Компактные группы, двойственные факторно делимым абелевым группам

Н. И. КРЮЧКОВ
Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина
e-mail: kryuchkov.n@gmail.com

УДК 512.546.3

Ключевые слова: группа характеров, факторно делимая абелева группа, теория двойственности Л. С. Понтрягина.

Аннотация

В статье изучаются компактные группы, двойственные факторно делимым абелевым группам, и доказываются базовые теоремы об этих группах. Исследуются некоторые группы непрерывных гомоморфизмов.

Abstract

N. I. Kryuchkov, Compact groups that are duals of quotient divisible Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 113—119.

Compact groups which are duals quotient divisible Abelian groups are studied, and some basic theorems are proved. Some groups of continuous homomorphisms are studied.

Все группы в настоящей статье абелевы. Факторно делимые группы без кручения были введены Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в 1961 г. Это понятие было обобщено на случай смешанных групп А. А. Фоминым и У. Уиклессом в 1998 г. [7] Смешанные факторно делимые группы изучались многими авторами (см., например, библиографию в [4]).

Согласно двойственности Л. С. Понтрягина категория компактных групп дуальна категории дискретных групп, поэтому каждое понятие и каждое утверждение в теории дискретных групп имеет «двойника» в теории компактных групп. Цель настоящей статьи состоит в изучении групп, двойственных факторно делимым группам. Основные результаты являются дуализацией некоторых утверждений о факторно делимых группах, полученных А. А. Фоминым в [4].

Если G — компактная или дискретная группа, то её группу характеров, т. е. группу непрерывных гомоморфизмов группы G в группу $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ будем обозначать G^* и называть двойственной (дуальной) к группе G (напомним, что группа G^* снабжена компактно открытой топологией). Если H — подгруппа группы G, то её аннулятором в G^* называется подгруппа

$$\mathrm{Ann}(G^*, H) = \{\chi \in G^* \mid \chi(h) = 0 \text{ для каждого } h \in H\}.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 113—119.
© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Известно, что

$$(G/H)^* \cong \operatorname{Ann}(G^*, H), \quad H^* \cong G^*/\operatorname{Ann}(G^*, H).$$

Если $n \in \mathbf{N}$, то

$$G[n] = \{g \in G \mid ng = 0\}, \quad nG = \{ng \mid g \in G\}.$$

Хорошо известно, что $G^*[n] \cong (G/nG)^*$ (здесь предполагается, что группа G является компактной или дискретной), поэтому если p — простое число, то G не имеет p-кручения тогда и только тогда, когда G^* является p-делимой. Отсюда следует, что группы, двойственные делимым, — это в точности группы без кручения. Компактные группы, двойственные дискретным группам без кручения, — это в точности связные группы, а группы, двойственные периодическим дискретным группам, — это в точности вполне несвязные группы. Следовательно, группы, двойственные делимым периодическим дискретным группам, — это в точности вполне несвязные компактные группы без кручения, а группы, двойственные дискретным делимым группам без кручения, — это в точности связные компактные группы без кручения. Напомним, что размерность компактной группы совпадает с рангом двойственной ей дискретной группы.

Циклическая группа, состоящая из n элементов, обозначается $Z(n)$. Если A — дискретная группа и p — простое число, то через $t_p(A)$ обозначается p-примарная компонента периодической части группы A. Через $r_p(A)$ обозначается p-ранг дискретной группы A, т. е. размерность векторного пространства A/pA над конечным полем из p элементов. Если K — компактная группа, то её p-рангом в настоящей статье будем называть p-ранг её группы характеров. Заметим, что если p-ранг группы K^* равен α, то $K^*/pK^* \cong \bigoplus\limits_{\alpha} Z(p)$, поэтому $K[p] \cong \cong \prod\limits_{\alpha} Z(p)$ (здесь произведение конечных циклических групп рассматривается с тихоновской топологией) и если α — натуральное число, то p-ранг группы K совпадает с размерностью векторного пространства $K[p]$ над конечным полем из p элементов. Пусть P — множество всех простых чисел. Положим

$$\pi(A) = \{p \in P \mid t_p(A) \neq 0\}, \quad q(A) = \{p \in P \mid pA \neq A\}.$$

Заметим, что $\pi(A) = q(A^*)$.

Если L и M — топологические группы, то $\operatorname{Hom}^{(c)}(L, M)$ обозначает группу непрерывных гомоморфизмов L в M. Группа характеров дискретной аддитивной группы рациональных чисел обозначается $\mathbf{S}$ и называется соленоидом. Фактор-группа $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ обозначается через $\mathbf{T}$. Компонента связности нуля группы K обозначается K_0. Топологические группы в настоящей статье предполагаются отделимыми, их подгруппы замкнутыми, гомоморфизмы, связанные с топологическим группами, непрерывными.

Стандартные обозначения из теории дискретных абелевых групп можно найти в [6], необходимые сведения из теории топологических групп — в [3].

Напомним, что дискретная группа A называется *факторно делимой*, если она содержит свободную подгруппу конечного ранга F, такую что A/F — периодическая делимая группа и A не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп. Ранг свободной подгруппы F называется рангом факторно делимой группы A.

Определение 1. Компактная группа K называется факторно тороидальной, если она содержит вполне несвязную подгруппу без кручения F, такую что $K/F \cong \mathbf{T}^n$, $n \in \mathbf{N}$, и при этом K не содержит прямых слагаемых, являющихся вполне несвязными группами без кручения.

Теорема 2. *Компактная группа K является факторно тороидальной тогда и только тогда, когда её группа характеров K^* является факторно делимой.*

Доказательство. Пусть K — факторно тороидальная группа. Докажем, что K^* не содержит периодических делимых подгрупп. Действительно, если K^* содержит ненулевую периодическую делимую подгруппу D, то $K^* \cong D \oplus A$ и тогда $K \cong D^* \oplus A^*$, т. е. K содержит прямое слагаемое D^*, являющееся ненулевой вполне несвязной группой без кручения. Пусть теперь F — вполне несвязная группа без кручения, являющаяся подгруппой K, такая что K/F — конечномерный тор. Пусть $G = \mathrm{Ann}(K^*, F)$. Тогда G является группой характеров группы K/F, следовательно, G — свободная группа конечного ранга, являющаяся подгруппой K^*. Фактор-группа K^*/G изоморфна группе характеров группы F и поэтому является делимой периодической группой. Следовательно, K^* — факторно делимая группа.

Обратно, пусть K^* — факторно делимая группа. Если бы K содержала прямое слагаемое, являющееся ненулевой вполне несвязной группой без кручения, то K^* содержала бы прямое слагаемое, являющееся ненулевой делимой периодической группой. Пусть теперь H — свободная подгруппа конечного ранга группы K^*, такая что K^*/H — делимая периодическая группа. Пусть $L = \mathrm{Ann}(K, H)$. Тогда L изоморфна группе характеров группы K^*/H, и поэтому L является вполне несвязной группой без кручения. Фактор-группа K/L изоморфна группе характеров группы H, следовательно, K/L — конечномерный тор, т. е. группа K является факторно тороидальной. □

Приведём примеры факторно тороидальных групп.

1. Тор является факторно тороидальной группой тогда и только тогда, когда он конечномерен.
2. Прямое произведение соленоидов является факторно тороидальной группой тогда и только тогда, когда оно конечномерно, следовательно, связные компактные группы без кручения являются факторно тороидальными тогда и только тогда, когда они конечномерны.
3. Группа $\mathbf{S} \oplus Z(n)$ является факторно тороидальной группой размерности 1.

Теорема 3. *Пусть p — простое число, K — компактная группа, причём K не имеет прямых слагаемых, изоморфных компактной группе целых p-адических чисел, а p-ранг группы K является конечным. Тогда $K \cong K_{(p)} \oplus K'$ и справедливы следующие утверждения*:

1) *$K_{(p)}$ является конечным прямым произведением некоторого конечного числа m циклических p-примарных групп, причём $K_{(p)} \cong \big(t_p(K^*)\big)^*$;*
2) *K' является p-делимой группой*;
3) *$m + r_p(K') = r_p(K)$.*

Доказательство. Так как группа K не имеет прямых слагаемых, изоморфных компактной группе целых p-адических чисел, то её группа характеров K^* не содержит подгрупп, изоморфных $Z(p^\infty)$. Поэтому $K^* \cong t_p(K^*) \oplus K_1$, где $t_p(K^*)$ — конечная прямая сумма m циклических p-примарных групп, K_1 — группа без p-кручения и $m + r_p(K_1) = r_p(K^*)$ [4, теорема 1.10]. Положим $K_{(p)} = \mathrm{Ann}(K, K_1)$. Тогда $K \cong K_{(p)} \oplus K'$, причём $K' \cong (K_1)^*$, а $K_{(p)} \cong$ $\cong (t_p(K^*))^*$. Теперь получается, что $K_{(p)}$ — конечное прямое произведение m циклических p-примарных групп, K' является p-делимой, так как K_1 не имеет p-кручения, $r_p(K_1) = r_p(K')$ и $r_p(K^*) = r_p(K)$, таким образом, $m + r_p(K') =$ $= r_p(K)$. □

Следствие 4. *Пусть K — компактная группа конечного p-ранга, не содержащая прямых слагаемых, изоморфных компактной группе целых p-адических чисел. Тогда существует натуральное число s, такое что группа p^sK является p-делимой.*

Следствие 5. *Пусть K — компактная группа, не содержащая прямых слагаемых, являющихся группами без кручения, причём $r_p(K) = 1$ и K имеет вполне несвязные фактор-группы, не являющиеся p-делимыми. Тогда $K \cong Z(p^m) \oplus K'$, причём группа K' является p-делимой и не имеет p-кручения.*

Доказательство. Так как группа K не имеет прямых слагаемых, являющихся группами без кручения, то группа K^* является редуцированной группой p-ранга 1. Так как K имеет вполне несвязные фактор-группы, не являющиеся p-делимыми, то K^* имеет ненулевую p-примарную компоненту, поэтому $K^* \cong Z(p^m) \oplus K_1$, причём K_1 является p-делимой группой, не имеющей p-кручения [4, следствие 1.12]. Тогда $K \cong Z(p^m) \oplus K_1^*$, и полагаем $K' = K_1^*$. □

В [4] доказано, что если A — факторно-делимая группа ранга n, то для всех простых чисел p верны неравенства $r_p(A) \leqslant n$. Поэтому если K — факторно тороидальная группа, то, учитывая теорему 2, получаем что p-ранги факторно тороидальной группы не превосходят её размерности, т. е. справедливо следующее предложение.

Предложение 6. *Если p — простое число, то p-ранг факторно тороидальной группы не превосходит её размерности.*

Теорема 7. *Ядро эпиморфизма факторно тороидальной группы на вполне несвязную группу является факторно тороидальной группой. В частности, связная компонента нуля факторно тороидальной группы является факторно тороидальной.*

Доказательство. Пусть $\varphi\colon K \to F$ — эпиморфизм, F — вполне несвязная группа, $L = \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $F \cong K/L$. Положим $U = \operatorname{Ann}(K^*, L)$. Тогда $U \cong F^*$, поэтому U является периодической подгруппой группы K^*, значит, K^*/U является факторно делимой группой [4, теорема 2.7]. Группа L изоморфна группе характеров группы K^*/U, следовательно, L является факторно тороидальной. $\square$

Теорема 8. *Пусть K — факторно тороидальная группа размерности n. Для любого простого числа p справедливо $K \cong F_p \oplus K'_p$. Справедливы также следующие утверждения*:

1) *F_p является конечным прямым произведением m_p циклических p-примарных групп и $0 \leqslant m_p \leqslant n$;*
2) *K'_p — факторно тороидальная группа, являющаяся p-делимой*;
3) *$m_p + r_p(K') = r_p(K) \leqslant n$.*

С учётом ранее доказанных утверждений эта теорема является частным случаем теоремы 3.

Будем говорить, что компактная группа расщепляется, если она раскладывается в прямое произведение связной компоненты нуля и вполне несвязной группы. Из [4, теорема 2.9] вытекает следующее утверждение.

Теорема 9. *Факторно тороидальная группа K расщепляется тогда и только тогда, когда фактор-группа K/K_0 является конечной.*

В оставшейся части статьи мы докажем некоторые утверждения о группах непрерывных гомоморфизмов компактных факторно тороидальных групп в дискретные группы и свяжем факторно делимые группы с одним из обобщений понятия «узкая группа».

Теорема 10. *Если K — компактная факторно тороидальная группа, A — факторно делимая группа, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа $\operatorname{Hom}^{(c)}(K, A)$ изоморфна $\bigoplus\limits_{p \in q(K) \cap \pi(A)} \operatorname{Tor}\bigl(t_p(K^*), t_p(A)\bigr)$, следовательно, группа $\operatorname{Hom}^{(c)}(K, A)$ является прямой суммой конечных циклических групп, причём каждая примарная компонента этой группы является конечной.*
2. *Группа $\operatorname{Hom}^{(c)}(K, A)$ является бесконечной тогда и только тогда, когда $|q(K) \cap \pi(A)| = \aleph_0$. Группа $\operatorname{Hom}^{(c)}(K, A)$ является конечной и ненулевой тогда и только тогда, когда $0 < |q(K) \cap \pi(A)| < \aleph_0$. $\operatorname{Hom}^{(c)}(K, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $q(K) \cap \pi(A) = \varnothing$.*
3. *$\operatorname{Hom}^{(c)}(A^*, A) = 0$ тогда и только тогда, когда A — группа без кручения.*
4. *$\operatorname{Hom}^{(c)}(K, A) \cong \operatorname{Hom}^{(c)}(\tilde{K}, \hat{A})$, где $\hat{A}$ — Z-адическое пополнение A, а $\tilde{K}$ — группа характеров Z-адического пополнения группы K^*.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Известно, что

$$\mathrm{Hom}^{(\mathrm{c})}(K, A) \cong \mathrm{Tor}(K^*, A)$$

[1, гл. VII, предложение 7.2]. Далее,

$$\mathrm{Tor}(K^*, A) \cong \bigoplus_{p \in P} \mathrm{Tor}\big(t_p(K^*), t_p(A)\big),$$

а $q(K) = \pi(K^*)$, поэтому

$$\mathrm{Hom}^{(\mathrm{c})}(K, A) \cong \bigoplus_{p \in q(K) \cap \pi(A)} \mathrm{Tor}\big(t_p(K^*), t_p(A)\big).$$

Группы $t_p(K^*)$ и $t_p(A)$ являются конечными и, учитывая, что периодическое произведение циклических групп является циклической группой [6, § 62], заключаем, что утверждение 1 справедливо.

Утверждение 2 следует из утверждения 1; утверждение 3 следует из утверждения 2.

Докажем утверждение 4. Известно, что естественное вложение факторно делимой группы в её Z-адическое пополнение изоморфно отображает периодическую часть A на периодическую часть $\hat{A}$ [5, следствие 2.10], поэтому утверждение 4 следует из утверждения 1. □

В [2] было введено естественное обобщение хорошо известного в теории абелевых групп понятия «узкая группа» — понятие группы, узкой относительно тестовой топологической группы. Статья [2] основана на результатах, полученных С. В. Рычковым и Б. Томе [8]. В качестве так называемой тестовой топологической группы берётся счётное произведение бесконечных (дискретных) циклических групп $\mathcal{T}$, снабжённое топологией, которая является верхней гранью тихоновской топологии и некоторой специальной топологии. Группа G называется узкой относительно $\mathcal{T}$, если любой гомоморфизм $\mathcal{T}$ в G является непрерывным. Классический вариант (узкой группы) получается, если $\mathcal{T}$ снабдить только тихоновской топологией. В [2] в качестве тестовой группы в числе прочих выбиралась группа $\mathcal{T}^f$ — счётное прямое произведение бесконечных циклических групп — снабжённая верхней гранью тихоновской топологии и топологии конечных индексов. Там же доказано (теорема 7), что группа G является узкой относительно $\mathcal{T}^f$ тогда и только тогда, когда она не содержит в качестве подгрупп бесконечных копериодических групп и счётных прямых произведений бесконечных циклических групп. Редуцированная факторно делимая группа не содержит в качестве подгрупп бесконечных копериодических подгрупп и счётных прямых произведений бесконечных циклических групп. Таким образом, факторно делимая группа является узкой относительно тестовой топологической группы, снабжённой топологией, которая является верхней гранью тихоновской и топологии конечных индексов. Поэтому, используя [2, теорема 11], заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть A — редуцированная факторно делимая (дискретная) группа, $\{G_i\}_{i\in I}$ — произвольное семейство дискретных групп, причём I — неизмеримый кардинал. Тогда любой гомоморфизм из прямого произведения $\prod\limits_{i\in I} G_i$, которое снабжено топологией, являющейся верхней гранью тихоновской топологии и топологии конечных индексов в группу A, является непрерывным.*

Заметим, что непрерывность гомоморфизма φ из $\prod\limits_{i\in I} G_i$ в дискретную группу A эквивалентна тому, что найдётся окрестность U нуля группы $\prod\limits_{i\in I} G_i$, такая что $\varphi(U) = 0$.

Литература

[1] Картан А., Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М., 1960.

[2] Крючков Н. И. Некоторые обобщения узких абелевых групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 97—106.

[3] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М., 1973.

[4] Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 153—167.

[5] Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. II // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 5.

[6] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М., 1974.

[7] Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126. — P. 45—52.

[8] Rychkov S. V., Thomé B. Slender group and related concepts // Commun. Algebra. — 1986. — Vol. 14. — P. 333—387.