О конечных неразрешимых 5-примарных группах с несвязным графом Грюнберга—Кегеля, таких что $\left|\pi\bigl(G/F(G)\bigr)\right| \leqslant 4$

В. А. КОЛПАКОВА
Институт математики и механики
УрО РАН им. Н. Н. Красовского
e-mail: leralid@mail.ru

А. С. КОНДРАТЬЕВ
Институт математики и механики
УрО РАН им. Н. Н. Красовского
e-mail: a.s.kondratiev@imm.uran.ru

УДК 512.542

Ключевые слова: конечная неразрешимая группа, 5-примарная группа, граф простых чисел, главный фактор.

Аннотация

В статье описаны главные факторы коммутантов конечных неразрешимых групп G с несвязным графом Грюнберга—Кегеля, имеющим в точности пять вершин, в случае когда $G/F(G)$ — почти простая n-примарная группа для $n \leqslant 4$.

Abstract

V. A. Kolpakova, A. S. Kondrat'ev, On finite nonsolvable 5*-primary groups with disconnected Gruenberg–Kegel graph such that* $\left|\pi\bigl(G/F(G)\bigr)\right| \leqslant 4$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 69—87.

This paper describes the chief factors of the commutator subgroups of finite nonsolvable groups G with disconnected Gruenberg–Kegel graph having exactly 5 vertices in the case where $G/F(G)$ is an almost simple n-primary group for $n \leqslant 4$.

Пусть G — конечная группа. Обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых делителей порядка группы G. *Граф простых чисел* (*граф Грюнберга—Кегеля*) $\Gamma(G)$ группы G определяется как граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда в G есть элемент порядка pq. Группа G называется *n-примарной*, если $|\pi(G)| = n$. Обозначим число компонент связности графа $\Gamma(G)$ через $s(G)$, а множество его связных компонент — через $\{\pi_i(G) \mid 1 \leqslant i \leqslant s(G)\}$; для группы G чётного порядка считаем, что $2 \in \pi_1(G)$.

В рамках общей задачи изучения конечных групп по свойствам их графов простых чисел наше внимание прежде всего привлекает более подробное изучение класса конечных групп с несвязным графом простых чисел. Это объясняется

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 69—87.

тем, что указанный класс широко обобщает класс конечных групп Фробениуса, что сразу видно из известной структурной теоремы Грюнберга—Кегеля о конечных группах с несвязным графом простых чисел (см. [21]). Заметим также, что класс конечных групп с несвязным графом простых чисел совпадает с классом конечных групп, имеющих *изолированную* подгруппу (т. е. собственную подгруппу, содержащую централизатор каждого своего неединичного элемента), который изучался многими известными алгебраистами (Ф. Г. Фробениус, М. Судзуки, У. Фейт, Дж. Томпсон, Г. Хигмен, Ц. Арад, Д. Чиллаг, В. М. Бусаркин, Ю. М. Горчаков, Н. Д. Подуфалов и др.).

Конечные простые группы с несвязным графом простых чисел описаны в работах Дж. С. Уильямса [21] и А. С. Кондратьева [3]. Эти группы составляют довольно узкий подкласс всех конечных простых групп, однако включают многие «малые» в различных смыслах группы, часто возникающие в исследованиях. Классификация компонент связности графа простых чисел для конечных простых групп, полученная в [3,21], была применена М. С. Лучидо [18] для получения аналогичной классификации для всех конечных *почти простых* групп, т. е. групп с простым неабелевым цоколем.

При изучении класса конечных групп с несвязным графом простых чисел возникают весьма нетривиальные проблемы, связанные с модулярными представлениями конечных простых групп. Примером такой проблемы может служить задача описания строения конечной группы G с несвязным графом простых чисел, не изоморфной ни группе Фробениуса, ни 2-фробениусовой группе. По теореме Грюнберга—Кегеля группа $\bar{G}:=G/F(G)$ почти проста и известна по результатам из [3, 18, 21]. Предположим, что $F(G)\neq 1$. Каждой связной компоненте $\pi_i(G)$ графа $\Gamma(G)$ для $i>1$ соответствует нильпотентная изолированная $\pi_i(G)$-холлова подгруппа $X_i(G)$ группы G. Любой неединичный элемент x из $X_i(G)$ при $i>1$ действует *свободно* (*без неподвижных точек*) на $F(G)$, т. е. $C_{F(G)}(x)=1$. Пусть K и L — два соседних члена главного ряда группы G ($K<L$), содержащиеся в $F(G)$. Тогда (главный) фактор $V=L/K$ является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p (мы будем называть его *p-главным фактором* группы G), и его можно рассматривать как точный неприводимый $GF(p)\bar{G}$-модуль (так как $C_{G/K}(V)=F(G)/K$), причём каждый неединичный элемент из $X_i(G)$ ($i>1$) действует свободно на V. Поэтому задача изучения строения группы G во многом сводится к имеющей самостоятельный интерес проблеме описания неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей, на которых некоторый элемент простого порядка (отличного от p) из $\bar{G}$ действует свободно. В общем случае эта важная проблема далека от решения.

В рамках отмеченной задачи А. С. Кондратьев и И. В. Храмцов [4—6, 9] изучали конечные группы, имеющие несвязный граф простых чисел с числом вершин, не превосходящим 4. Авторы исследуют конечные группы, граф Грюнберга—Кегеля которых несвязен и имеет точно пять или шесть вершин. Сделаны необходимые предварительные шаги: определены конечные почти простые n-примарные группы и их графы Грюнберга—Кегеля для $n=5$ (в [17]) и для $n=6$ (в [2]). Основным результатом данной работы является описание главных факторов коммутантов конечных неразрешимых 5-примарных групп G с несвязным графом Грюнберга—Кегеля в случае, когда $G/F(G)$ — почти простая n-примарная группа для $n \leqslant 4$. В доказательстве используются результаты работ [4—6] и вычисления в системе компьютерной алгебры GAP [12].

Доказаны следующие две теоремы. Каждый пункт этих теорем реализуется.

Теорема 1. *Пусть G — конечная 5-примарная группа с несвязным графом простых чисел, такая что $\bar{G} = G/F(G)$ — почти простая 3-примарная группа. Тогда $\pi(F(G))$ содержит два простых числа p_1 и p_2, не принадлежащие $\pi(\bar{G})$, такие что $\pi_1(G) = \{2, 3, p_1, p_2\}$, $\pi_2(G) = \pi_2(\bar{G}) = \{r\} \subseteq \{5, , 7, 13, 17\}$, $F(G) = \mathrm{O}_2(G) \times \mathrm{O}_3(G) \times \mathrm{O}_{p_1}(G) \times \mathrm{O}_{p_2}(G)$, $G/\big(\mathrm{O}_{p_1}(G) \times \mathrm{O}_{p_2}(G)\big)$ — группа из* [4, теорема] *и для $i \in \{1, 2\}$ справедливо одно из следующих утверждений.*

1. *$r = 5$, $\bar{G} \cong \mathrm{A}_5$ или $\bar{G} \cong \mathrm{S}_5$, подгруппа $\mathrm{O}_{p_i}(G)$ абелева, каждый p_i-главный фактор группы G как $GF(p)\bar{G}$-модуль изоморфен единственному 4-мерному абсолютно неприводимому $GF(p_i)\bar{G}$-модулю при $\bar{G} \cong \mathrm{A}_5$ и одному из двух 4-мерных абсолютно неприводимых $GF(p_i)\bar{G}$-модулей при $\bar{G} \cong \mathrm{S}_5$.*
2. *$r = 7$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(7)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}_2(7)$, каждый p_i-главный фактор группы G как $GF(p_i)\bar{G}$-модуль изоморфен одному из следующих модулей:*
   - (i) *если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(7)$, то единственному 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(p_i)\bar{G}$-модулю или одному из двух 3-мерных абсолютно неприводимых $GF(p_i)\bar{G}$-модулей в случае $p \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$ и единственному 6-мерному неприводимому $GF(p_i)\bar{G}$-модулю в противном случае;*
   - (ii) *если $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}_2(7)$, то одному из трёх 6-мерных неприводимых $GF(p_i)\bar{G}$-модулей в случае $p \equiv \pm 1, \pm 7 \pmod{16}$ и 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(p_i)\bar{G}$-модулю или единственному 12-мерному неприводимому $GF(p_i)\bar{G}$-модулю в противном случае.*
3. *$r = 7$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(3)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{G}_2(2)$, каждый p_i-главный фактор группы G как $GF(p_i)\bar{G}$-модуль изоморфен одному из следующих модулей:*
   - (i) *если $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(3)$, то единственному 6-мерному абсолютно неприводимому $GF(p_i)\bar{G}$-модулю;*
   - (ii) *если $\bar{G} \cong \mathrm{G}_2(2)$, то одному из двух 6-мерных абсолютно неприводимых $GF(p_i)\bar{G}$-модулей в случае $p \equiv 5 \pmod{12}$ и единственному 12-мерному неприводимому $GF(p_i)\bar{G}$-модулю в противном случае.*
4. *$r = 13$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(3)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{Aut}\big(\mathrm{L}_3(3)\big)$, каждый p_i-главный фактор группы G как $GF(p_i)\bar{G}$-модуль изоморфен одному из следующих модулей:*
   - (i) *если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(3)$, то единственному 12-мерному абсолютно неприводимому $GF(p_i)\bar{G}$-модулю;*
   - (ii) *если $\bar{G} \cong \mathrm{Aut}\big(\mathrm{L}_3(3)\big)$, то одному из двух 12-мерных абсолютно неприводимых $GF(p_i)\bar{G}$-модулей в случае $p_i \equiv 1 \pmod{12}$ и единственному 24-мерному неприводимому $GF(p_i)\bar{G}$-модулю в противном случае.*
5. *$r = 17$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(17)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}_2(17)$, каждый p_i-главный фактор группы G как $GF(p_i)\bar{G}$-модуль изоморфен одному из следующих модулей:*

(i) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(17)$, *то одному из четырёх* 16-*мерных абсолютно неприводимых* $GF(p_i)\bar{G}$-*модулей при* $p_i \equiv \pm 1 \pmod 9$ *и единственному* 16-*мерному абсолютно неприводимому* $GF(p_i)\bar{G}$-*модулю или единственному* 48-*мерному неприводимому* $GF(p_i)\bar{G}$-*модулю в противном случае*;

(ii) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}_2(17)$, *то одному из восьми* 16-*мерных абсолютно неприводимых* $GF(p_i)\bar{G}$-*модулей при* $p_i \equiv \pm 1 \pmod 9$ *и одному из двух* 16-*мерных абсолютно неприводимых* $GF(p_i)\bar{G}$-*модулей или одному из двух* 48-*мерных неприводимых* $GF(p_i)\bar{G}$-*модулей в противном случае.*

Теорема 2. *Пусть* G — *конечная* 5-*примарная группа с несвязным графом простых чисел,* $\pi\big(F(G)\big)$ *содержит простое число* p, *не принадлежащее* $\pi\big(G/F(G)\big)$, $\hat{G} := G/\mathrm{O}_p(G)$ — 4-*примарная группа и* $\bar{G} := \hat{G}/F(\hat{G})$ — *почти простая* 4-*примарная группа. Тогда* $\pi_1(G) = \{2, 3, s, p\}$, $\pi_2(G) = \{r\}$, $\hat{G}$ — *группа из* [5, теоремы 5—8] *и справедливо одно из следующих утверждений.*

1. $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(r)$, $\pi_1(\hat{G}) = \{2\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{3, s\}$, $\pi_3(\hat{G}) = \{r\}$, r — *простое число Ферма или Мерсенна,* $r > 17$, $\pi(r^2 - 1) = \{2, 3, s\}$, $r \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ *для некоторого* $\varepsilon \in \{+, -\}$ *и каждый* p-*главный фактор группы* G *как* $GF(p)\bar{G}$-*модуль соответствует классу алгебраической сопряжённости из множества, состоящего из* $(r - 2 + \varepsilon 1)/4$ *абсолютно неприводимых* $\bar{G}$-*модулей размерности* $r - 1$ *над полем характеристики* p.
2. $s = 5$, $r = 17$, $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(16)$, $\pi_1(\hat{G}) = \{2\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{3, 5\}$, $\pi_3(\hat{G}) = \{17\}$ *и каждый* p-*главный фактор группы* G *как* $GF(p)\bar{G}$-*модуль изоморфен единственному* 16-*мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$-*модулю.*
3. $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(r)$, $\pi_1(\hat{G}) = \{2, s\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{3\}$, $\pi_3(\hat{G}) = \{r\}$, *где* r — *простое число,* $17 < r \neq 2^k \pm 1$ *для любых натуральных чисел* $k, r \not\equiv \pm 1 \pmod{12}$, $\pi(r^2 - 1) = \{2, 3, s\}$, $r \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ *для некоторого* $\varepsilon \in \{+, -\}$ *и каждый* p-*главный фактор группы* G *как* $GF(p)\bar{G}$-*модуль соответствует классу алгебраической сопряжённости из множества, состоящего из* $(r - 2 + \varepsilon 1)/4$ *абсолютно неприводимых* $\bar{G}$-*модулей размерности* $r - 1$ *над полем характеристики* p.
4. $s = 5$, $r = 11$, $\hat{G} \cong M_{11}$, $\pi_1(\hat{G}) = \{2, 3\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{5\}$, $\pi_3(\hat{G}) = \{11\}$ *и каждый* p-*главный фактор группы* G *как* $GF(p)\bar{G}$-*модуль изоморфен одному из трёх* 10-*мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$-*модулей в случае* $p \equiv 1, 3, 9, 11 \pmod{16}$ *и единственному* 10-*мерному абсолютно неприводимому или единственному* 20-*мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$-*модулю в противном случае.*
5. $s = 5$, $r = 11$, $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(11)$, $\pi_1(\hat{G}) = \{2, 3\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{5\}$, $\pi_3(\hat{G}) = \{11\}$ *и каждый* p-*главный фактор группы* G *как* $\bar{G}$-*модуль изоморфен одному из следующих модулей: одному из двух* 10-*мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$-*модулей и двух* 5-*мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$-*модулей в случае* $p \equiv 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$ *или единственному* 10-*мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$-*модулю в противном случае.*

6. *$s = 5$, $r = 7$, $\bar{G} \cong \mathrm{A}_7$, $\pi_1(\bar{G}) = \{2,3\}$, $\pi_2(\bar{G}) = \{5\}$, $\pi_3(\bar{G}) = \{7\}$ и все p-главные факторы группы G как $GF(p)\bar{G}$-модули изоморфны единственному 6-мерному неприводимому $GF(p)\bar{G}$-модулю.*

Далее для всех утверждений выполнены условия $\pi_1(\hat{G}) = \{2,3,s\}$ и $\pi_2(\hat{G}) = \{r\}$.

7. *$s = 5$, $r = 7$, $\bar{G} \cong \mathrm{A}_7$ или $\bar{G} \cong \mathrm{S}_7$, все p-главные факторы группы G как $GF(p)\bar{G}$-модули изоморфны единственному 6-мерному неприводимому $GF(p)\bar{G}$-модулю в случае $\bar{G} \cong \mathrm{A}_7$ и одному из двух 6-мерных неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей в случае $\bar{G} \cong \mathrm{S}_7$.*
8. *$s = 5$, $r = 11$, $\bar{G} \cong M_{11}$, каждый p-главный фактор группы G как $GF(p)\bar{G}$-модуль изоморфен одному из трёх 10-мерных абсолютно неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей в случае $p \equiv 1,3,9,11 \pmod{16}$ и единственному 10-мерному абсолютно неприводимому $GF(p)\bar{G}$-модулю или единственному 20-мерному неприводимому $GF(p)\bar{G}$-модулю в противном случае.*
9. *$s = 5$, $r = 11$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_5(2)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{Aut}\big(\mathrm{U}_5(2)\big)$, каждый p-главный фактор группы G как $GF(p)\bar{G}$-модуль изоморфен одному из следующих модулей:*
   (i) *если $\bar{G} \cong \mathrm{U}_5(2)$, то единственному 10-мерному неприводимому $GF(p)\bar{G}$-модулю;*
   (ii) *если $\bar{G} \cong \mathrm{Aut}\big(\mathrm{U}_5(2)\big)$, то одному из двух 10-мерных абсолютно неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей в случае $p \equiv 1,3,9,11 \pmod{16}$ и единственному 20-мерному неприводимому $GF(p)\bar{G}$-модулю в противном случае.*
10. *$s = 5$, $r = 13$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4)$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4) : 2$ или $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4) : 4$, каждый p-главный фактор группы G как $GF(p)\bar{G}$-модуль изоморфен одному из следующих модулей:*
    (i) *если $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4)$, то единственному 12-мерному неприводимому $GF(p)\bar{G}$-модулю;*
    (ii) *если $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4) : 2$, то одному из двух 12-мерных неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей в случае $p \equiv 1 \pmod{4}$ или единственному 24-мерному неприводимому $GF(p)\bar{G}$-модулю в противном случае;*
    (iii) *если $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4) : 4$, то одному из четырёх 12-мерных абсолютно неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей в случае $p \equiv 9 \pmod{16}$ или одному из двух 24-мерных неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей в противном случае.*
11. *$s = 5$, $r = 17$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16)$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16) : 2$ или $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16) : 4$, каждый p-главный фактор группы G как $GF(p)\bar{G}$-модуль изоморфен одному из следующих модулей:*
    (i) *если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16)$, то единственному 16-мерному неприводимому $GF(p)\bar{G}$-модулю;*
    (ii) *если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16) : 2$, то одному из двух 16-мерных абсолютно неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей;*

(iii) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16) : 4$, *то одному из четырёх* 16*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$*-модулей в случае* $p \equiv 1, 3, 9, 11 \pmod{16}$ *и одному из двух* 16*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$*-модулей или единственному* 32*-мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю в противном случае.*

12. $s = 5$, $r = 31$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(5)$ *или* $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(5) : 2$, *каждый* p*-главный фактор группы* G *как* $GF(p)\bar{G}$*-модуль изоморфен одному из следующих модулей*:
   (i) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(5)$, *то единственному* 30*-мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю*;
   (ii) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(5) : 2$, *то одному из двух* 30*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$*-модулей в случае* $p \equiv \pm 1 \pmod 5$ *и единственному* 60*-мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю в противном случае.*

13. $s = 5$, $r = 73$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9)$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9) : 2$ *или* $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9) : 4$, *каждый* p*-главный фактор группы* G *как* $GF(p)\bar{G}$*-модуль изоморфен одному из следующих модулей*:
   (i) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9)$, *то единственному* 72*-мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю*;
   (ii) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9) : 2$, *то одному из двух* 72*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$*-модулей в случае* $p \equiv 1 \pmod 4$ *и единственному* 144*-мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю в противном случае*;
   (iii) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9) : 4$, *то либо одному из четырёх* 72*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$*-модулей, либо одному из двух* 144*-мерных неприводимых* $GF(p)\bar{G}$*-модулей.*

14. $s = 7$, $r = 43$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(7)$ *или* $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(7) : 2$, *каждый* p*-главный фактор группы* G *как* $GF(p)\bar{G}$*-модуль изоморфен одному из следующих модулей*:
   (i) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(7)$, *то единственному* 42*-мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю*;
   (ii) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(7) : 2$, *то одному из двух* 42*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$*-модулей в случае* $p \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$ *и единственному* 84*-мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю в противном случае.*

15. $s = 7$, $r = 73$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8)$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 2$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 3$ *или* $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 6$, *каждый* p*-главный фактор группы* G *как* $GF(p)\bar{G}$*-модуль изоморфен одному из следующих модулей*:
   (i) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8)$, *то единственному* 72*-мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю*;
   (ii) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 2$, *то одному из двух* 72*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$*-модулей в случае* $p \equiv \pm 1, \pm 7 \pmod{16}$ *и единственному* 144*-мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю в противном случае*;
   (iii) *если* $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 3$, *то одному из трёх* 72*-мерных абсолютно неприводимых* $GF(p)\bar{G}$*-модулей в случае* $p \equiv \pm 1, \pm 7 \pmod{16}$ *и единственному* 72*-мерному абсолютно неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю или единственному* 144*-мерному неприводимому* $GF(p)\bar{G}$*-модулю в противном случае*;

(iv) *если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8):6$, то одному из шести 72-мерных абсолютно неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей в случае $p \equiv 17, 41 \pmod{48}$, одному из двух 72-мерных абсолютно неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей или одному из двух 128-мерных неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей в случае $p \equiv 1, 7, 23, 25, 31, 47 \pmod{48}$ и одному из трёх 128-мерных неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей в противном случае.*

16. $s = 17$, $r = 307$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(17)$ *или* $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(17):2$ *и каждый p-главный фактор группы G как $GF(p)\bar{G}$-модуль изоморфен единственному 306-мерному неприводимому $GF(p)\bar{G}$-модулю.*
17. $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(r)$, *где $17 \neq r \geqslant 13$ — простое число, s — единственный простой делитель числа $(r+1)/2$, $\pi_1(\hat{G}) = \pi(r-1) = \{2,3\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{r\}$, $\pi_3(\hat{G}) = \{s\}$ и каждый p-главный фактор группы G как $GF(p)\bar{G}$-модуль соответствует классу алгебраической сопряжённости из множества, состоящего из $(r-2+\varepsilon 1)/4$ абсолютно неприводимых $\bar{G}$-модулей размерности $r-1$ над полем характеристики p.*
18. $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(r)$ *или* $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}_2(r)$, *где $17 \neq r \geqslant 11$ — простое число, $\pi_1(\hat{G}) = \pi(r^2-1) = \{2,3,s\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{r\}$ и каждый p-главный фактор группы G' как $\bar{G}'$-модуль соответствует классу алгебраической сопряжённости из множества, состоящего из $(r-2+\varepsilon 1)/4$ абсолютно неприводимых $\bar{G}$-модулей размерности $r-1$ над полем характеристики p.*

Наши основные обозначения и терминология стандартны и взяты из [7, 10, 11, 14, 15].

Приведём некоторые необходимые сведения из теории представления конечных групп (см., например, [14, 15]). Пусть p — простое число, $K = \overline{GF(p)}$ — некоторое алгебраическое замыкание поля $GF(p)$, G — конечная группа экспоненты $p^a m$, где $(p,m) = 1$, и f — наименьшее натуральное число, такое что $p^f \equiv m \pmod 1$. Пусть $\{g_1, \ldots, g_k\}$ — множество представителей классов сопряжённых p'-элементов группы G и F — подполе порядка $q = p^f$ в K. Тогда неприводимые представления группы G над K могут быть реализованы над F и число их классов эквивалентности равно k.

Представление $T\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ группы G в конечномерном пространстве V над полем F *реализуется над подполем F_1 поля F*, если существует базис Σ пространства V, такой что все элементы матриц $T_\Sigma(g)$ лежат в F_1 для всех $g \in G$. *Полем определения* неприводимого представления группы G над полем F называют наименьшее подполе из F, над которым оно может быть реализовано. Неприводимое GF-представление T является абсолютно неприводимым тогда и только тогда, когда поле F содержит поле определения представления T.

Поле определения представления T равно $GF(p)(\beta_T(g_i)^\mu \mid 1 \leqslant i \leqslant k)$, где β — характер Брауэра представления T и μ — некоторый кольцевой гомоморфизм из $\mathbb{Z}[\zeta]$ в F для $\zeta = \exp\bigl(2\pi i/(q-1)\bigr)$. Обычно для краткости в записи поля определения знак μ опускают.

Приведём некоторые результаты, которые используются в доказательстве теорем.

Лемма 1 (теорема Грюнберга—Кегеля [21, теорема A]). *Если G — конечная группа с несвязным графом простых чисел, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *G — группа Фробениуса;*
2) *G — 2-фробениусова группа;*
3) *G является расширением нильпотентной $\pi_1(G)$-группы посредством почти простой группы A с цоколем P, причём $s(G) \leqslant s(P)$ и A/P — $\pi_1(G)$-группа.*

Лемма 2 [8, лемма 1]. *Пусть G — конечная группа, N — нормальная подгруппа в G, G/N — группа Фробениуса с ядром F и циклическим дополнением C. Если $(|F|, |N|) = 1$ и F не содержится в $NC_G(N)/N$, то G содержит элемент порядка $s|C|$ для некоторого $s \in \pi(N)$.*

Следующая лемма хорошо известна (см. [7]).

Лемма 3. *Пусть G — конечная простая группа, F — поле характеристики $p > 0$, V — абсолютно неприводимый FG-модуль и β — характер Брауэра модуля V. Если g — элемент простого порядка, отличного от p, из G, то*

$$\dim C_V(g) = \big(\beta|_{\langle g\rangle}, 1|_{\langle g\rangle}\big) = \frac{1}{|g|}\sum_{x\in\langle g\rangle}\beta(x).$$

Лемма 4 [13, теорема 8.2; 20, предложение 4.2]. *Пусть G — конечная группа, $1 \neq H \trianglelefteq G$ и $G/H \cong \mathrm{L}_2(2^n)$, где $n \geqslant 2$. Предположим, что $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 3 из G. Тогда $H = \mathrm{O}_2(G)$ и H является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2n} в G, каждая из которых как G/H-модуль изоморфна естественному $GF(2^n)\mathrm{SL}_2(2^n)$-модулю.*

Лемма 5 [20, предложение 3.2]. *Пусть G — конечная группа, $H \trianglelefteq G$, $G/H \cong \mathrm{L}_2(q)$, где q нечётно, $q > 5$, и $C_H(t) = 1$ для некоторого элемента t порядка 3 из $G \setminus H$. Тогда $H = 1$.*

Лемма 6 [14, теоремы VII.1.16—VII.1.18]. *Пусть G — конечная группа, $F = GF(p^m)$ — поле определения характеристики $p > 0$ для абсолютно неприводимого FG-модуля V, $\langle\sigma\rangle = \mathrm{Aut}(F)$, V_0 обозначает модуль V, рассматриваемый как $GF(p)G$-модуль, и $W = V_0 \otimes_{GF(p)} F$. Тогда*

1) *$W = \bigoplus_{i=1}^{m} V^{\sigma^i}$, где V^{σ^i} — модуль, алгебраически сопряжённый с V посредством σ^i;*
2) *V_0 является неприводимым $GF(p)G$-модулем и, в частности, W реализуется как неприводимый $GF(p)G$-модуль V_0;*
3) *с точностью до изоморфизма модулей неприводимые $GF(p)G$-модули находятся во взаимно-однозначном соответствии с классами алгебраической сопряжённости неприводимых $\overline{GF(p)}G$-модулей.*

Следующий известный результат позволяет вычислять степени некоторых квадратичных расширений полей при нахождении полей определения представлений.

Лемма 7 [16, лемма 3]. *Пусть p — нечётное простое число, r — целое ненулевое число и $(r,p) = 1$. Тогда степень $\bigl(GF(p)(\sqrt{r}) : GF(p)\bigr)$ равна 1, если сравнение $x^2 \equiv r \pmod p$ имеет решение, и 2 в противном случае.*

Нам понадобится также таблица характеров группы $\mathrm{L}_2(q)$, где q — степень нечётного простого числа p, $|a| = (q-1)/2$, $|b| = (q+1)/2$, $|u| = |v| = p$ (см. [1, табл. 2 и 3]).

Таблица 1. Таблица характеров группы $\mathrm{L}_2(q)$ при $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ и $\varepsilon \in \{+,-\}$

	1	u	v	a^m $(1 \leqslant m \leqslant \frac{r-2+\varepsilon 1}{4})$	b^n $(1 \leqslant n \leqslant \frac{r-\varepsilon 1}{4})$
1	1	1	1	1	1
γ_1	$\dfrac{q+1}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	$\dfrac{1-\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	$\left(\dfrac{-1-\varepsilon 1}{2}\right)^m$	$\left(\dfrac{-1+\varepsilon 1}{2}\right)^{n+1}$
γ_2	$\dfrac{q+1}{2}$	$\dfrac{1-\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	$\dfrac{1+\sqrt{\varepsilon q}}{2}$	$\left(\dfrac{-1-\varepsilon 1}{2}\right)^m$	$\left(\dfrac{-1+\varepsilon 1}{2}\right)^{n+1}$
δ_k $(1 \leqslant k \leqslant \frac{q-2+\varepsilon 1}{4})$	$r-1$	-1	-1	0	$-2\cos\dfrac{4\pi kn}{q+1}$
α	q	0	0	1	-1
θ_l $(1 \leqslant l \leqslant \frac{q-4-\varepsilon 1}{4})$	$q+1$	1	1	$2\cos\dfrac{4\pi lm}{q-1}$	0

Описания главных факторов 3-примарных и 4-примарных групп с несвязным графом Грюнберга—Кегеля взяты в [4] и [5] соответственно.

Перейдём к доказательству теорем.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда существуют два различных простых числа p_1 и p_2 из $\pi(F(G)) \setminus \pi(\bar{G})$.

Положим $\hat{G}_i = G/\mathrm{O}_{p_i}(G)$ для $i \in \{1,2\}$. Тогда $|\pi(\hat{G}_i)| = 4$ и $\bigl|\pi\bigl(\hat{G}_i/F(\hat{G}_i)\bigr)\bigr| = 3$. По [5, теорема 2; 4, теорема] $\pi\bigl(F(\hat{G}_i)\bigr)$ содержит простое число s_i, не принадлежащее $\pi(\bar{G})$, такое что $\pi_1(\hat{G}_i) = \{2,3,s_i\}$ и $\pi_2(\hat{G}_i) = \pi_2(\bar{G}) = \{r\} \subseteq \{5,7,13,17\}$. Отсюда и из леммы 1 получаем, что $s_i = p_j$ для $\{i,j\} = \{1,2\}$, и следовательно, $\pi_1(G) = \{2,3,p_1,p_2\}$ и $\pi_2(G) = \{r\}$.

Ввиду [5, теорема 2] справедливо одно из следующих утверждений:

(i) $r = 5$, $\bar{G} \cong \mathrm{A}_5$ или $\bar{G} \cong \mathrm{S}_5$;
(ii) $r = 7$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(7)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}_2(7)$;
(iii) $r = 7$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(3)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{G}_2(2)$;
(iv) $r = 13$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(3)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{Aut}\big(\mathrm{L}_3(3)\big)$;
(v) $r = 17$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(17)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}_2(17)$.

Рассмотрим каждое из этих утверждений, учитывая, что любой элемент порядка r из G действует на $\mathrm{O}_{p_i}(G)$ свободно.

Пусть имеет место случай (i). Применяя лемму 3 и [11], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p_i, на которых элемент порядка 5 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: если $\bar{G} \cong \mathrm{A}_5$, то единственный 4-мерный модуль с полем определения $GF(p_i)$; если $\bar{G} \cong \mathrm{S}_5$, то два 4-мерных модуля с полем определения $GF(p_i)$. Отсюда следует утверждение 1.

Пусть имеет место случай (ii). Применяя лемму 3 и [11], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p_i, на которых элемент порядка 7 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(7)$, то один 6-мерный модуль с полем определения $GF(p_i)$ и два 3-мерных модуля с полем определения $GF(p_i^m)$, где $m = \big(GF(p_i)(\sqrt{-7}) : GF(p_i)\big)$; если $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}_2(7)$, то один 6-мерный модуль с полем определения $GF(p_i)$ и два 6-мерных модуля с полем определения $GF(p_i^n)$, где $n = \big(GF(p_i)(\sqrt{2}) : GF(p_i)\big)$. Ввиду леммы 7 получаем, что $m = 1$ при $p_i \equiv 1, 2, 4 \pmod 7$ и $m = 2$ в противном случае; $n = 1$ при $p_i \equiv \pm 1, \pm 7 \pmod{16}$ и $n = 2$ в противном случае. Отсюда и из леммы 6 следует утверждение 2.

Пусть имеет место случай (iii). Применяя лемму 3 и [11], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p_i, на которых элемент порядка 7 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: если $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(3)$, то один 6-мерный модуль с полем определения $GF(p_i)$; если $\bar{G} \cong \mathrm{G}_2(2)$, то два 6-мерных модуля с полем определения $GF(p_i^m)$, где $m = \big(GF(p_i)(\sqrt{-3}) : GF(p_i)\big)$. Ввиду леммы 7 получаем, что $m = 1$ при $p_i \equiv 5 \pmod{12}$ и $m = 2$ в противном случае. Отсюда и из леммы 6 следует утверждение 3.

Пусть имеет место случай (iv). Применяя лемму 3 и [11], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p_i, на которых элемент порядка 13 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(3)$, то один 12-мерный модуль с полем определения $GF(p_i)$; если $\bar{G} \cong \mathrm{Aut}\big(\mathrm{L}_3(3)\big)$, то два 12-мерных модуля с полем определения $GF(p_i^m)$, где $m = \big(GF(p_i)(\sqrt{3}) : GF(p_i)\big)$. Ввиду леммы 7 получаем, что $m = 1$ при $p_i \equiv 1 \pmod{12}$ и $m = 2$ в противном случае. Отсюда и из леммы 6 следует утверждение 4.

Пусть имеет место случай (v). Применяя лемму 3 и [16, лемма 7], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p_i, на которых элемент порядка 17 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(17)$, то один 16-мерный модуль с полем определения $GF(p_i)$ и три 16-мерных модуля с полем определения $GF(p_i^m)$, где $m = 1$ при $p_i \equiv \pm 1 \pmod 9$ и $m = 3$ в противном случае; если $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}_2(17)$, то два 16-мерных модуля с полем определения $GF(p_i)$ и шесть 16-мерных модулей с полем определения $GF(p_i^m)$, где $m = 1$ при $p_i \equiv \pm 1 \pmod 9$ и $m = 3$ в противном случае. Отсюда и из леммы 6 следует утверждение 5.

Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Пусть выполняются условия теоремы 2. Ввиду леммы 1 имеем $\{2, p\} \subseteq \pi_1(G)$.

Случай 1. $\pi_1(\hat{G}) = \{2\}$. Согласно теореме 3 из [5] для группы $\hat{G}$ справедливо одно из следующих утверждений:

(i) $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(r)$, где r — простое число Ферма или Мерсенна, $r > 17$ и $|\pi(r^2-1)| = 3$;
(ii) $\hat{G} \cong \mathrm{L}_3(4)$;
(iii) $\bar{G} \cong \hat{G}/\mathrm{O}_2(\hat{G}) \cong \mathrm{L}_2(2^m)$, где либо $m = 4$, либо m, $u = 2^m - 1$, $v = (2^m+1)/3$ — простые числа, большие 3;
(iv) $\bar{G} \cong \hat{G}/\mathrm{O}_2(\hat{G}) \cong \mathrm{Sz}(q)$, где $q \in \{8, 32\}$.

Рассмотрим каждый из этих подслучаев.

Пусть имеет место случай 1 (i). Тогда $\pi(r^2-1) = \{2, 3, s\}$. Если $3 \notin \pi_1(G)$, то элемент порядка 3 из G действует на $\mathrm{O}_p(G)$ свободно, и следовательно, по лемме 4 получаем $\mathrm{O}_p(G) = 1$, что невозможно. Таким образом, $\{2, 3, p\} \subseteq \pi_1(G)$. По [21] $\pi_2(\hat{G}) = \{3, s\}$ и $\pi_3(\hat{G}) = \{r\}$, следовательно, $\pi_1(G) = \{2, 3, s, p\}$ и $\pi_2(G) = \{r\}$. Таким образом, любой элемент порядка r из G действует на $\mathrm{O}_p(G)$ свободно. Пусть $r \equiv \varepsilon 1 \pmod 4$ для некоторого $\varepsilon \in \{+, -\}$. Пусть V — абсолютно неприводимый $\mathrm{L}_2(r)$-модуль над полем характеристики p, на который элемент g порядка r действует свободно, и β — характер Брауэра модуля V. Тогда β совпадает с некоторым комплексным неприводимым характером группы $\mathrm{L}_2(r)$. Используя приведённую выше таблицу для $q = r$ и лемму 3, получаем, что $\beta = \delta_k$ для некоторого k, где $1 \leqslant k \leqslant (r - 2 + \varepsilon 1)/4$, поэтому ввиду леммы 6 справедливо утверждение 1.

Пусть имеет место случай 1 (ii). Применяя леммы 3 и 6 и используя таблицу характеров группы $\mathrm{L}_3(4)$ из [11], получаем, что не существует неприводимых $GF(p)\mathrm{L}_3(4)$-модулей, на которых элемент простого нечётного порядка из $\mathrm{L}_3(4)$ действует свободно. Поэтому этот случай невозможен.

Пусть имеет место случай 1 (iii). Если $3 \notin \pi_1(G)$, то по лемме 4 $O\big(F(G)\big) = \mathrm{O}_p(G) = 1$, что противоречит условию теоремы. Поэтому $3 \in \pi_1(G)$.

Пусть $m = 4$. Поскольку группа $\mathrm{L}_2(16)$ содержит элемент порядка 15, получаем, что $\pi_1(G) = \{2, 3, 5, p\}$ и $\pi_2(G) = \{17\}$. Таким образом, любой элемент порядка 17 из G действует на $\mathrm{O}_p(G)$ свободно. Применяя лемму 3 и проводя вычисления в GAP [12], получаем справедливость утверждения 2.

Пусть $m \neq 4$. Поскольку группа $\bar{G}$ содержит элемент порядка $3v$, получаем, что $\pi_1(G) = \{2, 3, v, p\}$ и $\pi_2(G) = \{u\}$. Но группа $\bar{G}$ содержит подгруппу, изоморфную группе Фробениуса вида $2^m : u$, поэтому ввиду леммы 2 в $\bar{G}$ найдётся элемент порядка u, централизующий нетривиальный элемент в $\mathrm{O}_p(G)$, что противоречит несвязности графа $\Gamma(G)$.

Пусть имеет место случай 1 (iv). Применяя леммы 3 и 6, используя таблицы характеров групп $\mathrm{Sz}(8)$ и $\mathrm{Sz}(32)$ из [11] и проводя вычисления в GAP [12], получаем, что не существует неприводимых $GF(p)\bar{G}$-модулей, на которых элемент простого нечётного порядка из $\bar{G}$ действует свободно. Поэтому этот случай невозможен.

Случай 2. $3 \notin \pi_1(\hat{G}) \neq \{2\}$. Ввиду [5, теорема 4] для группы $\hat{G}$ справедливо одно из следующих утверждений:

(i) $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(81)$, $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(81) : 2_2$ или $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(81) : 2_3$;

(ii) $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(3^m)$ или $\hat{G} \cong \mathrm{PGL}_2(3^m)$, где m и $u = (3^m - 1)/2$ — нечётные простые числа и $\pi\big((3^m + 1)/4\big) = \{v\}$;

(iii) $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(r)$, где r — простое число, $17 < r \neq 2^k \pm 1$ для любых натуральных чисел k, $r \not\equiv \pm 1 \pmod{12}$ и $|\pi(r^2 - 1)| = 3$.

Рассмотрим каждый из этих подслучаев.

Пусть имеет место случай 2 (i). Тогда силовская 3-подгруппа в $\bar{G}$ нециклическая, поэтому $3p \in \omega(G)$, и следовательно, $3 \in \pi_1(G)$. Если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(81) : 2_2 \cong \mathrm{PGL}_2(81)$, то ввиду [5, таблица 1] граф $\Gamma(G)$ связен, что невозможно. Поэтому $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(81)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(81) : 2_3$, и ввиду [5, таблица 1] получаем, что $\pi_1(G) = \{2, 3, 5, p\}$ и $\pi_2(G) = \{41\}$. Таким образом, любой элемент порядка 41 из G действует на $\mathrm{O}_p(G)$ свободно. Пусть V — абсолютно неприводимый $\mathrm{L}_2(81)$-модуль над полем характеристики p, на который элемент g порядка 41 действует свободно, и β — характер Брауэра модуля V. Тогда β совпадает с некоторым комплексным неприводимым характером группы $\mathrm{L}_2(81)$. Используя приведённую выше таблицу для $q = 81$ и лемму 3, получаем, что $\beta = \delta_k$ для некоторого k, где $1 \leqslant k \leqslant 20$, и

$$0 = \dim C_V(g) = \frac{1}{41} \sum_{x \in \langle g \rangle} \delta_k(x) \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{41}\left(80 - 4\sum_{n=1}^{20}\left|\cos\left(\frac{4\pi k n}{82}\right)\right|\right) \geqslant \frac{1}{41}\left(80 - 4\sum_{n=1}^{20} 1\right) = 0.$$

Отсюда следует, что $|\cos(4\pi k n/82)| = 1$ для любого n, где $1 \leqslant n \leqslant 20$, что невозможно.

Пусть имеет место случай 2 (ii). Рассуждая так же, как в случае 2 (i), получаем, что $3 \in \pi_1(G)$. Ввиду [5, таблица 1] получаем, что $\pi_1(G) = \{2, 3, v, p\}$ и $\pi_2(G) = \{u\}$. Но группа $\bar{G}$ содержит подгруппу, изоморфную группе Фробениуса вида $3^m : u$, поэтому ввиду леммы 2 в $\bar{G}$ найдётся элемент порядка u, централизующий нетривиальный элемент в $\mathrm{O}_p(G)$, что противоречит несвязности графа $\Gamma(G)$.

Пусть имеет место случай 2 (iii). Тогда $\pi(r^2 - 1) = \{2, 3, s\}$. Ввиду [5, таблица 1] $\pi_1(\hat{G}) = \{2, s\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{3\}$ и $\pi_3(\hat{G}) = \{r\}$. Из леммы 5 вытекает, что группа G содержит элемент порядка $3p$ и, следовательно, $3 \in \pi_1(G)$. Таким образом, $\pi_1(G) = \{2, 3, s, p\}$ и $\pi_2(G) = \{r\}$, в частности, любой элемент порядка r из G действует на $\mathrm{O}_p(G)$ свободно. Пусть V — абсолютно неприводимый $\mathrm{L}_2(r)$-модуль над полем характеристики p, на который элемент g порядка r действует свободно, и β — характер Брауэра модуля V. Тогда β совпадает с некоторым комплексным неприводимым характером группы $\mathrm{L}_2(r)$. Используя приведённую выше таблицу для $q = r$ и лемму 3, получаем, что $\beta = \delta_k$ для некоторого k, где $1 \leqslant k \leqslant (r - 2 + \varepsilon 1)/4$, поэтому ввиду леммы 6 справедливо утверждение 3.

Случай 3. $3 \in \pi_1(\hat{G})$ и $5 \in \pi(\hat{G}) \setminus \pi_1(\hat{G})$. Ввиду [5, теорема 5] группа $\bar{G}$ изоморфна одной из групп M_{11}, $\mathrm{L}_2(11)$, A_7, $\mathrm{L}_3(4):2_1$, $\mathrm{L}_3(4):2_2$, $\mathrm{U}_4(3)$, $\mathrm{L}_2(25)$, $\mathrm{L}_2(25):2_1$, $\mathrm{L}_2(25):2_3$, $\mathrm{S}_4(7)$, $\mathrm{L}_2(49)$, $\mathrm{L}_2(49):2_2$, $\mathrm{L}_2(49):2_3$.

Покажем, что группа G содержит элемент порядка $5p$. Для случая когда $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(25)$, $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(25):2_1$ или $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(25):2_3$, это утверждение следует из того, что силовская 5-подгруппа в $\bar{G}$ элементарная абелева порядка 25. Для остальных случаев это утверждение доказывается применением леммы 3, атласа [11] и вычислений в GAP [12]. Таким образом, $\pi_1(G) = \{2, 3, 5, p\}$ и $\pi_2(G) = \{r\}$ для некоторого $r \in \pi(\hat{G})$, в частности, любой элемент порядка r из G действует на $\mathrm{O}_p(G)$ свободно.

Пусть $\bar{G} \cong M_{11}$. Тогда $r = 11$. Используя лемму 3 и [11], получаем, что имеется точно три 10-мерных абсолютно неприводимых $\bar{G}$-модуля над полем характеристики p, на которых элемент порядка 11 из $\bar{G}$ действует свободно: один из них реализуется над $GF(p)$, а два имеют поле определения $GF(p^m)$, где $m = \big(GF(p)(\sqrt{-2}) : GF(p)\big)$. По лемме 7 получаем, что $m = 1$, если $p \equiv 1, 3, 9, 11 \pmod{16}$, и $m = 2$ в противном случае. Поэтому по лемме 6 справедливо утверждение 4.

Пусть $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(11)$. Тогда $r = 11$. Используя лемму 3 и [11], получаем, что имеется точно четыре абсолютно неприводимых $\bar{G}$-модуля над полем характеристики p, на которых элемент порядка 11 из $\bar{G}$ действует свободно: два 5-мерных модуля с полем определения $GF(p^m)$, где $m = \big(GF(p)(\sqrt{-11}) : GF(p)\big)$ и два 10-мерных модуля с полем определения $GF(p)$. По лемме 7 получаем, что $m = 1$, если $p \equiv 1, 3, 4, 5, 9 \pmod{11}$, и $m = 2$ в противном случае. Поэтому по лемме 6 справедливо утверждение 5.

Пусть $\bar{G} \cong \mathrm{A}_7$. Тогда $r = 7$. Используя лемму 3 и [11], получаем, что существует единственный 6-мерный неприводимый $GF(p)\bar{G}$-модуль, на который элемент порядка 7 из G действует свободно. Таким образом, справедливо утверждение 6.

Если $\bar{G} \cong \mathrm{S}_4(7)$, то ввиду [5, таблица 1] граф $\Gamma(G)$ связен, что противоречит условию теоремы.

Если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(49)$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(49):2_2$ или $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(49):2_3$, то группа G содержит элемент порядка $7p$, поскольку силовская 7-подгруппа в $\bar{G}$ элементарная абелева порядка 49, следовательно, граф $\Gamma(G)$ связен, что противоречит условию теоремы.

В остальных случаях, применяя лемму 3, атлас [11] и вычисления в GAP [12], показываем, что группа G содержит элемент порядка rp; противоречие.

Случай 4. $\pi_1(\hat{G}) = \{2, 3, 5\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{r\}$ и $\bar{G}$ — группа из п. (7) заключения теоремы 1 из [5]. Ввиду [5, теорема 6] $\pi_1(G) = \{2, 3, 5, p\}$, $\pi_2(G) = \{r\}$, где $r \in \{7, 11, 13, 17, 31, 41, 73\}$, и справедливо одно из следующих утверждений:

(i) $r = 7$ и $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(5)$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(5) : 2$, $\bar{G} \cong \mathrm{A}_9$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_4(3)$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_4(3) : 2_2$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_4(3) : 2_3$, $\bar{G} \cong \mathrm{O}_8^+(2)$, $\bar{G} \cong \mathrm{A}_8$, $\bar{G} \cong \mathrm{S}_8$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(4)$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(4) : 2_1$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(4) : 2_3$, $\bar{G} \cong \mathrm{J}_2$ или $\bar{G} \cong \mathrm{S}_6(2)$;

(ii) $r = 7$ и $\bar{G} \cong \mathrm{A}_7$ или $\bar{G} \cong \mathrm{S}_7$;

(iii) $r = 11$ и $\bar{G} \cong \mathrm{M}_{11}$;

(iv) $r = 11$ и $\bar{G} \cong \mathrm{M}_{12}$;

(v) $r = 11$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_5(2)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{Aut}\big(\mathrm{U}_5(2)\big)$;

(vi) $r = 13$, $\hat{G} \cong {}^2\mathrm{F}_4(2)'$, $\hat{G} \cong {}^2\mathrm{F}_4(2)$, $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(25)$, $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(25) : 2_2$ или $\hat{G} \cong \mathrm{L}_2(25) : 2_3$;

(vii) $r = 13$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4)$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4) : 2$ или $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4) : 4$;

(viii) $r = 13$, $\bar{G} \cong \mathrm{S}_4(5)$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_4(3)$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_4(3) : 2_2$ или $\bar{G} \cong \mathrm{L}_4(3) : 2_3$;

(ix) $r = 17$, $\bar{G} \cong \mathrm{Sp}_4(4)$, $\bar{G} \cong \mathrm{Sp}_4(4) : 2$ или $\bar{G} \cong \mathrm{Sp}_4(4) : 4$;

(x) $r = 17$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16)$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16) : 2$ или $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16) : 4$;

(xi) $r = 31$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(5)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(5) : 2$;

(xii) $r = 73$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9)$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9) : 2$ или $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9) : 4$;

(xiii) $r = 41$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(81)$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(81) : 2_1$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(81) : 2_3$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(81) : 4_1$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(81) : 4_2$, $\bar{G} \cong \mathrm{S}_4(9)$, $\bar{G} \cong \mathrm{S}_4(9) : 2_1$ или $\bar{G} \cong \mathrm{S}_4(9) : 2_3$.

Рассмотрим каждое из этих утверждений, учитывая, что любой элемент порядка r из G действует на $\mathrm{O}_p(G)$ свободно.

В случаях (i), (iv), (vi), (viii), (ix) и (xiii), применяя лемму 3 для элемента g порядка r из $\bar{G}$, таблицу характеров группы $\bar{G}'$ из [11] и вычисления в системе GAP [12], показываем, что группа G содержит элемент порядка rp; противоречие.

Если имеет место случай 4 (ii), то по лемме 3 и [11] справедливо утверждение 7.

Пусть имеет место случай 4 (iii). Используя рассуждения для доказательства утверждения 4 теоремы в случае 3, получаем справедливость утверждения 8.

Пусть имеет место случай 4 (v). Тогда $r = 11$. Используя лемму 3 и [11], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p, на которых элемент порядка 11 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: единственный 10-мерный модуль с полем определения $GF(p)$ при $\bar{G} \cong \mathrm{U}_5(2)$ и два модуля с полем определения $GF(p^m)$, где $m = \big(GF(p)(\sqrt{-2}) : GF(p)\big)$, при $\bar{G} \cong \mathrm{Aut}\big(\mathrm{U}_5(2)\big)$. По лемме 7 $m = 1$ при $p \equiv 1, 3, 9, 11 \pmod{16}$ и $m = 2$ в противном случае. Отсюда ввиду леммы 6 получаем справедливость утверждения 9.

Пусть имеет место случай 4 (vii). Тогда $r = 13$. Используя лемму 3 и [11], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p, на которых элемент порядка 13 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: единственный 12-мерный модуль с полем определения $GF(p)$ при $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4)$; два 12-мерных модуля с полем определения $GF(p^m)$, где $m = \big(GF(p)(\sqrt{-2}) : GF(p)\big)$, при $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4) : 2$; четыре 12-мерных модуля с полем определения $GF(p^n)$, где $n = \big(GF(p)(\sqrt{-2}, \sqrt{-1}) : GF(p)\big)$, при $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(4) : 4$. По лемме 7 $m = 1$ при $p \equiv 1, 3, 9, 11 \pmod{16}$ и $m = 2$ в противном случае; $n = 1$ при $p \equiv 9 \pmod{16}$ и $n = 2$ в противном случае. Отсюда ввиду леммы 6 получаем справедливость утверждения 10.

Пусть имеет место случай 4 (x). Тогда $r = 17$. Используя лемму 3 и [11], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p, на которых элемент порядка 17 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: единственный 16-мерный модуль с полем определения $GF(p)$ при $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16)$; два 16-мерных модуля с полем определения $GF(p)$ при $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16) : 2$; два 16-мерных модуля с полем определения $GF(p)$ и два 16-мерных модуля с полем определения $GF(p^m)$, где $m = \big(GF(p)(\sqrt{-2}) : GF(p)\big)$, при $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(16) : 4$. По лемме 7 $m = 1$ при $p \equiv 1, 3, 9, 11 \pmod{16}$ и $m = 2$ в противном случае. Отсюда с учётом леммы 6 следует, что справедливо утверждение 11.

Пусть имеет место случай 4 (xi). Тогда $r = 31$. Используя лемму 3 и [11], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p, на которых элемент порядка 31 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: единственный 30-мерный модуль с полем определения $GF(p)$ при $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(5)$ и два 30-мерных модуля с полем определения $GF(p^m)$, где $m = \big(GF(p)(\sqrt{-5}) : GF(p)\big)$ при $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(5) : 2$. По лемме 7 $m = 1$, если $p \equiv \pm 1 \pmod{5}$ и $m = 2$ в противном случае. Применяя лемму 6, получаем утверждение 12.

Пусть имеет место случай 4 (xii). Тогда $r = 73$. Используя лемму 3 и таблицу характеров группы $\bar{G}$ из GAP [12], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p, на которых элемент порядка 73 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: единственный 72-мерный модуль, если $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9)$; два 72-мерных модуля с полем определения $GF(p^m)$, где $m = \big(GF(p)(\sqrt{-1}) : GF(p)\big)$, если $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9) : 2$; четыре 72-мерных модуля с полем определения $GF(p^n)$, где $n = \big(GF(p)(z^6, z - z^{17}, z^{11} - z^{19}) : GF(p)\big)$ для $z = \exp(2\pi i/24)$, если $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(9) : 4$. По лемме 7 $m = 1$, если $p \equiv \pm 1 \pmod{4}$ и $m = 2$ в противном случае. Поскольку $(24, p) = 1$, число $\big(GF(p)(z) : GF(p)\big)$ равно наименьшему натуральному числу l, такому что 24 делит $p^l - 1$. Но 24 делит $p^2 - 1$, поэтому $n \in \{1, 2\}$. Применяя лемму 6, получаем утверждение 13.

Случай 5. $\{2, 3\} \subseteq \pi_1(\hat{G})$, $5 \notin \pi(\hat{G})$ и $\bar{G}$ — группа из п. (7) заключения теоремы 1 из [5]. Ввиду [5, теорема 7] либо $G \cong \mathrm{G}_2(3)$ или $G \cong \mathrm{G}_2(3) : 2$, либо $\pi_1(G) = \{2, 3, 7\}$, $\pi_2(G) = \{r\} \subseteq \{13, 19, 43, 73\}$ и выполнено одно из следующих утверждений:

(i) $r = 13$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(27) : 3$;

(ii) $r = 13$, $\bar{G} \cong {}^3\mathrm{D}_4(2)$ или $\bar{G} \cong {}^3\mathrm{D}_4(2) : 3$;

(iii) $r = 19$, $G \cong \mathrm{L}_3(7)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(7) : 2$;

(iv) $r = 19$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(8)$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(8) : 2$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(8) : 3_1$ или $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(8) : 3_3$;

(v) $r = 43$, $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(7)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(7) : 2$;
(vi) $r = 73$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8)$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 2$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 3$ или $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 6$.

В первом случае, применяя лемму 3 и таблицу характеров группы $\bar{G}'$ из [11], показываем, что группа G содержит элементы порядков $7p$ и $13p$, а это противоречит несвязности графа $\Gamma(G)$.

Таким образом, имеет место второй случай, в частности, $\pi_1(G) = \{2,3,7,p\}$ и $\pi_2(G) = \{r\} \subseteq \{13,19,43,73\}$. Рассмотрим каждое из утверждений (i)—(vi), учитывая, что любой элемент порядка r из G действует на $\mathrm{O}_p(G)$ свободно.

В случаях (i)—(iv), применяя лемму 3 для элемента g порядка r из $\bar{G}$ и таблицу характеров группы $\bar{G}'$ из [11], показываем, что группа G содержит элемент порядка rp; противоречие.

Пусть имеет место случай 5 (v). Тогда $r = 43$. Применяя лемму 3 и [11], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p, на которых элемент порядка 43 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: единственный 42-мерный модуль при $\bar{G} \cong \mathrm{U}_3(7)$ с полем определения $GF(p)$ и два 42-мерных модуля с полем определения $GF(p^m)$, где $m = \big(GF(p)(\sqrt{-7}) : GF(p)\big)$. По лемме 7 получаем, что $m = 1$ при $p \equiv 1,2,4 \pmod 7$ и $m = 2$ в противном случае. Отсюда и из леммы 6 следует утверждение 14.

Пусть имеет место случай 5 (vi). Тогда $r = 73$. Применяя лемму 3 и [11], получаем, что абсолютно неприводимые $\bar{G}$-модули над полем характеристики p, на которых элемент порядка 73 из $\bar{G}$ действует свободно, таковы: если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8)$, то единственный 72-мерный модуль с полем определения $GF(p)$; если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 2$, то два 72-мерных модуля с полем определения $GF(p^m)$, где $m = \big(GF(p)(\sqrt{2}) : GF(p)\big)$; если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 3$, то один 72-мерный модуль с полем определения $GF(p)$ и два 72-мерных модуля с полем определения $GF(p^n)$, где $n = \big(GF(p)(\sqrt{-3}) : GF(p)\big)$; если $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(8) : 6$, то два 72-мерных модуля с полем определения $GF(p^m)$, где $m = \big(GF(p)(\sqrt{2}) : GF(p)\big)$, и четыре 72-мерных модуля с полем определения $GF(p^t)$, где $t = \big(GF(p)(\sqrt{2}, \sqrt{-3}) : GF(p)\big)$. По лемме 7 получаем, что $m = 1$ при $p \equiv \pm 1, \pm 7 \pmod{16}$ и $m = 2$ в противном случае; $n = 1$ при $p \equiv 5 \pmod{12}$ и $n = 2$ в противном случае; $t = 1$ при $p \equiv 17, 41 \pmod{48}$ и $t = 2$ в противном случае. Отсюда и из леммы 6 следует утверждение 15.

Случай 6 (случай, пропущенный в [5]). $\pi_1(\hat{G}) = \{2,3,17\}$ и $\pi_2(\hat{G}) = \{307\}$, $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(17)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{L}_3(17) : 2$. Тогда $\pi_1(G) = \{2,3,17,p\}$ и $\pi_2(G) = \{307\}$. Пусть V — абсолютно неприводимый $\mathrm{L}_3(17)$-модуль над полем характеристики p, на который элемент g порядка 307 действует свободно, и β — характер Брауэра модуля V. Тогда β совпадает с некоторым комплексным неприводимым характером группы $\mathrm{L}_3(17)$. Применяя лемму 3 и таблицу характеров группы $\mathrm{L}_3(17)$ из [19], получаем, что либо β равен единственному 306-мерному неприводимому характеру (и этот случай реализуется), либо β равен 4608-мерному неприводимому характеру $\chi_{4608}^{(u)}$ $(1 \leqslant u < 307$, $(u) = (17u) = (289u) \pmod{307})$, который на классе $C_8^{(k)}$ $(1 \leqslant k < 307$, $C_8^{(k)} = C_8^{(17k)} = C_8^{(289k)} \pmod{307})$ элементов порядка 307 в G принимает значение $\mathrm{A}_{uk} = \gamma^{uk} + \gamma^{17uk} + \gamma^{289uk}$, где

$\gamma = \exp(2\pi i/307)$. Покажем, что второй случай невозможен. Действительно, предположим, что $\beta = \chi_{4608}^{(u)}$ для некоторого u. Тогда по лемме 3 имеем

$$\dim C_V(g) = \frac{1}{|g|} \sum_{x \in \langle g \rangle} \beta(x) = \frac{1}{307}\left(4608 + 3\sum_k \mathrm{A}_{uk}\right) = \\ = \frac{1}{307}\left(4608 + 3\sum_k (\gamma^{uk} + \gamma^{17uk} + \gamma^{289uk})\right).$$

Но

$$\left|3\sum_k (\gamma^{uk}+\gamma^{17uk}+\gamma^{289uk})\right| \leqslant 3\sum_k (|\gamma|^{uk}+|\gamma|^{17uk}+|\gamma|^{289uk}) = 9\frac{306}{3} = 918 < 4608,$$

поэтому $\dim C_V(g) > 0$; противоречие. Таким образом, справедливо утверждение 16.

Случай 7. $\{2,3\} \subseteq \pi_1(\hat{G})$ и $\bar{G}$ — группа из из п. (4)—(6) заключения теоремы 1 из [5]. Ввиду [5, теорема 8] справедливо одно из следующих утверждений:

(i) $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(2^m)$, где m, $u = 2^m - 1$ и $s = (2^m+1)/3$ — простые числа, большие 3, $\pi_1(\hat{G}) = \{2,3,s\}$ и $\pi_2(\hat{G}) = \{u\}$;

(ii) $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(3^m)$, где m и $u = (3^m - 1)/2$ — нечётные простые числа, $s \in \pi(3^m+1)/4)$, $\pi_1(\hat{G}) = \{2,3,s\}$ и $\pi_2(\hat{G}) = \{u\}$;

(iii) $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(r)$, где r — простое число, $17 \neq r \geqslant 13$, $\pi(r-1) = \{2,3\}$, $s \in \pi\big((r+1)/2\big)$, $\pi_1(\hat{G}) = \{2,3\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{r\}$, $\pi_3(\hat{G}) = \{s\}$;

(iv) $\bar{G} \cong \mathrm{L}_2(r)$ или $\mathrm{PGL}_2(r)$, где r — простое число, $17 \neq r \geqslant 11$, $\pi_1(\hat{G}) = \pi(r^2-1) = \{2,3,s\}$, $\pi_2(\hat{G}) = \{r\}$.

Рассмотрим каждое из этих утверждений.

Пусть имеет место случай 7 (i). Тогда $\pi_1(G) = \{2,3,s,p\}$, $\pi_2(G) = \{u\}$. Поскольку в группе $\bar{G}$ существует подгруппа, изоморфная группе Фробениуса вида $2^m : u$, из леммы 2 следует, что группа G содержит элемент порядка up; противоречие с несвязностью графа $\Gamma(G)$.

Пусть имеет место случай 7 (ii). Рассуждая как в предыдущем абзаце и заменяя 2^m на 3^m, получаем противоречие.

Пусть имеет место случай 7 (iii). Предположим, что элемент g порядка s из G действует на $\mathrm{O}_p(G)$ свободно. Пусть V — абсолютно неприводимый $\mathrm{L}_2(r)$-модуль над полем характеристики p, на который элемент g действует свободно, и β — характер Брауэра модуля V. Тогда β совпадает с некоторым комплексным неприводимым характером группы $\mathrm{L}_2(r)$. Используя лемму 3 и приведённую выше таблицу для $q = r$ и $\varepsilon = +$, получаем, что $\beta = \delta_k$ для некоторого k, где $1 \leqslant k \leqslant (r-1)/4$, и

$$0 = \sum_{x \in \langle g \rangle} \beta(x) = r - 1 - 4\sum_{n=1}^{(s-1)/2} \cos\left(\frac{2\pi kn}{s}\right).$$

Но тогда

$$r-1=\left|4\sum_{n=1}^{(s-1)/2}\cos\left(\frac{2\pi kn}{s}\right)\right|<4\sum_{n=1}^{(s-1)/2}1=2(s-1)\leqslant r-1,$$

противоречие. Итак, группа G содержит элемент порядка ps, следовательно, $\pi_1(G)=\{2,3,s,p\}$ и $\pi_2(G)=\{r\}$. Рассуждая как в случаях 1 (i) и 2 (iii), получаем, что выполнено утверждение 17.

Пусть имеет место случай 7 (iv). Тогда $\pi_1(G)=\{2,3,s,p\}$ и $\pi_2(G)=\{r\}$. Рассуждая как в случаях 1 (i) и 2 (iii), получаем, что выполнено утверждение 18.

Теорема 2 доказана. □

Работа выполнена при финансовой поддержке программы РНФ для отдельных научных групп (проект 14-11-00061).

Литература

[1] Белоногов В. А. Представления и характеры в теории конечных групп. — Свердловск: УрО АН СССР, 1990.

[2] Колпакова В. А., Кондратьев А. С. Конечные почти простые 6-примарные группы и их графы Грюнберга—Кегеля // Алгебра и приложения: Тр. Междунар. конф., посвящ. 100-летию Л. А. Калужнина. — Нальчик: КБГУ, 2014. — С. 63—66.

[3] Кондратьев А. С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Матем. сб. — 1989. — Т. 180, № 6. — С. 787—797.

[4] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных трипримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2010. — Т. 16, № 3. — С. 150—158.

[5] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных четырепримарных группах // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 4. — С. 142—159.

[6] Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных непростых трипримарных группах с несвязным графом простых чисел // Сиб. эл. матем. изв. — 2012. — Т. 9. — С. 472—477.

[7] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.

[8] Мазуров В. Д. Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. — 1997. — Т. 36, № 1. — С. 37—53.

[9] Храмцов И. В. О конечных непростых 4-примарных группах // Сиб. эл. матем. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 695—708.

[10] Aschbacher M. Finite group theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.

[11] Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. — Oxford: Clarendon Press, 1985.

[12] GAP — Groups, Algorithms, and Programming. Ver. 4.4.12. — 2008. — `http://www.gap-system.org`.

[13] Higman G. Odd Characterizations of Finite Simple Groups: Lecture Notes. — Michigan: Univ. of Michigan, 1968.

[14] Huppert B., Blackburn N. Finite Groups. Vol. II. — Berlin: Springer, 1982.

[15] Jansen C., Lux K., Parker R., Wilson R. An atlas of Brauer characters. — Oxford: Clarendon Press, 1995.

[16] Kondrat'ev A. S. Finite linear groups of small degree. II // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 9. — P. 4103—4123.

[17] Kondrat'ev A. S. Finite almost simple 5-primary groups и their Gruenberg—Kegel graphs // Сиб. эл. матем. изв. — 2014. — Т. 11. — С. 634—674.

[18] Lucido M. S. Prime graph components of finite almost simple groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1999. — Vol. 102. — P. 1—22; addendum, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 2002. — Vol. 107. — P. 189—190.

[19] Simpson W. A., Frame J. S. The character tables for $\mathrm{SL}(3,q)$, $\mathrm{SU}(3,q^2)$, $\mathrm{PSL}(3,q)$, $\mathrm{PSU}(3,q^2)$ // Can. J. Math. — 1973. — Vol. 25, no. 3. — P. 486—494.

[20] Stewart W. B. Groups having strongly self-centralizing 3-centralizers // Proc. London Math. Soc. — 1973. — Vol. 426, no. 4. — P. 653—680.

[21] Williams J. S. Prime graph components of finite groups // J. Algebra. — 1981. — Vol. 69, no. 2. — P. 487—513.