Алгебраически компактные абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов

О. В. ЛЮБИМЦЕВ
Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет
e-mail: Oleg_lyubimcev@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, кольцо эндоморфизмов, кольцо с однозначным сложением (UA-кольцо).

Аннотация

Кольцо K называется кольцом с однозначным сложением (UA-кольцом), если на его мультипликативной полугруппе $(K, \cdot)$ можно задать единственную бинарную операцию $+$, превращающую её в кольцо $(K, \cdot, +)$. Абелеву группу назовём End-UA-группой, если её кольцо эндоморфизмов является UA-кольцом. В статье найдены End-UA-группы в классе алгебраически компактных абелевых групп.

Abstract

O. V. Lyubimtsev, Algebraically compact Abelian groups with UA-rings of endomorphisms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 121—129.

A ring K is said to be a unique addition ring (UA-ring) if on its multiplicative semigroup $(K, \cdot)$ it is possible to set only one binary operation of $+$ turning $(K, \cdot, +)$ into a ring. We call an Abelian group an End-UA-group if its endomorphism ring is a UA-ring. In this paper, End-UA-groups are found in a class of algebraically compact Abelian groups.

Важной задачей теории абелевых групп является поиск точных соотношений между абелевой группой и её кольцом эндоморфизмов, в частности, выяснение того, какое влияние оказывает кольцевая структура кольца эндоморфизмов на соответствующие группы. Программу изучения абелевых групп, кольца эндоморфизмов которых обладают какими-то специальными свойствами или принадлежат различным специальным классам колец, выдвинул Т. Селе [7]. Результаты данной работы находятся в русле этого направления.

Отображение $\alpha\colon K \to S$ называется мультипликативным изоморфизмом (m-изоморфизмом) колец K и S, если α — изоморфизм мультипликативных полугрупп колец K и S. Кольцо K называется кольцом с однозначным сложением (UA-кольцом), если любой m-изоморфизм колец K и S есть изоморфизм колец (см. [3,5,6]). Будем называть абелеву группу A End-UA-группой, если её кольцо эндоморфизмов $E(A)$ — UA-кольцо. В работе описаны End-UA-группы в классе алгебраически компактных абелевых групп.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 121—129.
© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Далее под словом группа понимается абелева группа. Через $I_m(A)$ обозначим множество всех примитивных идемпотентов кольца $E(A)$. Если S — подмножество в кольце $E(A)$, то

$$\mathrm{La}(S) = \{x \in E(A)\colon xS = 0\}, \quad \mathrm{Ra}(S) = \{x \in E(A)\colon Sx = 0\} —$$

это левый и правый аннуляторы S соответственно. Для периодической группы A

$$\mathrm{supp}(A) = \{p\colon A_p \neq 0\}.$$

Терминология и обозначения, принятые в работе, соответствуют [4].

1. Предварительные результаты

Следующая теорема является естественным обобщением леммы 1 работы [1].

Теорема 1. *Предположим, что кольцо K обладает такой системой идемпотентов $F_K = \{e_i,\ i \in I\}$, что*

1) *если $0 \neq k \in K$, то найдётся идемпотент $e_i \in F_K$, для которого $ke_i \neq 0$ или $e_ik \neq 0$;*
2) *для всякого идемпотента $e_i \in F_K$ существует ортогональный ему идемпотент $e_j \in F_K$, такой что для $k \in K$ из $e_ike_iKe_j = 0 = e_jKe_ike_i$ следует $e_ike_i = 0$.*

Тогда K — UA-кольцо.

Доказательство. Пусть $\alpha\colon K \cong S$ — m-изоморфизм колец K и S. В [1] показано, что α аддитивен на левых идеалах Ke_i для любого $e_i \in F_K$, т.е. $\alpha(a+b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ для всех $a, b \in Ke_i$. При этом рассматривалось разложение $Ke_i = e_iKe_i \oplus e_i^*Ke_i$, где $e_i^* = 1 - e_i$. Доказательство аддитивности α на e_iK дословно повторяет рассуждения в указанной работе с учётом разложения $e_iK = e_iKe_i \oplus e_iKe_i^*$ и того факта, что α сохраняет сложение на $e_iKe_i^*$ [6, лемма 3]. □

Заметим, что в условиях теоремы 1 m-изоморфизм $\alpha\colon K \cong S$ аддитивен на подгруппах e_iKe_j (e_jKe_i), где e_j — идемпотент из условия 2) (см. [3, доказательство теоремы 2.12]). Тогда кольцо K является UA-кольцом, если α сохраняет сложение на каждой подгруппе e_iKe_i, $e_i \in F_K$.

Лемма 1. *Пусть A — алгебраически компактная группа. Тогда в кольце $E(A)$ выполнено условие* 1) *теоремы* 1, *если в качестве F_K выбрать множество $I_m(A)$.*

Доказательство. Пусть $A = D \oplus R$, где D и R — делимая и редуцированная части группы A соответственно. Если $e \in I_m(A)$, то $e(A)$ будет неразложимым прямым слагаемым группы A. Хорошо известно, что неразложимыми алгебраически компактными группами являются группы Q, Z_{p^∞}, J_p, Z_{p^k} $(k = 1, 2, \ldots)$ и только они [4].

Пусть $0 \neq \varphi \in E(A)$. Если $\varphi(a) \neq 0$ для некоторого $a \in D$, то $\varphi e \neq 0$, где $e(A) = Q$ или $e(A) = Z_{p^\infty}$. Пусть $\varphi(R) \neq 0$. Тогда $\varphi(A_p) \neq 0$ для p-адической компоненты редуцированной части R группы A. Если $0 \neq \varphi(a) \in D$ для некоторого $a \in A_p$, то $e\varphi \neq 0$, где e — проекция группы A на Q или Z_{p^∞}. Пусть $\varphi(A_p) \subseteq A_p$. Тогда $\varphi(b) \neq 0$ для некоторого $b \in B_p$, B_p — базисный подмодуль группы A_p [4]. Поскольку B_p содержит в качестве неразложимых прямых слагаемых группы J_p и Z_{p^k}, то $\varphi e \neq 0$, где $e\colon A \to J_p$ или $e\colon A \to Z_{p^k}$ для некоторого $k \in N$. □

Лемма 2. *Пусть* $A = \prod\limits_{p \in P} A_p$ — *редуцированная алгебраически компактная группа. Группа* A *является* End-*UA-группой в точности тогда, когда* A_p — End-*UA-группа для каждого* $p \in P$.

Доказательство. С учётом [4] имеем

$$E(A) = \mathrm{Hom}(A, A) = \mathrm{Hom}\Big(\prod_{p \in P} A_p, \prod_{p \in P} A_p\Big) \cong \prod_{p \in P} (A_p, A_p) = \prod_{p \in P} E(A_p).$$

В этом случае кольцо $E(A)$ является UA-кольцом тогда и только тогда, когда каждое кольцо $E(A_p)$ — UA-кольцо (см., например, [5]). □

Лемма 3. *Пусть* A — *смешанная группа с нередуцированной периодической частью* $t(A) = D_t \oplus R_t$, *где* D_t — *максимальная делимая подгруппа в* $t(A)$. *Тогда всякий* m-*изоморфизм* $\alpha\colon E(A) \cong S$ *аддитивен на* $E(D_t)$.

Доказательство. По условию $A = D_t \oplus A'$, причём A' имеет элементы бесконечного порядка. Пусть $e_1\colon A \to D_t$, $e_2\colon A \to A'$ — проекции. Проверим,что

$$\mathrm{La}(e_1 E e_2) \cap e_1 E e_1 = 0,$$

где $e_1 E e_2 = \mathrm{Hom}(A', D_t)$, $e_1 E e_1 = E(D_t)$, $E = E(A)$. В самом деле, пусть $0 \neq \varphi \in E(D_t)$. Тогда $\varphi(c_k) \neq 0$ на одном из образующих группы Z_{p^∞} для некоторого $p \in P$. Если a — элемент бесконечного порядка группы A', то ненулевой гомоморфизм $\langle a \rangle \to \langle c_k \rangle$ можно продолжить до гомоморфизма $\psi\colon A' \to D_t$ с учётом инъективности группы D_t. Тогда $\varphi\psi(a) = \varphi(c_k) \neq 0$, и требуемое равенство установлено. Таким образом, α аддитивен на $E(D_t)$ [6]. □

2. Основные результаты

Согласно лемме 2 для описания редуцированных алгебраически компактных End-UA-групп достаточно найти p-адические алгебраически компактные End-UA-группы.

Теорема 2. *Пусть*

$$B_p = \bigoplus_{m_0} J_p \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} \bigoplus_{m_k} Z_{p^k} -$$

базисный подмодуль p-адической алгебраически компактной группы A_p. Тогда группа A_p не является End-*UA-группой в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий*:

1) $m_0 = 1$ *и* $m_k = 0$ *почти для всех* $k = 1, 2, \ldots,$
2) $m_0 = 0$ *и* $m_k = 0$ *почти для всех* $k = 1, 2, \ldots.$

При этом если $p \neq 2, 3$ *и* k^* — *наибольшее число, для которого* $m_{k^*} \neq 0$, *то* $m_{k^*} = 1$. *Если* $p = 2$ *или* $p = 3$, *то* $m_{k^*} = 1$ *для* $k^* \neq 1$.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие 1) теоремы. Тогда

$$A_p = B_p = J_p \oplus \left[\left(\bigoplus_{m_{k_1}} Z_{p^{k_1}}\right) \oplus \ldots \oplus \left(\bigoplus_{m_{k_n}} Z_{p^{k_n}}\right)\right].$$

Периодическая часть $t(A_p)$ группы A_p является ограниченной группой. Из [2, доказательство теоремы 2] следует, что существует m-автоморфизм кольца $E(J_p) \cong Q_p^*$, не сохраняющий сложения, который можно продолжить до m-автоморфизма кольца $E(A_p)$. Поэтому A_p не End-UA-группа. Если выполнено условие 2) теоремы, то A_p является ограниченной группой, имеющей единственное циклическое прямое слагаемое максимального порядка. Согласно [2, теорема 3] такая группа не является End-UA-группой, за исключением тривиальных случаев $A_2 = Z_2$ и $A_3 = Z_3$.

Необходимость. По условию группа A_p не является End-UA-группой. Предположим, что условия 1) и 2) не выполнены.

Пусть $m_0 \geqslant 1$. Тогда $A_p = J_p \oplus A'_p$. Покажем, что

$$\mathrm{La}\big(\mathrm{Hom}(J_p, A'_p)\big) \cap E(A'_p) = 0, \qquad (*)$$

$$\mathrm{Ra}\big(\mathrm{Hom}(J_p, A'_p)\big) \cap E(J_p) = 0. \qquad (**)$$

Если $0 \neq \varphi \in E(A'_p)$, то $\varphi(\xi) \neq 0$ для некоторого $\xi \in J_p$ или $\varphi(a_k) \neq 0$ для образующего a_k циклической группы Z_{p^k}. В первом случае в качестве гомоморфизма $\psi \in \mathrm{Hom}(J_p, A'_p)$ можно выбрать вложение J_p в A'_p. Отождествляя элемент ξ с его образом при этом вложении, получим $\varphi\psi(\xi) = \varphi(\xi) \neq 0$. Во втором случае рассмотрим гомоморфизм $Z \to Z_{p^k}$, где Z — p-базисная подгруппа в J_p, переводящий 1 в a_k. Тогда его можно продолжить до гомоморфизма $\psi\colon J_p \to Z_{p^k}$ в силу сервантной инъективности группы Z_{p^k}. Поэтому $\varphi\psi(1) = \varphi(a_k) \neq 0$ и равенство $(*)$ выполнено.

Пусть теперь $\varphi \in E(J_p)$ и $\varphi(\xi) = \xi' \neq 0$. Если $m_0 > 1$, то $A'_p = J_p \oplus A''_p$ и в качестве $\psi \in \mathrm{Hom}(J_p, A'_p)$ выбираем вложение J_p в группу A'_p. Если $m_0 = 1$, то $t(A'_p)$ является неограниченной группой, поскольку условие 1) теоремы не выполнено. Пусть $\xi' = p^m\varepsilon$, где ε — обратимый элемент в Q_p^*. Тогда в A'_p найдётся циклическое прямое слагаемое $\langle a_k\rangle$ порядка $p^k \geqslant p^m$. Рассмотрим сервантную оболочку $\langle \xi'\rangle_*$ в группе J_p. Ввиду p-сервантности $\varepsilon \in \langle \xi'\rangle_*$. Построим гомоморфизм $\langle \xi'\rangle_* \to \langle a_k\rangle$, переводящий ε в a_k, и продолжим его до гомоморфизма $\psi\colon J_p \to \langle a_k\rangle$. В этом случае равенство $(**)$ имеет место,

поскольку $\psi\varphi(\xi) = \psi(\xi') = p^m a_k \neq 0$. Применим теорему 1, взяв $F_{E(A)} = \{e_1\colon A_p \to J_p,\ e_2\colon A_p \to A'_p\}$. Условие 1) выполняется очевидным образом. Условие 2) вытекает из равенств $(*)$ и $(**)$. Тогда группа A_p является End-UA-группой, что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим случай $m_0 = 0$. Если $m_k = 0$ почти для всех $k = 1, 2, \ldots$ и $m_{k^*} > 1$, то A_p — End-UA-группа [2], причём для $p = 2, 3$ допускается $m_1 = 1$. Пусть $m_k \neq 0$ для $k \in I$ и $|I| = \infty$. Выберем в качестве $F_{E(A)}$ множество идемпотентов кольца $E(A)$, соответствующих проекциям A_p на прямые слагаемые Z_{p^k}, $k \in I$. Поскольку эндоморфизмы группы A_p определяются своим действием на подгруппе B_p, то для $0 \neq \varphi \in E(A_p)$ найдётся идемпотент $e \in F_{E(A)}$, такой что $\varphi e \neq 0$. Кроме того,

$$A_p = e(A_p) \oplus A' = \langle a_k \rangle \oplus A',$$

где $o(a_k) = p^k$. По предположению в группе A' найдётся прямое слагаемое $\langle a_n \rangle = e'(A_p)$ порядка $p^n \geqslant p^k$. Поэтому

$$\mathrm{La}(eEe') \cap eEe = 0,$$

где $eEe' = \mathrm{Hom}(\langle a_n \rangle, \langle a_k \rangle)$, $eEe = E(\langle a_k \rangle)$. Так как оба условия теоремы 1 выполнены, то A_p — End-UA-группа, что противоречит исходному предположению. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Делимая группа A не является* End-*UA-группой в точности тогда, когда $A \cong Q$ или A — периодическая группа, у которой хотя бы одна p-компонента изоморфна группе Z_{p^∞}.*

Доказательство. Достаточность доказана в [1] и [2]. Докажем необходимость. Пусть $A \neq Q$ и $A \neq \oplus A_p$, где $A_p = Z_{p^\infty}$ хотя бы для одного $p \in \mathrm{supp}(A)$. Имеем

$$A = D_f \oplus D_t = \bigoplus_{r_0(A)} Q \oplus \left[\bigoplus_{p \in P}\left(\bigoplus_{r_p(A)} Z_{p^\infty}\right)\right].$$

Если $D_t = 0$ или $D_f = 0$, то кольцо $E(A)$ изоморфно прямому произведению колец матриц порядка выше 1 над кольцом Q или кольцами Q_p^*, $p \in \mathrm{supp}(A)$. В [6] показано, что $E(A)$ — UA-кольцо. Пусть $D_t \neq 0$, $D_f \neq 0$. Применим теорему 1, взяв $F_{E(A)} = \{e_f, e_t\}$, где $e_f\colon A \to D_F$, $e_t\colon A \to D_t$ — проекции. По лемме 3 m-изоморфизм $\alpha\colon E(A) \cong S$ аддитивен на $e_t E e_t = E(D_t)$. Кроме того, α сохраняет сложение на $e_f E e_f = E(D_f)$ согласно равенству

$$\mathrm{Ra}(e_t E e_f) \cap e_f E e_f = 0,$$

где $e_t E e_f = \mathrm{Hom}(D_f, D_t)$. В самом деле, если $\varphi \in E(D_f)$ и $\varphi(x) = y \neq 0$, то ненулевой гомоморфизм $\langle y \rangle \to D_t$ продолжается до гомоморфизма $\psi\colon D_f \to D_t$. По теореме 1 группа A является End-UA-группой. Противоречие. □

Пусть ограниченная p-группа имеет единственное циклическое прямое слагаемое Z_{p^k} максимального порядка. Следуя [2], подгруппу Z_{p^k} назовём изолированным слагаемым. Редуцированную часть группы будем обозначать через R.

Теорема 4. *Пусть $A = D_t \oplus R$ — алгебраически компактная группа, где D_t — ненулевая делимая периодическая группа. Тогда A не является* End-*UA-группой в том и только том случае, если выполнено одно из следующих условий*:

1) *существует $q \notin \operatorname{supp} D_t$, такое что q-адическая компонента R_q группы R есть ограниченная группа, имеющая изолированное слагаемое*;
2) *R — периодическая группа и $D_q = Z_{q^\infty}$ для некоторого $q \in P$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие 1). Имеем

$$A = D_t \oplus R = \bigoplus_{p \in \operatorname{supp} D_t} D_p \oplus \prod_{p \neq q} R_p \oplus R_q.$$

Покажем что R_q — вполне характеристическая подгруппа в A. В самом деле, с учётом [4, теорема 43.1, упражнение 8 (с. 215)]

$$\operatorname{Hom}\Big(D_t \oplus \prod_{p \neq q} R_p, R_q\Big) \cong \operatorname{Hom}(D_t, R_q) \oplus \operatorname{Hom}\Big(\prod_{p \neq q} R_p, R_q\Big) \cong \prod_{p \neq q} (R_p, R_q) = 0.$$

С другой стороны, поскольку $q \notin \operatorname{supp} D_t$, то по [4, теорема 43.2, следствие 43.3]

$$\operatorname{Hom}\Big(R_q, D_t \oplus \prod_{p \neq q} R_p\Big) \cong \operatorname{Hom}(R_q, D_t) \oplus \operatorname{Hom}\Big(R_q, \prod_{p \neq q} R_p\Big) = 0.$$

Так как ограниченная группа с изолированным слагаемым не является End-UA-группой, то A не End-UA-группа.

Если выполнено условие 2), то

$$A = \bigoplus_{p \neq q} D_p \oplus Z_{q^\infty} \oplus R,$$

причём R — ограниченная группа [4, следствие 40.3], $R = R_{p_{i_1}} \oplus \ldots \oplus R_{p_{i_n}}$. Ясно, что

$$\operatorname{Hom}\Big(Z_{q^\infty}, \bigoplus_{p \neq q} D_p \oplus R\Big) = 0.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{Hom}\Big(\bigoplus_{p \neq q} D_p \oplus R, Z_{q^\infty}\Big) \cong \operatorname{Hom}(R, Z_{q^\infty}) = \operatorname{Hom}(R_q, Z_{q^\infty}) \neq 0,$$

если одно из чисел $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$ совпадает с q. Запишем для этого случая аддитивное разложение кольца $E(A)$:

$$E(A) = E\Big(\bigoplus_{p \neq q} D_p \oplus R\Big) \oplus \operatorname{Hom}(R_q, Z_{q^\infty}) \oplus E(Z_{q^\infty}).$$

Поскольку $E(Z_{q^\infty}) \cong Q_q^*$, то существует m-автоморфизм кольца $E(A)$, который не сохраняет сложения [2]. Если никакое из чисел $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$ не равно q, то Z_{q^∞}

является вполне характеристической подгруппой в A. Так как Z_{q^∞} не является End-UA-группой, то A не End-UA-группа.

Необходимость. Допустим противное: условия 1) и 2) не выполнены. Покажем, что группа A является End-UA-группой. Пусть R — периодическая группа. Поскольку условие 2) не выполнено, то p-компоненты D_p группы D_t либо нулевые, либо $D_p = \bigoplus\limits_{i\in I} Z_{p^\infty}$, причём $|I| > 1$. Заметим, что в первом случае p-компоненты группы R не содержат изолированных слагаемых, так как не выполнено условие 1). Согласно [2, теоремы 2 и 3] группа A является End-UA-группой.

Пусть группа A является смешанной. Применим теорему 1, полагая $F_{E(A)} = I_m(A)$. Условие 1) этой теоремы выполнено по лемме 1. Пусть $\alpha\colon E(A) \cong S$ — m-изоморфизм. Если $e \in I_m(A)$ и $e(A) = Z_{p^\infty}$ для некоторого $p \in P$, то α аддитивен на $eEe = E(Z_{p^\infty})$ по лемме 3. Пусть $e(A) = J_p$. Предположим, что $\varphi \in E(J_p)$ и $\varphi(\xi) = \xi' \neq 0$. Так как $D_q \neq 0$ для некоторого $q \in P$, то ненулевой гомоморфизм $\langle\xi'\rangle \to Z_{q^\infty}$ можно продолжить до гомоморфизма $\psi\colon J_p \to Z_{q^\infty}$. Тогда $\psi\varphi(\xi) = \psi(\xi') \neq 0$ и выполнено равенство $\mathrm{Ra}(e'Ee) \cap eEe = 0$, где $eEe = E(J_p)$; $e'Ee = \mathrm{Hom}(J_p, Z_{q^\infty})$.

Пусть $e(A) = Z_{p^k}$ для некоторых $p \in P$ и $k \in N$. Так как по предположению условие 1) теоремы не выполняется, то в группе A имеется либо прямое слагаемое Z_{p^s}, где $s \geqslant k$, либо Z_{p^∞}. В первом случае очевидно, что

$$\mathrm{La}\big(\mathrm{Hom}(Z_{p^s}, Z_{p^k})\big) \cap E(Z_{p^k}) = 0.$$

Во втором случае

$$\mathrm{Ra}\big(\mathrm{Hom}(Z_{p^k}, Z_{p^\infty})\big) \cap E(Z_{p^k}) = 0.$$

В самом деле, построим гомоморфизм $\psi \in \mathrm{Hom}(Z_{p^k}, Z_{p^\infty})$ таким образом, что $\psi(1) = c_k$ для образующего c_k порядка p^k группы Z_{p^∞}. Если $0 \neq \varphi \in E(Z_{p^k})$, то $\psi\varphi(1) = \psi(n \cdot 1) = n\psi(1) = nc_k \neq 0$. Итак, m-изоморфизм α аддитивен на каждой подгруппе eEe, $e \in I_m(A)$, кольца $E(A)$. Таким образом, группа A является End-UA-группой. Снова пришли к противоречию, значит, условия 1) и 2) теоремы являются необходимыми. □

Теорема 5. *Пусть $A = D_f \oplus R$ — алгебраически компактная группа, где $0 \neq D_f$ — делимая группа без кручения. Группа A не является* End-*UA-группой в точности тогда, когда выполнено одно из следующих условий*:

1) *найдётся q-адическая компонента группы R, которая является ограниченной группой с изолированным слагаемым*;
2) *R — периодическая группа и $D_F = Q$.*

Доказательство. Достаточность условия 1) проверяется так же, как достаточность условия 1) в теореме 4 с учётом того, что $\mathrm{Hom}(D_f, R_q) = \mathrm{Hom}(R_q, D_f) = 0$. Если выполнено 2), то группа A расщепляется, $A = Q \oplus t(A)$. Тогда $E(A) \cong E(Q) \times E\big(t(A)\big)$ и $E(A)$ не UA-кольцо, поскольку $E(Q)$ не является UA-кольцом [1].

Необходимость. Предположим, что условия 1) и 2) не выполнены. Проверим, что A является End-UA-группой. Выберем в качестве $F_{E(A)}$ множество $I_m(A)$ и покажем, что всякий m-изоморфизм α аддитивен на каждой подгруппе eEe, $e \in I_m(A)$. Поскольку среди p-адических компонент группы R нет ограниченных групп с изолированными слагаемыми, то α сохраняет сложение на $eEe = E(Zp^k)$. Если $e(A) = J_p$, то выполнено равенство $\mathrm{Ra}\big(\mathrm{Hom}(J_p, Q)\big) \cap E(J_p) = 0$. Действительно, если $\varphi \in E(J_p)$ и $\varphi(\xi) = \xi' \neq 0$, то ненулевой гомоморфизм $\langle \xi' \rangle \to Q$ можно продолжить до гомоморфизма $\psi\colon J_p \to Q$ с учётом инъективности группы Q. Пусть $e(A) = Q$. Если $D_f \neq Q$, то $A = Q \oplus Q \oplus A'$. Ясно, что в этом случае $\mathrm{La}\big(\mathrm{Hom}(Q, Q)\big) \cap E(Q) = 0$. Если $D_f = Q$, то R не периодическая группа, а значит, имеет прямое слагаемое J_p. Но тогда $\mathrm{La}\big(\mathrm{Hom}(J_p, Q)\big) \cap E(Q) = 0$. В самом деле, если $\varphi \in E(Q)$ и $\varphi(a) \neq 0$ для некоторого $a \in Q$, то гомоморфизм $\langle 1 \rangle \to Q$, переводящий $1 \in J_p$ в a, можно продолжить до гомоморфизма $\psi\colon J_p \to Q$. Применив теорему 1, получим, что группа A является End-UA-группой. Противоречие. $\square$

Теорема 6. *Пусть $A = D_f \oplus D_t \oplus R$ — алгебраически компактная группа, где $0 \neq D_f$ — делимая часть без кручения, $0 \neq D_t$ — делимая периодическая группа, R — редуцированная часть группы A. Группа A не является* End-*UA-группой в точности тогда, когда найдётся $q \notin \operatorname{supp} D_t$, такое что R_q есть ограниченная группа с изолированным слагаемым.*

Доказательство. Достаточность. По условию

$$A = D_f \oplus D_t \oplus \prod_{p \neq q} R_p \oplus R_q,$$

причём $q \notin \operatorname{supp} D_t$. Но тогда R_q является вполне характеристической подгруппой в A. Так как R_q не End-UA-группа, то и A не End-UA-группа.

Необходимость. По условию группа A не является End-UA-группой. Предположим, что не найдётся $q \notin \operatorname{supp} D_t$, для которого R_q является ограниченной группой с изолированным слагаемым. Пусть $\alpha\colon E(A) \cong S$ — m-изоморфизм. Из леммы 3 следует, что α аддитивен на $E(Z_{p^\infty})$ для каждого $p \in \operatorname{supp} D_t$. Из доказательства теоремы 3 получим, что $\mathrm{Ra}\big(\mathrm{Hom}(Q, Z_{p^\infty})\big) \cap E(Q) = 0$. Значит, α сохраняет сложение на $E(Q)$. Наконец, следуя доказательству необходимости теоремы 4, получаем, что α аддитивен на $E(J_p)$ и $E(Z_{p^k})$. Вновь применив теорему 1, где $F_{E(A)} = I_m(A)$, приходим к выводу, что A — End-UA-группа. Противоречие. $\square$

Литература

[1] Любимцев О. В. Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1419—1422.

[2] Любимцев О. В. Периодические абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, № 5. — С. 736—741.

[3] Михалёв А. В. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Матем. сб. — 1988. — Т. 135, № 2. — С. 210—224.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1977.

[5] Nelius Chr.-F. Ringe mit eindeutiger Addition. — Padeborn, 1974.

[6] Stephenson W. Unique addition rings // Can. J. Math. — 1969. — Vol. 21, no. 6. — P. 1455—1463.

[7] Szele T. Gruppentheoretische Beziehungen der Primkörper // Mat. Aineiden Aikakauskirja. — 1949. — Vol. 13. — P. 80—85.