mathrm{const}.\tag{1011}$$
Другими словами, выполнено равенство
$$\sin[2(\beta_1+C_4)]=\pm\frac{2u_1-C_1}{\sqrt{b^2+C_1^2-4\cos(\beta_2+\gamma)}},\tag{1012}$$
или, при переходе к старым переменным,
$$\sin[2(\beta_1+C_4)]=\pm\frac{2w_1-C_1\sin\alpha}{\sqrt{b^2+C_1^2-4\cos(\beta_2+\gamma)}\sin\alpha}.\tag{1013}$$

В принципе, при получении дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (971), на последнем равенстве можно остановиться, причём в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (979). Но мы проведём некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (979)):
$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1+C_4)]=\frac{(u_1^2-u_2^2+bu_2-\cos(\beta_2+\gamma))^2}{u_1^2(4u_2^2-4bu_2+b^2)}.\tag{1014}$$

Возвращаясь к старым координатам, получаем дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\operatorname{tg}^2[2(\beta_1 + C_4)] = \frac{(w_1^2 - w_3^2 + bw_3 \sin\alpha - \cos(\beta_2+\gamma)\sin^2\alpha)^2}{w_1^2(4w_3^2 - 4bw_3\sin\alpha + b^2\sin^2\alpha)}, \tag{1015}$$

или окончательно

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{w_1^2 - w_3^2 + bw_3\sin\alpha - \cos(\beta_2+\gamma)\sin^2\alpha}{w_1(2w_3 - b\sin\alpha)} = C_4 = \mathrm{const}. \tag{1016}$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (890)—(893), (896)—(901) при условии (950) имеет восемь инвариантных соотношений: имеются аналитические неинтегрируемые связи вида (906), циклические первые интегралы вида (904), (905), первый интеграл вида (980), также имеется первый интеграл, выражающийся соотношениями (994)—(1001), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (1016) ((1015)) и аналитический первый интеграл (1004).

Теорема 3.1. *Система* (890)—(893), (896)—(901) *при условиях* (906), (950), (905) *обладает восемью инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

3.2.3. Топологические аналогии

Рассмотрим следующую систему уравнений третьего порядка:

$$\begin{gathered}\ddot{\xi} + b_*\dot{\xi}\cos\xi + R_3\sin\xi\cos\xi - \dot{\eta_1}^2\frac{\sin\xi}{\cos\xi} = 0,\\ \ddot{\eta_1} + b_*\dot{\eta_1}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta_1}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} = 0, \quad b_* > 0,\end{gathered} \tag{1017}$$

описывающее закреплённый сферический маятник, помещённый в поток набегающей среды при отсутствии зависимости момента сил от угловой скорости, т. е. механическую систему в неконсервативном поле сил (см. также [168, 268, 273]). Вообще говоря, порядок такой системы должен быть равен 4, но фазовая переменная η_1 является циклической, что и приводит к расслоению фазового пространства и понижению порядка. Фазовым пространством этой системы является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta_1}, \xi, \eta_1\} \tag{1018}$$

к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{\xi, \eta_1\}$, при этом уравнение больших кругов

$$\dot{\eta_1} \equiv 0 \tag{1019}$$

задаёт семейство интегральных многообразий. Нетрудно убедиться, что система (1017) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией с нулевым средним на касательном расслоении (1018) к двумерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Система* (966)—(968), (971) *эквивалентна динамической системе* (1017).

Действительно, достаточно положить $\alpha = \xi$, $\beta_1 = \eta_1$, $b = -b_*$, $R_3 = \cos(\gamma + \beta_2)$.

О более общих топологических аналогиях см. также [168].

3.3. Случай зависимости момента неконсервативных сил от угловой скорости

3.3.1. Введение зависимости от угловой скорости

Данный раздел посвящён динамике четырёхмерного твёрдого тела в четырёхмерном пространстве. Но, поскольку данный раздел посвящён исследованию случая движения при наличии зависимости момента действующих сил от тензора угловой скорости, введём такую зависимость с более общих позиций. К тому же данная точка зрения поможет нам вводить эту зависимость и для многомерных тел.

Пусть $x=(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ — координаты точки N приложения неконсервативной силы (воздействия среды) на двумерный диск, $Q=(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4)$ — компоненты, не зависящие от тензора угловой скорости. Будем вводить зависимость функций $(x_{1N}, x_{2N}, x_{3N}, x_{4N})$ от тензора угловой скорости лишь линейным образом, поскольку само данное введение априори не очевидно [22, 23].

Итак, примем следующую зависимость:

$$x = Q + R, \tag{1020}$$

где $R = (R_1, R_2, R_3, R_4)$ — вектор-функция, содержащая компоненты тензора угловой скорости. При этом зависимость функции R от компонент тензора угловой скорости гироскопическая:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{v} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_6 & \omega_5 & -\omega_3 \\ \omega_6 & 0 & -\omega_4 & \omega_2 \\ -\omega_5 & \omega_4 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}. \tag{1021}$$

Здесь (h_1, h_2, h_3, h_4) — некоторые положительные параметры.

Применительно к нашей задаче, поскольку $x_{1N} \equiv x_{2N} \equiv 0$,

$$x_{3N} = Q_3 - \frac{h_1}{v}(\omega_4 - \omega_5), \quad x_{4N} = Q_4 - \frac{h_1}{v}(\omega_3 - \omega_2). \tag{1022}$$

3.3.2. Приведённая система

Подобно выбору аналитических функций Чаплыгина [113, 114]

$$Q_3 = A\sin\alpha\cos\beta_1, \quad Q_4 = A\sin\alpha\sin\beta_1, \quad A > 0, \tag{1023}$$

динамические функции s, x_{3N} и x_{4N} примем в виде

$$\begin{aligned} &s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad B > 0, \\ &x_{3N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha\cos\beta_1 - \frac{h}{v}(\omega_4 - \omega_5), \quad h = h_1 > 0, \quad v \neq 0, \\ &x_{4N}\left(\alpha, \beta_1, \beta_2, \frac{\Omega}{v}\right) = A\sin\alpha\sin\beta_1 - \frac{h}{v}(\omega_3 - \omega_2), \quad h = h_2 > 0, \quad v \neq 0. \end{aligned} \tag{1024}$$

говорящем о том, что в рассматриваемой системе присутствует также дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы (т. е. присутствует зависимость момента от компонент тензора угловой скорости), причём $h_1 = h_2$, $h_3 = h_4$ ввиду рассматриваемой динамической симметрии (903) тела.

Выберем далее систему рассуждений I, которая в дальнейшем учитывает и систему рассуждений II. Для этого в данном разделе попробуем ввести следующие фазовые переменные:

$$\begin{aligned} u_1 &= \omega_2 - \omega_3, \\ u_2 &= \omega_4 - \omega_5, \\ u_3 &= \omega_2\cos\beta_2 - \omega_3\sin\beta_2, \\ u_4 &= \omega_4\cos\beta_2 - \omega_5\sin\beta_2. \end{aligned} \tag{1025}$$

Данные координаты корректно определены при

$$\cos\beta_2 \neq \sin\beta_2, \tag{1026}$$

а якобиан отображения равен

$$-\frac{1}{(\cos\beta_2 - \sin\beta_2)^2}, \tag{1027}$$

при этом обратное преобразование задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{u_3 - u_1\sin\beta_2}{\cos\beta_2 - \sin\beta_2}, \\ \omega_3 &= \frac{u_3 - u_1\cos\beta_2}{\cos\beta_2 - \sin\beta_2}, \\ \omega_4 &= \frac{u_4 - u_2\sin\beta_2}{\cos\beta_2 - \sin\beta_2}, \\ \omega_5 &= \frac{u_4 - u_2\cos\beta_2}{\cos\beta_2 - \sin\beta_2}. \end{aligned} \tag{1028}$$

Частный случай

$$\cos\beta_2 = \sin\beta_2, \tag{1029}$$

который упрощает динамические уравнения, может быть рассмотрен отдельно. Тогда уравнения (919)—(924) при условии (1024) вне и только вне многообразия

$$O_3 = \left\{(\alpha, \beta_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \in \mathbf{R}^6 \colon \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \tag{1030}$$

преобразуются в уравнения

$$\dot\alpha - u_3\sin\beta_1 + u_4\cos\beta_1 - \sigma n_0^2 v\sin\alpha + \sigma H_1'[-u_1\sin\beta_1 + u_2\cos\beta_1] = 0, \tag{1031}$$

$$\dot\beta_1\sin\alpha - \cos\alpha[u_3\cos\beta_1 + u_4\sin\beta_1] - \sigma H_1'\cos\alpha[u_1\cos\beta_1 + u_2\sin\beta_1] = 0, \tag{1032}$$

$$\dot u_1 = -n_0^2 v^2 r_1\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1 - \frac{Bvh}{I_1 + I_3} r_1 u_1\cos\alpha, \tag{1033}$$

$$\dot u_2 = n_0^2 v^2 r_1\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1 - \frac{Bvh}{I_1 + I_3} r_1 u_2\cos\alpha, \tag{1034}$$

$$\dot u_3 = -n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta_1\cos(\gamma + \beta_2) - \frac{Bvh}{I_1 + I_3} u_1\cos\alpha\cos(\gamma + \beta_2), \tag{1035}$$

$$\dot u_4 = n_0^2 v^2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta_1\cos(\gamma + \beta_2) - \frac{Bvh}{I_1 + I_3} u_2\cos\alpha\cos(\gamma + \beta_2), \tag{1036}$$

где

$$r_1 = \cos\gamma - \sin\gamma \neq 0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_1 + I_3}, \quad H_1' = \frac{Bh}{I_1 + I_3}. \tag{1037}$$

Отметим также, что частный случай

$$\cos\gamma = \sin\gamma \quad (r_1 = 0), \tag{1038}$$

который упрощает динамические уравнения, также может быть рассмотрен отдельно (подобно случаю (1029)).

Введём следующие фазовые переменные:

$$\begin{aligned} v_1 &= -u_1\sin\beta_1 + u_2\cos\beta_1,\\ v_2 &= u_1\cos\beta_1 + u_2\sin\beta_1,\\ v_3 &= -u_3\sin\beta_1 + u_4\cos\beta_1,\\ v_4 &= u_3\cos\beta_1 + u_4\sin\beta_1. \end{aligned} \tag{1039}$$

Тогда вне и только вне многообразия

$$O_4 = \{(\alpha, \beta_1, u_1, u_2, u_3, u_4) \in \mathbf{R}^6 \colon \beta_1 = \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\} \tag{1040}$$

система (1031)—(1036) примет вид

$$\dot\alpha = -v_3 - bH_1 v_1 + b\sin\alpha, \tag{1041}$$

$$\dot\beta_1 = [v_4 + bH_1 v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1042}$$

$$\dot{v}_1 = n_0^2 v^2 r_1 \sin\alpha\cos\alpha - H_1' v r_1 v_1 \cos\alpha - v_2 \cdot [v_4 + bH_1 v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1043}$$

$$\dot{v}_2 = -H_1' v r_1 v_2 \cos\alpha + v_1 \cdot [v_4 + bH_1 v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1044}$$

$$\begin{gathered}\dot{v}_3 = n_0^2 v^2 \sin\alpha\cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) - \\ - H_1' v v_1 \cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) - v_4 \cdot [v_4 + bH_1 v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\end{gathered} \tag{1045}$$

$$\dot{v}_4 = -H_1' v v_2 \cos\alpha\cos(\gamma+\beta_2) + v_3 \cdot [v_4 + bH_1 v_2]\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1046}$$

где по-прежнему безразмерные параметры введены следующим образом:

$$n_0^2 = \frac{AB}{I_1+I_3}, \quad b = \sigma n_0, \quad [b] = 1, \quad H_1 = \frac{H_1'}{n_0} = \frac{Bh}{(I_1+I_3)n_0}, \quad [H_1] = 1. \tag{1047}$$

Введём также ещё одну вспомогательную замену части фазовых переменных системы, а именно:

$$s_1 = v_3 + bH_1 v_1, \quad s_2 = v_4 + bH_1 v_2. \tag{1048}$$

Тогда исследуемая система (1041)—(1046) после введения безразмерных переменных и дифференцирования

$$v_k \mapsto n_0 v v_k, \quad k = 1, \ldots, 4, \quad \langle\cdot\rangle = n_0 v \langle'\rangle \tag{1049}$$

перепишется в виде

$$\alpha' = -s_1 + b\sin\alpha, \tag{1050}$$

$$\beta_1' = s_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1051}$$

$$s_1' = R_1 \sin\alpha\cos\alpha - s_2^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_1 H_1 v_1 \cos\alpha, \tag{1052}$$

$$s_2' = s_1 s_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_1 H_1 v_2 \cos\alpha, \tag{1053}$$

$$v_1' = R_2 \sin\alpha\cos\alpha - s_2 v_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 R_2 v_1 \cos\alpha, \tag{1054}$$

$$v_2' = s_2 v_1 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 R_2 v_2 \cos\alpha, \tag{1055}$$

где

$$R_1 = bH_1(\cos\gamma - \sin\gamma) + \cos(\gamma+\beta_2), \quad R_2 = r_1 = \cos\gamma - \sin\gamma. \tag{1056}$$

Видно, что формально при $H_1 = 0$ в системе (1050)—(1055) выделяется независимая подсистема четвёртого порядка (1050)—(1053) на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{0 < \alpha < \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 < 2\pi\}$, в которой, в свою очередь, может быть выделена независимая подсистема третьего порядка (1050), (1052), (1053) на своём трёхмерном фазовом многообразии. Это, в принципе, и понятно, поскольку при $H_1 = 0$ мы попадаем в условия отсутствия зависимости момента сил от тензора угловой скорости (см. предыдущий раздел и систему (966)—(968), (971)). Последнее позволяет аналогичным образом вполне проинтегрировать рассматриваемую систему четвёртого порядка (1050)—(1053), а значит, и рассматриваемую систему шестого порядка (1050)—(1055), поскольку существуют два независимых аналитических первых интеграла (917), (918) или (1005), (1006) (см. выше о двух системах рассуждений I и II). В данном же случае для нас существенно, что $H_1 \neq 0$. Поэтому преобразуем имеющиеся аналитические первые интегралы (917), (918) или (1005), (1006). В разных координатах они имеют вид

$$\frac{u_3 - u_1 \sin\beta_2}{\cos\beta - 2 - \sin\beta_2}\sin\gamma - \frac{u_3 - u_1\cos\beta_2}{\cos\beta - 2 - \sin\beta_2}\cos\gamma = W_1' = \text{const}, \tag{1057}$$

$$\frac{u_4 - u_2 \sin\beta_2}{\cos\beta - 2 - \sin\beta_2}\sin\gamma - \frac{u_4 - u_2\cos\beta_2}{\cos\beta - 2 - \sin\beta_2}\cos\gamma = W_2' = \text{const}. \tag{1058}$$

Если мы рассматриваем случай (906) (т. е. в частности, когда величина β_2 является тождественной постоянной вдоль фазовых траекторий), то следующие аналитические функции постоянны на фазовых траекториях рассматриваемой системы:

$$u_3(\sin\gamma - \cos\gamma) + u_1\cos(\gamma + \beta_2) = W_1^0 = \text{const}, \tag{1059}$$

$$u_4(\sin\gamma - \cos\gamma) + u_2\cos(\gamma + \beta_2) = W_2^0 = \text{const}. \tag{1060}$$

В других переменных последние два инвариантных соотношения имеют вид

$$(v_2\cos\beta_1 - v_1\sin\beta_1)\cos(\gamma+\beta_2) + (v_4\cos\beta_1 - v_3\sin\beta_1)(\sin\gamma - \cos\gamma) = \\ = W_1^0 = \text{const}, \tag{1061}$$

$$(v_2\sin\beta_1 + v_1\cos\beta_1)\cos(\gamma+\beta_2) + (v_4\sin\beta_1 + v_3\cos\beta_1)(\sin\gamma - \cos\gamma) = \\ = W_2^0 = \text{const}, \tag{1062}$$

или

$$R_1 v_2\cos\beta_1 - R_1 v_1\sin\beta_1 + R_2[s_1\sin\beta_1 - s_2\cos\beta_1] = W_1^0 = \text{const}, \tag{1063}$$

$$R_1 v_2\sin\beta_1 + R_1 v_1\cos\beta_1 - R_2[s_1\cos\beta_1 + s_2\sin\beta_1] = W_2^0 = \text{const}, \tag{1064}$$

где по-прежнему

$$R_1 = \cos(\gamma+\beta_2) + bH_1(\cos\gamma - \sin\gamma), \quad R_2 = \cos\gamma - \sin\gamma. \tag{1065}$$

Выразим из соотношений (1063), (1064) величины v_1, v_2. Имеем

$$v_2 R_1 = R_2 s_2 + \psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0), \tag{1066}$$

$$v_1 R_1 = R_2 s_1 + \psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0), \tag{1067}$$

где
$$\begin{aligned}\psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0) &= W_1^0 \cos\beta_1 + W_2^0 \sin\beta_1,\\ \psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0) &= W_2^0 \cos\beta_1 - W_1^0 \sin\beta_1.\end{aligned} \tag{1068}$$

Тогда система (1050)—(1053) примет вид независимой системы четвёртого порядка:

$$\alpha' = -s_1 + b\sin\alpha, \tag{1069}$$

$$s_1' = R_1 \sin\alpha\cos\alpha - s_2^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_2 H_1 s_1 \cos\alpha - H_1 \psi_2(\beta_1, W_1^0, W_2^0)\cos\alpha, \tag{1070}$$

$$s_2' = s_1 s_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_2 H_1 s_2 \cos\alpha - H_1 \psi_1(\beta_1, W_1^0, W_2^0)\cos\alpha, \tag{1071}$$

$$\beta_1' = s_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{1072}$$

Систему (1069)—(1072) можно рассматривать как систему (1050)—(1053), редуцированную на уровни (W_1^0, W_2^0) аналитических первых интегралов (1063), (1064). Очевидно, что

$$\psi_1(\beta_1, 0, 0) \equiv \psi_2(\beta_1, 0, 0) \equiv 0. \tag{1073}$$

Поэтому будем рассматривать систему (1069)—(1072) на нулевых уровнях аналитических первых интегралов (1063), (1064)

$$W_1^0 = W_2^0 = 0, \tag{1074}$$

где она примет вид

$$\alpha' = -s_1 + b\sin\alpha, \tag{1075}$$

$$s_1' = R_1 \sin\alpha\cos\alpha - s_2^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_2 H_1 s_1 \cos\alpha, \tag{1076}$$

$$s_2' = s_1 s_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - R_2 H_1 s_2 \cos\alpha, \tag{1077}$$

$$\beta_1' = s_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{1078}$$

Данная система может быть рассмотрена на касательном расслоении $T\mathbf{S}^2$ к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{0 < \alpha < \pi,\ 0 \leqslant \beta_1 < 2\pi\}$, в которой, в свою очередь, может быть выделена независимая подсистема третьего порядка (1075)—(1077) на своём трёхмерном фазовом многообразии.

Итак, для интегрирования системы шестого порядка мы вначале использовали систему расссуждений I и ещё не учитывали наличия двух независимых аналитических первых интегралов вида (917), (918). Затем мы ограничили (редуцировали) рассматриваемую систему шестого порядка на уровни (оказавшиеся нулевыми) данных первых интегралов, т. е. была использована система рассуждений II.

3.3.3. Полный список инвариантных соотношений

Для начала поставим в соответствие системе третьего порядка (1075)—(1077) неавтономную систему второго порядка

$$\begin{aligned}
\frac{ds_1}{d\alpha} &= \frac{R_1\sin\alpha\cos\alpha - s_2^2\cos\alpha/\sin\alpha - R_2H_1s_1\cos\alpha}{-s_1+b\sin\alpha},\\
\frac{ds_2}{d\alpha} &= \frac{s_1s_2\cos\alpha/\sin\alpha - R_2H_1s_2\cos\alpha}{-s_1+b\sin\alpha}.
\end{aligned}\tag{1079}$$

Используя замену $\tau = \sin\alpha$, перепишем систему (1079) в алгебраическом виде

$$\begin{aligned}
\frac{ds_1}{d\tau} &= \frac{R_1\tau - s_2^2/\tau - R_2H_1s_1}{-s_1+b\tau},\\
\frac{ds_2}{d\tau} &= \frac{s_1s_2/\tau - R_2H_1s_2}{-s_1+b\tau}.
\end{aligned}\tag{1080}$$

Вводя однородные переменные по формулам

$$s_1 = t_1\tau, \quad s_2 = t_2\tau,\tag{1081}$$

приведём систему (1080) к виду

$$\begin{aligned}
\tau\frac{dt_1}{d\tau} + t_1 &= \frac{R_1 - t_2^2 - R_2H_1t_1}{-t_1+b},\\
\tau\frac{dt_2}{d\tau} + t_2 &= \frac{t_1t_2 - R_2H_1t_2}{-t_1+b},
\end{aligned}\tag{1082}$$

эквивалентному

$$\begin{aligned}
\tau\frac{dt_1}{d\tau} &= \frac{t_1^2 - t_2^2 - (b+R_2H_1)t_1 + R_1}{-t_1+b},\\
\tau\frac{dt_2}{d\tau} &= \frac{2t_1t_2 - (b+R_2H_1)t_2}{-t_1+b}.
\end{aligned}\tag{1083}$$

Поставим в соответствие системе второго порядка (1083) неавтономное уравнение первого порядка

$$\frac{dt_1}{dt_2} = \frac{t_1^2 - t_2^2 - (b+R_2H_1)t_1 + R_1}{2t_1t_2 - (b+R_2H_1)t_2},\tag{1084}$$

которое несложно приводится к полному дифференциалу:

$$d\left(\frac{t_1^2 + t_2^2 - (b+R_2H_1)t_1 + R_1}{t_2}\right) = 0.\tag{1085}$$

Итак, уравнение (1084) имеет первый интеграл

$$\frac{t_1^2 + t_2^2 - (b+R_2H_1)t_1 + R_1}{t_2} = C_1 = \mathrm{const},\tag{1086}$$

который в прежних переменных выглядит как

$$\frac{s_1^2 + s_2^2 - (b+R_2H_1)s_1\sin\alpha + R_1\sin^2\alpha}{s_2\sin\alpha} = C_1 = \mathrm{const}.\tag{1087}$$

Замечание 3.4. Рассмотрим систему (1075)—(1077) с переменной диссипацией с нулевым средним (см. также [168, 265, 266]), становящейся консервативной при $b = R_2 H_1$:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -s_1 + b\sin\alpha, \\ s_1' &= R_1 \sin\alpha\cos\alpha - s_2^2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - bs_1\cos\alpha, \\ s_2' &= s_1 s_2 \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - bs_2\cos\alpha. \end{aligned} \tag{1088}$$

Она обладает двумя аналитическими первыми интегралами вида

$$s_1^2 + s_2^2 - 2bs_1\sin\alpha + R_1\sin^2\alpha = C_1^* = \mathrm{const}, \tag{1089}$$

$$s_2\sin\alpha = C_2^* = \mathrm{const}. \tag{1090}$$

Очевидно, что отношение двух первых интегралов (1089), (1090) также является первым интегралом системы (1088). Но при $b \neq R_2 H_1$ каждая из функций

$$s_1^2 + s_2^2 - (b + R_2 H_1)s_1\sin\alpha + R_1\sin^2\alpha \tag{1091}$$

и (1090) по отдельности не является первым интегралом системы (1075)—(1077). Однако отношение функций (1091), (1090) является первым интегралом системы (1075)—(1077) при любых b, $R_2 H_1$.

Найдём явный вид дополнительного первого интеграла системы третьего порядка (1075)—(1077). Для этого преобразуем для начала инвариантное соотношение (1086) при $t_2 \neq 0$ следующим образом:

$$\left(t_1 - \frac{b + R_2 H_1}{2}\right)^2 + \left(t_2 - \frac{C_1}{2}\right)^2 = \frac{(b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1}{4}. \tag{1092}$$

Видно, что параметры данного инвариантного соотношения должны удовлетворять условию

$$(b + R_2 H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1 \geqslant 0, \tag{1093}$$

и фазовое пространство системы (1075)—(1077) расслаивается на семейство поверхностей, задаваемых равенством (1092). Таким образом, в силу соотношения (1086) первое уравнение системы (1083) примет вид

$$\tau\frac{dt_1}{d\tau} = \frac{2t_1^2 - 2(b + R_2 H_1)t_1 + 2R_1 - C_1 U_1(C_1, t_1)}{b - t_1}, \tag{1094}$$

где

$$\begin{aligned} U_1(C_1, t_1) &= \frac{1}{2}\{C_1 \pm U_2(C_1, t_1)\}, \\ U_2(C_1, t_1) &= \sqrt{C_1^2 - 4(R_1 - (b + R_2 H_1)t_1 + t_1^2)}, \end{aligned} \tag{1095}$$

при этом постоянная интегрирования C_1 выбирается из условия (1093). Поэтому квадратура для поиска дополнительного первого интеграла системы (1075)—(1077) примет вид

$$\int\frac{d\tau}{\tau} = \int\frac{(b - t_1)dt_1}{2(R_1 - (b + R_2 H_1)t_1 + t_1^2) - C_1\{C_1 \pm U_2(C_1, t_1)\}/2}. \tag{1096}$$

Левая часть (с точностью до аддитивной постоянной), очевидно, равна

$$\ln|\sin\alpha|. \tag{1097}$$

Если

$$t_1 - \frac{b+R_2H_1}{2} = w_1, \quad b_1^2 = (b+R_2H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1, \tag{1098}$$

то правая часть равенства (1096) примет вид

$$-\frac{1}{4}\int \frac{d(b_1^2-4w_1^2)}{(b_1^2-4w_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4w_1^2}} - (b+R_2H_1)\int \frac{dw_1}{(b_1^2-4w_1^2)\pm C_1\sqrt{b_1^2-4w_1^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{b_1^2-4w_1^2}}{C_1}\pm 1\right| \pm \frac{b+R_2H_1}{2}I_1, \tag{1099}$$

где

$$I_1 = \int \frac{dw_3}{\sqrt{b_1^2-w_3^2}(w_3\pm C_1)}, \quad w_3 = \sqrt{b_1^2-4w_1^2}. \tag{1100}$$

При вычислении интеграла (1100) возможны три случая.

I. $(b+R_2H_1)^2 - 4R_1 > 0$.

$$I_1 = -\frac{1}{2\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}}\times$$
$$\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}+\sqrt{b_1^2-w_3^2}}{w_3\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}}\right| +$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}}\times$$
$$\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}-\sqrt{b_1^2-w_3^2}}{w_3\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}}\right| + \mathrm{const}. \tag{1101}$$

II. $(b+R_2H_1)^2 - 4R_1 < 0$.

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{4R_1-(b+R_2H_1)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1w_3+b_1^2}{b_1(w_3\pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1102}$$

III. $(b+R_2H_1)^2 - 4R_1 = 0$.

$$I_1 = \mp\frac{\sqrt{b_1^2-w_3^2}}{C_1(w_3\pm C_1)} + \mathrm{const}. \tag{1103}$$

Возвращаясь к переменной

$$w_1 = \frac{s_1}{\sin\alpha} - \frac{b+R_2H_1}{2}, \tag{1104}$$

имеем окончательный вид для величины I_1.

I. $(b+R_2H_1)^2-4R_1>0$.

$$
\begin{gathered}
I_1=-\frac{1}{2\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1>0}}\times\\
\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}\pm 2w_1}{\sqrt{b_1^2-4w_1^2}\pm C_1}\pm\frac{C_1}{\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}}\right|+\\
+\frac{1}{2\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}}\times\\
\times\ln\left|\frac{\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}\mp 2w_1}{\sqrt{b_1^2-4w_1^2}\pm C_1}\mp\frac{C_1}{\sqrt{(b+R_2H_1)^2-4R_1}}\right|+\mathrm{const}.
\end{gathered}\tag{1105}
$$

II. $(b+R_2H_1)^2-4R_1<0$.

$$
I_1=\frac{1}{\sqrt{4R_1-(b+R_2H_1)^2}}\arcsin\frac{\pm C_1\sqrt{b_1^2-4w_1^2}+b_1^2}{b_1(\sqrt{b_1^2-4w_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}.\tag{1106}
$$

III. $(b+R_2H_1)^2-4R_1=0$.

$$
I_1=\mp\frac{2w_1}{C_1(\sqrt{b_1^2-4w_1^2}\pm C_1)}+\mathrm{const}.\tag{1107}
$$

Итак, только что был найден дополнительный первый интеграл для системы третьего порядка (1075)—(1077), мы предъявили полный набор первых интегралов, являющихся трансцендентными функциями своих фазовых переменных.

Замечание 3.5. В выражение найденного первого интеграла формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1086). Тогда полученный дополнительный первый интеграл имеет следующий структурный вид (аналогичный трансцендентному первому интегралу из плоской динамики):

$$
\ln|\sin\alpha|+G_2\left(\sin\alpha,\frac{s_1}{\sin\alpha},\frac{s_2}{\sin\alpha}\right)=C_2=\mathrm{const}.\tag{1108}
$$

Таким образом, для интегрирования системы четвёртого порядка (1075)—(1078) уже найдены два независимых первых интеграла. Для полной же её интегрируемости, как указано выше, достаточно найти дополнительный первый интеграл, «привязывающий» уравнение (1078).

Поскольку

$$
\frac{dt_2}{d\tau}=\frac{2t_1t_2-(b+R_2H_1)t_2}{(b-t_1)\tau},\quad \frac{d\beta_1}{d\tau}=\frac{t_2}{(b-t_1)\tau},\tag{1109}
$$

то

$$
\frac{dt_2}{d\beta_1}=2t_1-(b+R_2H_1).\tag{1110}
$$

Очевидно, что при $t_2\neq 0$ выполнено равенство

$$
t_1=\frac{1}{2}\left((b+R_2H_1)\pm\sqrt{b_1^2-(2t_2-C_1)^2}\right),\quad b_1^2=(b+R_2H_1)^2+C_1^2-4R_1.\tag{1111}
$$

Тогда интегрирование квадратуры

$$\beta_1 + \mathrm{const} = \pm \int \frac{dt_2}{\sqrt{b_1^2 - (2t_2 - C_1)^2}} \tag{1112}$$

приведёт к инвариантному соотношению

$$2(\beta_1 + C_3) = \pm \arcsin \frac{2t_1 - C_1}{\sqrt{(b + R_2H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1}}, \quad C_3 = \mathrm{const}. \tag{1113}$$

Другими словами, выполнено равенство

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2t_2 - C_1}{\sqrt{(b + R_2H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1}}, \tag{1114}$$

или, при переходе к старым переменным,

$$\sin[2(\beta_1 + C_3)] = \pm \frac{2s_2 - C_1 \sin\alpha}{\sqrt{(b + R_2H_1)^2 + C_1^2 - 4R_1} \sin\alpha}. \tag{1115}$$

В принципе, при получении дополнительного инвариантного соотношения, «привязывающего» уравнение (1078), на последнем равенстве можно остановиться, причём в последнем выражении формально необходимо вместо C_1 подставить левую часть первого интеграла (1086). Но мы проведём некоторые преобразования, приводящие к получению следующего явного вида дополнительного первого интеграла (при этом используется равенство (1086)):

$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(t_2^2 - t_1^2 + (b + R_2H_1)t_1 - R_1)^2}{t_2^2(2t_1 - (b + R_2H_1))^2}. \tag{1116}$$

Возвращаясь к старым координатам, получаем дополнительное инвариантное соотношение в виде

$$\mathrm{tg}^2[2(\beta_1 + C_3)] = \frac{(s_2^2 - s_1^2 + (b + R_2H_1)s_1 \sin\alpha - R_1 \sin^2\alpha)^2}{s_2^2(2s_1 - (b + R_2H_1)\sin\alpha)^2}, \tag{1117}$$

или окончательно

$$-\beta_1 \pm \frac{1}{2} \mathrm{arctg} \frac{s_2^2 - s_1^2 + (b + R_2H_1)s_1 \sin\alpha - R_1 \sin^2\alpha}{s_2(2s_1 - (b + R_2H_1)\sin\alpha)} = C_3 = \mathrm{const}. \tag{1118}$$

Итак, в рассматриваемом случае система динамических уравнений (890)—(893), (896)—(901) при условии (1024) имеет девять инвариантных соотношений: имеются аналитические неинтегрируемые связи вида (906), циклические первые интегралы вида (904), (905), аналитические первые интегралы вида (917), (918), первый интеграл вида (1087), также имеется первый интеграл, выражающийся соотношениями (1101)—(1108), являющийся трансцендентной функцией фазовых переменных (также в смысле комплексного анализа) и выражающийся через конечную комбинацию элементарных функций, наконец, трансцендентный первый интеграл вида (1118).

Теорема 3.3. *Система* (890)–(893), (896)–(901) *при условиях* (906), (1024), (905), (1074) *обладает девятью инвариантными соотношениями* (*полным набором*), *три из которых являются трансцендентными функциями с точки зрения комплексного анализа. При этом все соотношения выражаются через конечную комбинацию элементарных функций.*

Заметим также, что в аналогичной теореме 3.1 речь идёт о полном наборе первых интегралов, состоящем из восьми первых интегралов, хотя имеются все девять первых интегралов. Но при доказательстве теоремы 3.1 используется система рассуждений I, которая подразумевает введение фазовых координат (в частности, w_k, $k = 1, \ldots, 4$), в которых векторное поле системы допускает дополнительные расслоения. При этом аналитические первые интегралы (917), (918) напрямую не используются, что позволяет обойтись меньшим количеством первых интегралов. При доказательстве же теоремы 3.3 используется система рассуждений II, которая подразумевает редукцию исследуемой системы на (нулевые) уровни аналитических первых интегралов (917), (918). Последнее принципиально учитывает полный список имеющихся первых интегралов.

3.3.4. Топологические аналогии

Рассмотрим систему уравнений третьего порядка

$$\begin{gathered}
\ddot{\xi} + (b_* - H_1^*)\dot{\xi}\cos\xi + R_3\sin\xi\cos\xi - \dot{\eta_1}^2\frac{\sin\xi}{\cos\xi} + \\
+ H_1^{**}[W_1^0\sin\eta_1 - W_2^0\cos\eta_1] = 0, \\
\ddot{\eta_1} + (b_* - H_1^*)\dot{\eta_1}\cos\xi + \dot{\xi}\dot{\eta_1}\frac{1+\cos^2\xi}{\cos\xi\sin\xi} + \\
+ H_1^{**}[W_1^0\cos\eta_1 + W_2^0\sin\eta_1] = 0, \quad b_* > 0, \quad H_1^{**} > 0,
\end{gathered} \tag{1119}$$

описывающую закреплённый сферический маятник, помещённый в поток набегающей среды при наличии зависимости момента сил от угловой скорости, т. е. механическую систему в неконсервативном поле сил (см. также [246–248,250,262]). Порядок такой системы равен 4 (а не 3), поскольку фазовая переменная η_1 не является циклической, фазовое пространство не расслаивается и порядок не понижается. Фазовым пространством этой системы является касательное расслоение

$$T\mathbf{S}^2\{\dot{\xi}, \dot{\eta_1}, \xi, \eta_1\} \tag{1120}$$

к двумерной сфере $\mathbf{S}^2\{\xi, \eta_1\}$, при этом уравнение больших кругов

$$\dot{\eta_1} \equiv 0 \tag{1121}$$

задаёт семейство интегральных многообразий лишь при $W_1^0 = W_2^0 = 0$.

Нетрудно убедиться, что система (1119) эквивалентна динамической системе с переменной диссипацией (с нулевым средним) на касательном расслоении (1120) к двумерной сфере. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. *Система* (1075)—(1078) *эквивалентна динамической системе* (1119).

Действительно, достаточно положить $\alpha = \xi$, $\beta_1 = \eta_1$, $b = -b_*$, $H_1 = H_1^{**}$, $R_2 H_1 = -H_1^*$, $R_1 - bR_2H_1 = R_3$.

О более общих топологических аналогиях см. также [168].

4. Об устойчивости некоторых ключевых режимов движения твёрдого тела в неконсервативном поле сил

В данном разделе проводится качественный анализ плоскопараллельной и пространственной задач о движении реальных твёрдых тел в сопротивляющейся среде. Построена нелинейная модель воздействия среды на твёрдое тело, учитывающая зависимость плеча силы от приведённой угловой скорости тела, при этом сам момент данной силы является также функцией угла атаки. Как показала обработка эксперимента о движении в воде однородных круговых цилиндров, данные обстоятельства необходимо учитывать при моделировании (см. [55, 60, 61, 76, 78, 91, 92, 137, 150, 162, 163, 185, 192, 196, 203, 205, 234, 240, 274]). При изучении плоской и пространственной модели взаимодействия твёрдого тела со средой (как при наличии, так и при отсутствии дополнительной следящей силы) найдены достаточные условия устойчивости одного из ключевых режимов движения — прямолинейного поступательного движения. Показано, что при некоторых условиях возможно также присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательных режимов. Аналогичные условия получены и для ключевого режима движения четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил, при этом отмечаются механическая и топологическая аналогия между движением маломерных тел в сопротивляющейся среде, а также многомерных тел в соответствующем неконсервативном поле.

4.1. Введение

Мы исследуем задачу о движении твёрдого тела, взаимодействующего со средой лишь через передний плоский участок (пластину) своей внешней поверхности. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности [48, 59, 60, 75, 93]. Движение среды не изучается, рассматривается задача динамики твёрдого тела, в которой характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра.

По причине сложности нелинейного анализа начальным этапом такого исследования явилось пренебрежение зависимостью момента силы воздействия среды от угловой скорости тела и использование такой зависимости лишь от угла атаки (см. [168]).

С практической точки зрения важен вопрос исследования устойчивости так называемого невозмущённого (прямолинейного поступательного) движения, при котором скорости точек тела перпендикулярны пластине (кавитатору).

Весь спектр результатов, найденных при указанном простейшем предположении, позволяет сделать вывод о невозможности нахождения таких условий, при которых у приведённых систем существовали бы решения, соответствующие угловым колебаниям тела ограниченной амплитуды.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров [92] подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твёрдое тело действительно необходимо учитывать зависимость момента силы воздействия среды и от угловой скорости тела. При этом в уравнениях движения возникают дополнительные члены, вносящие в систему диссипацию.

Как уже отмечалось, при изучении движения тела с конечными углами атаки основным вопросом нелинейного анализа является нахождение таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущённого движения, что подтверждает необходимость полного нелинейного исследования.

4.2. Плоскопараллельное движение симметричного твёрдого тела в сопротивляющейся среде

Предположим, что однородное твёрдое тело массы m совершает плоскопараллельное движение в однородном потоке среды и что некоторая часть внешней поверхности тела представляет собой плоскую пластину AB, находящуюся в условиях струйного обтекания средой. Это означает, что в случае отсутствия касательных сил воздействие среды на пластину сводится к силе $\mathbf{S}$ (приложенной в точке N), ортогональной к ней (рис. 1). Остальная часть поверхности тела может быть размещена внутри объёма, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края пластины, и не испытывает действия среды. Похожие

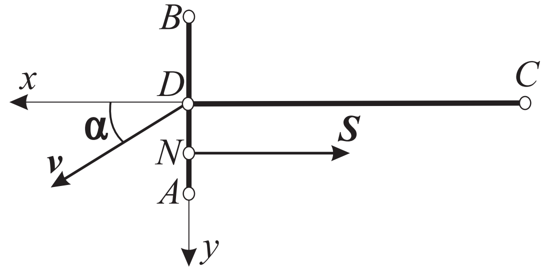

Рис. 1. Плоскопараллельное движение симметричного твёрдого тела в сопротивляющейся среде

условия могут возникнуть, например, после входа тела в воду [92]. Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды.

Свяжем с пластиной правую систему координат $Dxyz$ (ось z перпендикулярна плоскости рисунка) и для простоты будем считать Dzx плоскостью геометрической симметрии тела. Тогда среди возможных движений существует режим прямолинейного поступательного торможения (невозмущённого движения), перпендикулярного пластине AB. При этом срединный перпендикуляр Dx, опущенный из центра тяжести C тела на плоскость пластины, принадлежит линии действия силы $\mathbf{S}$. А при возмущении данного режима вектор скорости $\mathbf{v}$ точки D относительно среды, вообще говоря, отклоняется от оси DC геометрической симметрии на некоторый угол (атаки) α.

Для построения динамической модели введём первые три фазовые координаты: v — величина скорости точки D относительно потока среды (см. рис. 1), α — угол и Ω — алгебраическое значение проекции абсолютной угловой скорости тела на ось z, $AB = \Delta$.

Примем, что величина силы $\mathbf{S}$ квадратично зависит от v с некоторым коэффициентом s_1 (ньютоновское сопротивление)

$$S = s_1 v^2. \tag{1122}$$

Обычно s_1 представляют в виде

$$s_1 = \frac{\rho P c_x}{2}, \tag{1123}$$

где c_x — уже безразмерный коэффициент лобового сопротивления (ρ — плотность среды, P — площадь пластины). Этот коэффициент зависит от угла атаки, числа Струхаля и других величин, которые в статических моделях обычно считают параметрами. Мы же в дальнейшем вводим безразмерную фазовую переменную «типа Струхаля»

$$\omega \cong \frac{\Omega\Delta}{v}, \tag{1124}$$

а также вспомогательную функцию

$$s = s_1 \operatorname{sgn} \cos\alpha, \tag{1125}$$

при этом воздействие среды на тело будет определять пара функций (y_N, s).

Ограничимся зависимостью коэффициента c_x от угла атаки, т. е. в принципе будем считать величину s функцией α, а величину $y_N = DN$ — функцией пары безразмерных переменных (α, ω).

Как уже отмечалось, предыдущие работы (см., например, [168]) посвящены исследованию плоского взаимодействия, при котором учитывается зависимость пары (y_N, s) лишь от угла атаки. Здесь же изучаются плоскопараллельные и пространственные движения тела в нелинейной постановке в случае зависимости величины s от угла атаки и при условии дополнительной зависимости функции y_N от приведённой угловой скорости ω.

Задача о свободном торможении тела (когда на тело действует лишь сила сопротивления среды — см. далее случай I) *с малыми углами атаки* формирует дальнейшее представление о нелинейных динамических системах, описывающих взаимодействие среды с телом, при учёте так называемых вращательных производных момента силы воздействия среды по угловой скорости тела. Термин «вращательная производная» часто употребляется в гидродинамике, в случае когда дифференцирование динамических функций идёт в неинерциальной системе координат, при этом, если момент силы зависит от угловой скорости, он входит линейно по ней и в уравнениях движения.

Невозмущённое движение определяется равенствами

$$\alpha(t) \equiv 0, \quad \omega(t) \equiv 0. \tag{1126}$$

Поэтому функцию $y_N(\alpha, \omega)$ при малых (α, ω) будем использовать в виде

$$y_N = \Delta(k\alpha - h\omega), \tag{1127}$$

где k и h — некоторые постоянные. Зависимостью же s от α из-за геометрической симметрии тела, обеспечивающей чётность функции s, пренебрегаем.

Линеаризованная модель силового воздействия среды содержит три параметра $s = s_1$, k, h, которые определяются формой пластины в плане. Первый из этих параметров — коэффициент s — размерный, параметры же k, h безразмерные по способу их введения. Величины s, k могут быть экспериментально определены путём весовых измерений в установках типа гидро- или аэродинамических труб. В [240] имеется информация о теоретическом определении этих величин для отдельных форм пластин, позволяющая считать, что $k > 0$. Что же касается параметра h (который вносит в систему зависимость момента силы от угловой скорости), то даже сама необходимость введения его в модель априори не очевидна.

Изучение свойств движения рассматриваемых классов тел в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова было начато экспериментами по регистрации движения в воде однородных круговых цилиндров (см. [92]). Эксперимент позволил сделать следующие выводы.

1. Невозмущённый режим движения тела (в воде) неустойчив по крайней мере по отношению к углу ориентации тела. Также стало возможным определение безразмерных параметров k, h воздействия среды на твёрдое тело.
2. При моделировании воздействия среды на тело действительно необходимо учитывать дополнительный параметр, эквивалентный вращательной производной момента гидроаэродинамических сил по угловой скорости тела, который и вносит в систему дополнительную диссипацию.

Величина коэффициента демпфирующего момента уже была оценена в [55] для некоторых случаев движения тел в воде. Данная там оценка говорит о неустойчивости по углу атаки и угловой скорости невозмущённого движения твёрдого тела в воде. Чисто формально, увеличивая величину данного коэффициента, можно добиться устойчивости такого движения, которое в некоторых средах (например, в глине) устойчиво в вышеописанном смысле, как показывает эксперимент. Но, возможно, данная устойчивость достигается благодаря наличию в системе значительного демпфирования со стороны среды или наличию сил, касательных к пластине.

При тех же предположениях о характере взаимодействия тела со средой выделим класс задач, когда на тело, наряду с силой воздействия среды, действует следящая сила (тяги) $\mathbf{T}$ по прямой CD (см. рис. 1). Одна из таких задач уже решалась в [75] при условии, когда тяга постоянна, и была показана неустойчивость невозмущённого режима.

Отметим случаи движения, которые в дальнейшем подверглись обстоятельному анализу.

I. (Свободное) торможение тела, т. е. его движение под действием лишь силы воздействия среды (следящая сила отсутствует).

II. Движение тела, при котором во всё время движения постоянна величина скорости центра пластины (наличие неинтегрируемой связи):

$$v \equiv \mathrm{const}. \tag{1128}$$

III. Движение тела, при котором во всё время движения постоянна скорость центра масс (как вектор):

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const}. \tag{1129}$$

Заметим, что в случае I невозмущённый режим можно также называть *прямолинейным поступательным торможением*.

Положение тела на плоскости зададим координатами (x_0, y_0) точки D и углом отклонения φ. Полярные координаты (v, α) конца вектора скорости точки D и алгебраическое значение проекции угловой скорости Ω связаны с переменными $(\dot{x_0}, \dot{y_0}, \dot{\varphi}, \varphi)$ (неинтегрируемыми) кинематическими соотношениями

$$\dot{\varphi} = \Omega, \quad \dot{x_0} = v\cos(\alpha + \varphi), \quad \dot{y_0} = v\sin(\alpha + \varphi). \tag{1130}$$

Таким образом, фазовое состояние системы будем определять через функции $(v, \alpha, \Omega, x_0, y_0, \varphi)$, а первые три величины рассматривать в качестве квазискоростей.

Поскольку кинетическая энергия тела и обобщённые силы не зависят от положения тела на плоскости, координаты (x_0, y_0, φ) являются циклическими, что приводит к понижению порядка общей системы уравнений движения.

Уравнения движения центра масс (в проекциях на связанные оси Dxy) и изменения кинетического момента в осях Кёнига образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений, рассматриваемую в трёхмерном фазовом пространстве квазискоростей ($\sigma = DC$, I — центральный момент инерции, дифференцирование берётся по времени):

$$\dot{v}\cos\alpha - \dot{\alpha}v\sin\alpha - \Omega v\sin\alpha + \sigma\Omega^2 = -\frac{s(\alpha)v^2}{m}, \tag{1131}$$

$$\dot{v}\sin\alpha + \dot{\alpha}v\cos\alpha + \Omega v\cos\alpha - \sigma\dot{\Omega} = 0, \tag{1132}$$

$$I\dot{\Omega} = y_N(\alpha,\omega)s(\alpha)v^2, \quad \omega \cong \frac{\Delta\Omega}{v}. \tag{1133}$$

Системы (1130), (1131)—(1133) вместе образуют полную систему для описания плоскопараллельного движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде в условиях квазистационарности. Если же рассматривается введённая выше задача II или III о движении тела при наличии следящей силы, то в правой части уравнения (1131) стоит величина

$$\frac{T - s(\alpha)v^2}{m}. \tag{1134}$$

В частности, для обеспечения выполнения условия (1128) величину T следящей силы достаточно выбрать следующим образом:

$$T = T(v,\alpha,\Omega) = m\sigma\Omega^2 + s(\alpha)v^2\left[1 - \frac{m\sigma}{I}y_N(\alpha,\omega)\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right], \tag{1135}$$

при этом первое уравнение (1131) удовлетворяется тождественно. Отметим, что случаи II и III имеют лишь методическое значение, поскольку позволяет в дальнейшем понизить порядок системы уравнений движения и привести к важным механическим аналогиям.

4.3. Функции воздействия среды, зависящие от угловой скорости тела

В динамическую систему (1131)—(1133) входят функции $y_N(\alpha,\omega)$ и $s(\alpha)$, определяющие воздействие среды на тело. Функция y_N (ср. с (1127)), кроме угла атаки α, зависит и от приведённой угловой скорости ω. Если, в частности, последней зависимостью пренебречь (как было в ряде предыдущих работ — так называемое *простейшее предположение* на функции воздействия среды), то величина y_N — функция лишь угла атаки, $y_N = y(\alpha)$, и её зависимость от единственного аргумента определяется с помощью экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания [92]. В этом случае в дальнейшем можно применить метод «погружения» задачи в более общий класс задач.

Но всё-таки основной целью данной работы является учёт влияния вращательных производных момента силы воздействия среды по компонентам угловой скорости тела, который требует введения в функции воздействия среды дополнительных аргументов, что само по себе является нетривиальной задачей моделирования. Как уже отмечалось, в данной работе мы ограничимся введением угловой скорости в качестве аргумента лишь в функцию y_N, а подобным её введением в приведённый коэффициент s пренебрежём.

По аналогии с (1127) величину y_N будем рассматривать в виде

$$y_N(\alpha, \omega) \cong y_N\left(\alpha, \frac{\Omega}{v}\right) = y(\alpha) - \frac{H\Omega}{v}, \tag{1136}$$

при этом в силу результатов эксперимента [92, 203] $H > 0$. Тогда уравнение (1133) примет следующий вид:

$$I\dot{\Omega} = F(\alpha)v^2 - Hs(\alpha)\Omega v, \quad F(\alpha) = y(\alpha)s(\alpha). \tag{1137}$$

Система (1131), (1132), (1137) содержит функции $F(\alpha)$, $s(\alpha)$, явный вид которых даже для пластин простой формы аналитически описать довольно сложно. По этой причине и используется приём «погружения» данной задачи в более широкий класс задач, учитывающий лишь качественные свойства функций $F(\alpha)$, $s(\alpha)$.

Опорным для нас является результат С. А. Чаплыгина, который для плоскопараллельного струйного обтекания бесконечной пластины получил функции $y(\alpha)$, $s(\alpha)$ аналитически [113, 114]:

$$y(\alpha) = A\sin\alpha \in \{y\}, \quad A = y'(0) > 0, \tag{1138}$$

$$s(\alpha) = B\cos\alpha \in \{s\}, \quad B = s(0) > 0. \tag{1139}$$

Этот результат и помогает построить функциональные классы $\{y\}$, $\{s\}$. Сочетая (1138), (1139) с экспериментальной информацией о свойствах струйного обтекания [92, 203], формально опишем данные классы, состоящие из функций достаточно гладких, 2π-периодических ($y(\alpha)$ нечётная, а $s(\alpha)$ чётная), удовлетворяющих следующим условиям: $y(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi)$, причём

$$y'(0) > 0, \quad y'(\pi) < 0 \tag{1140}$$

(класс функций $\{y\} = Y$); $s(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$, $s(\alpha) < 0$ при $\alpha \in (\pi/2, \pi)$, причём

$$s(0) > 0, \quad s'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \tag{1141}$$

(класс функций $\{s\} = \Sigma$). Как y, так и s меняют знак при замене α на $\alpha + \pi$. Таким образом,

$$y \in Y, \quad s \in \Sigma. \tag{1142}$$

Из вышеперечисленных условий следует, что введённая в (1137) функция F — достаточно гладкая нечётная π-периодическая функция, удовлетворяющая следующим условиям: $F(\alpha) > 0$ при $\alpha \in (0, \pi/2)$,

$$F'(0) > 0, \quad F'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \tag{1143}$$

(класс функций $\{F\} = \Phi$). В частности, аналитическая функция [113, 114]

$$F = F_0(\alpha) = AB\sin\alpha\cos\alpha \in \Phi, \quad AB = y'(0)s(0), \tag{1144}$$

является типичным представителем класса функций Φ.

В связи с отмеченной в [92, 203] неустойчивостью невозмущённого движения можно поставить следующий вопрос: существуют ли угловые колебания оси симметрии тела конечной (ограниченной) амплитуды? Сформулируем этот вопрос в более общем виде: существует ли пара функций y и s воздействия среды, чтобы для некоторого решения динамической части уравнений движения выполнялось бы ограничение $0 < \alpha(t) < \alpha^* < \pi/2$ начиная с некоторого момента времени $t = t_1$?

При простейшем предположении на функции y_N и s ранее показано (см. [168]), что при квазистационарном описании взаимодействия среды с симметричным телом (когда величины y_N и s зависят лишь от угла атаки) для любой допустимой пары функций y и s во всём диапазоне конечных углов атаки ($0 < \alpha < \pi/2$) в системе отсутствуют какие-либо колебательные решения конечной (ограниченной) амплитуды.

Таким образом, для возможного положительного ответа на вопрос, поставленный выше, будем учитывать зависимость момента силы воздействия среды от приведённой угловой скорости, при этом будем использовать формулу (1136) при $H > 0$. Оказывается, при некоторых предположениях можно ожидать положительного ответа на данный вопрос.

Конечно, с практической точки зрения важен анализ динамических уравнений лишь в окрестности невозмущённого движения, поскольку при некоторых критических углах атаки происходит замыв боковой поверхности и настоящая модель воздействия среды на тело перестаёт быть достоверной. Но для тел с боковой поверхностью различной формы величины критических углов, вообще говоря, различны и неизвестны. Поэтому приходится исследовать весь диапазон углов.

Итак, для исследования плоскопараллельного обтекания пластины средой используются классы динамических систем, определённые с помощью пары функций воздействия среды, что значительно усложняет проведение качественного анализа.

4.4. Движение тела в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы

4.4.1. Случай II

Рассмотрим движение тела в среде при наличии следящей силы, которая обеспечивает выполнение условия (1128) во всё время движения. Для этого, как отмечено выше, её величину достаточно выбрать так, чтобы первое уравнение (1131) выполнялось бы тождественно. Тогда к параметрам системы, введённым ранее, добавляется положительный параметр v, а динамическая часть уравнений движения тела в случае (1128) приводится к системе второго порядка

$$\begin{aligned} &\dot{\alpha} v \cos\alpha + \Omega v \cos\alpha - \sigma\dot{\Omega} = 0, \\ &I\dot{\Omega} = F(\alpha)v^2 - Hs(\alpha)\Omega v, \quad H > 0, \end{aligned} \tag{1145}$$

которая вне и только вне объединения прямых

$$O = \left\{(\alpha, \Omega) \in \mathbf{R}^2 \colon \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}\right\} \tag{1146}$$

эквивалентна системе нормального вида

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\Omega + \frac{\sigma v}{I}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha} - \frac{\sigma}{I}H\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}\Omega, \\ \dot{\Omega} &= \frac{v^2}{I}F(\alpha) - H\frac{v}{I}\Omega s(\alpha). \end{aligned} \tag{1147}$$

Для начала исследуем устойчивости её тривиального решения, соответствующего невозмущённому движению, для чего выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат:

$$\lambda^2 + \lambda v\left[\frac{BH}{I} - \sigma n_0^2\right] + n_0^2 v^2 = 0, \tag{1148}$$

где

$$A = y_N'(0), \quad B = s(0), \quad n_0^2 = \frac{F'(0)}{I} = \frac{y_N'(0)s(0)}{I} = \frac{AB}{I}. \tag{1149}$$

Введём три положительных безразмерных параметра

$$\mu_1 = 2\frac{B}{mn_0}, \quad \mu_2 = \sigma n_0, \quad \mu_3 = \frac{BH}{In_0} \tag{1150}$$

и безразмерное дифференцирование и подстановку

$$\langle\cdot\rangle = n_0 v\langle'\rangle, \quad \Omega \mapsto n_0 v\Omega. \tag{1151}$$

Тогда система (1147) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\Omega + \frac{\sigma}{In_0}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha} - \frac{\sigma H}{I}\Omega\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha}, \\ \Omega' &= \frac{F(\alpha)}{In_0^2} - \frac{H}{In_0}\Omega s(\alpha). \end{aligned} \tag{1152}$$

Очевидно следующее утверждение.

Предложение 4.1. *При $\mu_3 > \mu_2$ ($\mu_3 < \mu_2$) тривиальное решение системы* (1147) *асимптотически устойчиво* (*является отталкивающим*).

Изучая возможность рождения предельного цикла около начала координат, исследуем устойчивость тривиального решения системы (1147) при критическом соотношении параметров

$$\mu_3 = \mu_2. \tag{1153}$$

Сделаем в системе (1152) замену фазовых переменных

$$(\alpha, \Omega) \mapsto (a, w), \quad \alpha = a, \quad \Omega = \frac{|\omega_0|}{1 + \mu_2^2}(\mu_2 a - w), \quad \omega_0 = 1, \tag{1154}$$

переводящую её в систему

$$\begin{aligned} a' &= |\omega_0|w + A_3a^3 + A_4a^2w + o_1\big((a^2+w^2)^{3/2}\big), \\ w' &= -|\omega_0|a + A_1a^3 + A_2a^2w + o_2\big((a^2+w^2)^{3/2}\big), \end{aligned} \tag{1155}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{f_3}{6In_0^2} + \frac{Hs_2}{2In_0}\,\frac{\mu_2}{1+\mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2(1+\mu_2^2)}, \\ A_2 &= -\frac{Hs_2}{2In_0}\,\frac{1}{1+\mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{2(1+\mu_2^2)}, \\ A_3 &= \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} - \frac{\mu_2 Hs_2}{2In_0}\,\frac{\mu_2}{1+\mu_2^2} + \frac{\mu_2}{2(1+\mu_2^2)}, \\ A_4 &= \frac{Hs_2}{2In_0}\,\frac{\mu_2}{1+\mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2(1+\mu_2^2)}, \quad s_2 = s''(0), \quad f_3 = F'''(0). \end{aligned} \tag{1156}$$

Введём следующий вспомогательный индекс (см. также [77, 79, 84, 120, 123, 125, 136, 143, 235, 237—239]):

$$\begin{gathered} \mathrm{In} = |\omega_0|\{Y^1_{111} + Y^1_{122} + Y^2_{112} + Y^2_{222}\} + \\ + (Y^1_{11}Y^2_{11} - Y^1_{11}Y^1_{12} + Y^2_{11}Y^2_{12} + Y^2_{22}Y^2_{12} - Y^1_{22}Y^1_{12} - Y^1_{22}Y^2_{22}), \\ Y^i_{jkl} = \frac{\partial^3 Y_i}{\partial y_j \partial y_k \partial y_l}(0,0), \quad Y^i_{jk} = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0,0), \end{gathered} \tag{1157}$$

где

$$\begin{pmatrix} Y_1(a,w) \\ Y_2(a,w) \end{pmatrix} - \tag{1158}$$

правая часть системы (1155). Более конкретно, для системы (1155) построенный индекс будет иметь вид

$$\mathrm{In} = 6A_3 + 2A_2 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} - \frac{Hs_2}{\mathrm{In}_0(1+\mu_2^2)}(1+3\mu_2^2) + \frac{\mu_2}{1+\mu_2^2}(3+\mu_2^2). \tag{1159}$$

Поскольку для данной системы

$$Y^i_{jk} = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0,0) = 0 \tag{1160}$$

(из-за нечётности зависимости её правой части от фазовых переменных) для любых индексов i, j, k, то следующее предложение даёт необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при $\mathrm{In} \neq 0$.

Предложение 4.2. *Если* $\mathrm{In} < 0$ $(\mathrm{In} > 0)$ *и при этом выполнено неравенство*

$$|\mu_3 - \mu_2| < 2, \tag{1161}$$

то начало координат фазовой плоскости $\mathbf{R}^2\{a, w\}$ *системы* (1155) ((1147)) *при критическом соотношении параметров* $\mu_3 = \mu_2$ *является слабым устойчивым* (*неустойчивым*) *фокусом.*

Условие (1161) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости $\mathbf{R}^2\{a, w\}$ является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом.

Следствием известной теоремы Пуанкаре—Андронова—Хопфа [84—86] является следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть для системы* (1147) *выполнено неравенство* (1161). *Тогда*

1) *если* $\mathrm{In} < 0$, *то для любого фиксированного* μ_2 *найдутся такие* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *что при* $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$ *начало координат является сильным устойчивым фокусом; при* $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$ *начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окружённым устойчивым предельным циклом, размер которого растёт с уменьшением* μ_3 *от* μ_2 *до* $\mu_2 - \delta_2$ *как* $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$;
2) *если* $\mathrm{In} > 0$, *то для любого фиксированного* μ_2 *найдутся такие* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *что при* $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$ *начало координат является сильным неустойчивым фокусом; при* $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$ *начало координат является сильным устойчивым фокусом, окружённым неустойчивым предельным циклом, размер которого растёт с ростом* μ_3 *от* μ_2 *до* $\mu_2 + \delta_1$ *как* $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$.

Проверить выполнение условия $\mu_3 > \mu_2$ ($\mu_3 < \mu_2$) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды (y_N, s), или от их значений. А вот проверка условия $\mathrm{In} < 0$ ($\mathrm{In} > 0$) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды (y_N, s) неизвестны.

4.4.2. Случай III

Рассмотрим движение тела в среде при наличии такой следящей силы, которая обеспечивает выполнение условия (1129) во всё время движения. Тогда в правой части уравнения (1131) вместо $-s(\alpha)v^2/m$ должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \tag{1162}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T(v, \alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{1163}$$

Подобно выбору функций воздействия среды, динамические функции s и y_N в системе (1131)—(1133) примем в виде (1136), (1142). При этом по-прежнему в рассматриваемой системе присутствует также дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы.

Вводя, как и ранее, новые безразмерные фазовую переменную и дифференцирование по формулам

$$\Omega = n_0 v\omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle ' \rangle, \tag{1164}$$

систему (1131)—(1133) приведём к виду

$$v' = v\Psi(\alpha, \omega), \tag{1165}$$

$$\begin{aligned} \alpha' &= -\omega + \mu_2\omega^2 \sin\alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2}F(\alpha)\cos\alpha - \frac{\mu_2}{In_0}H\omega s(\alpha)\cos\alpha, \\ \omega' &= \frac{F(\alpha)}{In_0^2} + \mu_2\omega^3\cos\alpha - \frac{\mu_2}{In_0^2}\omega F(\alpha)\sin\alpha - \\ &\quad - \frac{H}{In_0}\omega s(\alpha) + \frac{\mu_2}{In_0}H\omega^2 s(\alpha)\sin\alpha, \end{aligned} \tag{1166}$$

$$\Psi(\alpha, \omega) = -\mu_2\omega^2\cos\alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{\mu_2 H}{In_0}\omega s(\alpha)\sin\alpha,$$

выбирая, как и выше, безразмерные параметры $b = \mu_2$, $H_1 = \mu_3$ следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad H_1 = \frac{BH}{In_0}. \tag{1167}$$

Два последних уравнения (1166) системы (1165), (1166) образуют независимую подсистему второго порядка на фазовом цилиндре $\mathbf{S}^1\{\alpha \mod 2\pi\} \times \mathbf{R}^1\{\omega\}$. Для начала исследуем устойчивости её тривиального решения, соответствующего *невозмущённому движению*, для чего выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат:

$$\lambda^2 + \lambda\,[\mu_3 - \mu_2] + 1 = 0. \tag{1168}$$

Очевидно следующее утверждение.

Предложение 4.3. *При $\mu_3 > \mu_2$ ($\mu_3 < \mu_2$) тривиальное решение системы (1166) асимптотически устойчиво (является отталкивающим).*

Изучая возможность рождения предельного цикла около начала координат, исследуем устойчивость тривиального решения системы (1166) при критическом соотношении параметров

$$\mu_3 = \mu_2. \tag{1169}$$

Для этого сделаем в системе (1166) замену фазовых переменных

$$(\alpha, \Omega) \mapsto (a, w), \quad \alpha = a, \quad \omega = \frac{|\omega_0|}{1+\mu_2^2}(\mu_2 a - w), \quad \omega_0 = 1, \tag{1170}$$

переводящую её в систему

$$\begin{aligned} a' &= |\omega_0|w + B_1a^3 + B_2a^2w + B_3aw^2 + o_1\big((a^2+w^2)^{3/2}\big), \\ w' &= -|\omega_0|a + B_4a^3 + B_5a^2w + B_6aw^2 + B_7w^3 + o_2\big((a^2+w^2)^{3/2}\big), \end{aligned} \tag{1171}$$

где

$$
\begin{aligned}
&B_1 = \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} - \frac{Hs_2}{2In_0}\frac{\mu_2^2}{1+\mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{(1+\mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2}{2(1+\mu_2^2)},\\
&B_2 = \frac{Hs_2}{2In_0}\frac{\mu_2}{1+\mu_2^2} - \frac{2\mu_2^2}{(1+\mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2^2}{2(1+\mu_2^2)},\\
&B_3 = \frac{\mu_2}{(1+\mu_2^2)^2},\\
&B_4 = -\frac{f_3}{6In_0^2} + \frac{Hs_2}{2In_0}\frac{\mu_2}{1+\mu_2^2} + \frac{\mu_2^2}{2(1+\mu_2^2)},\\
&B_5 = -\frac{Hs_2}{2In_0}\frac{1}{1+\mu_2^2} + \frac{\mu_2^3}{2(1+\mu_2^2)} - \frac{\mu_2}{(1+\mu_2^2)^2},\\
&B_6 = -\frac{\mu_2^2(3+\mu_2^2)}{(1+\mu_2^2)^2},\\
&B_7 = \frac{\mu_2}{(1+\mu_2^2)^2}, \quad s_2 = s''(0), \quad f_3 = F'''(0).
\end{aligned}
\tag{1172}
$$

Введём следующий вспомогательный индекс In подобно (1157). Более конкретно, для системы (1171) построенный индекс будет иметь вид

$$
\mathrm{In} = 6B_1 + 2B_3 + 2B_5 + 6B_7 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} - \frac{Hs_2}{In_0}\frac{1+3\mu_2^2}{1+\mu_2^2} + \frac{\mu_2}{1+\mu_2^2}(3+\mu_2^2), \tag{1173}
$$

совпадающий (!) с индексом (1159) для системы (1155).

Поскольку для данной системы

$$
Y^i_{jk} = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0,0) = 0 \tag{1174}
$$

(по причине нечётности зависимости её правой части от фазовых переменных) для любых индексов i, j, k, то следующее предложение даёт необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при $\mathrm{In} \neq 0$.

Предложение 4.4. *Если* $\mathrm{In} < 0$ $(\mathrm{In} > 0)$ *и при этом выполнено неравенство*

$$
|\mu_3 - \mu_2| < 2, \tag{1175}
$$

то начало координат фазовой плоскости $\mathbf{R}^2\{a, w\}$ *системы* (1171) ((1166)) *при критическом соотношении параметров* $\mu_3 = \mu_2$ *является слабым устойчивым (неустойчивым) фокусом.*

Условие (1175) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости $\mathbf{R}^2\{a, w\}$ является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом.

Следствием известной теоремы Пуанкаре—Андронова—Хопфа [84—86] является следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть для системы* (1166) *выполнено неравенство* (1175). *Тогда*

1) *если* $\mathrm{In} < 0$, *то для любого фиксированного* μ_2 *найдутся такие* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *что при* $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$ *начало координат является сильным устойчивым фокусом*; *при* $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$ *начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окружённым устойчивым предельным циклом, размер которого растёт с уменьшением* μ_3 *от* μ_2 *до* $\mu_2 - \delta_2$ *как* $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$;
2) *если* $\mathrm{In} > 0$, *то для любого фиксированного* μ_2 *найдутся такие* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *что при* $\mu_3 \in (\mu_2 - \delta_2, \mu_2)$ *начало координат является сильным неустойчивым фокусом*; *при* $\mu_3 \in (\mu_2, \mu_2 + \delta_1)$ *начало координат является сильным устойчивым фокусом, окружённым неустойчивым предельным циклом, размер которого растёт с ростом* μ_3 *от* μ_2 *до* $\mu_2 + \delta_1$ *как* $\sqrt{|\mu_2 - \mu_3|}$.

Проверить выполнение условия $\mu_3 > \mu_2$ ($\mu_3 < \mu_2$) в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды (y_N, s), или от их значений. А вот проверка условия $\mathrm{In} < 0$ ($\mathrm{In} > 0$) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды (y_N, s) неизвестны.

4.5. Свободное торможение твёрдого тела в сопротивляющейся среде (случай I)

Рассмотрим теперь случай движения тела, когда управляющая тяга отключена, при этом тело совершает свободное движение (торможение) в сопротивляющейся среде (случай I). Тогда в правой части уравнения (1131) останется величина $-s(\alpha)v^2/m$, поскольку при этом выполнено равенство

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}. \tag{1176}$$

Подобно выбору функций воздействия среды, динамические функции s и y_N в системе (1131)—(1133) примем в виде (1136), (1142). При этом по-прежнему в рассматриваемой системе присутствует также дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы.

Вводя, как и ранее, новые безразмерные фазовую переменную и дифференцирование по формулам

$$\Omega = n_0 v \omega, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle ' \rangle, \tag{1177}$$

систему (1131)—(1133) приведём к виду

$$v' = v\Psi(\alpha,\omega), \tag{1178}$$

$$\begin{gathered}
\alpha' = -\omega + \mu_2\omega^2\sin\alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2}F(\alpha)\cos\alpha - \frac{\mu_2}{In_0}H\omega s(\alpha)\cos\alpha + \frac{s(\alpha)}{mn_0}\sin\alpha,\\
\omega' = \frac{F(\alpha)}{In_0^2} + \mu_2\omega^3\cos\alpha - \frac{\mu_2}{In_0^2}\omega F(\alpha)\sin\alpha - \frac{H}{In_0}\omega s(\alpha) + \\
+ \frac{\mu_2}{In_0}H\omega^2 s(\alpha)\sin\alpha + \frac{s(\alpha)}{mn_0}\omega\cos\alpha,
\end{gathered} \tag{1179}$$

$$\Psi(\alpha,\omega) = -\mu_2\omega^2\cos\alpha + \frac{\mu_2}{In_0^2}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{\mu_2 H}{In_0}\omega s(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{mn_0}\cos\alpha,$$

выбирая, как и выше, безразмерные параметры μ_1, $b=\mu_2$, $H_1=\mu_3$ следующим образом:

$$\mu_1 = 2\frac{B}{mn_0}, \quad b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I}, \quad H_1 = \frac{BH}{In_0}. \tag{1180}$$

Два последних уравнения (1179) системы (1178), (1179) образуют независимую подсистему второго порядка на фазовом цилиндре $\mathbf{S}^1\{\alpha \mod 2\pi\}\times\mathbf{R}^1\{\omega\}$.

Как и выше речь пойдёт об исследовании устойчивости тривиального решения системы (1179), которое, очевидно, и соответствует прямолинейному поступательному торможению (*невозмущённому движению*).

Выпишем соответствующее характеристическое уравнение возле начала координат:

$$\lambda^2 - \lambda[\mu_1+\mu_2-\mu_3] + \frac{\mu_1}{2}\left(\frac{\mu_1}{2}+\mu_2-\mu_3\right) + 1 = 0. \tag{1181}$$

Предложение 4.5. *Пусть выполнено неравенство* (1161) (*или* (1175)). *Тогда при* $\mu_3 > \mu_1+\mu_2$ ($\mu_3 < \mu_1+\mu_2$) *тривиальное решение системы* (1179) *асимптотически устойчиво* (*является отталкивающим*).

Общая картина перестроек траекторий векторного поля системы (1179) возле начала координат представлена на рис. 2 (область *1* соответствует притягивающей точке; область *2* соответствует седловой точке; область *3* соответствует отталкивающей точке).

Изучая возможность рождения предельного цикла около начала координат, исследуем устойчивость тривиального решения системы (1179) при критическом сочетании параметров

$$\mu_3 = \mu_1 + \mu_2. \tag{1182}$$

Для этого в системе (1179) сделаем замену фазовых переменных

$$(\alpha,\omega)\mapsto(a,w), \quad \alpha = a, \quad \omega = \frac{(\mu_2+\mu_1/2)a - \omega_0 w}{1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2}, \quad \omega_0 = \sqrt{1-\frac{\mu_1^2}{4}}, \tag{1183}$$

переводящую её в систему:

$$\begin{gathered}
a' = |\omega_0|w + C_1a^3 + C_2a^2w + C_3aw^2 + o_1\big((a^2+w^2)^{3/2}\big),\\
w' = -|\omega_0|a + C_4a^3 + C_5a^2w + C_6aw^2 + C_7w^3 + o_2\big((a^2+w^2)^{3/2}\big),
\end{gathered} \tag{1184}$$

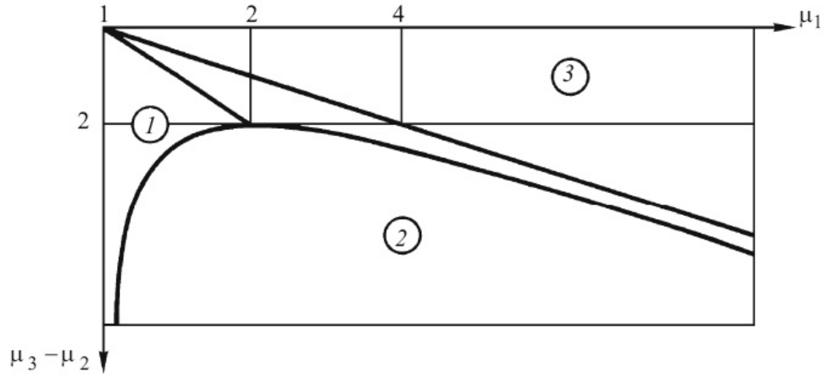

Рис. 2. Общая картина перестроек траекторий векторного поля системы (1179) возле начала координат

где

$$C_1 = \frac{\mu_2 f_3}{6In_0^2} - \frac{Hs_2}{2In_0}\,\frac{\mu_2(\mu_2+\mu_1/2)}{1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2} + \frac{s_2}{2mn_0} - \frac{\mu_2}{2} - \frac{\mu_1}{12} + {}$$
$$+ \frac{\mu_2(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+\mu_1/2)}{2(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)} + \frac{\mu_2(\mu_2+\mu_1/2)^2}{(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)^2},$$

$$C_2 = \frac{Hs_2}{2In_0}\frac{\mu_2\omega_0}{1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2} - \frac{2\mu_2(\mu_2+\mu_1/2)\omega_0}{(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2(\mu_2+\mu_1/2)\omega_0}{2(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)},$$

$$C_3 = \frac{\mu_2\omega_0^2}{(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)^2},$$

$$C_4 = -\left(1+\frac{\mu_1\mu_2}{2}\right)\frac{f_3}{6In_0^2\omega_0} + \frac{Hs_2}{2In_0}\,\frac{(\mu_2+\mu_1/2)(1+\mu_1\mu_2/2)}{(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)\omega_0} + {}$$
$$+ \frac{\mu_2+\mu_1/2}{2(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)\omega_0}\cdot\left[\left(\mu_2+\frac{\mu_1}{3}\right) - \frac{\mu_1\mu_2}{6}(\mu_1+\mu_2)\right],$$

$$C_5 = -\frac{Hs_2}{2In_0}\,\frac{1+\mu_1\mu_2-\mu_1^2/2}{1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2} + \frac{s_2}{2mn_0} + \frac{\mu_2(\mu_2+\mu_1/2)^2}{(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)^2} + {}$$
$$+ \frac{2\mu_2(\mu_1+\mu_2)^2 - 4\mu_2 - \mu_1}{4(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)},$$

$$C_6 = -\frac{2\mu_2(\mu_2+\mu_1/2)\omega_0}{(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)^2} - \frac{\mu_2(\mu_1+\mu_2)\omega_0}{1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2},$$

$$C_7 = \frac{\mu_2\omega_0^2}{(1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2)^2}, \quad s_2 = s''(0), \quad f_3 = F'''(0).$$

Введём следующий вспомогательный индекс In подобно (1157). Более конкретно, для системы (1184) построенный индекс будет иметь вид

$$\mathrm{In} = 6B_1 + 2B_3 + 2B_5 + 6B_7 = \frac{\mu_2 f_3}{In_0^2} - \frac{Hs_2}{In_0}\,\frac{1+3\mu_2^2+5\mu_1\mu_2/2-\mu_1^2/2}{1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2} + \\ + 4\frac{s_2}{mn_0} + \frac{\mu_2(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+2\mu_1)+3\mu_2-\mu_1}{1+\mu_1\mu_2+\mu_2^2}. \quad (1185)$$

Поскольку для данной системы

$$Y^i_{jk} = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0,0) = 0 \quad (1186)$$

(по причине нечётности зависимости её правой части от фазовых переменных) для любых индексов i, j, k, то следующее предложение даёт необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости (неустойчивости) начала координат при $\mathrm{In} \neq 0$.

Предложение 4.6. *Если* $\mathrm{In} < 0$ $(\mathrm{In} > 0)$ *и при этом выполнено неравенство* (1175), *то начало координат фазовой плоскости* $\mathbf{R}^2\{a,w\}$ *системы* (1184) ((1179)) *при критическом соотношении параметров* $\mu_3 = \mu_1 + \mu_2$ *является слабым устойчивым* (*неустойчивым*) *фокусом.*

Условие (1175) в данном случае является необходимым, поскольку лишь при его выполнении начало координат на плоскости $\mathbf{R}^2\{a,w\}$ является (устойчивым или неустойчивым, сильным или слабым) фокусом.

Следствием известной теоремы Пуанкаре—Андронова—Хопфа [84—86] является следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Пусть для системы* (1179) *выполнено неравенство* (1175). *Тогда*

1) *если* $\mathrm{In} < 0$, *то для любых фиксированных* μ_1, μ_2 *найдутся такие* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *что при* $\mu_3 \in (\mu_1+\mu_2, \mu_1+\mu_2+\delta_1)$ *начало координат является сильным устойчивым фокусом*; *при* $\mu_3 \in (\mu_1+\mu_2-\delta_2, \mu_1+\mu_2)$ *начало координат является сильным неустойчивым фокусом, окружённым устойчивым предельным циклом, размер которого растёт с уменьшением* μ_3 *от* $\mu_1+\mu_2$ *до* $\mu_1+\mu_2-\delta_2$ *как* $\sqrt{|\mu_1+\mu_2-\mu_3|}$;
2) *если* $\mathrm{In} > 0$, *то для любых фиксированных* μ_1, μ_2 *найдутся такие* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *что при* $\mu_3 \in (\mu_1+\mu_2-\delta_2, \mu_1+\mu_2)$ *начало координат является сильным неустойчивым фокусом*; *при* $\mu_3 \in (\mu_1+\mu_2, \mu_1+\mu_2+\delta_1)$ *начало координат является сильным устойчивым фокусом, окружённым неустойчивым предельным циклом, размер которого растёт с ростом* μ_3 *от* $\mu_1+\mu_2$ *до* $\mu_1+\mu_2+\delta_1$ *как* $\sqrt{|\mu_1+\mu_2-\mu_3|}$.

Проверить выполнение условия $\mu_3 > \mu_1+\mu_2$ $(\mu_3 < \mu_1+\mu_2)$ в принципе не составляет труда, поскольку в каждом конкретном случае данные параметры зависят лишь или от первых производных функций воздействия среды (y_N, s), или от их значений. А вот проверка условия $\mathrm{In} < 0$ ($\mathrm{In} > 0$) в каждом конкретном случае довольно затруднительна, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и старшие производные даже в отдельных точках функций воздействия среды (y_N, s) неизвестны.

4.6. Пространственное движение осесимметричного твёрдого тела в сопротивляющейся среде

Рассмотрим задачу о пространственном движении однородного осесимметричного твёрдого тела массы m, часть поверхности которого имеет форму плоского круглого диска, взаимодействующего со средой по законам струйного обтекания [168]. Пусть остальная часть поверхности тела размещена внутри объёма, ограниченного струйной поверхностью, срывающейся с края диска, и не испытывает воздействия среды. Похожие условия могут возникнуть, например, после входа однородных круговых цилиндров в воду [168].

Предположим, что касательные силы к диску отсутствуют. Тогда сила $\mathbf{S}$, приложенная к телу в точке N со стороны среды, не меняет своей ориентации относительно тела (направлена по нормали к диску) и квадратична по скорости его центра D (ньютоновское сопротивление, рис. 3). Предполагается также, что сила тяжести, действующая на тело, пренебрежимо мала по сравнению с силой сопротивления (воздействия) среды.

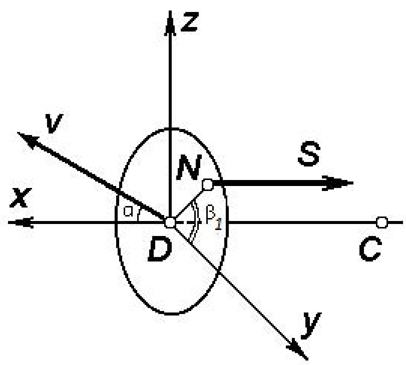

Рис. 3. Пространственное движение осесимметричного твёрдого тела в сопротивляющейся среде

При выполнении вышеперечисленных условий среди движений тела существует режим *прямолинейного поступательного торможения*, подобный случаю плоскопараллельного (невозмущённого) движения: тело способно совершать поступательное движение в направлении его оси симметрии, т. е. перпендикулярно плоскости диска.

Свяжем с телом правую систему координат $Dxyz$ (см. рис. 3) и направим ось Dx вдоль оси геометрической симметрии тела. Оси Dy и Dz жёстко свяжем с круглым диском, образовав правую систему координат. Компоненты вектора угловой скорости Ω в системе $Dxyz$ будем обозначать через $\{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$. Тензор инерции динамически симметричного тела во введённых связанных осях $Dxyz$ имеет диагональный вид:

$$\operatorname{diag}\{I_1, I_2, I_2\}. \tag{1187}$$

Воспользуемся гипотезой квазистационарности и будем для простоты предполагать, что величина $R_1 = DN$ определяется по крайней мере углом атаки α, измеряемым между вектором скорости $\mathbf{v}$ центра D диска и прямой Dx. Таким образом, $DN = R_1(\alpha, \ldots)$.

Кроме того, примем величину силы сопротивления в виде $S = |\mathbf{S}| = s_1(\alpha)v^2$, $v = |\mathbf{v}|$. Для удобства дальнейшего описания (как и в случае плоскопараллельного движения) вместо коэффициента сопротивления $s_1(\alpha)$ введём вспомогательную знакопеременную функцию $s(\alpha)$:

$$s_1 = s_1(\alpha) = s(\alpha) \operatorname{sgn} \cos\alpha > 0.$$

Пара функций $R_1(\alpha, \ldots)$ и $s(\alpha)$, таким образом, определяет силомоментные характеристики воздействия среды на диск при данных модельных предположениях.

4.6.1. Динамическая часть уравнений пространственного движения

Рассмотрим сферические координаты (v, α, β_1) конца вектора $\mathbf{v} = \mathbf{v}_D$ скорости точки D относительно потока, в которых угол β_1 измеряется в плоскости диска (см. рис. 3). Величины v, α, β_1 выражаются неинтегрируемыми соотношениями через циклические кинематические переменные и их производные. Поэтому рассмотрим тройку (v, α, β_1) в качестве квазискоростей, добавив к ним компоненты $(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ угловой скорости в осях, связанных с телом. Очевидно, что в таких осях

$$\mathbf{v}_D = \{v\cos\alpha, v\sin\alpha\cos\beta_1, v\sin\alpha\sin\beta_1\}. \tag{1188}$$

Согласно теоремам о движении центра масс (в проекциях на связанные оси $Dxyz$) и об изменении кинетического момента относительно этих осей получаем динамическую часть дифференциальных уравнений движения, рассматриваемую в шестимерном фазовом пространстве квазискоростей (σ — расстояние DC). Первая группа уравнений соответствует движению самого центра масс, а вторая группа — движению вокруг центра масс:

$$
\begin{gathered}
\dot v\cos\alpha-\dot\alpha v\sin\alpha+\Omega_y v\sin\alpha\sin\beta_1-\Omega_z v\sin\alpha\cos\beta_1+\\
+\sigma(\Omega_y^2+\Omega_z^2)=-\frac{s(\alpha)v^2}{m},\\
\dot v\sin\alpha\cos\beta_1+\dot\alpha v\cos\alpha\cos\beta_1-\dot\beta_1 v\sin\alpha\sin\beta_1+\Omega_z v\cos\alpha-\\
-\Omega_x v\sin\alpha\sin\beta_1-\sigma\Omega_x\Omega_y-\sigma\dot\Omega_z=0,\\
\dot v\sin\alpha\sin\beta_1+\dot\alpha v\cos\alpha\sin\beta_1+\dot\beta_1 v\sin\alpha\cos\beta_1+\Omega_x v\sin\alpha\cos\beta_1-\\
-\Omega_y v\cos\alpha-\sigma\Omega_x\Omega_z+\sigma\dot\Omega_y=0,\\
I_1\dot\Omega_x=0,\\
I_2\dot\Omega_y+(I_1-I_2)\Omega_x\Omega_z=-z_N s(\alpha)v^2,\\
I_2\dot\Omega_z+(I_2-I_1)\Omega_x\Omega_y=y_N s(\alpha)v^2,
\end{gathered}
\tag{1189}
$$

где $(0, y_N, z_N)$ — координаты точки N в системе $Dxyz$.

4.6.2. Движение симметричного тела под действием силы сопротивления и следящей силы и случай II

Выделим класс задач о воздействии среды на тело, в котором вдоль оси его геометрической симметрии действует следящая сила (ср. со случаем плоскопараллельного движения), при некоторых условиях обеспечивающая реализацию интересующих нас классов движений (наложенных связей). При этом сама следящая сила и является реакцией наложенных связей. В случае отсутствия следящей силы тело совершает пространственное свободное торможение в сопротивляющейся среде (см. также [168]). В данном случае следящая сила во все моменты времени обеспечивает выполнение условия (1128) (случай II), а именно:

$$v\equiv\text{const}. \tag{1190}$$

Аналогично плоскопараллельному может быть рассмотрен и случай, когда следящая сила во все моменты времени обеспечивает выполнение условия (1129) (случай III, см. ниже).

Согласно уравнениям (1189) во все моменты времени имеется циклическое инвариантное соотношение

$$\Omega_x\equiv\Omega_{x0}=\text{const}. \tag{1191}$$

4.6.3. Динамические уравнения в случае нулевой закрутки твёрдого тела вокруг продольной оси

В дальнейшем будем исследовать случай нулевой закрутки твёрдого тела вокруг своей продольной оси, т. е. ситуацию, когда выполнено условие

$$\Omega_{x0}=0. \tag{1192}$$

Тогда независимая динамическая часть уравнений движения в четырёхмерном фазовом пространстве будет иметь вид

$$\dot{\alpha}\cos\alpha\cos\beta_1 - \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\sin\beta_1 + \Omega_z v\cos\alpha - \sigma\dot{\Omega}_z = 0, \tag{1193}$$

$$\dot{\alpha}\cos\alpha\sin\beta_1 + \dot{\beta}_1 v\sin\alpha\cos\beta_1 - \Omega_y v\cos\alpha + \sigma\dot{\Omega}_y = 0, \tag{1194}$$

$$I_2\dot{\Omega}_y = -z_N s(\alpha)v^2, \tag{1195}$$

$$I_2\dot{\Omega}_z = y_N s(\alpha)v^2, \tag{1196}$$

где y_N, z_N — декартовы координаты в плоскости диска точки приложения N силы сопротивления.

В систему (1193)—(1196) входят функции y_N, z_N, s воздействия среды, для качественного определения которых (по аналогии со случаем плоскопараллельного движения) используем экспериментальную информацию о свойствах струйного обтекания.

Ограничимся для начала исследованием системы (1193)—(1196) для следующих функций (С. А. Чаплыгина [113, 114]) воздействия среды (подобный анализ может быть проведён для любой пары допустимых функций y_N, z_N, s воздействия среды, см. ниже):

$$y_N = A\sin\alpha\cos\beta_1 - h\frac{\Omega_z}{v}, \quad z_N = A\sin\alpha\sin\beta_1 + h\frac{\Omega_y}{v},$$
$$s(\alpha) = B\cos\alpha, \quad A = \left.\frac{\partial y_N}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0,\ \beta_1=0} = \left.\frac{\partial z_N}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0,\ \beta_1=\pi/2}, \quad B = s(0), \quad h > 0. \tag{1197}$$

При этом полученную систему назовём *опорной*.

В равенствах (1197) коэффициент h стоит при членах, пропорциональных вращательным производным момента гидроаэродинамических сил (в данном случае силы воздействия среды) по компонентам угловой скорости твёрдого тела (см. также [22, 23]).

Система (1193)—(1196) является динамической *системой с переменной диссипацией с нулевым средним* (в данном случае по углу атаки). Это означает, что интеграл по периоду угла атаки от дивергенции её правой части, отвечающий за изменение фазового объёма (после соответствующего приведения системы), равен нулю. Система является в некотором смысле «полуконсервативной».

Проектируя в дальнейшем угловые скорости на подвижные оси, не связанные с телом, так, что

$$z_1 = \Omega_y\cos\beta_1 + \Omega_z\sin\beta_1, \quad z_2 = -\Omega_y\sin\beta_1 + \Omega_z\cos\beta_1, \tag{1198}$$

и вводя безразмерные переменные w_k, $k = 1, 2$, и параметры по формулам

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh}{I_2 n_0}, \quad z_k = n_0 v w_k, \quad k = 1, 2 \tag{1199}$$

(при этом $\langle\cdot\rangle = n_0 v\langle'\rangle$), получаем аналитическую динамическую (*опорную*) систему четвёртого порядка (об особенностях приведения динамической части уравнений движения к системе нормального вида см. [168]):

$$\alpha' = -(1 + bH_1)w_2 + b\sin\alpha, \tag{1200}$$

$$w_2' = \sin\alpha\cos\alpha - (1 + bH_1)w_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_2\cos\alpha, \tag{1201}$$

$$w_1' = (1 + bH_1)w_1 w_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - H_1 w_1\cos\alpha, \tag{1202}$$

$$\beta_1' = (1 + bH_1)w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1203}$$

в которой появляется независимая подсистема третьего порядка (1200)—(1202).

При $b = H_1$ дивергенция правой части системы (1200)—(1202) ((1200)—(1203)) после замены переменных $w^* = \ln|w_1|$ тождественно равна нулю, что позволяет считать данную систему (системы) консервативной (консервативными).

4.6.4. Об устойчивости прямолинейного поступательного движения

Исследуем устойчивость ключевого режима — невозмущённого движения — по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости, т. е. по отношению к переменным α, w_1, w_2. Другими словами, исследуем устойчивость тривиального решения независимой системы третьего порядка (1200)—(1202) (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Рассмотрим следующую положительно определённую функцию в фазовом пространстве системы третьего порядка (1200)—(1202):

$$V(\alpha, w_1, w_2) = (1 + b^2)(w_2^2 + w_1^2) - 2bw_2\sin\alpha + \sin^2\alpha. \tag{1204}$$

Теорема 4.4. *Функция* (1204) *является для системы* (1200)—(1202) *функцией Ляпунова* (*Четаева*)*, т. е. её производная согласно системе* (1200)—(1202) *отрицательно определённая при* $b < H_1$ *и положительно определённая при* $b > H_1$.

Следствие 4.1. *При* $b < H_1$ *система* (1200)—(1202) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нём*) *притягивающую особую точку, а при* $b > H_1$ *— отталкивающую.*

Доказательство теоремы 4.4. Действительно, производная функции (1204) в силу системы (1200)—(1202) равна

$$2(b - H_1)\cos\alpha[w_1^2 + w_2^2]. \qquad \square$$

Отметим повторно, что аналогичная теорема справедлива и для системы общего вида для любых допустимых функций y_N, z_N, s воздействия среды.

Условие асимптотической устойчивости начала координат системы редуцированных динамических уравнений по переменным (α, w_1, w_2) прежнее:

$$b < H_1. \tag{1205}$$

Действительно, в более общем случае, когда допустимые функции y_N, z_N воздействия среды на твёрдое тело представляются в виде

$$y_N = R(\alpha)\cos\beta_1 - h_1\frac{\Omega_z}{v}, \quad z_N = R(\alpha)\sin\beta_1 + h_1\frac{\Omega_y}{v}, \tag{1206}$$

а функции R, s удовлетворяют условиям (1142) (функция R в данном случае соответствует функции y), динамические уравнения движения примут следующий вид (об особенностях приведения динамической части уравнений движения к системе нормального вида см. [168]):

$$\begin{aligned}
&\alpha' = -w_2 + \frac{\sigma}{I_2n_0}\frac{F(\alpha)}{\cos\alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2}w_2\frac{s(\alpha)}{\cos\alpha},\\
&w_2' = \frac{F(\alpha)}{I_2n_0^2} - w_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2}w_1^2\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{h_1}{I_2n_0}w_2s(\alpha),\\
&w_1' = w_1w_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2}w_1w_2\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{h_1}{I_2n_0}w_1s(\alpha),\\
&\beta_1' = w_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2}w_1\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha},
\end{aligned} \tag{1207}$$

здесь $F(\alpha) = R(\alpha)s(\alpha)$.

Рассмотрим функцию (подобную (1204))

$$V(\alpha, w_1, w_2) = w_2^2 + (1+b^2)w_1^2 + [bw_2 - \sin\alpha]^2, \tag{1208}$$

которая является положительно определённой в окрестности начала координат.

Теорема 4.5. *Функция* (1208) *является для системы* (1207) *функцией Ляпунова* (*Четаева*), *т. е. её производная согласно системе* (1207) *в окрестности начала координат отрицательно определённая при* $\sigma R'(0) < h_1$ *и положительно определённая при* $\sigma R'(0) > h_1$.

Следствие 4.2. *При* $\sigma R'(0) < h_1$ *система* (1207) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нём*) *притягивающую особую точку, а при* $\sigma R'(0) > h_1$ *— отталкивающую.*

Доказательство теоремы 4.5. Действительно, производная функции (1208) согласно системе (1207) равна

$$2\left(b\cos\alpha - \frac{h_1}{I_2n_0}s(\alpha)\right)[w_1^2 + w_2^2] + 2w_2\left\{\frac{F(\alpha)}{I_2n_0} - \sin\alpha\cos\alpha\right\} \tag{1209}$$

и в окрестности начала координат представляется в виде

$$2\left(b - \frac{h_1B}{I_2n_0}\right)[w_1^2 + w_2^2] + o(\alpha^2 + z_1^2 + z_2^2). \qquad \square$$

При переходе к задаче о движении однородных круговых цилиндров можно заключить, что указанная асимптотическая устойчивость имеет место при выполнении неравенства

$$\sigma k < hD, \tag{1210}$$

где D — диаметр цилиндра, σ — расстояние DC, а k и h — безразмерные параметры воздействия воды на цилиндр.

4.6.5. Движение симметричного тела под действием силы сопротивления и следящей силы и случай III

В данном случае следящая сила во все моменты времени обеспечивает выполнение условия (1129) (случай III), а именно:

$$\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{const}. \tag{1211}$$

Согласно уравнениям (1189) во все моменты времени имеется циклическое инвариантное соотношение

$$\Omega_x \equiv \Omega_{x0} = \text{const}. \tag{1212}$$

4.6.6. Динамические уравнения в случае нулевой закрутки твёрдого тела вокруг продольной оси

В дальнейшем будем исследовать случай нулевой закрутки твёрдого тела вокруг своей продольной оси, т. е. ситуацию, когда выполнено условие

$$\Omega_{x0} = 0. \tag{1213}$$

Тогда в правой части первого уравнения системы (1189) вместо $-s(\alpha)v^2/m$ должна стоять величина, тождественно равная нулю, поскольку на тело будет действовать неконсервативная пара сил:

$$T - s(\alpha)v^2 \equiv 0. \tag{1214}$$

Очевидно, что для этого нужно выбрать величину следящей силы T в виде

$$T = T(v, \alpha, \Omega) = s(\alpha)v^2, \quad \mathbf{T} \equiv -\mathbf{S}. \tag{1215}$$

Подобно выбору функций воздействия среды, динамические функции s, y_N и z_N примем в виде (1142), (1206) (при этом функция R соответствует функции y, ср. также с [113,114]). При этом по-прежнему в рассматриваемой системе присутствует также дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы.

Проектируя в дальнейшем угловые скорости на подвижные оси, не связанные с телом, так, что

$$z_1 = \Omega_y \cos\beta_1 + \Omega_z \sin\beta_1, \quad z_2 = -\Omega_y \sin\beta_1 + \Omega_z \cos\beta_1, \tag{1216}$$

и вводя, как и ранее, новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_0 v Z_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle ' \rangle, \tag{1217}$$

систему (1189) приведём к виду

$$v' = v\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{1218}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0}F(\alpha)\cos\alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_2 s(\alpha)\cos\alpha, \tag{1219}$$

$$Z_2' = \frac{F(\alpha)}{I_2 n_0^2} - Z_2\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_1^2\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0}Z_2 s(\alpha), \tag{1220}$$

$$Z_1' = -Z_1\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_1 Z_2\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0}Z_1 s(\alpha), \tag{1221}$$

$$\beta_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_1\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}, \tag{1222}$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_2 s(\alpha)\sin\alpha,$$

а в случае функций Чаплыгина (1197) [113, 114] воздействия среды к аналитической системе уравнений

$$v' = v\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{1223}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \mu_2\sin\alpha\cos^2\alpha - \mu_2\mu_3 Z_2\cos^2\alpha, \tag{1224}$$

$$Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - Z_2\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - (1 + \mu_2\mu_3)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu_3 Z_2\cos\alpha, \tag{1225}$$

$$Z_1' = -Z_1\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + (1 + \mu_2\mu_3)Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu_3 Z_1\cos\alpha, \tag{1226}$$

$$\beta_1' = (1 + \mu_2\mu_3)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1227}$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \mu_2\sin^2\alpha\cos\alpha - \mu_2\mu_3 Z_2\sin\alpha\cos\alpha,$$

в дальнейшем, как и выше, выбираем безразмерные параметры $b = \mu_2$, $H_1 = \mu_3$ следующим образом:

$$b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{I_2 n_0}. \tag{1228}$$

Уравнения (1219)—(1222) системы (1218)—(1222) образуют независимую подсистему четвёртого, а уравнения (1219)—(1221) — третьего порядка.

4.6.7. Об устойчивости прямолинейного поступательного движения

Исследуем устойчивость ключевого режима — невозмущённого движения — по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости, т. е. по отношению к переменным α, Z_1, Z_2. Другими словами, исследуем устойчивость тривиального решения независимой системы третьего порядка (1219)—(1221) (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Справедливо следующее важное утверждение.

Предложение 4.7. *Плоскость*

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 \colon Z_1 = 0\} \tag{1229}$$

является интегральной для системы (1219)—(1221).

Более того, после формальной подстановки $Z_1 = 0$ в систему (1219)—(1221) оставшиеся два уравнения на α, Z_2 образуют систему, описывающую динамику плоскопараллельного движения тела (см. выше), при этом получившаяся система совпадает с (1166).

Таким образом, на плоскость (1229) «укладывается» фазовый портрет из плоской динамики. Более того, плоскость (1229) разделяет трёхмерное фазовое пространство на две части:

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 \colon 0 < \alpha < \pi,\ Z_1 > 0\} \tag{1230}$$

и

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3 \colon 0 < \alpha < \pi,\ Z_1 < 0\}, \tag{1231}$$

в каждой из которых движение происходит самостоятельно, но не произвольно, поскольку в системе присутствует следующая симметрия:

i) α- и Z_2-составляющие векторного поля системы (1219)—(1221) *не меняют знаки* при симметрии

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \alpha \\ -Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \tag{1232}$$

относительно плоскости (1229);

ii) Z_1-составляющая векторного поля системы (1219)—(1221) *меняет знак* при симметрии (1232) относительно плоскости (1229).

Последние факты говорят о том, что систему (1219)—(1221) достаточно исследовать в полуограниченном слое (1230), хотя полноценным фазовым пространством его считать нельзя (см. также [3, 4]).

Важным следствием последних замечаний является возможность использования функции

$$V_1(\alpha, Z_1) = Z_1 \sin\alpha \tag{1233}$$

в качестве функции Ляпунова (Четаева) в полуограниченном слое (1230), поскольку в нём данная функция положительно определённая.

Теорема 4.6. *Функция* (1233) *является для системы* (1219)—(1221) *функцией Ляпунова* (*Четаева*), *т. е. её производная согласно системе* (1219)—(1221) *отрицательно определённая при* $\mu_2 < \mu_3$ *и положительно определённая при* $\mu_2 > \mu_3$.

Следствие 4.3. *При* $\mu_2 < \mu_3$ *система* (1219)—(1221) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нём*) *притягивающую особую точку, а при* $\mu_2 > \mu_3$ — *отталкивающую.*

Доказательство теоремы 4.6. Действительно, производная функции (1233) в силу системы (1219)—(1221) представляется в виде

$$(\mu_2 - \mu_3)Z_1\alpha + o(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2). \qquad \square$$

В частности, аналогичная теорема справедлива и для систем вида (1224)—(1226), взятой для функций Чаплыгина (1197) воздействия среды [113, 114].

Рассмотрим также функцию (подобную (1204))

$$V(\alpha, Z_1, Z_2) = Z_2^2 + (1 + b^2)Z_1^2 + [bZ_2 - \sin\alpha]^2, \tag{1234}$$

которая является положительно определённой в окрестности начала координат.

Теорема 4.7. *Функция* (1234) *является для системы* (1219)—(1221) *функцией Ляпунова* (*Четаева*), *т. е. её производная в силу системы* (1219)—(1221) *отрицательно определённая при* $\mu_2 < \mu_3$ *и положительно определённая при* $\mu_2 > \mu_3$.

Следствие 4.4. *При* $\mu_2 < \mu_3$ *система* (1219)—(1221) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нём*) *притягивающую особую точку, а при* $\mu_2 > \mu_3$ — *отталкивающую.*

Доказательство теоремы 4.7. Действительно, производная функции (1234) в силу системы (1219)—(1221) представляется в виде

$$2(\mu_2 - \mu_3)(Z_1^2 + Z_2^2) + o(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2). \qquad \square$$

При переходе к задаче о движении однородных круговых цилиндров можно заключить, что указанная асимптотическая устойчивость имеет место при выполнении неравенства

$$\sigma k < hD, \tag{1235}$$

где D — диаметр цилиндра, σ — расстояние DC, k и h — безразмерные параметры воздействия воды на цилиндр.

4.7. Пространственное свободное торможение твёрдого тела в сопротивляющейся среде (случай I)

Рассмотрим случай движения тела, когда управляющая тяга отключена, при этом тело совершает пространственное свободное движение (торможение) в сопротивляющейся среде (случай I). Тогда в правой части первого уравнения системы (1189) останется величина $-s(\alpha)v^2/m$, поскольку при этом выполнено равенство

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{0}. \tag{1236}$$

Подобно выбору функций воздействия среды, динамические функции s, y_N и z_N в системе (1189) примем в виде (1142), (1206) (при этом функция R соответствует функции y, ср. с [113, 114]). При этом по-прежнему в рассматриваемой системе присутствует также дополнительный демпфирующий (а в некоторых областях фазового пространства и разгоняющий) момент неконсервативной силы.

4.7.1. Динамические уравнения движения симметричного тела под действием силы сопротивления при отсутствии собственного вращения (задача о пространственном свободном торможении)

Согласно уравнениям (1189) во все моменты времени имеется циклическое инвариантное соотношение

$$\Omega_x \equiv \Omega_{x0} = \text{const}. \tag{1237}$$

В дальнейшем будем исследовать случай нулевой закрутки твёрдого тела вокруг своей продольной оси, т. е. ситуацию, когда выполнено условие

$$\Omega_{x0} = 0. \tag{1238}$$

Проектируя в дальнейшем угловые скорости на подвижные оси, не связанные с телом, так, что

$$z_1 = \Omega_y \cos\beta_1 + \Omega_z \sin\beta_1, \quad z_2 = -\Omega_y \sin\beta_1 + \Omega_z \cos\beta_1, \tag{1239}$$

и вводя, как и ранее, новые безразмерные фазовые переменные и дифференцирование по формулам

$$z_k = n_0 v Z_k, \quad k = 1, 2, \quad \langle \cdot \rangle = n_0 v \langle ' \rangle, \tag{1240}$$

систему (1189) приведём к виду

$$v' = v\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \tag{1241}$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0}F(\alpha)\cos\alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_2 s(\alpha)\cos\alpha + \\ + \frac{s(\alpha)}{m n_0}\cos\alpha, \tag{1242}$$

$$Z_2' = \frac{F(\alpha)}{I_2 n_0^2} - Z_2\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_1^2\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0}Z_2 s(\alpha), \quad (1243)$$

$$Z_1' = -Z_1\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_1 Z_2\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{h_1}{I_2 n_0}Z_1 s(\alpha), \quad (1244)$$

$$\beta_1' = Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_1\frac{s(\alpha)}{\sin\alpha}, \quad (1245)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = \\ = -\mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\cos\alpha + \frac{\sigma}{I_2 n_0}F(\alpha)\sin\alpha - \frac{s(\alpha)}{mn_0}\cos\alpha - \frac{\sigma h_1}{I_2}Z_2 s(\alpha)\sin\alpha,$$

а в случае функций Чаплыгина [113, 114] воздействия среды к аналитической системе уравнений

$$v' = v\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2), \quad (1246)$$

$$\alpha' = -Z_2 + \mu_2(Z_1^2 + Z_2^2)\sin\alpha + \mu_2\sin\alpha\cos^2\alpha - \mu_2\mu_3 Z_2\cos^2\alpha + \\ + \frac{\mu_1}{2}\sin\alpha\cos\alpha, \quad (1247)$$

$$Z_2' = \sin\alpha\cos\alpha - Z_2\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) - (1 + \mu_2\mu_3)Z_1^2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu_3 Z_2\cos\alpha, \quad (1248)$$

$$Z_1' = -Z_1\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) + (1 + \mu_2\mu_3)Z_1 Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu_3 Z_1\cos\alpha, \quad (1249)$$

$$\beta_1' = (1 + \mu_2\mu_3)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (1250)$$

где

$$\Psi_1(\alpha, Z_1, Z_2) = -\mu_2(Z_1^2+Z_2^2)\cos\alpha+\mu_2\sin^2\alpha\cos\alpha-\frac{\mu_1}{2}\cos^2\alpha-\mu_2\mu_3 Z_2\sin\alpha\cos\alpha,$$

выбирая, как и выше, безразмерные параметры μ_1, $b = \mu_2$, $H_1 = \mu_3$ следующим образом:

$$\mu_1 = 2\frac{B}{mn_0}, \quad b = \sigma n_0, \quad n_0^2 = \frac{AB}{I_2}, \quad H_1 = \frac{Bh_1}{I_2 n_0}. \quad (1251)$$

Уравнения (1242)—(1245) системы (1241)—(1245) образуют независимую подсистему четвёртого, а уравнения (1242)—(1244) — третьего порядка.

4.7.2. Об устойчивости прямолинейного поступательного торможения

Исследуем устойчивость ключевого режима — невозмущённого движения — по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости, т. е. по отношению к переменным α, Z_1, Z_2. Другими словами, исследуем устойчивость тривиального решения независимой системы третьего порядка (1242)—(1244) (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Справедливо следующее важное утверждение.

Предложение 4.8. *Плоскость*

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3\colon Z_1 = 0\} \tag{1252}$$

является интегральной для системы (1242)—(1244).

Более того, после формальной подстановки $Z_1 = 0$ в систему (1242)—(1244) оставшиеся два уравнения на α, Z_2 образуют систему, описывающую динамику плоскопараллельного движения тела (см. выше), при этом получившаяся система совпадает с (1179).

Таким образом, на плоскость (1252) «укладывается» фазовый портрет из плоской динамики. Более того, плоскость (1252) разделяет трёхмерное фазовое пространство на две части:

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3\colon 0 < \alpha < \pi,\ Z_1 > 0\} \tag{1253}$$

и

$$\{(\alpha, Z_1, Z_2) \in \mathbf{R}^3\colon 0 < \alpha < \pi,\ Z_1 < 0\}, \tag{1254}$$

в каждой из которых движение происходит самостоятельно, но не произвольно, поскольку в системе присутствует симметрия (1232).

Последние факты говорят о том, что систему (1242)—(1244) достаточно исследовать в полуограниченном слое (1253), хотя полноценным фазовым пространством его считать нельзя.

Важным следствием последних замечаний является возможность использования функции

$$V_1(\alpha, Z_1) = Z_1 \sin\alpha \tag{1255}$$

в качестве функции Ляпунова (Четаева) в полуограниченном слое (1253), поскольку в нём данная функция положительно определённая.

Теорема 4.8. *Функция* (1255) *является для системы* (1242)—(1244) *функцией Ляпунова* (*Четаева*), *т. е. её производная согласно системе* (1242)—(1244) *отрицательно определённая при* $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$ *и положительно определённая при* $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$.

Следствие 4.5. *При* $\mu_3 > \mu_1 + \mu_2$ *система* (1242)—(1244) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нём*) *притягивающую особую точку, а при* $\mu_3 < \mu_1 + \mu_2$ — *отталкивающую.*

Доказательство теоремы 4.8. Действительно, производная функции (1255) согласно системе (1242)—(1244) представляется в виде

$$(\mu_1 + \mu_2 - \mu_3) Z_1 \alpha + o(\alpha^2 + Z_1^2 + Z_2^2). \qquad \square$$

В частности, аналогичная теорема справедлива и для системы вида (1247)—(1249), взятой для функций Чаплыгина (1197) воздействия среды [113, 114].

При переходе к задаче о движении однородных круговых цилиндров можно заключить, что указанная асимптотическая устойчивость имеет место при выполнении неравенства

$$\sigma k + \frac{2I_2}{mD} < hD, \tag{1256}$$

где D — диаметр цилиндра, σ — расстояние DC, а k и h — безразмерные параметры воздействия воды на цилиндр, или

$$\sigma Dk + 2r_1^2 < hD^2, \tag{1257}$$

где r_1 — радиус инерции цилиндра (подробности можно найти в следующем разделе).

Видно, что теорема 4.8 даёт такие же условия асимптотической устойчивости по части переменных (α, Z_1, Z_2), что и предложение 4.5, в котором фигурируют динамические системы из динамики плоскопараллельного движения. В случае же пространственного движения полученные системы имеют неопределённость в начале координат, что вызвано вырожденностью сферических координат конца вектора $\mathbf{v}$ скорости центра переднего диска (кавитатора) и преодолевается доопределением правых частей динамических систем.

4.8. Заключение к двумерной и трёхмерной задачам

Итак, неустойчивость простейшего движения тела — прямолинейного поступательного торможения — используется в методических целях, а именно для определения неизвестных параметров воздействия среды на твёрдое тело в условиях квазистационарности.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров, проведённый в Институте механики МГУ им. М. В. Ломоносова, подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твёрдое тело необходимо учитывать также дополнительный параметр, вносящий в систему диссипацию.

При изучении класса торможений тела с конечными углами атаки главным вопросом является нахождение таких условий, при которых существуют автоколебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения. Возникает, таким образом, необходимость полного нелинейного исследования.

Начальным этапом такого исследования является пренебрежение демпфирующим воздействием со стороны среды на твёрдое тело. На функциональном языке это означает предположение о том, что пара динамических функций, определяющих воздействие среды, зависит лишь от одного параметра — угла атаки. Динамические системы, возникающие при таком нелинейном описании, имеют характер систем с переменной диссипацией. Поэтому необходимо разработать методику исследования таких систем (см. также [66, 72, 115, 118, 119, 122, 127, 133, 134, 145, 191, 224]).

Вообще, динамика твёрдого тела, взаимодействующего со средой, — как раз та область, где обычно возникают либо системы с переменной диссипацией с ненулевым средним (задача о свободном торможении твёрдого тела), либо системы, в которых потеря энергии в среднем за период может обращаться в нуль (задача о движении твёрдого тела в сопротивляющейся среде при наличии следящей силы). В работе используется методика, благодаря которой удаётся до конца аналитически исследовать некоторые модельные задачи о плоскопараллельном и пространственном движении твёрдого тела.

При качественном описании взаимодействия тела со средой из-за использования экспериментальной информации о свойствах струйного обтекания возникает определённый разброс в моделировании силомоментных характеристик. Это делает естественным введение определения относительной грубости (относительной структурной устойчивости) и доказательство такой грубости для исследуемых систем [101, 121, 124, 237, 241, 249, 253, 255, 259]. При этом многие из рассматриваемых систем получаются просто (абсолютно) грубыми по Андронову—Понтрягину в обычном смысле.

Весь спектр результатов, найденных при простейшем предположении об отсутствии демпфирующего воздействия со стороны среды на твёрдое тело, позволяет сделать вывод о невозможности нахождения таких условий, при которых существовали бы автоколебания в конечной окрестности прямолинейного поступательного торможения.

Данная работа систематизирует исследование движения тела в среде при учёте демпфирующего момента со стороны среды. Такой момент вносит в систему дополнительную диссипацию, в результате чего прямолинейное поступательное торможение тела в принципе может стать устойчивым.

Таким образом, учёт демпфирующего воздействия со стороны среды на твёрдое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний.

4.9. Об устойчивости тривиального решения по части переменных для многомерной задачи

Рассмотрим некоторые динамические уравнения движения n-мерного твёрдого тела, о которых шла речь в предыдущих разделах.

4.9.1. Система на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. I

Рассмотрим следующую систему динамических уравнений движения на касательном расслоении к многомерной сфере:

$$\alpha' = -(1+\mu_2\mu_3)z_{n-1} + \mu_2\sin\alpha, \tag{1258}$$

$$z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+\mu_2\mu_3)(z_1^2+\ldots+z_{n-2}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \mu_3 z_{n-1}\cos\alpha, \tag{1259}$$

$$z'_{n-2} = (1+\mu_2\mu_3)z_{n-2}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ + (1+\mu_2\mu_3)(z_1^2+\ldots+z_{n-3}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \mu_3 z_{n-2}\cos\alpha, \tag{1260}$$

$$z'_{n-3} = (1+\mu_2\mu_3)z_{n-3}z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+\mu_2\mu_3)z_{n-3}z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} -$$

$$- (1+\mu_2\mu_3)(z_1^2+\ldots+z_{n-4}^2)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} - \mu_3 z_{n-3}\cos\alpha, \quad (1261)$$

...

$$z'_1 = (1+\mu_2\mu_3)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} -$$

$$- \mu_3 z_1\cos\alpha, \quad (1262)$$

$$\beta'_1 = (1+\mu_2\mu_3)z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (1263)$$

$$\beta'_2 = -(1+\mu_2\mu_3)z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \quad (1264)$$

...

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n(1+\mu_2\mu_3)z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \quad (1265)$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}(1+\mu_2\mu_3)z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \quad (1266)$$

где

$$\mu_2 = b = \sigma n_0, \quad \mu_3 = H_1 = \frac{Bh_1}{(n-2)I_2 n_0}, \quad n_0^2 = \frac{AB}{(n-2)I_2}, \quad (1267)$$

возникающую в динамике n-мерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил (см. раздел 1). Исследуем устойчивость её тривиального решения по отношению к возмущениям переменных $\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1}$ (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Рассмотрим функцию

$$V(\alpha, z_1, \ldots, z_{n-1}) = (1+\mu_2^2)(z_{n-1}^2+\ldots+z_1^2) - 2\mu_2 z_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha, \quad (1268)$$

которая является положительно определённой в окрестности начала координат.

Теорема 4.9. *Функция* (1268) *является для системы* (1258)—(1266) *функцией Ляпунова* (*Четаева*), *т. е. её производная согласно системе* (1258)—(1266) *отрицательно определённая при* $\mu_2 < \mu_3$ *и положительно определённая при* $\mu_2 > \mu_3$.

Следствие 4.6. *При* $\mu_2 < \mu_3$ *система* (1258)—(1266) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нём*) *притягивающую особую точку, а при* $\mu_2 > \mu_3$ *— отталкивающую.*

Доказательство теоремы 4.9. Действительно, производная функции (1268) согласно системе (1258)—(1266) представляется в виде

$$2(\mu_2-\mu_3)(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2)\cos\alpha. \qquad \square$$

4.9.2. Система на касательном расслоении к $(n-1)$-мерной сфере. II

Рассмотрим систему динамических уравнений движения на касательном расслоении к многомерной сфере

$$\alpha' = -Z_{n-1} + \mu_2\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\sin\alpha + \mu_2\sin\alpha\cos^2\alpha - \mu_2\mu_3 Z_{n-1}\cos^2\alpha, \tag{1269}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-1} = \sin\alpha\cos\alpha - (1+\mu_2\mu_3)\left(\sum_{s=1}^{n-2} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \mu_2 Z_{n-1}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - \mu_2 Z_{n-1}\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_{n-1}^2\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_{n-1}\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1270}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-2} = (1+\mu_2\mu_3)Z_{n-2}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \\ + (1+\mu_2\mu_3)\left(\sum_{s=1}^{n-3} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} + \mu_2 Z_{n-2}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - \mu_2 Z_{n-2}\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_{n-2}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_{n-2}\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1271}$$

$$\begin{gathered} Z'_{n-3} = (1+\mu_2\mu_3)Z_{n-3}Z_{n-1}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - (1+\mu_2\mu_3)Z_{n-3}Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta_1}{\sin\beta_1} - \\ - (1+\mu_2\mu_3)\left(\sum_{s=1}^{n-4} Z_s^2\right)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{1}{\sin\beta_1}\,\frac{\cos\beta_2}{\sin\beta_2} + \mu_2 Z_{n-3}\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - \mu_2 Z_{n-3}\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_{n-3}Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_{n-3}\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1272}$$

$\ldots$

$$\begin{gathered} Z'_1 = (1+\mu_2\mu_3)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\left\{\sum_{s=1}^{n-2}(-1)^{s+1}Z_{n-s}\frac{\cos\beta_{s-1}}{\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{s-1}}\right\} + \\ + \mu_2 Z_1\left(\sum_{s=1}^{n-1} Z_s^2\right)\cos\alpha - \\ - \mu_2 Z_1\sin^2\alpha\cos\alpha + \mu_2\mu_3 Z_1 Z_{n-1}\sin\alpha\cos\alpha - \mu_3 Z_1\cos\alpha, \end{gathered} \tag{1273}$$

$$\beta'_1 = (1+\mu_2\mu_3)Z_{n-2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \tag{1274}$$

$$\beta'_2 = -(1+\mu_2\mu_3)Z_{n-3}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1}, \tag{1275}$$

$\ldots$

$$\beta'_{n-3} = (-1)^n(1+\mu_2\mu_3)Z_2\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-4}}, \tag{1276}$$

$$\beta'_{n-2} = (-1)^{n+1}(1+\mu_2\mu_3)Z_1\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta_1\ldots\sin\beta_{n-3}}, \tag{1277}$$

возникающую в динамике n-мерного твёрдого тела, находящегося в неконсервативном поле сил (см. раздел 2). Исследуем устойчивость её тривиального решения по отношению к возмущениям переменных $\alpha, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ (если, конечно, доопределить данную систему по непрерывности в начале координат, что возможно).

Рассмотрим функцию

$$V(\alpha, Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = \\ = (1+\mu_2^2)(Z_{n-1}^2 + \ldots + Z_1^2) - 2\mu_2 Z_{n-1}\sin\alpha + \sin^2\alpha, \quad (1278)$$

положительно определённую в окрестности начала координат.

Теорема 4.10. *Функция* (1278) *является для системы* (1269)—(1277) *функцией Ляпунова* (*Четаева*), *т. е. её производная в силу системы* (1269)—(1277) *отрицательно определённая при $\mu_2 < \mu_3$ и положительно определённая при $\mu_2 > \mu_3$.*

Следствие 4.7. *При $\mu_2 < \mu_3$ система* (1269)—(1277) *имеет в начале координат* (*после доопределения правых частей в нём*) *притягивающую особую точку, а при $\mu_2 > \mu_3$ — отталкивающую.*

Доказательство теоремы 4.10. Действительно, производная функции (1278) согласно системе (1269)—(1277) представляется в виде

$$2(\mu_2 - \mu_3)(Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2) + o(\alpha^2 + Z_1^2 + \ldots + Z_{n-1}^2). \qquad \square$$

5. Приложение: подготовка данных для проведения экспериментов по движению тел в среде

Предлагаемое приложение представляет собой очередной этап исследования задачи плоскопараллельного движения твёрдого тела, взаимодействующего со средой лишь через передний плоский участок своей внешней поверхности. При построении силового воздействия среды используется информация о свойствах струйного обтекания в условиях квазистационарности (например, о входе однородных круговых цилиндров в воду). Движение среды не изучается, рассматривается задача динамики твёрдого тела, в которой характерное время движения тела относительно его центра масс соизмеримо с характерным временем движения самого центра. Если в разделе 4 предъявляются условия асимптотической устойчивости прямолинейного поступательного торможения, в [185, 205] получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов в пространстве квазискоростей, то в данном разделе подготовлен количественный материал для проведения дальнейших натурных экспериментов о движении в среде полых круговых цилиндров.

5.1. Предварительные сведения

Подведём краткий итог предыдущих этапов исследований. Итак, по причине сложности нелинейного анализа начальным шагом явилось пренебрежение зависимостью момента силы воздействия среды от угловой скорости тела и использование такой зависимости лишь от угла атаки (см. также [168, 180, 221]). С практической точки зрения важен вопрос исследования устойчивости так называемого невозмущённого (прямолинейного поступательного) движения, при котором скорости точек тела перпендикулярны пластине (кавитатору). Весь спектр результатов, найденных при указанном простейшем предположении, позволял сделать вывод о невозможности нахождения условий, при которых у приведённых систем существовали бы решения, соответствующие угловым колебаниям тела ограниченной амплитуды.

Эксперимент о движении в воде однородных круговых цилиндров [55,60,61] подтвердил, что при моделировании воздействия среды на твёрдое тело действительно необходимо учитывать зависимость момента силы воздействия среды и от угловой скорости тела. При этом в уравнениях движения возникают дополнительные члены, вносящие в систему диссипацию.

При изучении движения тела с конечными углами атаки основным вопросом нелинейного анализа является нахождение таких условий, при которых существуют колебания ограниченной амплитуды возле невозмущённого движения. Это подтверждает необходимость полного нелинейного исследования.

В более ранних работах автору удалось использовать неустойчивость прямолинейного поступательного торможения в методических целях [92], а именно для определения неизвестных параметров воздействия среды на твёрдое тело в условиях квазистационарности.

Учёт демпфирующего воздействия со стороны среды на твёрдое тело при некоторых условиях приводит к положительному ответу на главный вопрос нелинейного анализа: при движении тела в среде с конечными углами атаки в принципе возможно возникновение устойчивых автоколебаний, которые обусловливаются учётом дополнительной зависимости воздействия среды от угловой скорости тела, что вносит в систему дополнительную диссипацию. Более того, в процессе применения методики исследования диссипативных динамических систем определённого вида получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре, состоящее из бесконечного множества топологически неэквивалентных фазовых портретов, меняющих свой топологический тип при изменении параметров системы вырожденным образом (см. также [6, 8, 9, 18, 97, 109, 117, 120, 123, 125]).

5.2. Подготовка данных для проведения натурных экспериментов

5.2.1. Задача о входе в воду однородных круговых цилиндров

Вернёмся к задаче о входе в воду однородных круговых цилиндров (см. раздел 4). Значения физических параметров цилиндров, при которых прямолинейное поступательное торможение в принципе может стать устойчивым, должны быть связаны соотношением

$$\mu_3 > \mu_1 + \mu_2 \tag{1279}$$

(см. раздел 4), или

$$h\frac{mD^2}{I} - 2 - k\frac{m\sigma D}{I} > 0. \tag{1280}$$

При этом если величина, стоящая в левой части неравенства (1280), равна нулю, то будем говорить о *критическом случае*. Напомним, что здесь D — диаметр кругового цилиндра, σ — расстояние от центра масс до переднего торца, I, m — инерционно-массовые характеристики цилиндра, постоянные k и h — безразмерные параметры воздействия среды на цилиндр (см. [92]).

Для параметров k, h воздействия воды на тело с передним круглым торцом уже была принята оценка $k = h = 0{,}1$. Таким образом, условие (1280) позволяет попытаться «сконструировать» твёрдое тело — круговой цилиндр, для которого прямолинейное поступательное торможение может стать устойчивым. Для этого осталось выбрать параметры σ, D, I, m цилиндра, исходя из условия (1280).

Анализируя неравенство (1280), можно сделать следующий вывод. Инерционно-массовые параметры однородных цилиндров таковы, что неравенство (1280) при $h = 0{,}1$ удовлетворить невозможно. Действительно, при данном значении $h = 0{,}1$ левая часть (1280) представляется в виде

$$F_1(k,h,m,I,\sigma,D)|_{k=h=0,1} = h\frac{mD^2}{I} - 2 - k\frac{m\sigma D}{I}\bigg|_{k=h=0,1} = F_2(\sigma,D), \tag{1281}$$

где правая часть, в свою очередь, с точностью до положительного множителя всегда принимает отрицательное значение

$$-3D^2 - 12\sigma D - 80\sigma^2, \tag{1282}$$

что соответствует экспоненциальной неустойчивости прямолинейного поступательного торможения. Здесь учитывается, что центральный момент инерции цилиндра представляется в виде

$$I = m\left(\frac{\sigma^2}{3} + \frac{D^2}{16}\right). \tag{1283}$$

Более того, если исследовать левую часть (1280) при изменении значения h, то она может достигать нуля лишь при наименьшем критическом значении h_*

$$\left(10h_* - \frac{5}{4}\right) - \bar\sigma - \frac{20}{3}\bar\sigma^2 = 0, \quad \bar\sigma = \frac{\sigma}{D}, \tag{1284}$$

превосходящем принятое ранее значение $h = 0{,}1$ и равном

$$h_* = 0{,}125. \tag{1285}$$

Условия (1284) и (1285) позволяют сделать следующий промежуточный вывод. Прямолинейное поступательное торможение однородного кругового цилиндра в воде не может быть устойчивым по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости. Тем не менее отметим, что задача исследуемой устойчивости решается в соответствии с ранее принятой оценкой на данный коэффициент: $h = 0{,}1$.

5.2.2. Задача о входе в воду полых круговых цилиндров

Поставим теперь задачу определения геометрических и инерционно-массовых параметров составного твёрдого тела — полого цилиндра — для достижения указанной устойчивости. А именно представим себе некоторый полый цилиндр («гильзу», рис. 4), геометрические и инерционно-массовые характеристики которого в дальнейшем приведут к выполнению искомого неравенства при уже фиксированном нами значении $h = 0{,}1$.

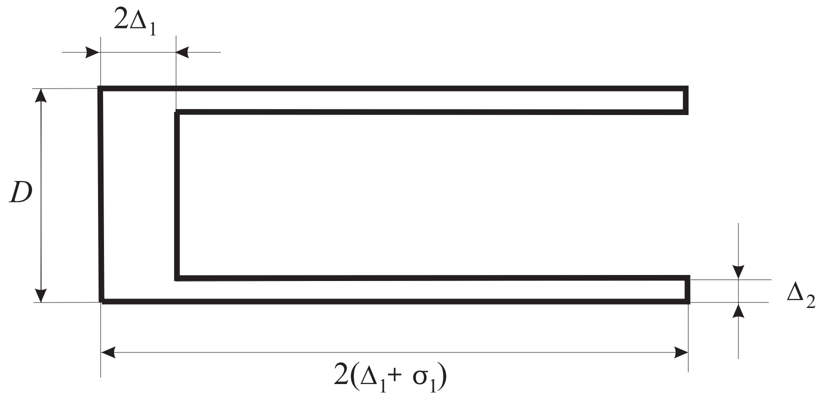

Рис. 4. Полый цилиндр («гильза»)

Исследуемое составное твёрдое тело представляет собой переднюю однородную часть (цилиндр) диаметра D и высоты $2\Delta_1$, который продолжается боковыми стенками длины $2\sigma_1$ и ширины Δ_2 (рис. 4).

Вычислим параметры составного тела, входящие в неравенство (1280): расстояние от центра масс до переднего круглого торца σ, а также (центральный) радиус инерции тела ρ. Данные величины выражаются следующими формулами:

$$\sigma = \frac{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1\Delta_2(D-\Delta_2)(\sigma_1 + 2\Delta_1)}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1\Delta_2(D-\Delta_2)}, \tag{1286}$$

$$\rho^2 = \frac{\Delta_1^2 D^2 +}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1\Delta_2(D-\Delta_2)}\left\{\frac{4}{3}\Delta_1^2 + \frac{D^2}{16} - 2\Delta_1\sigma + \sigma^2\right\} + \\ + \frac{4\sigma_1\Delta_2(D-\Delta_2)}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1\Delta_2(D-\Delta_2)}\left\{\frac{\sigma_1^2}{3} + \frac{D^2}{8} - \frac{\Delta_2(D-\Delta_2)}{4} + \right. \\ \left. + \frac{D^4\Delta_1^2(\sigma_1+\Delta_1)^2}{\Delta_1^2 D^2 + 4\sigma_1\Delta_2(D-\Delta_2)}\right\}. \tag{1287}$$

Можно использовать полные равенства (1286), (1287), но это не имеет решающего значения, поскольку достаточно принять следующие допущения:

$$\Delta_1^2 \approx \Delta_2^2 \approx \Delta_2\Delta_2 \approx 0. \tag{1288}$$

Все геометрические параметры будем считать безразмерными:

$$\bar{\Delta}_1 = \frac{\Delta_1}{D}, \quad \bar{\Delta}_2 = \frac{\Delta_2}{D}, \quad \bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_1}{D}, \tag{1289}$$

при этом в дальнейшем для простоты записи везде черту опустим. Тогда левая часть (1280) при допущениях (1288) при $h = 0{,}1$ в критическом случае приведёт к равенству

$$\Delta_1\left(-\frac{1}{4}\right) + \sigma_1\Delta_2\left(\frac{7}{2}\right) - 4\sigma_1^2\Delta_2 = 0. \tag{1290}$$

Найдём критическое значение σ_1^* безразмерной длины боковых стенок составного тела. Оно равно

$$\sigma_1^* = \frac{7}{16} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{49}{4} - 4\frac{\Delta_1}{\Delta_2}}. \tag{1291}$$

Из равенства (1291) видно, что величина Δ_1/Δ_2 может колебаться лишь в следующих пределах:

$$0 < \frac{\Delta_1}{\Delta_2} < \frac{49}{16} = 3{,}0625. \tag{1292}$$

Формально при $\Delta_1 \to 0$ (передний торец стремится к бесконечно тонкому диску) искомое критическое значение стремится к

$$\sigma_1^* = 0{,}875. \tag{1293}$$

В частном интересном случае при $\Delta_1 = \Delta_2$ оно имеет вид

$$\sigma_1^* = \frac{1}{16}(7 + \sqrt{33}) \approx 0{,}797, \tag{1294}$$

а при $\Delta_1/\Delta_2 \to 49/16$ искомое критическое значение стремится к

$$\sigma_1^* = 0{,}4375. \tag{1295}$$

Таким образом, можно выбирать значение σ_1^* в пределах

$$0{,}4375 \leqslant \sigma_1^* \leqslant 0{,}875, \tag{1296}$$

несмотря на то что выражения (1293)—(1295) затрагивают лишь удобные частные случаи.

Так, в частности, если принять $\Delta_1 = \Delta_2 = 0{,}1$ (т. е. если $D = 30$ *мм*, то $\Delta_1 = \Delta_2 = 3$ *мм*), то размерная длина боковых стенок должна быть равна $2\sigma_1 \approx \approx 1{,}6\,D \approx 47{,}8$ *мм*, а общая «критическая» длина всего составного тела составит $47{,}8 + 6 \approx 54$ *мм*.

В заключение заметим, что если же для проведения эксперимента потребуется «скорректировать» постоянную h воздействия среды на тело, то искомое выражение для величины σ_1^* представится следующим образом. Линеаризованное критическое равенство (1290) перепишется в виде

$$\Delta_1\left(10h - \frac{5}{4}\right) + \sigma_1\Delta_2\left(40h - \frac{1}{2}\right) - 4\sigma_1^2\Delta_2 = 0, \tag{1297}$$

а искомая величина σ_1^* найдётся из равенства

$$\sigma_1^* = \frac{1}{8}\left\{\left(40h - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(40h - \frac{1}{2}\right)^2 + 16\left(10h - \frac{5}{4}\right)\frac{\Delta_1}{\Delta_2}}\right\}. \tag{1298}$$

5.2.3. Возможности движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде с ограниченными углами атаки

Как уже отмечалось в предыдущих разделах, если параметры задачи допускают наличие критического случая (левая часть равенства (1280) равна нулю), то в зависимости от старших производных функций воздействия среды y_N и s прямолинейное поступательное торможение тела может быть или устойчивым, или неустойчивым по отношению к возмущениям угла атаки и угловой скорости. Выше найдены достаточные условия для такой устойчивости или неустойчивости, включающие неравенства на старшие производные функций воздействия среды. Но главная трудность заключается в том, что измерить в эксперименте данные производные в явном виде не представляется возможным.

Продемонстрируем, как можно исследовать поведение тела около прямолинейного поступательного торможения (т. е. устойчивые или неустойчивые угловые колебания), используя экспериментальную информацию, тем самым неявно оценивая старшие производные функций воздействия среды.

Сначала отметим, что следующее неравенство, гарантирующее *колебательную* устойчивость или неустойчивость, по крайней мере в случае предложенных выше изделий выполнено (можно несколько изменить массу тела, изготавливая изделия из металлов различной плотности):

$$\frac{DI\rho_0}{m^2} < \frac{8k}{c_x\pi}. \tag{1299}$$

Здесь к известным параметрам добавлены следующие: ρ_0 — плотность жидкости (в данном случае воды), $c_x = 0{,}82$ — безразмерный коэффициент лобового сопротивления.

Действительно, в системе СГС неравенство (1299) эквивалентно $D\rho^2/m < 0{,}31$, $[m] = \textit{г}$, $[D] = [\rho] = \textit{см}$, где ρ — (центральный) радиус инерции, выражаемый формулой (1287).

Во время проведения эксперимента в случае колебательного характера движения необходимо получить информацию не менее чем о трёх полуколебаниях с амплитудами a_1, a_2, a_3 (т. е. о полутора периодах колебаний). Исследуя значения параметров, близких к критическому случаю, из теоремы о рождении предельных циклов получаем два вывода об устойчивости ключевого режима — прямолинейного поступательного торможения — и о характере угловых колебаний тела (см. ниже I и II).

Сначала сделаем важное замечание о последовательных изменениях значений измеряемых в эксперименте амплитуд a_1, a_2, a_3.

Замечание 5.1. Последовательность отношений величин $a_1, a_2, a_3, \ldots$

$$\frac{a_2}{a_1}, \frac{a_3}{a_2}, \ldots \tag{1300}$$

(и далее, если удастся измерить не три полуколебания, а более) во многом может определить характер колебательного процесса. Так, если величины

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{1301}$$

напоминают возрастающую (убывающую) геометрическую прогрессию (в частности, если отношения $a_2/a_1, a_3/a_2$ примерно равны), то с долей уверенности можно говорить о достаточно быстром росте (затухании) угловых колебаний. Если же величины (1301) возрастают, а их отношения $a_2/a_1, a_3/a_2, \ldots$ (из (1300)) явно убывают, то следует говорить о возможном переходе к угловым колебаниям ограниченной амплитуды.

I. Пусть после проведения натурного эксперимента с параметрами, соответствующими критическому случаю, наблюдаются устойчивые колебания по отношению к углу отклонения. Тогда при малом уменьшении продольной длины тела (см. пример 1 ниже) может возникнуть затухание угловых колебаний (рис. 5).

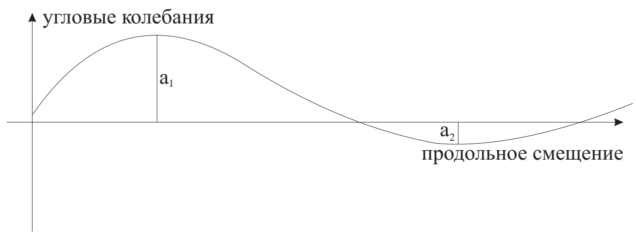

Рис. 5

При малом же увеличении продольной длины тела (см. пример 2 ниже) следует ждать роста угловых колебаний и в дальнейшем могут наблюдаться устойчивые угловые автоколебания тела (рис. 6). При этом надо обратить внимание на скорость изменения амплитуды колебаний (см. замечание 5.1).

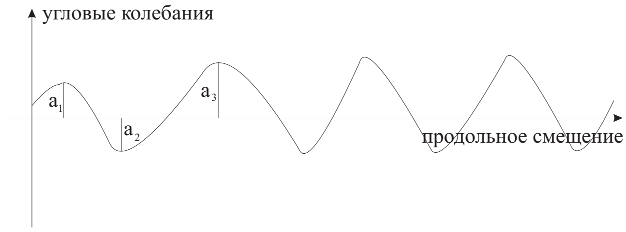

Рис. 6

Более того, проводя эксперимент повторно для изделия из примера 2 при достаточно больших возмущениях начального угла атаки и (или) угловой скорости, можно наблюдать переход к устойчивым угловым автоколебаниям с конечными амплитудами (рис. 7), аналогичным предыдущему случаю (см. рис. 6).

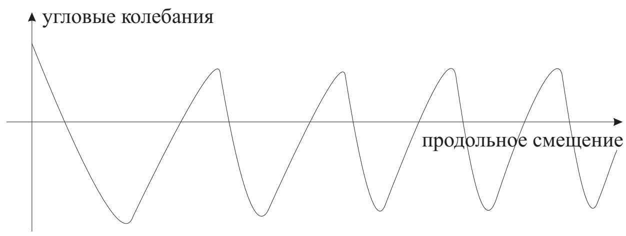

Рис. 7

Пример 1. Общая длина тела равна $50 < 54$ (*мм*).

Пример 2. Общая длина тела равна $60 > 54$ (*мм*).

II. Пусть после проведения натурного эксперимента с параметрами, соответствующими критическому случаю, наблюдается рост угловых колебаний. Тогда при малом уменьшении продольной длины тела (см. пример 1) также можно говорить об устойчивых колебаниях ограниченной амплитуды (т. е. переход от неустойчивых угловых автоколебаний тела, рис. 8). При этом надо обратить внимание на скорость изменения амплитуды колебаний (см. замечание 5.1).

Более того, проводя эксперимент повторно для изделия из примера 1 при конечных возмущениях начального угла атаки и (или) угловой скорости, можно наблюдать переход от неустойчивых автоколебаний к их росту (рис. 9). При

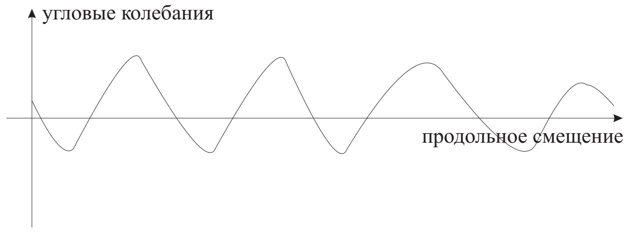

Рис. 8

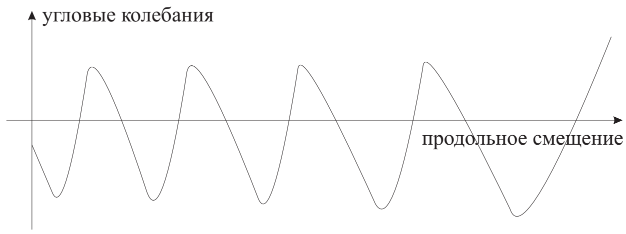

Рис. 9

малом же увеличении продольной длины тела (см. пример 2) следует ждать роста угловых колебаний (рис. 10).

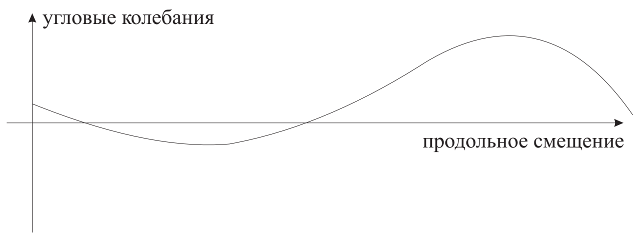

Рис. 10

5.3. Заключение

При изучении рассматриваемой модели были найдены достаточные условия асимптотической устойчивости одного из ключевых режимов — прямолинейного поступательного торможения. В применении к однородным круговым цилиндрам были выписаны конкретные оценки на их инерционно-массовые характеристики, при этом учитывались результаты проведённых ранее экспериментов, в том числе по получению безразмерных параметров воздействия воды на них.

В работе также показано, что при некоторых условиях на старшие производные функций воздействия среды (плеча силы воздействия и коэффициента сопротивления) возможно присутствие в системе либо устойчивого, либо неустойчивого автоколебательных режимов движения. При этом непреодолимой сложностью является измерение старших производных данных функций воздействия среды, поскольку для каждого конкретного тела не только явный вид, но и знаки старших производных даже в отдельных точках таких функций нам неизвестны.

В процессе применения разработанной ранее методики исследования диссипативных динамических систем определённого вида, возникающих в задаче о свободном торможении, было получено новое многопараметрическое семейство фазовых портретов на двумерном цилиндре квазискоростей, состоящее из бесконечного множества топологически неэквивалентных портретов, вырожденным образом меняющих свой топологический тип при изменении параметров системы. Полученное семейство обладает или устойчивым, или неустойчивым автоколебательным режимами в конечном диапазоне углов атаки. Область физических параметров при этом является множеством конечной меры во всём бесконечномерном пространстве параметров системы, так что полученные портреты являются типичными.

Полученные результаты позволяют сконструировать полые круговые цилиндры — «гильзы», использование которых может обеспечить необходимую устойчивость при проведении дополнительных натурных экспериментов.

Литература

[1] Агафонов С. А., Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Некоторые актуальные задачи геометрии и механики: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 34.

[2] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Некоторое уточнение алгоритма Конвея // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2005. — № 3. — С. 53—55.

[3] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Архимедовы равномерные структуры // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 46—51.

[4] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Многообразия непрерывных структур // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 71—86.

[5] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Общий спектральный подход к динамике сплошной среды // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 52—70.

[6] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Феноменологический подход к определению межфазных сил // Доклады РАН. — 2007. — Т. 412, № 1. — С. 44—47.

[7] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Группы цветов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2009. — Т. 62. — С. 15—27.

[8] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Операторы усреднения и реальные уравнения гидромеханики // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2009. — Т. 65. — С. 31—47.

[9] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Псевдодифференциальные операторы в теории многофазных многоскоростных течений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2009. — Т. 65. — С. 11—30.

[10] Айдагулов Р. Р., Шамолин М. В. Формулы интегрирования десятого порядка точности и выше // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2010. — № 4. — С. 3—7.

[11] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.

[12] Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1967.

[13] Арнольд В. И. Гамильтоновость уравнений Эйлера динамики твёрдого тела в идеальной жидкости // УМН. — 1969. — Т. 24, № 3. — С. 225—226.

[14] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики. — М.: ВИНИТИ, 1985.

[15] Беляев А. В. О движении многомерного тела с закреплённой точкой в поле силы тяжести // Матем. сб. — 1981. — Т. 114, № 3. — С. 465—470.

[16] Богоявленский О. И. Некоторые интегрируемые случаи уравнений Эйлера // ДАН СССР. — 1986. — Т. 287, № 5. — С. 1105—1108.

[17] Богоявленский О. И., Ивах Г. Ф. Топологический анализ интегрируемых случаев В. А. Стеклова // УМН. — 1985. — Т. 40, № 4. — С. 145—146.

[18] Борисёнок И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 3. — С. 775—790.

[19] Борисёнок И. Т., Шамолин М. В. Решение задачи дифференциальной диагностики методом статистических испытаний // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2001. — № 1. — С. 29—31.

[20] Бурбаки Н. Интегрирование. — М.: Наука, 1970.

[21] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.

[22] Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика продольного и бокового движения. — М.: Машиностроение, 1969.

[23] Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Динамика самолета. Пространственное движение. — М.: Машиностроение, 1988.

[24] Вишик С. В., Должанский С. Ф. Аналоги уравнений Эйлера—Пуассона и магнитной гидродинамики, связанные с группами Ли // ДАН СССР. — 1978. — Т. 238, № 5. — С. 1032—1035.

[25] Вышкварко Ю. Г., Шамолин М. В. Некоторые вопросы качественной теории в динамике твёрдого тела // Материалы Всерос. конф., посвящ. 110-летию матем. ф-та МПГУ «Математика, информатика и методика их преподавания». Москва, 14—16 марта 2011 г. — М.: МПГУ, 2011. — С. 40—41.

[26] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрия и механика: задачи, подходы, методы: Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. матем. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 301.

[27] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. О некоторых топологических инвариантах потоков с комплексным потенциалом: Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. матем. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 305.

[28] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрия и механика: задачи, подходы, и методы: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 16.

[29] Георгиевский Д. В., Трофимов В. В., Шамолин М. В. О некоторых топологических инвариантах потоков с комплексным потенциалом: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 19.

[30] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Кинематика и геометрия масс твёрдого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Докл. РАН. — 2001. — Т. 380, № 1. — С. 47—50.

[31] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. О кинематике твёрдого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$: Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. матем. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 315.

[32] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщённые динамические уравнения Эйлера для твёрдого с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$ // Докл. РАН. — 2002. — Т. 383, № 5. — С. 635—637.

[33] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в $\mathbf{R}^n$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2003. — № 5. — С. 37—41.

[34] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Валерий Владимирович Трофимов // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 5—15.

[35] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д. ф.-м. н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 16—45.

[36] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Обобщённые динамические уравнения Эйлера для твёрдого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 30.

[37] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. О кинематике твёрдого тела с неподвижной точкой в $\mathbf{R}^n$: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 24—25.

[38] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Первые интегралы уравнений движения обобщённого гироскопа в n-мерном пространстве: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 31.

[39] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством

С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Соврем. матем. и её прил. — 2009. — Т. 62.

[40] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Соврем. матем. и её прил. — 2009. — Т. 65. — С. 3–10.

[41] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. П-теорема теории размерностей (к 100-летию доказательства): Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова, проводящегося на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова под руководством С. А. Агафонова, Д. В. Георгиевского и М. В. Шамолина // Соврем. матем. и её прил. — 2009. — Т. 65. — С. 3.

[42] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д. ф.-м. н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова // Соврем. матем. и её прил. — 2012. — Т. 76. — С. 3—10.

[43] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивита, обобщённые векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела // Соврем. матем. и её прил. — 2012. — Т. 76. — С. 22—39.

[44] Георгиевский Д. В., Шамолин М. В. Символы Леви-Чивита, обобщённые векторные произведения и новые случаи интегрируемости в механике многомерного тела: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» им. проф. В. В. Трофимова под руководством проф. Д. В. Георгиевского, д. ф.-м. н. М. В. Шамолина, проф. С. А. Агафонова // Соврем. матем. и её прил. — 2012. — Т. 76. — С. 9.

[45] Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973.

[46] Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950.

[47] Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжёлого твёрдого тела около неподвижной точки. — М.; Л.: Гостехиздат, 1953.

[48] Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. — М.: Наука, 1979.

[49] Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // ДАН СССР. — 1984. — Т. 279, № 2. — С. 294—297.

[50] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1979.

[51] Ерошин В. А. Рикошет пластинки от поверхности идеальной несжимаемой жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1970. — № 6. — С. 99—104.

[52] Ерошин В. А. Погружение диска в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1983. — № 2. — С. 142—144.

[53] Ерошин В. А. Экспериментальное изучение волн сжатия, возбуждающихся в упругом цилиндре при входе в воду // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Вып. 46. — Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1990. — С. 54—59.

[54] Ерошин В. А. Проникание упругого цилиндра в воду с большой скоростью: Препринт № 5. — М.: Ин-т механики МГУ, 1991.

[55] Ерошин В. А. Экспериментальное исследование входа упругого цилиндра в воду с большой скоростью // Изв. РАН. МЖГ. — 1992. — № 5. — С. 20—30.

[56] Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И, Якимов Ю. Л. Экспериментальное определение давления на диске при погружении в сжимаемую жидкость под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1988. — № 2. — С. 21—25.

[57] Ерошин В. А., Константинов Г. А., Романенков Н. И, Якимов Ю. Л. Экспериментальное определение момента гидродинамических сил при несимметричном проникании диска в сжимаемую жидкость // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1990. — № 5. — С. 88—94.

[58] Ерошин В. А., Плюснин А. В., Созоненко Ю. А., Якимов Ю. Л. О методике исследования изгибных колебаний упругого цилиндра при входе в воду под углом к свободной поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1989. — № 6. — С. 164—167.

[59] Ерошин В. А., Привалов В. А., Самсонов В. А. Две модельные задачи о движении тела в сопротивляющейся среде // Сб. науч.-метод. статей по теоретич. механ. Вып. 18. — М.: Наука, 1987. — С. 75—78.

[60] Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании: Тез. докл. Чебышёвских чтений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1995. — № 6. — С. 17.

[61] Ерошин В. А., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании // Изв. РАН. МЖГ. — 1995. — № 3. — С. 23—27.

[62] Жуковский Н. Е. О падении лёгких, продолговатых тел, вращающихся вокруг своей продольной оси // Полн. собр. соч. Т. 5. — М.: Физматгиз, 1937. — С. 72—80; 100—115.

[63] Жуковский Н. Е. О парении птиц // Полн. собр. соч. Т. 5. — М.: Физматгиз, 1937. — С. 45—59.

[64] Иванова Т. А. Об уравнениях Эйлера в моделях теоретической физики // Матем. заметки. — 1992. — Т. 52, № 2. — С. 43—51.

[65] Козлов В. В. Методы качественного анализа в динамике твёрдого тела. М.: МГУ, 1980.

[66] Козлов В. В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1983. — № 6. — С. 10—22.

[67] Козлов В. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // УМН. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 3—67.

[68] Козлов В. В. К задаче о вращении твёрдого тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. — 1985. — № 6. — С. 28—33.

[69] Козлов В. В. О падении тяжёлого твёрдого тела в идеальной жидкости // Изв. АН СССР. МТТ. — 1989. — № 5. — С. 10—17.

[70] Козлов В. В. К задаче о падении тяжёлого твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 1. — С. 79—87.

[71] Козлов В. В., Колесников Н. Н. Об интегрируемости гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1979. — № 6. — С. 88—91.

[72] Козлов В. В., Онищенко Д. А. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа // ДАН СССР. — 1982. — Т. 266, № 6. — С. 1298—1300.

[73] Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Физматгиз, 1947.

[74] Локшин Б. Я., Окунев Ю. М., Самсонов В. А., Шамолин М. В. Некоторые интегрируемые случаи пространственных колебаний твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. XXI науч. чтений по космонавтике (Москва, 28—31.01.1997). — М.: ИИЕТ РАН, 1997. — С. 82–83.

[75] Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

[76] Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твёрдого тела в жидкости // Собр. соч. Т. I. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. — С. 320—324.

[77] Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975.

[78] Окунев Ю. М., Шамолин М. В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов комплексных неавтономных уравнений // Соврем. матем. и её прил. — 2009. — Т. 65. — С. 122—131.

[79] Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. — М.: Мир, 1986.

[80] Поляков Н. Л., Шамолин М. В. О замкнутых симметричных классах функций, сохраняющих любой одноместный предикат // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — № 6 (107). — С. 61—73.

[81] Поляков Н. Л., Шамолин М. В. Об одном обобщении теоремы Эрроу // Докл. РАН. — 2014. — Т. 456, № 2. — С. 143—145.

[82] Походня Н. В., Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного тела // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2012. — № 9 (100). — С. 136—150.

[83] Походня Н. В., Шамолин М. В. Некоторые условия интегрируемости динамических систем в трансцендентных функциях // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — № 9/1 (110). — С. 35—41.

[84] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.; Л.: ОГИЗ, 1947.

[85] Пуанкаре А. Новые методы в небесной механике // Пуанкаре А. Избранные труды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1971, 1972.

[86] Пуанкаре А. О науке. — М.: Наука, 1983.

[87] Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1989. — № 3. — С. 51—54.

[88] Самсонов В. А., Шамолин М. В. О движении тела в сопротивляющейся среде // Современные проблемы механики и технологии машиностроения. Всесоюз. конф. (16—18 апреля 1989 г.). Тез. докл. — М.: ВИНИТИ, 1989. — С. 128—129.

[89] Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 3969. — М., 1990.

[90] Самсонов В. А., Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в среде со струйным обтеканием // Нелинейные колебания механических систем. Тез. докл. II Всесоюз. конф. (сентябрь 1990 г.), ч. 2. — Горький, 1990. — С. 95—96.

[91] Самсонов В. А., Шамолин М. В. К задаче о торможении тела в среде при струйном обтекании: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 4141. — М., 1991.

[92] Самсонов В. А., Шамолин М. В., Ерошин В. А., Макаршин В. М. Математическое моделирование в задаче о торможении тела в сопротивляющейся среде при струйном обтекании: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 4396. — М., 1995.

[93] Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1983; 1984.

[94] Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Исследование межфазной зоны в некоторой сингулярно предельной задаче // Матер. Воронежской весенней матем. шк. «Современные методы теории краевых задач». «Понтрягинские чтения-XXII». Воронеж, 3—9 мая 2011 г. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2011. — С. 164—165.

[95] Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Локальная разрешимость одной задачи со свободной границей // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2011. — № 8 (89). — С. 86—94.

[96] Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Локальная разрешимость одной однофазной задачи со свободной границей // Матер. Воронежской зимней матем. шк. «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 26.01—01.02.2011 г. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2011. — С. 307.

[97] Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Исследование межфазной зоны в одной сингулярно предельной задаче // Соврем. матем. и её прил. — 2012. — Т. 78. — С. 109—118.

[98] Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Квазистационарная задача Стефана со значениями на фронте, зависящими от его геометрии // Соврем. матем. и её прил. — 2012. — Т. 78. — С. 126—134.

[99] Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Локальная разрешимость капиллярной задачи // Соврем. матем. и её прил. — 2012. — Т. 78. — С. 119—125.

[100] Селиванова Н. Ю., Шамолин М. В. Локальная разрешимость однофазной задачи со свободной границей // Соврем. матем. и её прил. — 2012. — Т. 78. — С. 99—108.

[101] Суворова Е. И., Шамолин М. В. Топографические системы Пуанкаре и системы сравнения высших порядков // Матем. конф. «Современные методы теории функций и смежные проблемы». Воронеж, 26 января—2 февраля 2003 г. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2003. — С. 251—252.

[102] Суслов Г. К. Теоретическая механика. — М.: Гостехиздат, 1946.

[103] Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всём диапазоне углов атаки // Тр. ЦАГИ. — 1974. — Вып. 1621. — С. 18—24.

[104] Трофимов В. В. Вложения конечных групп регулярными элементами в компактные группы Ли // ДАН СССР. — 1976. — Т. 226, № 4. — С. 785—786.

[105] Трофимов В. В. Уравнения Эйлера на конечномерных разрешимых группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — Т. 44, № 5. — С. 1191—1199.

[106] Трофимов В. В. Симплектические структуры на группах автоморфизмов симметрических пространств // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1984. — № 6. — С. 31—33.

[107] Трофимов В. В., Фоменко А. Т. Методика построения гамильтоновых потоков на симметрических пространствах и интегрируемость некоторых гидродинамических систем // ДАН СССР. — 1980. — Т. 254, № 6. — С. 1349—1353.

[108] Трофимов В. В., Шамолин М. В. Диссипативные системы с нетривиальными обобщёнными классами Арнольда—Маслова: Тез. докл. сем. по викт. и тенз. ан. им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2000. — № 2. — С. 62.

[109] Трофимов В. В., Шамолин М. В. Геометрические и динамические инварианты интегрируемых гамильтоновых и диссипативных систем // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 4. — С. 3—229.

[110] Фахрутдинова Р. Р., Шамолин М. В. О сохранении фазового объёма в динамических системах с переменной диссипацией «с нулевым средним» // Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. матем. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 311.

[111] Фахрутдинова Р. Р., Шамолин М. В. О сохранении фазового объёма в динамических системах с переменной диссипацией «с нулевым средним»»: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 22.

[112] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.

[113] Чаплыгин С. А. О движении тяжёлых тел в несжимаемой жидкости // Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. — С. 133—135.

[114] Чаплыгин С. А. Избранные труды. — М.: Наука, 1976.

[115] Шамолин М. В. Замкнутые траектории различного топологического типа в задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1992. — № 2. — С. 52—56.

[116] Шамолин М. В. К задаче о движении тела в среде с сопротивлением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1992. — № 1. — С. 52—58.

[117] Шамолин М. В. Классификация фазовых портретов в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде при наличии линейного демпфирующего момента // Прикл. математика и механика. — 1993. — Т. 57, № 4. — С. 40—49.

[118] Шамолин М. В. Применение методов топографических систем Пуанкаре и систем сравнения в некоторых конкретных системах дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1993. — № 2. — С. 66—70.

[119] Шамолин М. В. Существование и единственность траекторий, имеющих в качестве предельных множеств бесконечно удалённые точки, для динамических систем на плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1993. — № 1. — С. 68—71.

[120] Шамолин М. В. Новое двупараметрическое семейство фазовых портретов в задаче о движении тела в среде // Докл. РАН. — 1994. — Т. 337, № 5. — С. 611—614.

[121] Шамолин М. В. Об относительной грубости динамических систем в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде: Тез. докл. Чебышёвских чтений // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1995. — № 6. — С. 17.

[122] Шамолин М. В. Относительная структурная устойчивость динамических систем задачи движения тела в среде // Аналитические, численные и экспериментальные методы в механике: Сб. науч. трудов / Под ред. Б. Е. Победри и В. В. Козлова. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. — С. 14—19.

[123] Шамолин М. В. Введение в задачу о торможении тела в сопротивляющейся среде и новое двухпараметрическое семейство фазовых портретов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1996. — № 4. — С. 57—69.

[124] Шамолин М. В. Введение в пространственную динамику движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Матер. междунар. конф. и Чебышёвских чтений, посвящ. 175-летию со дня рожд. П. Л. Чебышева (Москва, 14—19 мая 1996 г.). Т. 2. — М., 1996. — С. 371—373.

[125] Шамолин М. В. Многообразие типов фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего с сопротивляющейся средой // Докл. РАН. — 1996. — Т. 349, № 2. — С. 193—197.

[126] Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае в динамике пространственного движения тела в сопротивляющейся среде // II Симпозиум по классической и небесной механике. Тез. докл. Великие Луки, 23—28.08.1996. — М.; Великие Луки, 1996. — С. 91—92.

[127] Шамолин М. В. Определение относительной грубости и двупараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела // УМН. — 1996. — Т. 51, № 1. — С. 175—176.

[128] Шамолин М. В. Периодические и устойчивые по Пуассону траектории в задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. МТТ. — 1996. — № 2. — С. 55—63.

[129] Шамолин М. В. Список интегралов динамических уравнений в пространственной задаче о движении тела в сопротивляющейся среде // Моделирование и исследование устойчивости систем. Науч. конф. (20—24 мая 1996 г.). Тез. докл. (Исследование систем). — Киев, 1996. — С. 142.

[130] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби задачи о пространственном маятнике, помещённом в поток набегающей среды // Моделирование и исследование устойчивости систем (Modelling and Investigation of System Stability). Науч. конф. (19—23 мая 1997 г.). Тез. докл. (Mechanical Systems). — Киев, 1997. — С. 143.

[131] Шамолин М. В. Об интегрируемом случае в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 2. — С. 65—68.

[132] Шамолин М. В. Пространственная динамика твёрдого тела, взаимодействующего со средой: Сем. по мех. систем и пробл. управления движ. и навиг. // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 4. — С. 174.

[133] Шамолин М. В. Пространственные топографические системы Пуанкаре и системы сравнения // УМН. — 1997. — Т. 52, № 3. — С. 177—178.

[134] Шамолин М. В. Абсолютная и относительная структурная устойчивость в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тр. Междунар. конф. «Математика в индустрии» (ICIM-98, Таганрог, 29 июня—03 июля 1998 г.). — Таганрог: Изд-во ТГПИ, 1998. — С. 332—333.

[135] Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях // УМН. — 1998. — Т. 53, № 3. — С. 209—210.

[136] Шамолин М. В. Семейство портретов с предельными циклами в плоской динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1998. — № 2. — С. 29—37.

[137] Шамолин М. В. Некоторые классы частных решений в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Изв. РАН. МТТ. — 1999. — № 2. — С. 178—189.

[138] Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 1999. — Т. 364, № 5. — С. 627—629.

[139] Шамолин М. В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости и негрубости систем с переменной диссипацией // УМН. — 1999. — Т. 54, № 5. — С. 181—182.

[140] Шамолин М. В. Задача о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде и один случай интегрируемости // Book of Abs. Third Int. Conf. «Differential Equations and Applications», Saint-Petersburg, Russia, June 12—17, 2000. — Изд-во СПбГТУ, 2000. — С. 198.

[141] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби в задаче о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Докл. РАН. — 2000. — Т. 375, № 3. — С. 343—346.

[142] Шамолин М. В. Интегрируемость по Якоби задачи о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференц. уравн. и динам. сист. (Суздаль, 21—26 августа 2000 г.). — Владимир: Владимир. гос. ун-т., 2000. — С. 196—197.

[143] Шамолин М. В. Новое семейство фазовых портретов в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 2000. — Т. 371, № 4. — С. 480—483.

[144] Шамолин М. В. Об одном случае интегрируемости по Якоби в динамике четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференц. и интегр. уравн. (Одесса, 12—14 сентября 2000 г.). — Одесса: АстроПринт, 2000. — С. 294—295.

[145] Шамолин М. В. О грубости диссипативных систем и относительной грубости систем с переменной диссипацией: Тез. докл. сем. по вект. и тенз. анал. им. П. К. Рашевского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2000. — № 2. — С. 63.

[146] Шамолин М. В. О предельных множествах дифференциальных уравнений около сингулярных особых точек // УМН. — 2000. — Т. 55, № 3. — С. 187—188.

[147] Шамолин М. В. Интегрируемость задачи о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде: Заседания семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Фундамент. и прикл. матем. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 309.

[148] Шамолин М. В. Новые интегрируемые по Якоби случаи в динамике двумерного, трёхмерного и четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Анн. докл. VIII Всеросс. съезда по теорет. и прикл. механ. (Пермь, 23—29 августа 2001 г.). — Екатеринбург: УрО РАН, 2001. — С. 599–600.

[149] Шамолин М. В. Новые интегрируемые случаи в динамике четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Моделирование и исследование устойчивости систем (Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation). Науч. конф. (22—25 мая 2001 г.): Thes. of Conf. Rep. — Киев, 2001. — С. 344.

[150] Шамолин М. В. Об устойчивости движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде, закрученного вокруг своей продольной оси // Изв. РАН. МТТ. — 2001. — № 1. — С. 189—193.

[151] Шамолин М. В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке набегающей среды // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2001. — № 5. — С. 22—28.

[152] Шамолин М. В. Случаи интегрируемости уравнений пространственной динамики твёрдого тела // Прикл. мех. — 2001. — Т. 37, № 6. — С. 74—82.

[153] Шамолин М. В. Новые интегрируемые случаи в динамике двухмерного, трёхмерного и четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференц. уравн. и динам. сист. (Суздаль, 1—6 июля 2002 г.). — Владимир: Владимир. гос. ун-т., 2002. — С. 142—144.

[154] Шамолин М. В. Об интегрировании некоторых классов неконсервативных систем // УМН. — 2002. — Т. 57, № 1. — С. 169—170.

[155] Шамолин М. В. Геометрическое представление движения в одной задаче о взаимодействии тела со средой // Прикл. мех. — 2004. — Т. 40, № 4. — С. 137—144.

[156] Шамолин М. В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2004.

[157] Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае в динамике на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$ // Тез. докл. Всеросс. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения» (СамДиф-2005), Самара, 27 июня—2 июля 2005 г. — Самара: Универс-групп, 2005. — С. 97—98.

[158] Шамолин М. В. Об одном интегрируемом случае уравнений динамики на $\mathrm{so}(4) \times \mathbf{R}^4$ // УМН. — 2005. — Т. 60, № 6. — С. 233—234.

[159] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Междунар. конф. «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посв. 100-летию С. М. Никольского (Москва, 23—29 мая 2005 г.). — М.: Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 2005. — С. 244.

[160] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учёте вращательных производных момента сил по угловой скорости // Докл. РАН. — 2005. — Т. 403, № 4. — С. 482—485.

[161] Шамолин М. В. Сопоставление интегрируемых по Якоби случаев плоского и пространственного движения тела в среде при струйном обтекании // Прикл. математика и механика. — 2005. — Т. 69, № 6. — С. 1003—1010.

[162] Шамолин М. В. К задаче о пространственном торможении твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Изв. РАН. МТТ. — 2006. — № 3. — С. 45—57.

[163] Шамолин М. В. Модельная задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учётом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 4818. — М., 2006.

[164] Шамолин М. В. О случае полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференц. уравн. и динам. сист. (Суздаль, 10—15 августа 2006 г.). — Владимир: Владимир. гос. ун-т., 2006. — С. 226—228.

[165] Шамолин М. В. Интегрируемость в элементарных функциях систем с переменной диссипацией: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 38.

[166] Шамолин М. В. Интегрируемость задачи о движении четырёхмерного твёрдого тела в сопротивляющейся среде: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 21.

[167] Шамолин М. В. Интегрируемость сильно неконсервативных систем в трансцендентных элементарных функциях: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 40.

[168] Шамолин М. В. Методы анализа динамических систем с переменной диссипацией в динамике твёрдого тела. — М.: Экзамен, 2007.

[169] Шамолин М. В. Некоторые задачи дифференциальной и топологической диагностики. — М.: Экзамен, 2007.

[170] Шамолин М. В. Некоторые модельные задачи динамики твёрдого тела при взаимодействии его со средой // Прикл. мех. — 2007. — Т. 43, № 10. — С. 49—67.

[171] Шамолин М. В. Новые интегрируемые случаи в динамике четырёхмерного твёрдого тела, взаимодействующего со средой: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 27.

[172] Шамолин М. В. Об интегрируемости в трансцендентных функциях: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 34.

[173] Шамолин М. В. Об интегрируемости движения четырёхмерного твёрдого тела-маятника, находящегося в потоке набегающей среды: Заседания семинара механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова «Актуальные проблемы геометрии и механики» // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 37.

[174] Шамолин М. В. Полная интегрируемость уравнений движения пространственного маятника в потоке среды при учёте вращательных производных момента силы ее воздействия // Изв. РАН. МТТ. — 2007. — № 3. — С. 187—192.

[175] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. Всеросс. конф. «Современные проблемы механики сплошной среды» памяти Л. И. Седова в связи со 100-летием со дня рожд. (Москва, 12—14 ноября 2007 г.). — М.: МИАН, 2007. — С. 166—167.

[176] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил // Тез. докл. Междунар. конф. «Анализ и особенности», посвящ. 70-летию В. И. Арнольда, Москва, 20—24 августа 2007 г. — М.: МИАН, 2007. — С. 110—112.

[177] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем // Тез. докл. Междунар. конф. «Классические задачи динамики твёрдого тела» (09—13 июня 2007 г.). — Донецк: Ин-т прикл. матем. и механ. НАН Украины, 2007. — С. 81—82.

[178] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике на касательном расслоении двумерной сферы // УМН. — 2007. — Т. 62, № 5. — С. 169—170.

[179] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил // «Нелинейный динамический анализ-2007»: Тез. докл. междунар. конгр., Санкт-Петербург, 4—8 июня 2007 г. — СПб.: Санкт-Петерб. гос. ун-т, 2007. — С. 178.

[180] Шамолин М. В. Динамические системы с переменной диссипацией: подходы, методы, приложения // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 3. — С. 3—237.

[181] Шамолин М. В. Новые интегрируемые случаи в динамике тела, взаимодействующего со средой, при учёте зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Прикл. математика и механика. — 2008. — Т. 72, № 2. — С. 273—287.

[182] Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике симметричного четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Матер. междунар. науч. конф. «Современные проблемы математики, механики, информатики», посв. 85-летию со дня рожд. Л. А. Толоконникова (Тула, 17—21 ноября 2008 г.). — Тула: Гриф и К, 2008. — С. 317—320.

[183] Шамолин М. В. Новый интегрируемый случай в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил // Матер. Воронеж. вес. матем. шк. «Понтрягинские чтения-XIX», Воронеж, май 2008 г. — Воронеж: Изд-во Воронеж. гос. ун-та, 2008. — С. 231—232.

[184] Шамолин М. В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов динамических систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — № 3. — С. 43—49.

[185] Шамолин М. В. Трёхпараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Докл. РАН. — 2008. — Т. 418, № 1. — С. 46—51.

[186] Шамолин М. В. Классификация случаев полной интегрируемости в динамике симметричного четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Соврем. мат. и её прил. — 2009. — Т. 65. — С. 132—142.

[187] Шамолин М. В. Некоторые случаи полной интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // V Поляховские чтения: Тр. Междунар. науч. конф. по механ., Санкт-Петербург, 3—6 февраля 2009 г. — Спб.: СПбГУ, 2009. — С. 144—150.

[188] Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил: Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Соврем. матем. и её прил. — 2009. — Т. 65. — С. 6.

[189] Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в динамике динамически симметричного четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. — 2009. — Т. 425, № 3. — С. 338—342.

[190] Шамолин М. В. Новые случаи полной интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Тез. докл. науч. конф. «Ломоносовские чтения-2009», секц. механики (Москва, МГУ, апрель 2009 г.). — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2009. — С. 153—154.

[191] Шамолин М. В. Об интегрируемости в элементарных функциях некоторых классов неконсервативных динамических систем // Соврем. мат. и её прил. — 2009. — Т. 62. — С. 131—171.

[192] Шамолин М. В. Об устойчивости прямолинейного поступательного движения // Прикл. мех. — 2009. — Т. 45. — № 6. — С. 125—140.

[193] Шамолин М. В. Случаи интегрируемости уравнений движения четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Матер. междунар. конф., посвящ. 70-летию ректора МГУ акад. В. А. Садовничего (Москва, 30 марта—02 апреля 2009 г.). — М.: Университетская книга, 2009. — С. 233.

[194] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости в динамике симметричного четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле: Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Соврем. матем. и её прил. — 2009. — Т. 65. — С. 9.

[195] Шамолин М. В. Интегрируемость и неинтегрируемость в трансцендентных функциях динамических систем // Воронежская зимняя матем. шк. С. Г. Крейна — 2010. Тез. докл. — Воронеж: ВГУ, 2010. — С. 159—160.

[196] Шамолин М. В. К задаче о движении тела с передним плоским торцом в сопротивляющейся среде: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 5052. — М.: Ин-т механики МГУ, 2010.

[197] Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела // Докл. РАН. — 2010. — Т. 431, № 3. — С. 339—343.

[198] Шамолин М. В. Пространственное движение твёрдого тела в среде с сопротивлением // Прикл. мех. — 2010. — Т. 46, № 7. — С. 120—133.

[199] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости уравнений движения динамически симметричного четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференц. уравн. и динам. сист. (Суздаль, 2—7 июля 2010 г.). — Владимир: Владимир. гос. ун-т., 2010. — С. 195.

[200] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости уравнений пространственного движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. XI Междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», Москва, ИПУ РАН, 1—4 июня 2010 г. — М.: ИПУ РАН, 2010. — С. 429—431.

[201] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости уравнений пространственной динамики твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Тез. докл. науч. конф. «Ломоносовские чтения-2010», секц. механики (Москва, МГУ, апрель 2010 г.). — М.: Изд-во Моск. ун-та, 2010. — С. 172.

[202] Шамолин М. В. Случай полной интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // УМН. — 2010. — Т. 65, № 1. — С. 189—190.

[203] Шамолин М. В. Движение твёрдого тела в сопротивляющейся среде // Матем. моделирование. — 2011. — Т. 23, № 12. — С. 79—104.

[204] Шамолин М. В. Динамические инварианты интегрируемых динамических систем с переменной диссипацией // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — № 4. — С. 356—357.

[205] Шамолин М. В. Многопараметрическое семейство фазовых портретов в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 3. — С. 24—30.

[206] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. — 2011. — Т. 437, № 2. — С. 190—193.

[207] Шамолин М. В. Новый случай полной интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трёхмерной сфере // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2011. — № 5 (86). — С. 187—189.

[208] Шамолин М. В. Полные списки первых интегралов в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Междунар. конф., посвящ. 110-й годовщине И. Г. Петровского (XXIII совместн. засед. ММО и сем. им. И. Г. Петровского): Тез. докл. — М.: Изд-во Моск. ун-та; Интуит.РУ, 2011. — С. 389—390.

[209] Шамолин М. В. Полный список первых интегралов в задаче о движении четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2011. — Т. 440, № 2. — С. 187—190.

[210] Шамолин М. В. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учётом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости // Матем. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 10. — С. 109—132.

[211] Шамолин М. В. Некоторые вопросы качественной теории в динамике систем с переменной диссипацией // Соврем. мат. и её прил. — 2012. — Т. 78. — С. 138—147.

[212] Шамолин М. В. Новые случаи интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твёрдого тела в неконсервативном поле // Современные методы теории краевых задач. Матер. Воронеж. весенней матем. шк. «Понтрягинские чтения-XXIII». Воронеж, 3—9 мая 2012 г. — Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2012. — С. 200.

[213] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2012. — Т. 444, № 5. — С. 506—509.

[214] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учёте линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2012. — Т. 442, № 4. — С. 479—481.

[215] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // XII Междунар. конф. «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конф. Пятницкого). Тез. докл. Москва, 5—8 июня 2012 г. — М.: ИПУ РАН, 2012. — С. 339—341.

[216] Шамолин М. В. Обзор случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференц. уравн. и динам. сист. (Суздаль, 29 июня—4 июля 2012 г.). — Суздаль, 2012. — С. 179—180.

[217] Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения твёрдого тела в сопротивляющейся среде при учёте линейного демпфирования // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2012. — № 4. — С. 44—47.

[218] Шамолин М. В. Случаи интегрируемости в динамике четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Воронежская зимн. матем. шк. С. Г. Крейна — 2012. Матер. междунар. конф., Воронеж, 25—30 января 2012 г. — Изд-во ВГУ, 2012. — С. 213—215.

[219] Шамолин М. В. Случаи интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой при струйном обтекании // VI Поляховские чтения: Тез. докл. Междунар. научн. конф. по механ., Санкт-Петербург, 31 января — 3 февраля 2012 г. — М.: И. В. Балабанов, 2012. — С. 75.

[220] Шамолин М. В. Случаи интегрируемости в пространственной динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой, при учёте линейного демпфирования // Аналитическая механика, устойчивость и управление. Тр. X Междунар. Четаевской конф. Т. 1. Секция 1. Аналитическая механика. Казань, 12—16 июня 2012 г. — Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. — С. 508–514.

[221] Шамолин М. В. Случаи полной интегрируемости в трансцендентных функциях в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой: Тез. засед. сем. «Актуальные проблемы геометрии и механики» // Соврем. матем. и её прил. — 2012. — Т. 76. — С. 7.

[222] Шамолин М. В. Сопоставление случаев полной интегрируемости в динамике двумерного, трёхмерного и четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Соврем. мат. и её прил. — 2012. — Т. 76. — С. 84—99.

[223] Шамолин М. В. Многообразие случаев интегрируемости в динамике маломерного и многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле сил // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. Темат. обзоры. — 2013. — Т. 125. — С. 5—254.

[224] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Докл. РАН. — 2013. — Т. 453, № 1. — С. 46—49.

[225] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости трансцендентных функциях в динамике твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 8. — С. 173—190.

[226] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости уравнений динамики на касательном расслоении к трёхмерной сфере // УМН. — 2013. — Т. 68, № 5. — С. 185—186.

[227] Шамолин М. В. Об интегрируемости в задачах динамики твёрдого тела, взаимодействующего со средой // Прикл. механ. — 2013. — Т. 49, № 6. — С. 44—54.

[228] Шамолин М. В. Полный список первых интегралов динамических уравнений движения четырёхмерного твёрдого тела в неконсервативном поле при наличии линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2013. — Т. 449, № 4. — С. 416—419.

[229] Шамолин М. В. Задача о движении тела в сопротивляющейся среде под действием следящей силы: качественный анализ и интегрируемость // XII Всеросс. совещ. по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, 16—19 июня 2014 г. Труды. [Электронный ресурс]. — М.: ИПУ РАН, 2014. — С. 1813—1824.

[230] Шамолин М. В. Интегрируемые системы с переменной диссипацией на касательном расслоении к конечномерной сфере // Геом. анализ и его прил. Матер. II Междунар. конф., Волгоград, 26—30 мая 2014 г. — Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2014. — С. 143—145.

[231] Шамолин М. В. Новый случай интегрируемости в динамике многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле при учёте линейного демпфирования // Докл. РАН. — 2014. — Т. 457, № 5. — С. 542—545.

[232] Шамолин М. В. Обзор случаев интегрируемости уравнений движения многомерного твёрдого тела в неконсервативном поле // Матер. междунар. конф. Воронежская зимняя матем. шк. С. Г. Крейна—2014 / Под ред. В. А. Костина. — Воронеж: Научная книга, 2014. — С. 404—408.

[233] Шамолин М. В. Интегрируемые системы на касательном расслоении к многомерной сфере // Тр. семин. им. И. Г. Петровского. — В печати.

[234] Шамолин М. В., Цыпцын С. В. Аналитическое и численное исследование траекторий движения тела в сопротивляющейся среде: Научный отчёт Ин-та механики МГУ № 4289. — М., 1993.

[235] Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986.

[236] Якоби К. Лекции по динамике. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.

[237] Peixoto M. On structural stability // Ann. Math. (2). — 1959. — Vol. 69. — P. 199—222.

[238] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds // Topology. — 1962. — Vol. 1, no. 2. — P. 101—120.

[239] Peixoto M. On an approximation theorem of Kupka and Smale // J. Differ. Equ. — 1966. — Vol. 3. — P. 214—227.

[240] Prandtl L., Betz A. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen. — Berlin: R. Oldenbourg, 1932.

[241] Shamolin M. V. Structural stability in 3D dynamics of a rigid body // CD Proc. of WCSMO-3, Buffalo, NY, May 17—21, 1999. — Buffalo, NY, 1999.

[242] Shamolin M. V. Mathematical modelling of interaction of a rigid body with a medium and new cases of integrability // CD Proc. of ECCOMAS 2000, Barcelona, Spane, 11—14 September. — Barcelona, 2000.

[243] Shamolin M. V. Some questions of the qualitative theory of ordinary differential equations and dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 110, no. 2. — P. 2526—2555.

[244] Shamolin M. V. Foundations of differential and topological diagnostics // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 114, no. 1. — P. 976—1024.

[245] Shamolin M. V. New integrable cases and families of portraits in the plane and spatial dynamics of a rigid body interacting with a medium // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 114, no. 1. — P. 919—975.

[246] Shamolin M. V. Classes of variable dissipation systems with nonzero mean in the dynamics of a rigid body // J. Math. Sci. — 2004. — Vol. 122, no. 1. — P. 2841—2915.

[247] Shamolin M. V. Some cases of integrability in dynamics of a rigid body interacting with a resisting medium // Тез. докл. Междунар. конф. по дифференц. уравн. и динам. сист. (Суздаль, 5—10 июля 2004 г.). — Владимир: Владимир. гос. ун-т., 2004. — С. 296—298.

[248] Shamolin M. V. Some cases of integrability in 3D dynamics of a rigid body interacting with a medium // Book of Abstracts IMA Int. Conf. «Recent Advances in Nonlinear Mechanics», Aberdeen, Scotland, August 30 — September 1, 2005. — Aberdeen: IMA, 2005. — P. 112.

[249] Shamolin M. V. Structural stable vector fields in rigid body dynamics // Proc. of 8th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2005). Lodz, Poland, Dec. 12—15, 2005. Vol. 1. — Tech. Univ. Lodz, 2005. — P. 429—436.

[250] Shamolin M. V. The cases of complete integrability in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Book of Abs. of Int. Conf. on the Occasion of the 150th Birthday of A. M. Lyapunov (June 24—30, 2007, Kharkiv, Ukraine). — Kharkiv: Verkin Inst. Low Temper. Phys. Eng., 2007. — P. 147—148.

[251] Shamolin M. V. The cases of integrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Proc. of 9th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2007). Lodz, Poland, Dec. 17—20, 2007. Vol. 1. — Tech. Univ. Lodz, 2007. — P. 415—422.

[252] Shamolin M. V. 4D rigid body and some cases of integrability // Abstracts of ICIAM07, Zurich, Switzerland, June 16—20, 2007. — ETH Zurich, 2007. — P. 311.

[253] Shamolin M. V. Methods of analysis of dynamic systems with various dissipation in dynamics of a rigid body // ENOC-2008, CD Proc., June 30 — July 4, 2008, Saint Petersburg, Russia.

[254] Shamolin M. V. Some methods of analysis of the dynamic systems with various dissipation in dynamics of a rigid body // Proc. Appl. Math. Mech. — 2008. — Vol. 8. — P. 10137—10138.

[255] Shamolin M. V. Dynamical systems with variable dissipation: methods and applications // Proc. of 10th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2009). Lodz, Poland, Dec. 7—10, 2009. — Tech. Univ. Lodz, 2009. — P. 91—104.

[256] Shamolin M. V. New cases of integrability in dynamics of a rigid body with the cone form of its shape interacting with a medium // Proc. Appl. Math. Mech. — 2009. — Vol. 9. — P. 139—140.

[257] Shamolin M. V. The various cases of complete integrability in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Multibody Dynamics, ECCOMAS Thematic Conf. Warsaw, Poland, 29 June — 2 July 2009, Book of Abstracts. — Warsaw: Polish Acad. Sci., 2009. — P. 276—277.

[258] Shamolin M. V. The various cases of complete integrability in dynamics of a rigid body interacting with a medium // Multibody Dynamics, ECCOMAS Thematic Conf. Warsaw, Poland, 29 June — 2 July 2009, CD Proc. — Warsaw: Polish Acad. Sci., 2009.

[259] Shamolin M. V., Dynamical systems with various dissipation: background, methods, applications // CD Proc. of XXXVIII Summer School-Conf. «Advances Problems in Mechanics» (APM 2010), July 1—5, 2010, St. Petersburg (Repino), Russia. — St. Petersburg: IPME, 2010. — P. 612—621.

[260] Shamolin M. V. Integrability and nonintegrability in terms of transcendental functions in dynamics of a rigid body // Proc. Appl. Math. Mech. — 2010. — Vol. 10. — P. 63—64.

[261] Shamolin M. V. Cases of complete integrability in transcendental functions in dynamics and certain invariant indices // CD Proc. 5th Int. Sci. Conf. on Physics and Control PHYSCON 2011, Leon, Spain, September 5—8, 2011. — Leon, 2011.

[262] Shamolin M. V. Variety of the cases of integrability in dynamics of a 2D-, 3D-, and 4D-rigid body interacting with a medium // Proc. of 11th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2011). Lodz, Poland, Dec. 5—8, 2011. Vol. 1. — Tech. Univ. Lodz, 2011. — P. 11—24.

[263] Shamolin M. V. Cases of complete integrability in transcendental functions in dynamics and certain invariant indices // 83rd Ann. Sci. Conf. of the Int. Assoc. of Appl. Math. and Mech. Book of Abstracts. Darmstadt, Germany, March 26—30, 2012. — Darmstadt: TU Darmstadt, 2012.

[264] Shamolin M. V. Cases of complete integrability in transcendental functions in dynamics and certain invariant indices // Proc. Appl. Math. Mech. — 2012. — Vol. 12. — P. 43—44.

[265] Shamolin M. V. Cases of integrability in dynamics of a rigid body interacting with a resistant medium // Abstract Book. 23th Int. Congress of Theor. and Appl. Mech. August 19—24, 2012, Beijing, China. — Beijing: Sci. Lit. Publ. House, 2012. — P. 51.

[266] Shamolin M. V. Cases of integrability in dynamics of a rigid body interacting with a resistant medium // CD proc. 23th Int. Congress of Theor. and Appl. Mech. August 19—24, 2012, Beijing, China. — Beijing: Sci. Lit. Publ. House, 2012.

[267] Shamolin M. V. Variety of the cases of integrability in dynamics of a 2D-, and 3D-rigid body interacting with a medium // 8th ESMC 2012, CD Materials (Graz, Austria, July 9—13, 2012). — Graz, 2012.

[268] Shamolin M. V. Cases of integrability in transcendental functions in 3D Dynamics of a rigid body interacting with a medium // Proc. ECCOMAS Multibody Dynamics 2013, 1—4 July, 2013, Univ. of Zagreb, Croatia. — Zagreb: Univ. of Zagreb, 2013. — P. 903—912.

[269] Shamolin M. V. Dynamical pendulum-like nonconservative systems // Proc. of 12th Conf. on Dynamical Systems (Theory and Applications) (DSTA 2013). Lodz, Poland, Dec. 2—5, 2013. — Tech. Univ. Lodz, 2005. — P. 160.

[270] Shamolin M. V. Review of cases of integrability in dynamics of low- and multidimensional rigid body in a nonconservative field // XXXIII Int. Conf. Dynamics Days Europe 2013, 3—7 June 2013, Madrid, Spain. Book of Abstracts. — Madrid: CTB UPM, 2013. — P. 157. — http://www.dynamics-days-europe-2013.org/DDEXXXIII-AbstractsBook.pdf.

[271] Shamolin M. V. Review of integrable cases in dynamics of low- and multidimensional rigid body in a nonconservative field // Advanced Problems in Mechanics: Book of Abstracts of Int. Summer School-Conf., 1—6 of July 2013, St. Petersburg. — St. Petersburg: Polytech. Univ. Publ. House, 2013. — P. 99.

[272] Shamolin M. V. Variety of the cases of integrability in dynamics of a symmetric 2D-, 3D-, and 4D-rigid body in a nonconservative field // Int. J. Struct. Stabil. Dynam. — 2013. — Vol. 13, no. 7. — 1340011.

[273] Shamolin M. V. Review of cases of integrability in dynamics of lower- and multidimensional rigid body in a nonconservative field of forces // Recent Advances in Mathematics, Statistics and Economics. Proc. of 2014 Int. EUROPMENT Conf. on Pure Math. — Appl. Math. (PM–AM'14). Venice, Italy, March 15—17, 2014. — Venice, 2014. — P. 86—102.

[274] Weyher C. Le vol plané // Aéronaute. — 1890. — Oct.