Об определяемости вполне разложимой абелевой группы без кручения её группой автоморфизмов

В. К. ВИЛЬДАНОВ
Нижегородский государственный университет
имени Н. И. Лобачевского
e-mail: kadirovi4@googlemail.com

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа без кручения, группа автоморфизмов, идемпотентный тип.

Аннотация

Получены достаточные условия определяемости группы её группой автоморфизмов в классе вполне разложимых абелевых групп без кручения, прямые слагаемые ранга 1 которых имеют идемпотентные типы.

Abstract

V. K. Vildanov, On determinability of a completely decomposable torsion-free Abelian group by its automorphism group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 31—37.

In this paper, we consider the question of determinability of an Abelian group by its automorphism group in the class of completely decomposable torsion-free Abelian groups whose direct summands of rank 1 have idempotent types.

Будем говорить, что абелева группа A определяется своей группой автоморфизмов в классе групп $\mathbf{X}$, если из того, что $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$, где $B \in \mathbf{X}$, всегда следует, что $A \cong B$.

Вопрос определяемости абелевой группы её группой автоморфизмов в классе p-групп рассматривался в [5, 6]. В [1] изучалась определяемость вполне разложимой абелевой группы без кручения ранга 2 её группой автоморфизмов. Условия определяемости блочно-жёсткой вполне разложимой группы её группой автоморфизмов рассматриваются в [2]. В настоящей работе найдены достаточные условия определяемости вполне разложимых абелевых групп, прямые слагаемые ранга 1 которых имеют идемпотентные типы.

Обозначим $\mathbf{F}_{\mathrm{cd}}$ класс всех вполне разложимых абелевых групп без кручения. Класс всех вполне разложимых абелевых групп без кручения, прямые слагаемые ранга 1 которых имеют идемпотентные типы, обозначим $\mathbf{F}_{\mathrm{cdi}}$.

Рассмотрим группу $A \in \mathbf{F}_{\mathrm{cd}}$ конечного ранга. Можем записать

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 31—37.

Тогда кольцо $E(A)$ изоморфно кольцу матриц $\mathrm{M}(A)$ с рациональными коэффициентами [4], причём при подходящей перестановке слагаемых группы A матрицы имеют блочно-верхнетреугольный вид. Несложно показать, что матрица $[b_{ji}] \in \mathrm{M}(A)$ обратима тогда и только тогда, когда для любого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ определитель $\det B_k$ обратим в кольце $E(A_k)$, где B_k — подматрица матрицы $[b_{ji}]$, образованная пересечением всех строк и столбцов j и i, для которых $A_j \cong A_i \cong A_k$.

Далее мы будем отождествлять группу $\mathrm{Aut}\, A$ и группу соответствующих матриц везде, где это удобно. Единичную матрицу порядка n будем обозначать I_n. Централизатор множества M в группе G обозначим $C_G(M)$, центр группы G обозначим $Z(G)$. Все вполне разложимые группы будем считать 2-делимыми конечного ранга.

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathbf{F}_{\mathrm{cd}}$, $A = A_1 \oplus A_2$ и $\mathrm{Hom}((,A)_1, A_2) = 0$. Тогда для любого множества $K \in \mathrm{Aut}\, A$ из $2^{r(A)}$ коммутирующих инволюций найдётся подходящий автоморфизм $\gamma \in \mathrm{Aut}\, A$, такой что*

$$\gamma K \gamma^{-1} \subset \mathrm{Aut}\, A_1 \times \mathrm{Aut}\, A_2.$$

Доказательство. Если $\mathrm{Hom}(A_2, A_1) = 0$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\mathrm{Hom}(A_2, A_1) \neq 0$. Обозначим $n = r(A)$, $n_1 = r(A_1)$ и $n_2 = r(A_2)$. Пусть K — множество коммутирующих инволюций и $|K| = 2^n$. Так как $\mathrm{Hom}(A_1, A_2) = 0$, то всякая инволюция $\alpha \in K$ имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} C & H \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

где $C \in \mathrm{Aut}\, A_1$, $D \in \mathrm{Aut}\, A_2$, $C^2 = I_{n_1}$, $D^2 = I_{n_2}$ и $CH + HD = 0$. Всякой инволюции $\alpha \in K$ можно поставить в соответствие инволюцию

$$\alpha' = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Покажем, что всякой инволюции α соответствует единственная инволюция вида α'. Предположим, что найдутся такие инволюции $\alpha, \beta \in K$, $\alpha \neq \beta$, для которых $\alpha' = \beta'$. Пусть

$$\beta = \begin{pmatrix} C & H_1 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Так как $\alpha\beta = \beta\alpha$ и $\alpha^2 = \beta^2 = I_n$, то

$$CH_1 + HD = CH + H_1 D, \quad CH_1 + H_1 D = CH + HD = 0.$$

Из этих уравнений получаем, что $H = H_1$ и $\alpha = \beta$. Противоречие. Таким образом, множеству K соответствует множество K' коммутирующих инволюций и $|K'| = 2^n$.

Рассмотрим инволюцию $\delta = [-I_{n_1}, I_{n_2}]$. Имеем, что $\delta\alpha' = \alpha'\delta$ для любой инволюции $\alpha' \in K'$. Получаем, что $K' \cup \{\delta\}$ — множество коммутирующих инволюций. Так как $|K' \cup \{\delta\}| \leqslant 2^n$ и $|K'| = 2^n$, то $\delta \in K'$. Отсюда следует, что множество K содержит инволюцию вида

$$\lambda = \begin{pmatrix} -I_{n_1} & H \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим

$$\gamma = \begin{pmatrix} I_{n_1} & -\frac{1}{2}H \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Так как $2A = A$, то

$$-\frac{1}{2}H \in \operatorname{Hom}(A_2, A_1).$$

Следовательно, $\gamma \in \operatorname{Aut} A$. Получаем, что $\gamma\lambda\gamma^{-1} = \delta$. Тогда $\gamma K \gamma^{-1} \subset C_{\operatorname{Aut} A}(\delta)$. Поскольку $C_{\operatorname{Aut} A}(\delta) = \operatorname{Aut} A_1 \times \operatorname{Aut} A_2$, то $\gamma K \gamma^{-1} \subset \operatorname{Aut} A_1 \times \operatorname{Aut} A_2$. □

Лемма 2. *Пусть* $A, B \in \mathbf{F}_{\mathrm{cd}}$ *и* $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. *Тогда для любого* $\tau \in \Omega_A$, $r(A^\tau) > 1$, *найдётся* $\sigma \in \Omega_B$, *такой что*

$$E^+(A^\tau) \cong E^+(B^\sigma).$$

Доказательство. Покажем сначала, что

$$\prod_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau \overset{\varphi}{\cong} \prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau.$$

Если группы A и B однородные или блочно-жёсткие, то это утверждение очевидно.

Пусть одна из групп, например B, имеет сравнимые и не равные типы. Тогда $\operatorname{Hom}(B_1, B_2) = 0$ для некоторого разложения $B = B_1 \oplus B_2$. Так как $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$, то $r(A) = r(B) = n$ [1, лемма 2]. Обозначим $n_1 = r(B_1)$, $n_2 = r(B_2)$. Рассмотрим в группе $\operatorname{Aut} A$ множество диагональных инволюций K, $|K| = 2^n$. Пусть $K^* = \varphi(K)$. Поскольку изоморфизм φ сохраняет коммутирующие инволюции, то K^* — множество из 2^n коммутирующих инволюций в группе $\operatorname{Aut} B$.

Покажем, что существует изоморфизм φ', такой что

$$\varphi'(K) \subset \prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau, \tag{1}$$

где $\varphi'(x) = \gamma\varphi(x)\gamma^{-1}$ для подходящего автоморфизма $\gamma \in \operatorname{Aut} B$. Если $|\Omega_B| = 2$, то существование такого изоморфизма следует из леммы 1. Предположим, что для всех Ω_B, таких что $|\Omega_B| < t$, указанный изоморфизм существует. Пусть теперь $|\Omega_B| = t$.

1. Если $\operatorname{Hom}(B_2, B_1) = 0$, то $\operatorname{Aut} B = \operatorname{Aut} B_1 \times \operatorname{Aut} B_2$ и $K^* \subset \operatorname{Aut} B_1 \times \operatorname{Aut} B_2$. Можем записать $K^* = K_1 \times K_2$, где K_1 и K_2 — множества коммутирующих инволюций в группах $\operatorname{Aut} B_1$ и $\operatorname{Aut} B_2$ соответственно. Понятно, что $|K_1| = 2^{n_1}$, $|K_2| = 2^{n_2}$. Так как $|\Omega_{B_1}| < t$ и $|\Omega_{B_2}| < t$, то по предположению получим, что существуют автоморфизмы $\gamma_1 \in \operatorname{Aut} B_1$, $\gamma_2 \in \operatorname{Aut} B_2$, такие что

$$\varphi\colon K \to \gamma_1 K_1 \gamma_1^{-1} \times \gamma_2 K_2 \gamma_2^{-1} \subset \prod_{\tau\in\Omega_{B_1}} \operatorname{Aut} B^\tau \times \prod_{\tau\in\Omega_{B_2}} \operatorname{Aut} B^\tau.$$

Отождествим автоморфизмы γ_1 и γ_2 с соответствующими автоморфизмами группы $\operatorname{Aut} B$. Тогда существует изоморфизм φ', при котором выполняется (1).

2. Пусть теперь $\operatorname{Hom}(B_2, B_1) \neq 0$. Тогда $\operatorname{Aut} B$ изоморфна группе матриц, указанной в лемме 1. Следовательно, существует $\gamma_3 \in \operatorname{Aut} B$, такой что $\gamma_3 K^* \gamma_3^{-1} \subset \operatorname{Aut} B_1 \times \operatorname{Aut} B_2$. Опять можем записать $\gamma_3 K^* \gamma_3^{-1} = K_1 \times K_2$ и по доказанному выше получим существование изоморфизма φ'.

Итак, заменяя изоморфизм φ на изоморфизм φ', можем считать, что

$$\varphi\colon K \to K^* \subset \prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau. \tag{2}$$

Рассмотрим множества инволюций $L \subset K$, $L^* \subset K^*$, таких что

$$L \subset Z\Bigl(\prod_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau\Bigr), \quad L^* \subset Z\Bigl(\prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau\Bigr).$$

Покажем, что $\varphi(L) = L^*$. Очевидно, что любая инволюция из L не сопряжена ни с одной отличной от неё инволюцией из K и всякая инволюция из $K \setminus L$ сопряжена с некоторой инволюцией из K. С другой стороны, либо всякое сопряжение инволюции α из L^* сохраняет инволюцию $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha$, либо

$$\beta\alpha\beta^{-1} \not\subset \prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau.$$

Значит, $L^* \subset \varphi(L)$. Отсюда следует, что $|L^*| \leqslant |L|$. Поменяв в рассуждениях группы A и B, получим, что $|L^*| \geqslant |L|$. Следовательно, $|L^*| = |L|$ и $\varphi(L) = L^*$.

Рассматривая централизаторы этих множеств инволюций, получим

$$\prod_{\tau\in\Omega_A} \operatorname{Aut} A^\tau \cong C_{\operatorname{Aut} A}(L) \cong C_{\operatorname{Aut} B}(L^*) \cong \prod_{\tau\in\Omega_B} \operatorname{Aut} B^\tau.$$

По [2, лемма 2] получаем утверждение теоремы. □

Лемма 3. *Пусть $A, B \in \mathbf{F}_{\mathrm{cd}}$ и $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$. Тогда для любых $\tau, \tau' \in \Omega_A$ $(\tau < \tau')$ найдутся $\sigma, \sigma' \in \Omega_B$ $(\sigma < \sigma')$, такие что*

$$\operatorname{Hom}(A^\tau, A^{\tau'}) \cong \operatorname{Hom}(B^\sigma, B^{\sigma'}).$$

Доказательство. Из [2, лемма 1] следует, что $|\Omega_A| = |\Omega_B| = t$. Пусть $\tau, \tau' \in \Omega_A$ и $\tau < \tau'$. Тогда $\operatorname{Hom}(A^\tau, A^{\tau'}) \neq 0$. Отождествляя группу автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$ с группой соответствующих матриц, рассмотрим в $\operatorname{Aut} A$ подгруппу R_1, которая при подходящей перестановке слагаемых группы A состоит из матриц следующего вида:

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{tt} \end{pmatrix},$$

где $a_{11} \in \operatorname{Aut} A^{\tau'}$, $a_{22} \in \operatorname{Aut} A^\tau$, $a_{12} \in \operatorname{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$.

В лемме 2 показано, что из изоморфизма $\mathrm{Aut}\,A \cong \mathrm{Aut}\,B$ следует существование изоморфизма $\varphi\colon L \to L^*$, где L и L^* — центральные инволюции групп $\prod\limits_{\tau\in\Omega_A} \mathrm{Aut}\,A^\tau$ и $\prod\limits_{\tau\in\Omega_B} \mathrm{Aut}\,B^\tau$ соответственно. Очевидно, что множество инволюций $\bar{L}$ из $Z(R_1)$ является подгруппой L. Рассмотрим $\varphi(\bar{L}) \subset L^*$. Так как $R_1 = C_{\mathrm{Aut}\,A}(\bar{L})$, то

$$\varphi(R_1) = \varphi\big(C_{\mathrm{Aut}\,A}(\bar{L})\big) = C_{\mathrm{Aut}\,A}\big(\varphi(\bar{L})\big).$$

Центр группы R_1 содержит 2^{t-1} инволюций. Значит, это верно и для $R_2 = C_{\mathrm{Aut}\,B}\big(\varphi(\bar{L})\big)$. Централизатор любой подгруппы из L^* содержит в качестве подгруппы группу $\prod\limits_{\tau\in\Omega_B} \mathrm{Aut}\,B^\tau$. Более того, так как $Z(R_2)$ содержит 2^{t-1} инволюций, то для некоторых $\sigma, \sigma' \in \Omega_B$ $(\sigma < \sigma')$ матрица $\beta \in R_2$ при подходящей перестановке слагаемых группы B имеет вид

$$\beta = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{tt} \end{pmatrix},$$

где $b_{11} \in \mathrm{Aut}\,B^{\sigma'}$, $b_{22} \in \mathrm{Aut}\,B^{\sigma}$, $b_{12} \in \mathrm{Hom}(B^\sigma, B^{\sigma'})$ и $b_{ij} = 0$ для любых $i \neq 1$, $j \neq 2$, $i \neq j$.

Рассмотрим $\lambda \in L$,

$$\lambda = \begin{pmatrix} -I_{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_{n_t} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\lambda \notin Z(R_1)$. Тогда

$$\varphi(\lambda) = \begin{pmatrix} -I_{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \pm I_{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pm I_{n_t} \end{pmatrix},$$

или

$$\varphi(\lambda) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -I_{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \pm I_{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \pm I_{n_t} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим группы

$$T_1 = \{\gamma\lambda\gamma^{-1}\lambda\colon \gamma \in R_1\}, \quad T_2 = \{\varphi(\gamma)\varphi(\lambda)\varphi(\gamma^{-1})\varphi(\lambda)\colon \varphi(\gamma) \in R_2\}.$$

Очевидно, что $T_1 \cong T_2$. Покажем, что $T_1 \cong \mathrm{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$. Обозначим $H(x)$ матрицу следующего вида:

$$H(x) = \begin{pmatrix} I_{n_1} & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_{n_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_{n_t} \end{pmatrix},$$

где $x \in \mathrm{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$. Все такие матрицы соберём в группу H. Очевидно, что $H \cong \mathrm{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$ и $T_1 < H$. Покажем, что $H \subset T_1$. Пусть $x \in \mathrm{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$. Тогда $H(x) = H(x/2)\lambda H(-x/2)\lambda$. Следовательно, $H(x) \in T_1$ и $H \subset T_1$. Получили, что $T_1 \cong \mathrm{Hom}(A^\tau, A^{\tau'})$. Аналогично получаем, что $T_2 \cong \mathrm{Hom}(B^\sigma, B^{\sigma'})$. $\square$

Теорема. *Пусть $A \in \mathbf{F}_{\mathrm{cdi}}$ и для всякого минимального типа $\tau \in \Omega_A$ имеет место неравенство $r(A^\tau) > 1$. Тогда группа A определяется в классе $\mathbf{F}_{\mathrm{cdi}}$ её группой автоморфизмов.*

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы и $\mathrm{Aut}\, A \cong \mathrm{Aut}\, B$. Покажем, что в таком случае $A \cong B$. Рассмотрим $\tau \in \Omega_A$, $r(A^\tau) > 1$. По лемме 2 получаем, что $E^+(A^\tau) \cong E^+(B^\sigma)$ для некоторого типа σ. Поскольку прямые слагаемые ранга 1 групп A и B имеют идемпотентные типы, то $A^\tau \cong B^\sigma$ [3].

Пусть теперь $r(A^\tau) = 1$. Так как тип τ не минимальный, то найдётся такой тип $\tau' \in \Omega_A$, что $\tau > \tau'$. Тогда по лемме 3 найдутся такие типы $\sigma > \sigma'$, что

$$\mathrm{Hom}(A^{\tau'}, A^\tau) \cong \mathrm{Hom}(B^{\sigma'}, B^\sigma).$$

Так как прямые слагаемые ранга 1 групп A и B имеют идемпотентные типы, то

$$\mathrm{Hom}(A^{\tau'}, A^\tau) \cong \bigoplus_{r(A^{\tau'})} A^\tau, \quad \mathrm{Hom}(B^{\sigma'}, B^\sigma) \cong \bigoplus_{r(B^{\sigma'})} B^\sigma.$$

Получаем, что $\tau = \sigma$.

Предположим, что $r(B^\sigma) > 1$. Тогда по лемме 2 найдётся такой тип τ, что $E^+(A^\tau) \cong E^+(B^\sigma)$. Следовательно, $A^\tau \cong B^\sigma$ (см. [3]) и $r(A^\tau) = r(B^\tau)$, но $r(A^\tau) = 1$. Противоречие. $\square$

Следующий пример показывает, что это условие не является необходимым.

Пусть

$$\tau_1 = (\infty, \infty, 0, 0, \dots), \quad \tau_2 = (\infty, 0, 0, 0, \dots), \quad \tau_3 = (\infty, 0, \infty, 0, \dots).$$

Можно доказать, что группа

$$A = A_{\tau_1} \oplus A_{\tau_1} \oplus A_{\tau_2} \oplus A_{\tau_3} \oplus A_{\tau_3}$$

определяется её группой автоморфизмов в классе $\mathbf{F}_{\mathrm{cdi}}$.

Литература

[1] Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестн. Нижегородск. ун-та им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — № 3 (1). — С. 174—177.

[2] Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой блочно жёсткой абелевой группы без кручения её группой автоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 13—19.

[3] Себельдин А. М. Полные прямые суммы абелевых групп без кручения ранга 1 с изоморфными группами или кольцами эндоморфизмов. I // Матем. заметки. — 1973. — Т. 14, № 6. — С. 867—878.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.

[5] Leptin H. Abelsche p-gruppen und ihre Automorphismengruppen // Math. Z. — 1960. — Vol. 73. — P. 235—253.

[6] Liebert W. Isomorphic automorphism groups of primary Abelian groups // Abelian Group Theory. Proc. of the 1985 Oberwolfach Conf. — New York: Gordon and Breach, 1987. — P. 9—31.