Определяемость абелевых групп без кручения своими группами умножений

А. А. АГАФОНОВ
Мининский университет, Нижний Новгород
e-mail: agafkaaa@mail.ru

А. М. СЕБЕЛЬДИН
Мининский университет, Нижний Новгород
e-mail: amseb@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, группа умножений, определяемость.

Аннотация

В данной статье рассматривается вопрос об определяемости абелевой группы её группой умножений.

Abstract

A. A. Agafonov, A. M. Sebeldin, Determination of Abelian groups by their multiplication groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 11—16.

In this paper, we consider the question about determination of an Abelian group by its multiplication group.

Будем говорить, что абелева группа A определяется группой своих умножений $\operatorname{Mult} A$ в классе X, если в X не существует группы B, такой что $\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Mult} B$ и A не изоморфна B. Через $X(\mathrm{Mult})$ обозначим класс всех групп из X, определяющихся группой своих умножений в классе X. Если $X(\mathrm{Mult}) = X$, то класс X будем называть Mult-классом.

Введём следующие обозначения:

$r(G)$ — ранг абелевой группы без кручения G;

$\Omega(G)$ — множество всех различных типов прямых слагаемых ранга 1 группы G;

$\mathbf{F}_{\mathrm{cdf}}$ — класс всех вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга;

$E^+(G)$ — группа эндоморфизмов группы G;

$\mathbf{Z}(p^\infty)$ — квазициклическая группа;

$R(G)$ — редуцированная часть группы G;

$D(G)$ — делимая часть группы G.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 11—16.
© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Остальные обозначения стандартны (см. [1—3]) или вводятся по ходу изложения.

Теорема 1. *Группа умножений прямого слагаемого абелевой группы есть прямое слагаемое группы умножений самой группы.*

Доказательство. Пусть $A = B \oplus C$. Тогда

$$\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Hom}\bigl(A, \operatorname{Hom}(A,A)\bigr) \cong \operatorname{Hom}\bigl(B \oplus C, \operatorname{Hom}(B \oplus C, B \oplus C)\bigr) \cong \operatorname{Mult} B \oplus H',$$

где H' — легко вычисляемое дополнительное прямое слагаемое. □

Теорема 2. *Редуцированная часть группы умножений абелевой группы без кручения изоморфна группе умножений её редуцированной части.*

Доказательство. Пусть

$$A = D(A) \oplus R(A).$$

Тогда

$$\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Mult}\bigl(D(A) \oplus R(A)\bigr) \cong \\ \cong \operatorname{Hom}\Bigl(A, \operatorname{Hom}\bigl(A, D(A)\bigr)\Bigr) \oplus \operatorname{Hom}\Bigl(A, \operatorname{Hom}\bigl(A, R(A)\bigr)\Bigr).$$

Так как A — группа без кручения, то

$$R\biggl(\operatorname{Hom}\Bigl(A, \operatorname{Hom}\bigl(A, D(A)\bigr)\Bigr)\biggr) = 0$$

и

$$R(\operatorname{Mult} A) \cong \operatorname{Hom}\Bigl(A, \operatorname{Hom}\bigl(A, R(A)\bigr)\Bigr) \cong \\ \cong \operatorname{Hom}\Bigl(A, \operatorname{Hom}\bigl(D(A), R(A)\bigr)\Bigr) \oplus \operatorname{Hom}\Bigl(A, \operatorname{Hom}\bigl(R(A), R(A)\bigr)\Bigr).$$

Известно, что

$$\operatorname{Hom}\bigl(D(A), R(A)\bigr) = 0.$$

Следовательно,

$$R(\operatorname{Mult} A) \cong \operatorname{Hom}\Bigl(A, E^+\bigl(R(A)\bigr)\Bigr) \cong \\ \cong \operatorname{Hom}\Bigl(D(A), E^+\bigl(R(A)\bigr)\Bigr) \oplus \operatorname{Hom}\Bigl(R(A), E^+\bigl(R(A)\bigr)\Bigr) —$$

редуцированная группа, значит,

$$\operatorname{Hom}\Bigl(D(A), E^+\bigl(R(A)\bigr)\Bigr) = 0.$$

Мы получили, что

$$R(\operatorname{Mult} A) \cong \operatorname{Hom}\Bigl(R(A), E^+\bigl(R(A)\bigr)\Bigr) \cong \operatorname{Mult}\bigl(R(A)\bigr).$$ □

Замечание 1. В общем случае теорема 2 не верна. Например, она не выполняется для группы $\mathbf{Z}(p^\infty) \oplus \mathbf{Z}$.

Теорема 3. *Делимая абелева группа без кручения определяется своей группой умножений в классе всех абелевых групп тогда и только тогда, когда её ранг конечен и является произведением различных простых чисел.*

Доказательство. Необходимость. Если A — делимая абелева группа без кручения бесконечного ранга $r(A)$, то группу B строим следующим образом:

$$B = A \oplus A_1,$$

где A_1 — абелева группа без кручения ранга 1 типа, содержащего характеристику, состоящую только из единиц. Очевидно, что группы A, B неизоморфны, а их группы умножений изоморфны.

Пусть теперь ранг $r(A)$ конечен и $r(A) = mn^2$, где $m, n \in \mathbf{N}$, $n > 1$. Поскольку $\operatorname{Mult} A$ — делимая группа без кручения конечного ранга и

$$r(\operatorname{Mult} A) = r(A)^3,$$

то

$$r(\operatorname{Mult} A) = m^3 n^6.$$

Строим группу B следующим образом:

$$B \cong \bigoplus_k Q \oplus \bigoplus_s A_1,$$

где $k = m$, $s = m(n^3 - 1)$.

Достаточность. Пусть

$$A \cong \bigoplus_n Q, \quad n \in \mathbf{N},$$

и B — такая абелева группа, что

$$\operatorname{Mult} B \cong \operatorname{Mult} A \cong \bigoplus_{n^3} Q.$$

Тогда B — группа без кручения. Поэтому если n свободно от квадратов чисел, больших единицы, то оно равно произведению различных простых чисел $n = p_1 \cdots p_k$ и

$$r(\operatorname{Mult} A) = p_1^3 \cdots p_k^3.$$

Пусть

$$r(B) = m, \quad r(D(B)) = k.$$

Тогда имеем

$$n^3 = m^2 k.$$

Поскольку p_i делят k и k не превосходит m, то $k = n$, и следовательно,

$$A \cong D(A) \cong D(B).$$

Учитывая конечность ранга, получаем, что $A \cong B$. □

Теорема 4. *Класс* $\mathbf{F}_{\mathrm{cdfi}}$ *всех вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга, у которых каждое прямое слагаемое ранга* 1 *идемпотентного типа, является* Mult*-классом.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathbf{F}_{\mathrm{cdfi}}$ и $\operatorname{Mult} A \cong \operatorname{Mult} B$. Заметим, что

$$\Omega(A) = \Omega(\operatorname{Mult} A) = \Omega(\operatorname{Mult} B) = \Omega(B).$$

Рассмотрим минимальный тип $\tau \in \Omega(A)$. Обозначим число прямых слагаемых ранга 1 типа τ фиксированного разложения группы A через $n_A(\tau)$. Тогда

$$n_{\operatorname{Mult} A}(\tau) = [n_A(\tau)]^3,$$

следовательно,

$$n_A(\tau) = n_B(\tau).$$

Рассмотрим теперь минимальный тип

$$\tau' \in \Omega(A) \setminus \{\tau\}.$$

Возможны два варианта:

а) типы τ' и τ несравнимы,
б) $\tau' < \tau$.

В случае а), повторяя рассуждения, проведённые выше, получаем

$$n_A(\tau') = n_B(\tau').$$

В случае б) имеем

$$n_{\operatorname{Mult} A}(\tau') = [n_A(\tau') + n_A(\tau)]^2 n_A(\tau') = n_{\operatorname{Mult} B}(\tau') = [n_B(\tau') + n_B(\tau)]^2 n_B(\tau').$$

Ясно, что при

$$n_A(\tau') > n_B(\tau')$$

получаем

$$n_{\operatorname{Mult} A}(\tau') > n_{\operatorname{Mult} B}(\tau').$$

Противоречие. Таким образом, снова имеем равенство

$$n_A(\tau') = n_B(\tau').$$

Аналогичным образом получаем

$$n_A(\tau'') = n_B(\tau''),$$

где τ'' — некоторый минимальный тип из

$$\tau' \in \Omega(A) \setminus \{\tau, \tau'\}.$$

Учитывая конечность ранга, имеем

$$A \cong B. \qquad \square$$

Теорема 5. $\mathbf{F}_{\mathrm{cdf}}(\mathrm{Mult}) \neq \varnothing$.

Доказательство. Строим группу $A \in \mathbf{F}_{\mathrm{cdf}}$ следующим образом:

$$A = \mathbf{Q} \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus A_3 \oplus A_4,$$

где τ_k содержит характеристику

$$(k, k, k, \ldots), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Получаем

$$\mathrm{Mult}\, A \cong \bigoplus_{25} \mathbf{Q} \oplus A_1 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \bigoplus_{6} \mathbf{Z}.$$

Поэтому если

$$\mathrm{Mult}\, A \cong \mathrm{Mult}\, B,$$

то $r(B) = 5$. Следовательно,

$$B = \mathbf{Q} \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_4,$$

где B_k, $k = 1, 2, 3, 4,$ — редуцированные группы ранга 1. Ясно, что группа B не содержит свободных прямых слагаемых. С другой стороны, группа $\mathrm{Mult}\, B$ содержит такое прямое слагаемое ранга 6. Следовательно, все группы B_k не делимы ни на какие простые числа, их типы не идемпотентны и содержат характеристики, состоящие из одинаковых положительных чисел. Наконец, чтобы в группе $\mathrm{Mult}\, B$ имелось слагаемое

$$A_1 \oplus A_1 \oplus A_2,$$

группы B_k, $k = 1, 2, 3, 4$, должны быть изоморфны A_k, $k = 1, 2, 3, 4$. Итак,

$$A \cong B. \qquad \square$$

Замечание 2. Отметим,что в теореме 5 $A \in \mathbf{F}_{\mathrm{cdf}} \setminus \mathbf{F}_{\mathrm{cdfi}}$.

Приведём примеры неизоморфных групп с изоморфными группами умножений.

Пример 1.

$$A = \bigoplus_{4} \mathbf{Q}, \quad B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_7 \oplus \mathbf{Q},$$

где

$$(7070\ldots) \in \tau(B_1), \quad (6161\ldots) \in \tau(B_2), \quad (5252\ldots) \in \tau(B_3), \quad (4343\ldots) \in \tau(B_4),$$
$$(3434\ldots) \in \tau(B_5), \quad (2525\ldots) \in \tau(B_6), \quad (1616\ldots) \in \tau(B_7).$$

Пример 2.

$$A = \bigoplus_{8} \mathbf{Q}, \quad B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_{16} \oplus \mathbf{Q},$$

где тип $\tau(B_k)$, $k = 1, 2, \ldots, 16$, содержит характеристику, имеющую единицы на местах, сравнимых с k по модулю 16, и нули на остальных местах.

Литература

[1] Агафонов А. А., Себельдин А. М. Абелева группа как прямое слагаемое группы умножений // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 9—12.

[2] Себельдин А. М. Определяемость абелевых групп. — Palmarium Acad. Publ., 2012.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.