# Определители обобщённых матриц порядка 2*

**П. А. КРЫЛОВ**
*Томский государственный университет*
e-mail: krylov@math.tsu.ru

УДК 512.552

**Ключевые слова:** кольцо обобщённых матриц, определитель.

**Аннотация**

Вводится понятие определителя обобщённой матрицы порядка 2, приводятся некоторые свойства таких определителей.

**Abstract**

*P. A. Krylov, Determinants of generalized matrices of order* 2, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 95—112.

The concept of the determinant of a generalized matrix of order 2 is introduced, and some properties of such determinants are presented.

Обобщённые матрицы различного вида используются во многих разделах алгебры. Они встречаются и в других областях математики. Возможно, в каких-то задачах могут оказаться полезными «определители» таких матриц. Поэтому кажется естественным пытаться перенести на обобщённые матрицы понятие определителя числовой матрицы.

В данной статье даётся понятие определителя обобщённой матрицы (порядка 2). Кольца обобщённых матриц изучались во многих работах (см., например, библиографию в [1]). В статье не содержится каких-либо сложных результатов. Предлагается некоторый общий подход (в том числе и категорная интерпретация) к понятию определителя.

Кольца считаем ассоциативными и содержащими единичный элемент, модули унитарными. Радикал Джекобсона кольца $T$ обозначаем $J(T)$. Нетрудные вычисления и рассуждения часто опускаем.

## 1. Кольцо обобщённых матриц

Определим кольцо обобщённых матриц (порядка 2). Различная информация о свойствах таких колец содержится в [1].

*Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки РФ, соглашение 14.B37.21.0354 и частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

Пусть $R$, $S$ — кольца, $M$ — $R$-$S$-бимодуль, $N$ — $S$-$R$-бимодуль. Предположим, что заданы бимодульные гомоморфизмы $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$. Считаем, что $mn$ обозначает $\varphi(m \otimes n)$, $nm$ обозначает $\psi(n \otimes m)$. Считаем, что для всех $m, m' \in M$ и $n, n' \in N$ выполнены равенства $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$. Множество $K$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}, \quad r \in R, \quad s \in S, \quad m \in M, \quad n \in N,$$

образует кольцо относительно операций сложения и умножения матриц. Оно называется кольцом обобщённых матриц (порядка 2) или кольцом контекста Мориты. Кольцо $K$ будем также обозначать

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Образы $I$ и $J$ гомоморфизмов $\varphi$ и $\psi$ соответственно называются идеалами следа кольца $K$. Если $I = R$ и $J = S$, то кольцо $K$ называется ситуацией эквивалентности.

Для данного кольца $K$ можно записать следующие тождества:

$$(mn)r = m(nr), \quad (nm)s = n(ms), \quad r(mn) = (rm)n, \quad s(nm) = (sn)m,$$
$$(ms)n = m(sn), \quad (nr)m = n(rm).$$

## 2. Основные свойства определителя

В этом разделе $K$ обозначает некоторое кольцо обобщённых матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Какие преобразования строк и столбцов матриц из $K$ можно совершать, чтобы снова получались матрицы из $K$? Возьмём произвольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$$

из $K$.

1. Первую строку матрицы $A$ можно умножать на элементы из $R$ слева, вторую — на элементы из $S$ слева. Поэтому можно говорить об общих множителях элементов этих строк.
2. Первую строку матрицы $A$ можно слева умножить на любой элемент из $N$ и прибавить ко второй. Вторую строку можно слева умножить на любой элемент из $M$ и прибавить к первой.
3. Переход от матрицы $A$ к матрице

$$\begin{pmatrix} m'n & m's \\ n'r & n'm \end{pmatrix},$$

где $m' \in M$, $n' \in N$, назовём перестановкой строк.

Будем говорить, что строки матрицы $A$ пропорциональны или линейно зависимы, если найдётся элемент $n' \in N$ или $m' \in M$ со свойством $n'(r,m) = (n,s)$ или $m'(n,s) = (r,m)$.

Сказанное в пунктах 1 и 2 верно для столбцов матриц, только умножать их нужно справа.

Единичную матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
обозначаем буквой $E$.

Пусть $T$ — какое-то кольцо, $f\colon R \to T$ и $e\colon S \to T$ — некоторые отображения. Уточним, что в пункте 3) следующего предложения полилинейность функции $d$ понимается в расширенном смысле. Считаем, что, в частности, верны равенства
$$d\begin{pmatrix} r'r & r'm \\ n & s \end{pmatrix} = f(r')d\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}, \quad d\begin{pmatrix} r & m \\ s'n & s's \end{pmatrix} = e(s')d\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$$
для всех значений участвующих в них букв.

**Предложение 2.1.** *Пусть $d\colon K \to T$ — отображение. Следующие утверждения* (а) *и* (б) *эквивалентны*:

(а) *отображение $d$ удовлетворяет следующим условиям*:

1) $d(E) = 1$;
2) *если строки матрицы $A$ пропорциональны, то $d(A) = 0$*;
3) *$d$ есть полилинейная функция строк*;

(б) *отображения $f$ и $e$ являются кольцевыми гомоморфизмами, при этом верны равенства $f(r)e(s) = e(s)f(r)$, $f(mn) = e(nm)$ для всех $r \in R$, $s \in S$, $m \in M$, $n \in N$, и*
$$d\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} = f(r)e(s) - f(mn)$$
*для любой матрицы*
$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Докажем импликацию (а) $\Longrightarrow$ (б). Для любых $r \in R$ и $s \in S$ можно записать равенства
$$d\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = f(r)d(E) = f(r)$$
и аналогично
$$d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = e(s).$$
Теперь для всех элементов $x, y \in R$ можно вывести, что $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ и $f(1) = 1$. Таким образом, $f$ и $e$ — кольцевые гомоморфизмы.

Для любых $r \in R$ и $s \in S$

$$d\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = f(r)e(s), \quad d\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} = e(s)f(r),$$

откуда следует, что $f(r)e(s) = e(s)f(r)$.

Из условий 2) и 3) выводится одно важное свойство отображения $d$. Если первую строку матрицы умножить на любой элемент из $N$ и прибавить ко второй или вторую строку умножить на любой элемент из $M$ и прибавить к первой, то значение отображения $d$ не изменится.

Чтобы вывести формулу для значения функции $d$, разберём основные частные случаи. Во-первых, легко получить, что

$$d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & s \end{pmatrix} = 0 = d\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad d\begin{pmatrix} r & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix} = 0 = d\begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить значение функции $d$ на треугольных матрицах. Верны равенства

$$d\begin{pmatrix} r & 0 \\ n & s \end{pmatrix} = f(r)e(s) = d\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Запишем равенства

$$d\begin{pmatrix} r & m \\ n & 0 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} r & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= d\begin{pmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 0 & m \\ n & 1 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} -mn & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} = -f(mn)$$

и аналогично

$$d\begin{pmatrix} 0 & m \\ n & s \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 0 & m \\ n & 0 \end{pmatrix} = -e(nm).$$

В частности, мы нашли, что $f(mn) = e(nm)$.

Наконец, для матрицы

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$$

имеем

$$d\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} r & m \\ n & 0 \end{pmatrix} = f(r)e(s) - f(mn).$$

Докажем импликацию (б) $\Longrightarrow$ (а). Выполнение условий 1)—3) проверяется вычислениями. $\square$

Отображение $d\colon K \to T$, удовлетворяющее эквивалентным условиям (а) и (б) предложения 2.1, будем называть определителем кольца $K$ со значениями в кольце $T$ с гомоморфизмами $f$, $e$ или просто определителем, если отображения $f$, $e$ и кольцо $T$ фиксированы. Значение функции $d$ на матрице $A$ назовём определителем матрицы $A$ и будем обозначать $d(A)$. Понятно, что определитель $d$ полностью задаётся гомоморфизмами $f$ и $e$. Отметим следующий факт.

Пусть $f\colon R \to T$ и $e\colon S \to T$ — некоторые кольцевые гомоморфизмы, для которых $f(r)e(s) = e(s)f(r)$ и $f(mn) = e(nm)$ для всех значений аргументов $r$, $s$, $m$, $n$. Полагая

$$d\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} = f(r)e(s) - f(mn),$$

приходим к определителю $d\colon K \to T$ с гомоморфизмами $f$ и $e$.

**Замечание.** Если $d\colon K \to T$ — определитель, то для столбцов матриц из $K$ верны аналоги условий 1)—3) из предложения 2.1.

Пусть $d\colon K \to T$ — определитель с гомоморфизмами $f$ и $e$. Справедливы следующие тождества коммутативности. Для их проверки нужно использовать тождества, записанные в конце раздела 1.

1. $f(x)f(mn) = f(mn)f(x)$ и $e(y)e(nm) = e(nm)e(y)$ для всех $x \in R$, $y \in S$, $m \in M$, $n \in N$.
2. $f\big((rm)(sn)\big) = f(r)e(s)f(mn) = f\big((ms)(nr)\big)$ и такие же равенства с заменой $f$ на $e$.
3. $f(rr')f(mn) = f\big((rm)(nr')\big)$ и $e(ss')e(nm) = e(sn)e(ms')$ для любых $r, r' \in R$, $s, s' \in S$, $m \in M$, $n \in N$.
4. $f(mn)f(m'n') = f(m'n)f(mn') = f(mn')f(m'n)$ $(m, m' \in M,\ n, n' \in N)$ и такие же равенства с заменой $f$ на $e$.

Введённый определитель, по сути, является «коммутативным». Это ясно из утверждения (б) предложения 2.1, а также тождеств 1—4.

Вернёмся к перестановке строк. Возьмём матрицу

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$$

и элементы $m'$, $n'$. Принимая во внимание тождества 1—4, выводим равенство

$$d\begin{pmatrix} m'n & m's \\ n'r & n'm \end{pmatrix} = -f(m'n')d\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix},$$

что согласуется с ситуацией для обычных матриц.

**Предложение 2.2.** *Пусть $d\colon K \to T$ — определитель с гомоморфизмами $f$, $e$. Для любых матриц $A$ и $B$ справедливо равенство $d(AB) = d(A) \cdot d(B)$.*

**Доказательство.** Вычисляем элементы $d(AB)$ и $d(A) \cdot d(B)$. Затем сравниваем соответствующие слагаемые, учитывая тождества 1—4. $\square$

Как можно ввести транспонирование матриц? Пусть $d\colon K \to T$ — определитель с гомоморфизмами $f$, $e$. Предположим, что даны отображения $\sigma\colon M \to N$ и $\tau\colon N \to M$. Матрицу

$$A^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} r & \tau(n) \\ \sigma(m) & s \end{pmatrix}$$

назовём транспонированной относительно $\sigma$ и $\tau$ для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix},$$

а переход от $A$ к $A^{\mathrm{t}}$ — транспонированием относительно $\sigma$ и $\tau$. Доказательство записанных ниже фактов несложно.

**Предложение 2.3.** *Пусть $\sigma\colon M \to N$ и $\tau\colon N \to M$ — некоторые отображения.*

(а) *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *$\sigma$ и $\tau$ — аддитивные гомоморфизмы и $f(mn) = f(\tau(n)\sigma(m))$ для любых $m \in M$ и $n \in N$;*
2) *$d(A) = d(A^{\mathrm{t}})$ и $(A+B)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + B^{\mathrm{t}}$ для всех матриц $A$ и $B$.*

(б) *Если $R$ и $S$ — коммутативные кольца, $\sigma$ и $\tau$ — $R$-$S$-бимодульные гомоморфизмы и $\tau(n)\sigma(m) = mn$, $\sigma(m)\tau(n) = nm$ для любых $m \in M$ и $n \in N$, то для всех матриц $A$ и $B$ верны равенства в 2), а также равенство $(AB)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$.*

**Замечание.** $R$-$S$-бимодульность $\sigma$ и $\tau$ подразумевает, что $\sigma(rms) = s\sigma(m)r$ и $\tau(snr) = r\tau(n)s$.

# 3. Стандартные определители

Гомоморфизм $R \to S$ назовём центральным, если его образ лежит в центре кольца $S$.

Пусть дано кольцо

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим определители кольца $K$ со значениями в кольце $R$ или $S$. Предположим, что имеется определитель $d\colon K \to S$ с гомоморфизмами $f\colon R \to S$ и $e\colon S \to S$. Значит, справедливы равенства $f(r)e(s) = e(s)f(r)$ и $f(mn) = e(nm)$ для всех значений аргументов. Допустим дополнительно, что $e$ — тождественный автоморфизм. Тогда $f$ — центральный гомоморфизм, $f(mn) = nm$ и

$$d\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} = f(r)s - nm$$

для каждой матрицы

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}.$$

И наоборот, если $f$ — центральный гомоморфизм, для которого $f(mn) = nm$, то отображение

$$d\colon K \to S, \quad d\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} = f(r)s - nm,$$

будет определителем со значениями в $S$.

Аналогично всякий центральный гомоморфизм $e\colon S \to R$ с условием $e(nm) = mn$ даёт определитель $d\colon K \to R$ со значениями в $R$, где

$$d\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} = re(s) - mn.$$

Введённые определители со значениями в $S$ или $R$ назовём стандартными.

Предположим теперь, что одновременно существуют оба стандартных определителя. Именно, пусть $d_1\colon K \to R$ и $d_2\colon K \to S$ — стандартные определители, $e\colon S \to R$, $f\colon R \to S$ — соответствующие центральные гомоморфизмы, т. е. $e(nm) = mn$, $f(mn) = nm$, $m \in M$, $n \in N$. Определители $d_1$ и $d_2$ дают один определитель $d\colon K \to R \times S$, где $d(A) = \big(d_1(A), d_2(A)\big)$ для всякой матрицы $A$. Соответствующие гомоморфизмы $\bar{f}\colon R \to R \times S$ и $\bar{e}\colon S \to R \times S$ действуют по формулам $\bar{f}(r) = \big(r, f(r)\big)$ и $\bar{e}(s) = (e(s), s)$. Определитель $d$ обозначим $(d_1, d_2)$ и назовём двойным стандартным определителем.

Выделим сейчас один случай, когда обратимость матрицы равносильна её «невырожденности». Предположим, что имеется двойной стандартный определитель $d = (d_1, d_2)\colon K \to R \times S$, $f\colon R \to S$ и $e\colon S \to R$ — соответствующие центральные гомоморфизмы со свойствами $f(mn) = nm$ и $e(nm) = mn$. Считаем ещё, что $rm = mf(r)$, $nr = f(r)n$, $ms = e(s)m$ и $sn = ne(s)$ для всех $r$, $s$, $m$, $n$.

**Предложение 3.1.** *Матрица $A$ обратима в точности тогда, когда $d_1(A)$ и $d_2(A)$ — обратимые элементы в кольцах $R$ и $S$ соответственно.*

**Доказательство.** С помощью предложения 2.2 легко показать, что обратимость матрицы $A$ влечёт обратимость элементов $d_1(A)$ и $d_2(A)$.

Пусть, наоборот,

$$A = \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \text{ —}$$

такая матрица, что $d_1(A)$ и $d_2(A)$ — обратимые элементы. Составим матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} e(s) & -m \\ -n & f(r) \end{pmatrix}.$$

Вычисляя, находим, что

$$AA^* = A^*A = \begin{pmatrix} d_1(A) & 0 \\ 0 & d_2(A) \end{pmatrix}.$$

Полагаем теперь

$$A^{-1} = (d_1(A)^{-1}, d_2(A)^{-1})A^* = \begin{pmatrix} d_1(A)^{-1}e(s) & -d_1(A)^{-1}m \\ -d_2(A)^{-1}n & d_2(A)^{-1}f(r) \end{pmatrix}.$$

Вычисления показывают, что $AA^{-1} = E$ (нужно учесть равенства $d_1(A)m = md_2(A)$ и $d_2(A)n = nd_1(A)$). Наконец, легко проверяется, что $A^{-1}A = E$. $\square$

В конце раздела кратко рассмотрим определители, наиболее близкие к определителям матриц над коммутативными кольцами. Такие определители появятся дальше, они автоматически являются двойными стандартными.

Пусть $R$ — коммутативное кольцо, $M$ и $N$ — $R$-$R$-бимодули и

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & R \end{pmatrix} —$$

такое кольцо обобщённых матриц, что $mn = nm$ для всех $m$ и $n$. Существует два стандартных определителя $K \to R$. Гомоморфизмы $f, e\colon R \to R$ — тождественные отображения, т. е. эти определители совпадают. Таким образом, имеется определитель

$$d\colon K \to R, \quad d\begin{pmatrix} x & m \\ n & y \end{pmatrix} = xy - mn = xy - nm.$$

**Следствие 3.2.** *Матрица $A$ обратима в $K$ в точности тогда, когда $d(A)$ — обратимый элемент в $R$.*

В [3, 6] изучались кольца обобщённых матриц

$$\begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$$

над кольцом $R$. Каждое такое кольцо определяется некоторым центральным элементом $s$ кольца $R$ и обозначается $K_s$. Если $R$ — коммутативное кольцо, то $K_s$ является кольцом рассматриваемого вида. Существует определитель

$$K_s \to R, \quad \begin{pmatrix} x & a \\ b & y \end{pmatrix} \to xy - sab,$$

введённый в [6]. Для обратимых матриц из $K_s$ справедливо следствие 3.2.

# 4. Сведение определителя к двойному стандартному определителю. Частные случаи

Рассмотрим один простой способ того, как произвольный определитель можно провести или пропустить через двойной стандартный определитель. Под этим понимается коммутативность некоторой диаграммы. В разделе 5 излагается более общая конструкция.

Сначала покажем, что всегда можно перейти к определителю полупримитивного (т. е. с нулевым радикалом) кольца обобщённых матриц.

Пусть дан определитель

$$d\colon K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \to T$$

с гомоморфизмами $f$ и $e$. Радикал $J(K)$ равен
$$\begin{pmatrix} J(R) & A(M) \\ A(N) & J(S) \end{pmatrix},$$
где
$$A(M) = \{m \in M \mid mN \subseteq J(R)\}, \quad A(N) = \{n \in N \mid nM \subseteq J(S)\}$$
(см. [1]). Фактор-кольцо $K/J(K)$ можно отождествить с кольцом обобщённых матриц
$$\begin{pmatrix} R/J(R) & M/A(M) \\ N/A(N) & S/J(S) \end{pmatrix}.$$

Гомоморфизмы $f$ и $e$ индуцируют гомоморфизмы $\bar{f}\colon R/J(R) \to T/J(T)$ и $\bar{e}\colon S/J(S) \to T/J(T)$. Существует определитель $\bar{d}\colon K/J(K) \to T/J(T)$ с гомоморфизмами $\bar{f}$ и $\bar{e}$. При этом коммутативна диаграмма
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & K/J(K) \arrow[d, "\bar{d}"] \\ T \arrow[r] & T/J(T) \end{tikzcd},$$
в которой горизонтальные стрелки — это канонические эпиморфизмы.

Возьмём теперь определитель
$$d\colon K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \to T$$
с центральными гомоморфизмами $f\colon R \to T$ и $e\colon S \to T$. Множество матриц
$$L = \begin{pmatrix} A & AM + MB \\ BN + NA & B \end{pmatrix}$$
является идеалом в $K$. Фактор-кольцо $K/L$ отождествляем с кольцом обобщённых матриц
$$\begin{pmatrix} R/A & M/(AM + MB) \\ N/(BN + NA) & S/B \end{pmatrix}.$$

Гомоморфизмы $f$ и $e$ индуцируют мономорфизмы $\bar{f}\colon R/A \to T$ и $\bar{e}\colon S/B \to T$. Получаем определитель $\bar{d}\colon K/L \to T$ с гомоморфизмами $\bar{f}$, $\bar{e}$. Коммутативна также диаграмма
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & K/L \arrow[d, "\bar{d}"] \\ T \arrow[r, equal] & T \end{tikzcd}.$$

Введём обозначения: $\bar{R} = R/A$, $\bar{S} = S/B$, $\bar{M} = M/(AM + MB)$, $\bar{N} = N/(BN + NA)$, $\bar{K} = K/L$. Предположим дополнительно, что образы гомоморфизмов $f$ и $e$ совпадают. В таком случае существуют взаимно-обратные изоморфизмы $\omega$ и $\varepsilon$ колец $\bar{R}$ и $\bar{S}$. Именно, $\omega(r+A)=s+B$ тогда и только тогда, когда $f(r)=e(s)$. Из $f(mn)=e(nm)$ вытекает, что $\omega(\bar{m}\bar{n})=\bar{n}\bar{m}$ и $\varepsilon(\bar{n}\bar{m})=$ $=\bar{m}\bar{n}$ (черта обозначает смежный класс). Следовательно, существует двойной стандартный определитель $K/L\to\bar{R}\times\bar{S}$. Удобнее отождествить кольца $\bar{S}$ и $\bar{R}$ с помощью $\omega$ и $\varepsilon$. Тогда существует кольцо обобщённых матриц

$$\begin{pmatrix}\bar{R} & \bar{M}\\ \bar{N} & \bar{R}\end{pmatrix},$$

где элементы из $\bar{M}$ и $\bar{N}$ умножаются по правилам $\bar{m}\circ\bar{n}=\bar{m}\bar{n}$ и $\bar{n}\circ\bar{m}=\bar{m}\bar{n}$. Значит, существует определитель

$$\bar{d}\colon K/L\to\bar{R},\quad \begin{pmatrix}\bar{x} & \bar{m}\\ \bar{n} & \bar{y}\end{pmatrix}\to\bar{x}\bar{y}-\bar{m}\bar{n}.$$

Существует ещё определитель

$$d'\colon K\to\bar{R},\quad \begin{pmatrix}x & m\\ n & y\end{pmatrix}\to\bar{x}\bar{x}_1-\bar{m}\bar{n},$$

где $f(x_1)=e(y)$. Наконец, коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "d'"'] & K/L \arrow[d, "\bar{d}"] \\ \bar{R} \arrow[r, equal] & \bar{R} \end{tikzcd}.$$

## 5. Сведение определителя к двойному стандартному определителю. Общий подход

Покажем, что произвольный определитель можно провести через двойной стандартный определитель. На этот факт возможна категорная точка зрения (см. раздел 7).

Некоторый $T$-$T$-бимодуль $V$ будем называть $T$-бимодулем, если $tv=vt$ для всех $v\in V$, $t\in T$.

Пусть

$$K=\begin{pmatrix}R & M\\ N & S\end{pmatrix}\,-$$

кольцо обобщённых матриц. Предположим, что дан определитель $d\colon K\to T$ с гомоморфизмами $f$, $e$. Кольцо $T$ считаем коммутативным, с помощью гомоморфизмов $f$ и $e$ рассматриваем его как $R$-бимодуль и $S$-бимодуль.

Образуем $T$-$T$-бимодули $T\otimes_R M\otimes_S T$, $T\otimes_S N\otimes_R T$ и обозначим их через $TMT$ и $TNT$ соответственно. Пусть $A$ — подбимодуль в $TMT$, порождённый всеми выражениями вида $t\otimes m\otimes 1-1\otimes m\otimes t$, $t\in T$, $m\in M$. Аналогичный подбимодуль в $TNT$ обозначим через $B$. Фактор-бимодули $TMT/A$ и $TNT/B$ являются $T$-бимодулями. Отметим, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} f(mn)\big((1\otimes m'\otimes 1)+A\big) &= \big((1\otimes m\otimes 1)+A\big)e(nm'),\\ e(nm)\big((1\otimes n'\otimes 1)+B\big) &= \big((1\otimes n\otimes 1)+B\big)f(mn'). \end{aligned} \tag{1}$$

Отображение

$$T\times M\times T\times T\times N\times T\to T,\quad (x,m,y,v,n,w)\to xyvwf(mn),$$

сбалансированно над кольцами $R$, $S$ и $T$. Следовательно, существует соответствующий бимодульный гомоморфизм $TMT\otimes_T TNT\to T$. Он индуцирует бимодульный гомоморфизм

$$TMT/A\otimes_T TNT/B\to T,\quad \big((x\otimes m\otimes y)+A\big)\otimes\big((v\otimes n\otimes w)+B\big)\to xyvwf(mn).$$

Обозначим его через $\varphi$. Имеется аналогичный гомоморфизм

$$\psi\colon TNT/B\otimes_T TMT/A\to T.$$

Для элементов $c\in TMT/A$, $d\in TNT/B$ полагаем $cd=\varphi(c\otimes d)$ и $dc=\psi(d\otimes c)$. Заметим, что $cd=dc$. Используя равенства (1), можно проверить, что $(cd)c'=c(dc')$ и $(dc)d'=d(cd')$ для всех $c,c'\in TMT/A$, $d,d'\in TNT/B$.

Можно сделать вывод о существовании кольца обобщённых матриц

$$\begin{pmatrix} T & TMT/A\\ TNT/B & T\end{pmatrix},$$

которое обозначим $TKT$.

Отображения

$$\mu\colon M\to TMT/A,\quad m\to(1\otimes m\otimes 1)+A,$$

и

$$\nu\colon N\to TNT/B,\quad n\to(1\otimes n\otimes 1)+B,$$

являются $R$-$S$-бимодульными гомоморфизмами. Справедливы равенства

$$\mu(m)\nu(n)=f(mn)=e(nm)=\nu(n)\mu(m).$$

Отображение

$$\eta\colon K\to TKT,\quad \begin{pmatrix} r & m\\ n & s\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} f(r) & \mu(m)\\ \nu(n) & e(s)\end{pmatrix},$$

является кольцевым гомоморфизмом. Так как $cd=dc$ для всех $c$ и $d$, то существует определитель

$$\bar d\colon TKT\to T,\quad \bar d\begin{pmatrix} x & c\\ d & y\end{pmatrix}=xy-cd,$$

и коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "d"'] & TKT \arrow[d, "\bar d"]\\ T \arrow[r, equal] & T \end{tikzcd}. \tag{2}$$

Построенное кольцо $TKT$ можно в определённом смысле «уменьшить». Пусть $K'$ обозначает $\eta K$. Тогда $K'$ — кольцо обобщённых матриц

$$\begin{pmatrix} R' & M' \\ N' & S' \end{pmatrix},$$

где $R' = fR$, $S' = eS$, $M' = \mu M$, $N' = \nu N$. Уточним ряд деталей, касающихся кольца $K'$. То, что $M'$ есть $R'$-$S'$-бимодуль, вытекает из равенств

$$f(r)\mu(m) = r\mu(m) = \mu(rm), \quad \mu(m)e(s) = \mu(m)s = \mu(ms),$$

то же верно для $S'$-$R'$-бимодуля $N'$. Бимодульные гомоморфизмы $M' \otimes_{S'} N' \to R'$ и $N' \otimes_{R'} M' \to S'$ действуют по правилам $\mu(m) \otimes \nu(n) \to \mu(m)\nu(n) = f(mn)$ и $\nu(n) \otimes \mu(m) \to \nu(n)\mu(m) = e(nm)$ соответственно. Поскольку $f(mn) = e(nm)$, то $\mu(m)\nu(n) = \nu(n)\mu(m)$.

Итак, существуют кольцо $K'$ и определитель $d' \colon K' \to T$, являющийся сужением определителя $\bar{d}$. Коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & K' \arrow[d, "d'"] \\ T \arrow[r, equal] & T \end{tikzcd}.$$

Предположим, как в разделе 4, что $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} e$. Тогда $R' = S'$, и получаем два определителя и коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & K' \arrow[d, "d'"] \\ R' \arrow[r, equal] & R' \end{tikzcd}. \tag{3}$$

Заметим ещё, что кольцо $K'$ является эпиморфным образом кольца $K/L$ из раздела 4.

Специализируем проведённые рассмотрения на случай стандартных определителей. Пусть дан стандартный определитель $d \colon K \to R$ с гомоморфизмом $e \colon S \to R$. Таким образом, $e(nm) = mn$ при всех $m$, $n$ и

$$d\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} = re(s) - mn.$$

Кольцо $R$ считаем коммутативным, и оно будет играть роль кольца $T$. После отождествлений можно записать $RMR = M \otimes_S R$ и $RNR = R \otimes_S N$. Подбимодуль $A$ порождается в $RMR$ всеми выражениями вида $rm \otimes 1 - m \otimes r$, а $B$ порождается в $RNR$ всеми выражениями вида $r \otimes n - 1 \otimes nr$. В результате приходим к кольцу обобщённых матриц

$$RKR = \begin{pmatrix} R & RMR/A \\ RNR/B & R \end{pmatrix},$$

в котором

$$\big((m\otimes r)+A\big)\big((r'\otimes n)+B\big)=rr'(mn),$$
$$\big((r'\otimes n)+B\big)\big((m\otimes r)+A\big)=rr'e(nm)=rr'(mn).$$

Далее получаем определитель

$$\bar{d}\colon RKR\to T,\quad \begin{pmatrix} r & c\\ d & r'\end{pmatrix}\to rr'-cd.$$

Гомоморфизмы $\mu\colon M\to RMR/A$ и $\nu\colon N\to RNR/B$ действуют согласно формулам $\mu(m)=(m\otimes 1)+A$ и $\nu(n)=(1\otimes n)+B$. Верны равенства $\mu(m)\nu(n)=\nu(n)\mu(m)=e(nm)=mn$. Наконец, имеем гомоморфизм

$$\eta\colon K\to RKR,\quad \begin{pmatrix} r & m\\ n & s\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} r & \mu(m)\\ \nu(n) & e(s)\end{pmatrix}$$

и коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & RKR \arrow[d, "d'"] \\ R \arrow[r, equal] & R \end{tikzcd}.$$

Допустим, что $e$ — сюръективный гомоморфизм (это соответствует предположению $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} e$ выше). Можно либо оставить определитель $\bar{d}\colon RKR\to R$, либо перейти к «уменьшенному» определителю

$$d'\colon K'=\begin{pmatrix} R & M'\\ N' & R\end{pmatrix}\to R$$

и к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & K' \arrow[d, "d'"] \\ R \arrow[r, equal] & R \end{tikzcd}. \tag{4}$$

Рассмотрим ещё одну частную ситуацию. Пусть, по-прежнему, $d\colon K\to R$ — стандартный определитель с коммутативным кольцом $R$. Модули $M$ и $N$ считаем $R$-бимодулями. Предположим дополнительно, что $ms=e(s)m$ и $sn=ne(s)$ для всех $m\in M$, $n\in N$, $s\in S$. К тензорным произведениям $M\otimes_S R$ и $R\otimes_S N$ применимы некоторые рассуждения из [2, раздел 1]. Именно, возьмём $R$-$R$-бимодульный гомоморфизм

$$t\colon M\otimes_S R\to M,\quad m\otimes r\to mr,$$

и $R$-$S$-бимодульный гомоморфизм

$$q\colon M\to M\otimes_S R,\quad m\to m\otimes 1.$$

Из того что $tq = 1$, заключаем, что $M \otimes_S R = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Ker} t$. Первое слагаемое в равенстве $m \otimes r = mr \otimes 1 + (m \otimes r - mr \otimes 1)$ лежит в $\operatorname{Im} q$, второе — в $\operatorname{Ker} t$. Отсюда выводим, что $\operatorname{Ker} t$ аддитивно порождается всеми элементами вида $m \otimes r - mr \otimes 1$. Далее получаем равенство $A = \operatorname{Ker} t$. Таким образом, $M \otimes_S R = \operatorname{Im} q \oplus A$, $(M \otimes_S R)/A \cong M$, и аналогично $(R \otimes_S N)/B \cong N$ ($R$-бимодульные изоморфизмы). Следовательно, кольцо

$$\begin{pmatrix} R & RMR/A \\ RNR/B & R \end{pmatrix}$$

можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & R \end{pmatrix}.$$

Элементы из $M$ и $N$ умножаются по правилам $m \circ n = mn$ и $n \circ m = mn$. Следовательно, существуют определитель

$$\bar{d} \colon RKR = \begin{pmatrix} R & M \\ N & R \end{pmatrix} \to R, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & r' \end{pmatrix} \to rr' - mn,$$

и коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, "d"'] & RKR \arrow[d, "\bar{d}"] \\ R \arrow[r, equal] & R \end{tikzcd},$$

где верхняя стрелка есть

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} r & m \\ n & e(s) \end{pmatrix}.$$

Кольцо

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & R \end{pmatrix}$$

можно ввести и непосредственно, указав $R$-$R$-бимодульные гомоморфизмы

$$M \otimes_R N \to R, \quad m \otimes n \to mn,$$

и

$$N \otimes_R M \to R, \quad n \otimes m \to mn.$$

## 6. Классификация определителей и обратимые матрицы

Пусть даны кольцо обобщённых матриц

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

и некоторое кольцо $T$. Сформулируем следующую задачу. Найти все определители $K \to T$. В частности, выяснить, как связаны различные определители между собой.

В такой общей постановке задача практически неразрешима. Например, если кольцо $K$ имеет нулевые идеалы следа, а $T$ — коммутативное кольцо, то любая пара гомоморфизмов $f\colon R \to T$, $e\colon S \to T$ даёт определитель

$$K \to T, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \to f(r)e(s).$$

Ситуация с определителями становится более однозначной, если кольцо $K$ есть ситуация эквивалентности, т. е. $I = R$ и $J = S$. Считаем далее, что $K$ — ситуация эквивалентности. Сделаем ряд замечаний о классификации определителей.

Пусть $d\colon K \to R$ — стандартный определитель с гомоморфизмом $e\colon S \to R$, $e(nm) = mn$, $m \in M$, $n \in N$. Допустим, что $d'\colon K \to R$ — ещё один стандартный определитель с гомоморфизмом $e'\colon S \to R$. Поскольку $e'(nm) = mn = e(nm)$, то $e' = e$ и $d' = d$. Таким образом, стандартный определитель может быть только один. Значит, то же верно для двойного стандартного определителя.

Важное значение имеют стандартные определители вида

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & R \end{pmatrix} \to R, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & r' \end{pmatrix} \to rr' - mn,$$

введённые в конце раздела 3 (см. также разделы 4, 5).

Пусть теперь $d\colon K \to R \times S$ — двойной стандартный определитель с центральными гомоморфизмами $f\colon R \to S$, $e\colon S \to R$, т. е. $f(mn) = nm$, $e(nm) = mn$. Тогда $f$ и $e$ — взаимно-обратные изоморфизмы, а $R$ и $S$ — коммутативные кольца (это видно, например, из свойства 1 в разделе 2). Можно перейти, как в разделе 5, от определителя

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \to R$$

к определителю вида

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & R \end{pmatrix} \to R.$$

Прервём изложение и запишем одно свойство определителей.

Если $d\colon K \to T$ — определитель с гомоморфизмами $f$, $e$, то для любого кольцевого гомоморфизма $g\colon T \to T'$ функция $gd\colon K \to T'$ является определителем с гомоморфизмами $gf$, $ge$.

Возьмём теперь определитель вида

$$d\colon \begin{pmatrix} R & M \\ N & R \end{pmatrix} \to R,$$

где $mn = nm$ и

$$d\begin{pmatrix} r & m \\ n & r' \end{pmatrix} = rr' - mn.$$

Пусть

$$d'\colon \begin{pmatrix} R & M \\ N & R \end{pmatrix} \to R\,—$$

другой определитель с гомоморфизмами $f', e'\colon R \to R$. Из равенств $f'(mn) = e'(nm) = e'(mn)$ следует, что $f' = e'$. Запишем теперь равенства

$$d'\begin{pmatrix} r & m \\ n & r' \end{pmatrix} = f'(r)f'(r') - f'(mn) = f'(rr' - mn) = f'd\begin{pmatrix} r & m \\ n & r' \end{pmatrix},$$

из них следует, что $d' = f'd$. Получили полное обозрение всех возможных определителей $K \to R$, если учесть, что любой гомоморфизм $f'\colon R \to R$ даёт определитель $f'd$.

Сформулируем один частный случай проблемы классификации определителей.

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}\,—$$

ситуация эквивалентности, $T$ — произвольное кольцо. Требуется найти все определители $K \to T$.

В этой части раздела рассмотрим применения результатов из разделов 4 и 5 к следующему вопросу. Пусть дан определитель $d\colon K \to T$. Если матрица $A$ обратима, то $d(A)$ — обратимый элемент в $T$. Когда верно обратное? Положительные ответы содержатся в предложении 3.1 и следствии 3.2. Распространим следствие 3.2 на некоторые другие определители.

Матрицу $A$, у которой $d(A)$ — обратимый элемент, будем называть невырожденной (относительно определителя $d$).

В следствии 3.2 речь идёт об определителе вида

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & R \end{pmatrix} \to R.$$

Из раздела 5 нам известно, что любой определитель можно провести через определитель указанного вида, т. е. существует соответствующая коммутативная диаграмма (2). В общем случае эта диаграмма не обеспечивает равносильности обратимости и невырожденности матрицы. Перейдём к частным случаям (3) и (4) диаграммы (2).

Пусть дан произвольный определитель

$$d\colon \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \to T$$

($T$ — коммутативное кольцо) с гомоморфизмами $f\colon R \to T$, $e\colon S \to T$, причём $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} e$. Тогда имеет место диаграмма (3), в которой $R' = \operatorname{Im} f$.

**Следствие 6.1.** *Если в ситуации диаграммы* (3) *справедливы включения* $\operatorname{Ker} f \subseteq J(R)$ *и* $\operatorname{Ker} e \subseteq J(S)$, *то матрица* $A$ *обратима в* $K$ *в точности тогда, когда* $d(A)$ *— обратимый элемент в* $R'$.

**Доказательство.** Из равенств

$$f(mn) = e(nm) = \mu(m)\nu(n) = \nu(n)\mu(m)$$

следует, что $\operatorname{Ker}\eta \subseteq J(K)$ [1, теорема 1.7] (гомоморфизм $\eta$ определён перед диаграммой (2) в разделе 5). С помощью диаграммы (3) и следствия 3.2 получаем следующие эквивалентности:

$$\text{матрица } A \text{ обратима в } K \iff \text{матрица } \eta A \text{ обратима в } K' \iff$$
$$\iff d(A) \text{ — обратимый элемент в } R'. \quad \square$$

Выделим также ситуацию, возникающую в связи с диаграммой (4).

**Следствие 6.2.** *Пусть дан стандартный определитель $d\colon K \to R$ с гомоморфизмом $e\colon S \to R$. Если $e$ — сюръективный гомоморфизм и $\operatorname{Ker} e \subseteq J(S)$, то обратимость матрицы $A$ эквивалентна её невырожденности.*

Содержательной иллюстрацией к полученным результатам является пример кольца эндоморфизмов абелевой $p$-группы $\mathbb{Z}(p^n) \oplus \mathbb{Z}(p^m)$ для $n < m$. Его можно отождествить с кольцом обобщённых матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^n} \\ \mathbb{Z}_{p^n} & \mathbb{Z}_{p^m} \end{pmatrix}.$$

Обозначим это кольцо, как и раньше, через $K$ или

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Как умножаются матрицы в кольце $K$? Прежде всего заметим, что $\mathbb{Z}_{p^n} = \mathbb{Z}_{p^m}/(p^{m-n} \cdot 1)$. Поэтому кольца $R$ и $S$ действуют на $M$ и $N$ обычным, т. е. единственно возможным способом. Перейдём к гомоморфизмам $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$ (см. раздел 1). Если рассматривать $K$ как исходное кольцо эндоморфизмов, то действие гомоморфизмов $\varphi$ и $\psi$ сведётся к композиции соответствующих гомоморфизмов. Принимая это во внимание, можно вывести следующее.

Если $\bar{a} \in M$, $\bar{b} \in N$ (черта обозначает класс вычетов), то

$$\varphi(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \bar{a} \circ \bar{b} = p^{m-n}\bar{a}\bar{b}.$$

Затем

$$\psi(\bar{b} \otimes \bar{a}) = \bar{b} \circ \bar{a} = p^{m-n}\bar{b}\bar{a},$$

где последние $\bar{b}$ и $\bar{a}$ обозначают классы вычетов в $\mathbb{Z}_{p^m}$ с представителями $b$ и $a$.

Получается, что идеалы следа $I$ и $J$ кольца $K$ равны $(p^{m-n} \cdot 1)$ и $(p^{m-n} \cdot 1)$ соответственно. Отсюда вытекает, что $I \subseteq J(R)$ и $J \subseteq J(S)$. Существует сюръективный гомоморфизм $e\colon S \to R$, $e(\bar{y}) = \bar{y}$, $\bar{y} \in S$. При этом $\operatorname{Ker} e \subseteq J(S)$ и верно равенство $e(\bar{b} \circ \bar{a}) = \bar{a} \circ \bar{b}$. Действительно, имеем

$$e(\bar{b} \circ \bar{a}) = e(p^{m-n}\bar{b}\bar{a}) = p^{m-n}\bar{b}\bar{a} = \bar{a} \circ \bar{b}.$$

В соответствии с разделом 3 существует стандартный определитель

$$d\colon K \to R, \quad \begin{pmatrix} \bar{x} & \bar{a} \\ \bar{b} & \bar{y} \end{pmatrix} \to \bar{x}e(\bar{y}) - \bar{a} \circ \bar{b} = \bar{x}\bar{y} - p^{m-n}\bar{a}\bar{b}.$$

Он удовлетворяет условиям следствия 6.2. Поэтому можно записать следующий факт.

**Следствие 6.3.** *Матрица $A$ обратима в кольце $K$ в точности тогда, когда она невырожденна.*

## 7. Категория определителей

Определим категорию $\mathcal{D}et$. Её объекты — определители $d\colon K \to T$. Если $d$ и $d'$ — определители, то морфизмы $d \to d'$ — это пары $(\alpha, t)$, где $\alpha\colon K \to K'$ — аддитивный (в частности, линейный или кольцевой) гомоморфизм, $t\colon T \to T'$ — кольцевой гомоморфизм, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "d"'] & K' \arrow[d, "d'"] \\ T \arrow[r, "t"] & T' \end{tikzcd}.$$

Существует композиция морфизмов, она ассоциативна. Имеется тождественный морфизм $(1,1)$ объекта $d\colon K \to T$. Действительно, получается категория $\mathcal{D}et$. Назовём её категорией определителей (второго порядка). Морфизмы в $\mathcal{D}et$ можно назвать фробениусовыми гомоморфизмами, поскольку они «сохраняют» определители.

## Литература

[1] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над кольцами формальных матриц // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 15, вып. 8. — P. 145—211.

[2] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Идемпотентные функторы и локализации в категориях модулей и абелевых групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 7. — С. 75—159.

[3] Krylov P. A. Isomorphism of generalized matrix rings // Algebra Logic. — 2008. — Vol. 47, no. 4. — P. 258—262.

[4] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.

[5] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Modules over Discrete Valuation Domains. — Berlin: Walter de Gruyter, 2008. — (De Gruyter Exp. Math.; Vol. 43).

[6] Tang G., Zhou Y. Strong cleanness of generalized matrix rings over a local ring // Linear Algebra Appl. — 2012. — Vol. 437. — P. 2546—2559.