О некоторых классах хопфовых абелевых групп и модулей

Е. В. КАЙГОРОДОВ
Томский государственный университет
e-mail: gazetaintegral@gmail.com

П. А. КРЫЛОВ
Томский государственный университет
e-mail: krylov@math.tsu.ru

УДК 512.541+512.553

Ключевые слова: абелева группа, хопфова группа, вполне разложимая группа, однородная группа, группа без кручения, хопфов модуль, кольцо обобщённых матриц.

Аннотация

Изучается свойство хопфовости в таком известном классе абелевых групп, как вполне разложимые группы без кручения, а также в классе модулей над кольцами обобщённых матриц. Построены примеры нехопфовых вполне разложимых групп без кручения.

Abstract

E. V. Kaigorodov, P. A. Krylov, On some classes of Hopfian Abelian groups and modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 61—68.

The Hopficity property in a well-known class of Abelian groups—completely decomposable torsion-free groups, as well as in a class of modules over generalized matrix rings is studied. Examples of non-Hopfian completely decomposable torsion-free group are constructed.

Введение

Свойство хопфовости различных алгебраических систем (в том числе абелевых групп и модулей), а также его некоторые обобщения и приложения изучались многими авторами (см. библиографию в [1,2]).

В данной работе мы продолжаем начатое в [1,2] исследование хопфовых абелевых групп и модулей. В [1] это изучение проводилось для делимых групп и прямых сумм циклических групп. Там же приведены общие свойства хопфовых абелевых групп, в частности связанные с прямыми разложениями. На основе описания делимых групп исследование хопфовости произвольных абелевых групп было сведено к исследованию хопфовости редуцированных групп. В [2] получено полное описание хопфовых алгебраически компактных групп.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 61—68.
© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

В той же статье исследовались хопфовы SP-группы: установлено, что хопфовость SP-группы эквивалентна хопфовости её примарных компонент.

Теорема 1.1 даёт одно условие хопфовости вполне разложимой группы без кручения. Во втором разделе построены примеры нехопфовых вполне разложимых групп без кручения. Третий раздел посвящён изучению свойств хопфовости и кохопфовости для модулей над кольцами обобщённых матриц.

Все обозначения и терминология в работе стандартны и соответствуют [6, 10]. Далее в тексте под словом «группа» будет пониматься аддитивно записанная абелева группа.

1. Хопфовы вполне разложимые группы без кручения

Теорема 1.1. *Пусть A — вполне разложимая группа без кручения, причём все её однородные компоненты имеют конечный ранг, а множество типов прямых слагаемых ранга* 1 *группы A удовлетворяет условию минимальности. Тогда A — хопфова группа.*

Доказательство. Запишем каноническое прямое разложение $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, где A_i — однородные компоненты группы A. Согласно условию теоремы, множество типов $\Omega(A) = \{t(A_i) \mid i \in I\}$ удовлетворяет условию минимальности. Для любого $k \in I$ можно записать $A = A_k \oplus B_k$, где $B_k = \bigoplus\limits_{i\neq k} A_i$.

Предположим, напротив, что группа A нехопфова. Зафиксируем некоторый эпиморфизм φ группы A на себя, не являющийся автоморфизмом. Докажем, что для любого индекса $k \in I$ и любого отличного от нуля элемента $a_k \in A_k$ верно, что $\varphi(a_k) \notin B_k$, т. е. что $\varphi(a_k)$ имеет ненулевую координату в A_k (в частности, $\varphi(a_k) \neq 0$).

Пусть сначала индекс $k \in I$ таков, что тип $t(A_k)$ минимален в множестве типов $\Omega(A)$. Допустим, что нашёлся элемент $a_k \in A_k$ со следующими свойствами: $\varphi(a_k) \neq 0$ и $\varphi(a_k) \in B_k$. Напомним, что для каждого $i \in I$ имеет место прямое разложение $A = A_i \oplus B_i$. Поскольку тип $t(A_k)$ минимален среди типов $t(A_i)$, то $\mathrm{Hom}(B_k, A_k) = 0$. Пусть $\pi_k\colon A \to A_k$ — проекция относительно прямого разложения $A = A_k \oplus B_k$. Тогда $A_k \subseteq \pi_k\varphi A_k$ (или, эквивалентно, $A_k \subseteq \pi_k\varphi|_{A_k} A_k$), поскольку φ — эпиморфизм. Из того, что $a_k \in \mathrm{Ker}\,\pi_k\varphi$, заключаем, что $r(\pi_k\varphi A_k) = r(A_k/\,\mathrm{Ker}\,\pi_k\varphi) < r(A_k)$. Но это неравенство противоречит включению $A_k \subseteq \pi_k\varphi A_k$.

Хорошо известно, что множество типов однородных компонент вполне разложимой группы без кручения является дистрибутивной решёткой [6, § 85]. Мы знаем также, что в частично упорядоченном множестве условия минимальности и индуктивности эквивалентны [5, § 5], поэтому дальнейшее доказательство проведём по индукции. Именно, предположим теперь, что k — такой индекс,

что тип $t(A_k)$ не является минимальным в множестве типов $\Omega(A)$ и для всех l, таких что $t(A_l) < t(A_k)$, утверждение доказано.

Сначала покажем следующее. Пусть a_k — некоторый ненулевой элемент однородной компоненты A_k. Если b — такой элемент группы A, что $\varphi(b) = a_k$, то его можно представить в виде $b = b_k + y$, где $b_k \in A_k$, $y \in B_k$ и $\varphi(y) \in B_k$. Заметим, что $b_k \neq 0$. Предположим противное. Относительно прямого разложения $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ запишем:

$$b = b_1 + \ldots + b_l + b_k + c_1 + \ldots + c_t.$$

Здесь $b_1, \ldots, b_l$ — такие элементы, что $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_l)$ имеют ненулевую координату в A_k. По предположению такие элементы обязательно существуют. Элементы $c_1, \ldots, c_t$, если они есть, таковы, что $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_t)$ имеют нулевую координату в A_k, т. е. образы этих элементов при эпиморфизме φ содержатся в B_k.

Запишем прямое разложение

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_l \oplus A_k \oplus A'_1 \oplus \ldots \oplus A'_t \oplus B,$$

где A_j и A'_n для всех $j = 1, \ldots, l$ и $n = 1, \ldots, t$ — это подходящие прямые слагаемые A_i из разложения $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, B — дополнительное слагаемое. Понятно, что для всех j верны неравенства $t(b_j) < t(a_k)$. По предположению индукции элементы $\varphi(b_1), \ldots, \varphi(b_l)$ имеют ненулевые координаты в $A_1, \ldots, A_l$ соответственно. Пусть для определённости тип $t(b_1)$ минимален среди типов $t(b_1), \ldots, t(b_l)$. Итак, $\varphi(b_1)$ имеет ненулевую координату в A_1. Ясно, что среди элементов $c_1, \ldots, c_t$ существует хотя бы один такой, что его образ при эпиморфизме φ имеет ненулевую координату в A_1. Пусть c_1 есть этот элемент. Тогда $t(c_1) < t(b_1) < t(a_k)$. Согласно индуктивному предположению $\varphi(c_1)$ имеет ненулевую координату в A'_1. Значит, среди элементов $b_1, \ldots, b_l, b_k, c_1, \ldots, c_t$ найдётся хотя бы один такой, что его образ при эпиморфизме φ имеет ненулевую координату в A'_1. Обозначим этот элемент через x. Тогда $t(x) < t(c_1)$. Учтя минимальность $t(b_1)$ и то, что $t(c_1) < t(a_k)$, получаем, что x — один из элементов $c_2, \ldots, c_l$. Пусть для простоты $x = c_2$. Итак, $t(c_2) < t(c_1) < t(a_k)$. Отсюда заключаем, что $\varphi(c_2)$ имеет ненулевую координату в A_2. Далее рассуждаем аналогично для элементов $c_2, \ldots, c_t$ и ввиду конечности их числа приходим к противоречию. Так что $b_1 = \ldots = b_l = 0$, и потому $b = b_k + c_1 + \ldots + c_t = b_k + y$. Вспоминая, что элементы $\varphi(c_1), \ldots, \varphi(c_t)$ имеют нулевую координату в A_k, получаем, что $\varphi(y) \in B_k$.

Вернёмся к доказательству нашего утверждения. Допустим, что нашёлся элемент $a_k \in A_k$, для которого $\varphi(a_k) \neq 0$ и $\varphi(a_k) \in B_k$. Выберем в группе A элемент b со свойством $\varphi(b) = a_k$. По доказанному $b = b_k + y$, где $b_k \in A_k$, $y \in B_k$ и $\varphi(y) \in B_k$ (как уже было замечено, $b_k \neq 0$).

Применяя [6, лемма 86.8], получаем прямое разложение $A_k = \langle a_k \rangle_* \oplus C$ для некоторой группы C. Запишем элемент b_k относительно этого разложения: $b_k = a' + c_k$. При этом $c_k \neq 0$. Действительно, если $c_k = 0$, то $a_k = \varphi(b) = \varphi(b_k) + \varphi(y) = \varphi(a') + \varphi(y)$. Но $a' \in \langle a_k \rangle_*$, а $\varphi(a_k) \in B_k$, поэтому и $\varphi(a') \in B_k$. Отсюда

следует, что $a_k \in B_k$, что невозможно. Далее, $\varphi(b_k) = \varphi(b) - \varphi(y) \in \langle a_k \rangle_* \oplus B_k$ и $\varphi(c_k) = \varphi(b_k) - \varphi(a') \in \langle a_k \rangle_* \oplus B_k$.

Теперь запишем прямое разложение $A_k = \langle a_k \rangle_* \oplus \langle c_k \rangle_* \oplus E$ для какой-то группы E. Выполним затем аналогичный шаг. Именно, существует элемент $d \in A$ со свойством $\varphi(d) = c_k$. Тогда $d = d_k + z$, где $d_k \in A_k$, $d_k \neq 0$, $\varphi(z) \in B_k$. Запишем $d_k = a'' + c'' + e_k$, где $a'' \in \langle a_k \rangle_*$, $c'' \in \langle c_k \rangle_*$, $e_k \in E$. Здесь снова $e_k \neq 0$, поскольку из $e_k = 0$ получаем, что

$$c_k = \varphi(d) = \varphi(d_k) + \varphi(z) = \varphi(a'') + \varphi(c'') + \varphi(z),$$

поэтому $c_k \in \langle a_k \rangle_* \oplus B_k$. Но это невозможно. Следовательно, имеет место прямое разложение

$$A_k = \langle a_k \rangle_* \oplus \langle c_k \rangle_* \oplus \langle e_k \rangle_* \oplus G$$

для некоторой группы G, причём $\varphi(e_k) \in \langle a_k \rangle_* \oplus \langle c_k \rangle_* \oplus B_k$.

Рассуждая далее аналогично, будем получать прямые разложения однородной компоненты A_k со сколь угодно большим числом прямых слагаемых ранга 1. Но этого не может быть в силу конечности ранга группы A_k. Получили противоречие. Итак, мы доказали, что $\varphi(a_k) \notin B_k$ для любого $k \in I$ и любого ненулевого $a_k \in A_k$.

Выберем теперь в группе A такой ненулевой элемент a, что $\varphi(a) = 0$. Запишем $a = a_1 + \ldots + a_n$, где $a_i \in A_i$, причём $\varphi(a_i) \neq 0$ для каждого i. Пусть для определённости тип $t(a_1)$ минимален среди типов $t(a_1), \ldots, t(a_n)$. Утверждаем, что $\varphi(a_2) \in B_1, \ldots, \varphi(a_n) \in B_1$. Если, например, $\varphi(a_2) \notin B_1$, то $\varphi(a_2)$ имеет ненулевую координату w в A_1. Следовательно, $t(a_2) \leqslant t(w) = t(a_1)$. Строгое неравенство невозможно из-за минимальности $t(a_1)$. Имеем, что $t(a_2) = \ldots = t(a_n) = t(a_1)$, откуда следует, что $\varphi(a_2) \in B_1, \ldots, \varphi(a_n) \in B_1$. Ясно, что тогда $\varphi(a_1) \in B_1$. Получили, что $a_1 \in A_1$, а $\varphi(a_1) \in B_1$. Но такая ситуация невозможна, как установлено выше, поэтому наше предположение о нехопфовости группы A неверно. $\square$

Опираясь на доказанную теорему, нетрудно понять, что существуют разнообразные нехопфовы вполне разложимые группы без кручения. Полезно построить примеры таких групп.

2. Примеры нехопфовых вполне разложимых групп

Прежде чем привести примеры, сформулируем один вспомогательный вопрос и дадим на него ответ. Пусть A, B, C — группы без кручения ранга 1, причём $t(B) < t(A)$ и $t(C) < t(A)$. Выясним, когда существует эпиморфизм $B \oplus C \to A$.

Так как $t(B) < t(A)$ и $t(C) < t(A)$, то группы B и C можно считать подгруппами в A. В таком случае существование эпиморфизма $B \oplus C \to A$ равносильно выполнению равенства $t(B + C) = t(A)$. Действительно, пусть $\varphi\colon B \oplus C \to A$ — некоторый эпиморфизм. Тогда $\varphi(B \oplus C) = \varphi(B) + \varphi(C) = A$. Ясно, что ограничения $\varphi|_B\colon B \to A$, $\varphi|_C\colon C \to A$ — мономорфизмы. Следовательно, $\varphi(B) \cong B$ и

$\varphi(C) \cong C$. Если мы считаем B и C подгруппами в A, то группы $\varphi(B)$ и B квазиравны, аналогично квазиравны группы $\varphi(C)$ и C. Тогда квазиравны группы $B + C$ и A. Следовательно, $t(B + C) = t(A)$.

Обратно, предположим, что $t(B + C) = t(A)$. Тогда группы $B + C$ и A квазиравны. Более точно, $B + C = nA$ для некоторого натурального числа n. Теперь несложно построить эпиморфизм $B \oplus C \to A$. Пусть $\varphi\colon B \oplus C \to B + C$ — сумма некоторых изоморфизмов $B \cong B$ и $C \cong C$. Затем возьмём изоморфизм $\psi\colon nA \to A$, $\psi\colon na \mapsto a$. Композиция $\psi\varphi$ будет эпиморфизмом $B \oplus C \to A$.

Итак, существование эпиморфизма $B \oplus C \to A$ равносильно равенству $t(B + C) = t(A)$, если считать B и C подгруппами в A.

Следующий простой факт можно вывести из теоремы 1.4 из [7], содержащей описание фактор-групп группы без кручения ранга 1.

Лемма 2.1 [7, § 1, упр. 1.6]. *Если B и C — подгруппы группы без кручения A ранга 1, то $t(B + C) = \sup\{t(B),\ t(C)\}$.* □

Эта лемма вместе с предыдущими рассуждениями приводят к следующему результату.

Следствие 2.2. *Пусть A, B и C — группы без кручения ранга 1, причём $t(B) < t(A)$ и $t(C) < t(A)$. Тогда существование эпиморфизма $B \oplus C \to A$ равносильно справедливости равенства $\sup\{t(B), t(C)\} = t(A)$.* □

Отметим, что лемму 2.1 и следствие 2.2 можно распространить на любое конечное множество подгрупп группы без кручения ранга 1 [7, § 1, упр. 1.6].

С помощью следствия 2.2 теперь можно легко строить нехопфовы вполне разложимые группы без кручения, все однородные компоненты которых имеют конечный ранг. Именно, можно выбрать группы $A_1^{(1)}$, $A_2^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ без кручения ранга 1 так, что существует эпиморфизм $A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)} \to A_1^{(1)}$. Затем выбираем группы $A_3^{(1)}$ и $A_3^{(2)}$, $A_3^{(3)}$ и $A_3^{(4)}$, для которых имеются эпиморфизмы $A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)} \to A_2^{(1)}$, $A_3^{(3)} \oplus A_3^{(4)} \to A_2^{(2)}$. Далее повторяем аналогичные построения для каждой из групп $A_3^{(1)}$, $A_3^{(2)}$, $A_3^{(3)}$, $A_3^{(4)}$ и т. д.

Пусть A обозначает прямую сумму

$$A_1^{(1)} \oplus \left(A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)}\right) \oplus \left(A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)} \oplus A_3^{(3)} \oplus A_3^{(4)}\right) \oplus \dots$$

всех построенных указанным способом групп $A_i^{(j)}$, $i, j \in \mathbb{N}$. Отображение, переводящее группу $A_1^{(1)}$ в ноль, совпадающее на $A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)}$ с каким-то эпиморфизмом $A_2^{(1)} \oplus A_2^{(2)} \to A_1^{(1)}$, на $A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)}$ с каким-то эпиморфизмом $A_3^{(1)} \oplus A_3^{(2)} \to A_2^{(1)}$ и т. д., будет эпиморфизмом, но не автоморфизмом группы A. Поэтому A — нехопфова группа.

Положив, в частности, $t\left(A_1^{(1)}\right) = [(1, 1, 1, 1, \dots)]$, $t\left(A_2^{(1)}\right) = [(1, 0, 1, 0, \dots)]$, $t\left(A_2^{(2)}\right) = [(0, 1, 0, 1, \dots)]$ и т. д., получим конкретный пример нехопфовой вполне разложимой группы без кручения.

Очевидно, что существуют и более сложно устроенные нехопфовы вполне разложимые группы. В вершинах соответствующих деревьев, изображающих такие группы, могут находиться прямые суммы каких-то групп ранга 1.

3. Хопфовы и кохопфовы модули над кольцом обобщённых матриц

Теория модулей над кольцами обобщённых матриц довольно подробно изложена в [4]. Основные определения и понятия, относящиеся к кольцам обобщённых матриц и модулям над ними, содержатся также в статье [3], опубликованной в настоящем номере. Поэтому не будем здесь давать никаких определений. Хопфовы и кохопфовы модули над кольцами обобщённых матриц рассматривались в [8, 9].

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо обобщённых матриц. Если V — некоторый K-модуль, то $V = (A, B)$, где R-модуль A и S-модуль B связаны между собой определённым образом (см. [4, разд. 2]). Естественно исследовать хопфовость модуля V в зависимости от хопфовости модулей A и B. Наш первый результат даёт полный ответ в «одном направлении».

Теорема 3.1. *Пусть дан K-модуль $V = (A, B)$. Если A и B — хопфовы модули, то V — хопфов модуль.*

Доказательство. Пусть $\Phi\colon V \to V$ — некоторый эпиморфизм. Запишем $\Phi = (\alpha, \beta)$, где α — эндоморфизм модуля A, β — эндоморфизм модуля B и $\Phi(a, b) = \big(\alpha(a), \beta(b)\big)$ для всех элементов $(a, b) \in V$. Ясно, что α и β — эпиморфизмы и, следовательно, автоморфизмы. В таком случае и Φ — автоморфизм. □

В [9] подобный результат доказан для кольца K треугольных матриц (т. е. один из бимодулей M и N равен нулю).

Для каждого R-модуля X и S-модуля Y можно определить K-модули $\big(X, T(X)\big)$ и $\big(T(Y), Y\big)$, где $T(X) = N \otimes_R X$, $T(Y) = M \otimes_S Y$.

Следствие 3.2. *K-модуль $\big(X, T(X)\big)$ хопфов в точности тогда, когда X — хопфов R-модуль. Аналогичное утверждение верно для K-модуля $\big(T(Y), Y\big)$.*

Доказательство. Нужно учесть следующие факты. Во-первых, гомоморфизмы K-модулей действуют покоординатно (это уже использовалось в доказательстве теоремы 3.1). Во-вторых, всякий гомоморфизм $\big(X, T(X)\big) \to \big(X', T(X')\big)$ равен $(\alpha, 1 \otimes \alpha)$ для единственного гомоморфизма $\alpha\colon X \to X'$ [1, лемма 2.2]. Ещё заметим, что если α — эпиморфизм, то $1 \otimes \alpha$ также эпиморфизм. □

Буквы I и J обозначают ниже идеалы следа кольца K.

Следствие 3.3. *Если кольцо K есть ситуация эквивалентности, т. е. $I = R$, $J = S$, то хопфовость любого K-модуля (A, B) равносильна хопфовости R-модуля A и равносильна хопфовости S-модуля B.*

Доказательство. Согласно [4, следствие 8.2] имеют место изоморфизмы K-модулей $\big(A, B\big) \cong \big(A, T(A)\big) \cong \big(T(B), B\big)$. Теперь мы можем сослаться на следствие 3.2. □

Следствие 3.4. *Предположим, что K — кольцо с нулевыми идеалами следа, т. е. $I = 0 = J$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если все неразложимые проективные R-модули и S-модули хопфовы, то и каждый неразложимый проективный K-модуль хопфов*;
2) *первое утверждение останется справедливым после замены проективных модулей на плоские.*

Доказательство. Пусть (A, B) — некоторый проективный K-модуль. Существуют проективные R-модуль X и S-модуль Y, для которых $\big(A, B\big) \cong \big(X, T(X)\big) \oplus \big(T(Y), Y\big)$ [4, теорема 7.3]. Если модуль (A, B) неразложим, то он изоморфен одному из модулей $\big(X, T(X)\big)$ или $\big(T(Y), Y\big)$, причём X и Y — неразложимые модули. Утверждение получается из следствия 3.2.

Утверждение 2) доказывается аналогично. □

Утверждение 1) верно в более общей ситуации, когда $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$, кольцо R полно в I-адической топологии и S полно в J-адической топологии.

В [4] определены также K-модули вида $\big(X, H(X)\big)$ и $\big(H(Y), Y\big)$, где $H(X) = \mathrm{Hom}_R(M, X)$, $H(Y) = \mathrm{Hom}_S(N, Y)$.

Доказательство следующего факта похоже на доказательство следствия 3.2.

Следствие 3.5. *Пусть M — проективный R-модуль. K-модуль $\big(X, H(X)\big)$ хопфов в точности тогда, когда X — хопфов R-модуль. Аналогичное утверждение верно для K-модуля $\big(H(Y), Y\big)$ при условии проективности S-модуля N.* □

Следствие 3.6. *Пусть M и N — проективные R-модуль и S-модуль соответственно. Если все неразложимые инъективные R-модули и S-модули хопфовы, то и любой неразложимый инъективный K-модуль хопфов.*

Доказательство. Для любого инъективного K-модуля (A, B) существуют инъективные R-модуль X и S-модуль Y со свойством $(A, B) \cong \big(X, H(X)\big) \oplus (H(Y), Y)$ [4, следствие 5.7]. Если (A, B) — неразложимый модуль, то он изоморфен одному из модулей $\big(X, H(X)\big)$ или $(H(Y), Y)$. При этом модули X и Y неразложимы. Далее используем следствие 3.5. □

Модуль называется кохопфовым, если всякий его мономорфизм в себя будет автоморфизмом.

Для кохопфовых модулей верны аналоги теоремы 3.1 и следствий 3.2—3.4. Только в следствиях нужно дополнительно считать, что модули N_R и M_S являются плоскими. Справедливы также аналоги следствий 3.5 и 3.6, причём, наоборот, здесь не нужны никакие ограничения на модули M и N.

Литература

[1] Кайгородов Е. В. Хопфовы абелевы группы // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. — 2012. — № 2 (18). — С. 5—12.

[2] Кайгородов Е. В. О двух классах хопфовых абелевых групп // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. — 2013. — № 2 (22). — С. 22—33.

[3] Крылов П. А. Определители обобщённых матриц порядка 2 // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 5.

[4] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над кольцами формальных матриц // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 8. — С. 145—211.

[5] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Наука, 1973.

[6] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[7] Arnold D. M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.).

[8] Goodearl K. R. Surjective endomorphisms of finitely generated modules // Commun. Algebra. — 1987. — Vol. 15, no. 3. — P. 589—609.

[9] Haghany A. Hopficity and co-Hopficity for Morita contexts // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27, no. 1. — P. 477—492.

[10] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.