Радикальность решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр

Ю. В. КОЧЕТОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: jkochetova@mail.ru

УДК 512.552+512.545

Ключевые слова: решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над полем, первичный идеал, первичный радикал, насыщенная система.

Аннотация

Рассматривается подход упорядочения алгебр, предложенный В. М. Копытовым. Изучается взаимосвязь между первичным и l-первичным радикалами решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем. Для изучения свойств l-первичного радикала введено понятие насыщенной системы для l-алгебры, исследованы свойства насыщенных систем.

Abstract

J. V. Kochetova, Radical properties of lattice $\mathcal{K}$-ordered algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 89—93.

Kopytov's $\mathcal{K}$-order for any algebras over a field is considered. Some results concerning relationships between l-prime radicals and prime radicals in lattice $\mathcal{K}$-ordered algebras over partially ordered fields are obtained. Also, the notion of a saturated system in an l-algebra is introduced and some properties of saturated systems of lattice $\mathcal{K}$-ordered algebras are presented.

Если $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ — линейная алгебра над частично упорядоченным полем F, то говорят (см., например, [5]), что на алгебре A определён *$\mathcal{K}$-порядок* $\leqslant$, если:

1) $\langle A; +; \leqslant \rangle$ является частично упорядоченной группой;
2) из $x \leqslant y$ следует, что $\gamma x \leqslant \gamma y$ для любых $x, y \in A$ и $\gamma > 0$, $\gamma \in F$;
3) из $x \geqslant 0$ следует, что $x + xy \geqslant 0$ и $x + yx \geqslant 0$ для всех $y \in A$.

Если при этом группа $\langle A; +; \leqslant \rangle$ решёточно упорядоченна, то алгебра A над полем F называется *решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной* или *l-алгеброй*.

Определение такого упорядочения было введено В. М. Копытовым для алгебр Ли в 1972 году в [2], где он, в частности, отмечает, что это определение порядка можно рассматривать не только для алгебр Ли, но и для произвольных алгебр над упорядоченным полем. Данная статья продолжает изучение свойств

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 89—93.

$\mathcal{K}$-порядка для произвольных линейных алгебр над частично упорядоченным полем, начатое автором совместно с Е. Е. Ширшовой в [7].

Для многих алгебраических систем, в том числе и упорядоченных, исследован их первичный радикал (см. [1, 4—6, 8—12, 14]), в частности, для упорядоченных алгебраических систем изучена взаимосвязь между их первичным радикалом и l-первичным радикалом. Целью данной работы является характеризация l-первичного радикала решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем с точки зрения его связи с первичным радикалом этой алгебры.

В статье используется общепринятая терминология для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [13]).

Напомним, что *l-первичным радикалом* $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(A)$ решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем называется пересечение всех её *l-первичных идеалов*, т. е. всех l-идеалов J алгебры A, для которых произведение

$$UV = \left\{ z = \sum_{i=1}^{n=n(z)} x_i y_i \;\middle|\; x_i \in U,\ y_i \in V \right\}$$

любых двух ненулевых l-идеалов U и V фактор-алгебры A/J отлично от множества $\{J\}$ (см., например, [5]).

При изучении свойств l-первичного радикала $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр автором было получено следующее утверждение.

Теорема 1 [6, теорема 3.3.1]. *В любой конечномерной линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре A над линейно упорядоченным полем её l-первичный радикал совпадает со всей алгеброй.*

Известно (см. [1, § 1.1]), что первичный радикал $\mathrm{rad}(A)$ произвольной ассоциативной алгебры A состоит из тех и только тех элементов $a \in A$, для которых любая m-система σ, содержащая a, содержит и нулевой элемент. Напомним, что непустое подмножество σ ассоциативной алгебры A называется *m-системой*, если для любых $x, y \in \sigma$ найдётся элемент $z \in A$, зависящий от x и y, такой что $xzy \in \sigma$ (см. [1, § 1.1, определение 5]).

Для изучения свойств l-первичного радикала для многих упорядоченных алгебраических систем вводится понятие l-m-системы (для решёточно упорядоченных колец см., например, [9]). Аналогом понятия l-m-системы в l-кольцах является понятие насыщенной системы для решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр. Непустое подмножество $\sigma \subseteq A$ l-алгебры A над частично упорядоченным полем называется *насыщенной системой*, если для любых $x, y \in \sigma$ существует элемент $z \in I_x I_y$, такой что $z \in \sigma$ (здесь I_x, I_y — наименьшие l-идеалы в A, содержащие соответственно x и y) (см. [6, определение 3.2.2]).

Описание свойств насыщенных систем в $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебрах, связывающих эти системы с l-первичными идеалами, дают следующие утверждения.

Предложение 1 [6, следствие 3.2.1]. *l-идеал I l-алгебры A над частично упорядоченным полем является l-первичным идеалом тогда и только тогда, когда $A \setminus I$ — насыщенная система.*

Предложение 2 [6, теорема 3.2.2]. *Пусть I — l-идеал l-алгебры A над частично упорядоченным полем, σ — насыщенная система и $I \cap \sigma = \varnothing$. Тогда множество $\mathcal{P}$ таких l-идеалов J, что $J \supseteq I$ и $J \cap \sigma = \varnothing$, индуктивно, при этом максимальные элементы в $\mathcal{P}$ являются l-первичными идеалами в A, содержащими I.*

Благодаря этим свойствам можно получить следующее описание l-первичного радикала решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр с использованием понятия насыщенной системы.

Теорема 2. *l-первичный радикал $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(A)$ решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем совпадает со множеством элементов $a \in A$, для которых любая насыщенная система σ, содержащая a, содержит и нулевой элемент.*

Доказательство. Если $a \notin l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(A)$, то по определению l-первичного радикала $a \notin P$ для некоторого l-первичного идеала P решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры A. Но тогда $\sigma = A \setminus P$ — насыщенная система, не содержащая нулевого элемента по предложению 1, но содержащая элемент a.

Обратно, пусть $a \in A$ — такой элемент, что $a \in \sigma$ для некоторой насыщенной системы σ, не содержащей нулевого элемента. С помощью предложения 2, применённого к нулевому l-идеалу, можно построить l-первичный идеал P l-алгебры A, не пересекающийся с σ. Для этого первичного идеала P получаем $a \notin P$, и поэтому $a \notin l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(A)$. □

Теорема 3. *Для l-первичного радикала $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(A)$ и первичного радикала $\mathrm{rad}(A)$ любой решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной ассоциативной алгебры (алгебры Ли) A над частично упорядоченным полем выполняется включение $l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$.*

Доказательство. Для решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр Ли данное утверждение доказано в [6, следствие 3.3.1].

Проведём доказательство для случая ассоциативной решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры A. Для любого элемента $a \in l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(A)$ рассмотрим произвольную m-систему σ, содержащую a. Возьмём в m-системе σ любые элементы $x, y \in \sigma$. Для них по определению существует элемент $z \in A$, удовлетворяющий условию $xzy \in \sigma$. Так как $y \in I_y$ и для элемента x из l-идеала I_x верно $xz \in I_x$, то $xzy \in I_x I_y$. Таким образом, система σ является насыщенной системой и, поскольку $a \in \sigma$ для $a \in l\text{-rad}_{\mathcal{K}}(A)$, она содержит нулевой элемент согласно теореме 2. Значит, $a \in \mathrm{rad}(A)$. □

Теорема 4. *Во всякой конечномерной линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной ассоциативной алгебре (алгебре Ли) над линейно упорядоченным полем первичный радикал и l-первичный радикал совпадают и равны всей алгебре. Кроме того,* *в конечномерной линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной ассоциативной алгебре первичный и l-первичный радикалы совпадают с радикалом Джекобсона*

Доказательство. Поскольку в любой ассоциативной алгебре первичный радикал содержится в радикале Джекобсона (см., например, [1, § 1.3, следствие 5]), остаётся применить теоремы 1 и 3. □

Следуя [1], будем называть алгебру $\mathfrak{B}$-*радикальной*, если она совпадает со своим первичным радикалом. Используя результаты [6], назовём $\mathcal{K}$-упорядоченную алгебру $\mathfrak{B}_l$-*радикальной*, если она равна своему l-первичному радикалу.

Следствие. *Всякая конечномерная нильпотентная ассоциативная алгебра* (*алгебра Ли*) *над линейно упорядоченным полем является* $\mathfrak{B}$-радикальной *и* $\mathfrak{B}_l$-радикальной *алгеброй. Кроме того, каждая конечномерная нильпотентная ассоциативная алгебра является радикальной по Джекобсону.*

Доказательство. Утверждение выполняется, поскольку конечномерную ассоциативную алгебру (алгебру Ли) можно линейно $\mathcal{K}$-упорядочить в том и только в том случае, когда она нильпотентна (см. [7, следствие 1]). □

Литература

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[2] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.

[3] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные алгебры Ли // Сиб. матем. журн. — 1977. — Т. 18, № 3. — С. 595—607.

[4] Кочетова Ю. В. Первичный радикал решёточно упорядоченных алгебр Ли // УМН. — 2008. — Т. 63, № 5. — С.191—192.

[5] Кочетова Ю. В. О l-первичном радикале решёточно упорядоченных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 5. — С. 55—68.

[6] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 85—158.

[7] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 53—63.

[8] Курош А. Г. Радикалы колец и алгебр // Матем. сб. — 1953. — Т. 33, № 1. — С. 13—26.

[9] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных колец // Сб. работ по алгебре. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178—184.

[10] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 84—86.

[11] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал pl-групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 193—199.

[12] Пихтильков С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли. — Тула: Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

[13] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[14] Щукин К. К. RI-разрешимый радикал группы // Матем. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1021—1031.