О некоторых свойствах колец эндоморфизмов абелевых групп

В. М. МИСЯКОВ
Томский государственный университет
e-mail: mvm@mail.tsu.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, (вполне) транзитивность, эндотранзитивность, слабая транзитивность.

Аннотация

Даются некоторые эквивалентные условия выполнимости свойств для группы быть (вполне) транзитивной, эндотранзитивной или слаботранзитивной.

Abstract

V. M. Misyakov, On some properties of endomorphism rings of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 131—139.

Some equivalent conditions under which a group can be (fully) transitive, endotransitive, or weakly transitive are presented.

Термин (вполне) транзитивность был введён И. Капланским в [29] при исследовании модулей над полным кольцом дискретного нормирования. Впервые вполне транзитивные абелевы группы без кручения изучались в работе П. А. Крылова [7] (он называл эти группы транзитивными). Определение (вполне) транзитивной произвольной абелевой группы было введёно Ю. Б. Добрусиным в [5]. Описание (вполне) транзитивных групп остаётся до сих пор открытым вопросом, хотя исследования, связанные с этими объектами, постоянно ведутся. Так, (вполне) транзитивные периодические группы рассматривались в [16—18, 22, 24, 25, 28, 31]; без кручения — в [1, 8, 9, 14]; смешанные — в [2—4, 11, 20]; (вполне) транзитивные модули — в [21, 27]; слабо транзитивные группы без кручения — в [23, 30]; эндотранзитивные группы, введённые в [6] для групп без кручения, изучались также в [15, 19, 26].

В данной статье показываются некоторые связи между этими понятиями, даются некоторые эквивалентные условия выполнимости свойств для группы быть (вполне) транзитивной, эндотранзитивной или слабо транзитивной.

В [17] А. Л. С. Корнер рассматривает следующее понятие. Пусть Φ — подкольцо с единицей кольца $\mathrm{E}(G)$, H — Φ-инвариантная подгруппа редуцированной p-группы G. Тогда говорим, что Φ действует (вполне) транзитивно на H,

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 131—139.

если для любых $x, y \in H$, таких что ($U_G(x) \leqslant U_G(y)$) $U_G(x) = U_G(y)$, существует (элемент $\varphi \in \Phi$) обратимый элемент $\varphi \in \Phi$, такой что $\varphi(x) = y$. Допуская вольность речи, мы будем говорить, что подгруппа H (вполне) транзитивна над Φ. Таким образом, G — (вполне) транзитивная группа в смысле Капланского тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на G. В теореме 8 описывается (вполне) транзитивное действие кольца $\mathrm{E}(G)$ на произвольной редуцированной группе G.

В [10] ставится следующая проблема: замкнут ли класс транзитивных [сильно однородных] групп без кручения относительно взятия прямых слагаемых [10, проблема 41.1]. Напомним, что однородные транзитивные группы без кручения называются сильно однородными. В теореме 8 даются необходимые и достаточные условия, при которых прямое слагаемое произвольной транзитивной группы будет транзитивной группой.

В работе под словом «группа» понимается абелева группа. Все стандартные определения и обозначения можно найти в [12, 13]. Если G — группа, то через $\mathrm{Aut}(G)$ ($\mathrm{E}(G)$) будем обозначать группу (кольцо) всех её автоморфизмов (эндоморфизмов), через $H(a)_A$ — высотную матрицу элемента a в подгруппе A группы G, через $H_p(a)_A$ — строку высотной матрицы $H(a)_A$, соответствующую простому числу p, через $T_p(G)$ — p-компоненту периодической части $T(G)$ группы G.

Напомним, что группа G называется (вполне) транзитивной, если для каждой пары элементов $a, b \in G$, таких что $H(a) = H(b)$ ($H(a) \leqslant H(b)$), следует существование $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$ ($\varphi \in \mathrm{E}(G)$), переводящего элемент a в элемент b.

Рассмотрим связанные с ненулевым элементом $a \in G$ вполне характеристические подгруппы группы G

$$\mathrm{bfc}(a) = \{b \in G \mid H(a) \leqslant H(b)\},$$
$$\mathrm{lfc}(a) = \{b \in G \mid \text{найдётся } \varphi \in \mathrm{E}(G), \text{ такой что } \varphi(a) = b\}.$$

которые будем называть соответственно большой и малой вполне характеристическими подгруппами группы G, содержащими элемент a.

Замечание 1. Для каждого ненулевого элемента $a \in G$ существует эпиморфизм $\psi_a\colon \mathrm{E}^+(G) \to \mathrm{lfc}(a)$, действующий по правилу $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{E}^+(G)$.

Далее рассмотрим некоторые эквивалентные условия вполне транзитивности группы G.

Предложение 1. *Для редуцированной группы G следующие условия эквивалентны:*

1) *G — вполне транзитивная группа;*
2) *$\mathrm{bfc}(a) = \mathrm{lfc}(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in G$;*
3) *для любого ненулевого элемента $a \in G$ существует эпиморфизм $\psi_a\colon \mathrm{E}^+(G) \to \mathrm{bfc}(a)$, действующий по правилу $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{E}^+(G)$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть a — произвольный элемент группы G. Так как $\mathrm{lfc}(a) \subseteq \mathrm{bfc}(a)$, то пусть $c \in \mathrm{bfc}(a)$. Тогда $H(a) \leqslant H(c)$. Поскольку G — вполне транзитивная группа, то существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такой что $\varphi(a) = c$. Следовательно, $c \in \mathrm{lfc}(a)$ и $\mathrm{bfc}(a) = \mathrm{lfc}(a)$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$, такие что $H(a) \leqslant H(b)$. Так как $b \in \mathrm{bfc}(a)$ и $\mathrm{bfc}(a) = \mathrm{lfc}(a)$, то существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такой что $\varphi(a) = b$.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) следует из условия и замечания 1.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть a — произвольный элемент группы G. Так как $\mathrm{lfc}(a) \subseteq \mathrm{bfc}(a)$, то пусть c — произвольный элемент подгруппы $\mathrm{bfc}(a)$. Тогда для элемента c найдётся $\eta \in \mathrm{E}^+(G)$, такой что $c = \psi_a(\eta) = \eta(a)$. Следовательно, $c \in \mathrm{lfc}(a)$ и $\mathrm{bfc}(a) = \mathrm{lfc}(a)$. $\square$

По аналогии с вполне характеристическими подгруппами группы G, связанными с ненулевым элементом $a \in G$, рассмотрим характеристические подмножества группы G

$$\mathrm{bc}(a) = \{b \in G \mid H(b) = H(a)\},$$
$$\mathrm{lc}(a) = \{b \in G \mid \text{найдётся } \varphi \in \mathrm{Aut}(G), \text{ такой что } \varphi(a) = b\},$$

которые будем называть соответственно большим и малым характеристическими подмножествами группы G, содержащими элемент a. Здесь под характеристическим подмножеством группы G понимается подмножество, замкнутое относительно действия автоморфизмов группы G.

Замечание 2. Для произвольного ненулевого элемента $a \in G$ существует следующая связь между определёнными выше вполне характеристическими подгруппами и характеристическими подмножествами:

$$\mathrm{lc}(a) \subseteq \mathrm{lfc}(a) \subseteq \mathrm{bfc}(a),$$
$$\mathrm{lc}(a) \subseteq \mathrm{bc}(a) \subseteq \mathrm{bfc}(a).$$

Далее термин «слабо транзитивная группа», введённый для групп без кручения в [23], определим для произвольной абелевой группы.

Определение 1. Группу G будем называть слабо транзитивной, если для произвольных элементов $x, y \in G$ из существования эндоморфизмов $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(G)$, таких что $\varphi(x) = y$, $\psi(y) = x$, следует существование $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$, такого что $\alpha(x) = y$.

Для некоторой характеризации слабо транзитивных групп нам потребуется следующее подмножество, определяемое для любого ненулевого элемента $a \in G$:

$$\mathrm{weak}(a) = \{b \in G \mid \text{найдутся } \varphi, \psi \in \mathrm{E}(G), \text{ такие что } \varphi(a) = b,\ \psi(b) = a\}.$$

Замечание 3. Легко проверяется, что

$$\mathrm{lc}(a) \subseteq \mathrm{weak}(a) \subseteq \mathrm{bc}(a),$$
$$\mathrm{lc}(a) \subseteq \mathrm{weak}(a) \subseteq \mathrm{lfc}(a)$$

для любого ненулевого элемента $a \in G$.

Лемма 2. *Группа G слабо транзитивна тогда и только тогда, когда* $\mathrm{weak}(a) = \mathrm{lc}(a)$ *для любого ненулевого элемента* $a \in G$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — слабо транзитивная группа. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in G$ и для любого $x \in \mathrm{weak}(a)$ существуют $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(G)$, такие что $\varphi(x) = a$ и $\psi(a) = x$. Так как G — слабо транзитивная группа, то существует $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, такой что $\alpha(a) = x$. Следовательно, $x \in \mathrm{lc}(a)$. Из замечания 3 следует обратное включение.

Достаточность. Рассмотрим произвольные $x, y \in G$ и $\varphi, \psi \in \mathrm{E}(G)$, такие что $\varphi(x) = y$ и $\psi(y) = x$. Тогда $y \in \mathrm{weak}(x) = \mathrm{lc}(x)$. Поэтому найдётся $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, такой что $\alpha(x) = y$. $\square$

Замечание 4. Для каждого ненулевого элемента $a \in G$ существует эпиморфизм $\psi_a\colon \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{lc}(a)$, действующий по правилу $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ для любого $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$.

Поскольку всякая транзитивная группа является слабо транзитивной, то представляет интерес нахождение дополнительного условия, при котором слабо транзитивная группа будет транзитивной. В следующем утверждении предлагается такое условие.

Предложение 3. *Для группы G следующие условия эквивалентны*:

1) G — *транзитивная группа*;
2) $\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a)$ *для любого ненулевого элемента* $a \in G$;
3) *для любого ненулевого элемента* $a \in G$ *существует эпиморфизм* $\psi_a\colon \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{bc}(a)$, *действующий по правилу* $\psi_a(\varphi) = \varphi(a)$ *для любого* $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$;
4) G — *слабо транзитивная группа и* $\mathrm{weak}(a) = \mathrm{bc}(a)$ *для любого ненулевого элемента* $a \in G$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть a — произвольный ненулевой элемент группы G и $c \in \mathrm{bc}(a)$. Тогда $H(c) = H(a)$. Следовательно, будут существовать $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, такой что $\varphi(a) = c$. Тогда $c \in \mathrm{lc}(a)$ и $\mathrm{bc}(a) \subseteq \mathrm{lc}(a)$. Обратное включение следует из замечания 2.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Рассмотрим произвольные ненулевые элементы $a, b \in G$, такие что $H(a) = H(b)$. Тогда $b \in \mathrm{bc}(a)$. Поскольку $\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a)$, то найдётся $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, такой что $\varphi(a) = b$.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) следует из условия и замечания 4.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть a — произвольный ненулевой элемент группы G. Поскольку $\mathrm{lc}(a) \subseteq \mathrm{bc}(a)$, то пусть $x \in \mathrm{bc}(a)$. Так как $\psi_a\colon \mathrm{Aut}(G) \to \mathrm{bc}(a)$ — эпиморфизм, то существует $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, такой что $x = \psi_a(\varphi) = \varphi(a)$. Следовательно, $x \in \mathrm{lc}(a)$ и $\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a)$.

Эквивалентность условий 2) и 4) следует из замечания 3 и леммы 2. $\square$

Определение 2. Группа G называется эндотранзитивной, если для произвольных элементов $x, y \in G$, таких что $H(x) = H(y)$, следует существование $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такого что $\varphi(x) = y$.

В [10] сформулирована следующая проблема: существуют ли слабо транзитивные группы без кручения (здесь под термином «слабая транзитивность» понимается термин «эндотранзитивность»), не являющиеся ни транзитивными, ни вполне транзитивными [10, проблема 44]. Замечание 4 и следующая лемма дают надежду, что такие группы могут существовать.

Лемма 4. *Редуцированная группа G эндотранзитивна тогда и только тогда, когда* $\mathrm{bc}(a) \subseteq \mathrm{lfc}(a)$.

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим произвольные $0 \neq a \in G$ и $x \in \mathrm{bc}(a)$. Тогда $H(a) = H(x)$. Так как G — эндотранзитивная группа, то существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такой что $\varphi(a) = x$. Следовательно, $x \in \mathrm{lfc}(a)$.

Достаточность. Рассмотрим произвольные элементы $a, b \in G$, такие что $H(a) = H(b)$. Тогда $b \in \mathrm{bc}(a) \subseteq \mathrm{lfc}(a)$. Следовательно, найдётся эндоморфизм $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такой что $\varphi(a) = b$. Таким образом, G — эндотранзитивная группа. □

Замечание 5. Из предложений 1 и 3, замечания 4 и леммы 4 следует хорошо известный результат, что если группа (вполне) транзитивна, то она эндотранзитивна.

Для полноты изложения напомним следующую лемму, доказанную А. Л. С. Корнером в [17].

Лемма 5 [17]. *Редуцированная p-группа G (вполне) транзитивна тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^\omega G$.*

Распространим понятие, введённое А. Л. С. Корнером для p-групп, на произвольные редуцированные абелевы группы. При этом, в отличие от него, считаем, что для любого $a \in A$ высотная матрица $H(a)$ берётся в подгруппе A группы G.

Определение 3. Пусть Φ — подкольцо с единицей кольца $\mathrm{E}(G)$ и A — Φ-инвариантная подгруппа редуцированной абелевой группы G. Будем говорить, что Φ действует (вполне) транзитивно на A или подгруппа A (вполне) транзитивна над Φ, если для любых $x, y \in A$, таких что $(H(x)_A \leqslant H(y)_A)$ $H(x)_A = H(y)_A$, существует (элемент $\varphi \in \Phi$) обратимый элемент $\varphi \in \Phi$, такой что $\varphi(x) = y$.

Теорема 6. *Редуцированная группа G (вполне) транзитивна тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}(G)$ действует (вполне) транзитивно на $p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ и произвольного простого числа p.*

Доказательство. Докажем теорему для случая вполне транзитивности, транзитивный случай доказывается аналогично.

Необходимость. Пусть p — произвольное простое число. Если G — p-делимая группа, то для любого порядкового числа σ $p^\sigma G = G$, т. е. $p^\sigma G$ — вполне транзитивная группа над $\mathrm{E}(G)$.

Пусть $pG \neq G$. Проведём доказательство индукцией по σ. Если $\sigma = 0$, то $\mathrm{E}(G)$ действует вполне транзитивно на G.

Пусть для любого δ, такого что $0 \leqslant \delta < \sigma$, утверждение теоремы выполняется. Покажем, что $\mathrm{E}(G)$ действует вполне транзитивно на $p^\sigma G$. Пусть $a, b \in p^\sigma G$

и $H(a)_{p^\sigma G} \leqslant H(b)_{p^\sigma G}$. Тогда $H_p(a)_{p^\sigma G} \leqslant H_p(b)_{p^\sigma G}$, где

$$H_p(a)_{p^\sigma G} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots), \quad H_p(b)_{p^\sigma G} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m, \ldots).$$

Пусть σ — изолированное порядковое число. Тогда $p^\sigma G = p(p^{\sigma-1}G)$, и следовательно, существуют элементы $c_1, c_2 \in p^{\sigma-1}G$, такие что $a = pc_1$, $b = pc_2$. Тогда

$$H_p(c_1)_{p^{\sigma-1}G} = (\mu, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots), \quad H_p(c_2)_{p^{\sigma-1}G} = (\nu, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m, \ldots),$$

причём $H_q(c_1)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(a)_{p^\sigma G}$ и $H_q(c_2)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(b)_{p^\sigma G}$ для любого простого числа q, $q \neq p$. Если $\mu \leqslant \nu$, то $H(c_1)_{p^{\sigma-1}G} \leqslant H(c_2)_{p^{\sigma-1}G}$. Так как по предположению индукции подгруппа $p^{\sigma-1}G$ вполне транзитивна над $\mathrm{E}(G)$, то существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такой что $\varphi(c_1) = c_2$. Тогда $p\varphi(c_1) = pc_2$ и $\varphi(a) = b$.

Пусть $\nu < \mu$. Допустим, что между ν и β_0 есть скачок (в противном случае $\mu \leqslant \nu$). Тогда ν-й инвариант Ульма—Капланского группы $T_p(p^{\sigma-1}G)$ отличен от нуля, т. е. существует $d \in p^{\sigma-1}G$, такой что $o(d) = p$ и $H_p(d)_{p^{\sigma-1}G} = (\nu, \infty, \ldots)$. Рассмотрим элемент $c_1 + d \in p^{\sigma-1}G$. Так как

$$H_p(c_1 + d)_{p^{\sigma-1}G} = (\nu, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots) \leqslant H_p(c_2)_{p^{\sigma-1}G}$$

и $H_q(c_1 + d)_{p^{\sigma-1}G} = H_q(c_1)_{p^{\sigma-1}G}$ для любого простого q, $q \neq p$, то $H(c_1 + d)_{p^{\sigma-1}G} \leqslant H(c_2)_{p^{\sigma-1}G}$. Поскольку по предположению индукции подгруппа $p^{\sigma-1}G$ вполне транзитивна над $\mathrm{E}(G)$, то существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такой что $\varphi(c_1 + d) = c_2$. Тогда $p\varphi(c_1 + d) = pc_2$ и $\varphi(a) = b$.

Пусть σ — предельное порядковое число, т. е.

$$p^\sigma G = \bigcap_{\delta<\sigma} p^\delta G.$$

Следовательно, $a, b \in p^\delta G$ для любого $\delta < \sigma$. Тогда по определению обобщённой высоты $h^*_p(a)_{p^\delta G} = h^*_p(a)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$ и, следовательно, $h^*_p(p^k a)_{p^\delta G} = h^*_p(p^k a)_{p^\sigma G}$ для любых $\delta < \sigma$ и натурального k, т. е. $H_p(a)_{p^\delta G} = H_p(a)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$. Поскольку $H_q(a)_{p^\delta G} = H_q(a)_{p^\sigma G}$ для любых $\delta < \sigma$ и простого q, $q \neq p$, то $H(a)_{p^\delta G} = H(a)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$. Аналогичные рассуждения показывают, что $H(b)_{p^\delta G} = H(b)_{p^\sigma G}$ для любого $\delta < \sigma$. Тогда $H(a)_{p^\delta G} \leqslant H(b)_{p^\delta G}$. По предположению индукции подгруппа $p^\delta G$ вполне транзитивна над $\mathrm{E}(G)$ для любого $\delta < \sigma$, т. е. существует $\varphi \in \mathrm{E}(G)$, такой что $\varphi(a) = b$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{E}(G)$ действует вполне транзитивно на подгруппе $p^\sigma G$ для любого порядкового числа σ и для любого простого числа p. Тогда, в частности, $\mathrm{E}(G)$ действует вполне транзитивно на $p^0 G = G$, т. е. G — вполне транзитивная группа. □

Следствие 7. *Для редуцированной p-группы G следующие условия эквивалентны*:

1) G — *(вполне) транзитивная группа*;
2) $\mathrm{E}(G)$ *действует (вполне) транзитивно на* $p^\omega G$ *(в смысле Корнера)*;

3) $\mathrm{E}(G)$ *действует (вполне) транзитивно на* $p^{\sigma}G$ *для любого порядкового числа* σ *(в смысле определения* 3).

Доказательство. Эквивалентности условий 1) и 2), 1) и 3) получаем из леммы 5 и теоремы 6 соответственно. $\square$

Введём следующее понятие.

Определение 4. Пусть $G = A \oplus B$. Будем говорить, что автоморфизмы группы A индуцируются автоморфизмами группы G, если для любого $a \in A$ и для любого $x \in \mathrm{bc}(a)$ из существования $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$, такого что $\varphi\rho(a) = \rho(x)$, следует существование $\psi \in \mathrm{Aut}\, A$, такого что $\pi\varphi\rho(a) = \psi(a)$, где $\rho\colon A \to G$ и $\pi\colon G \to A$ — канонические вложение и проекция соответственно.

Теорема 8. *Прямое слагаемое* A *транзитивной группы* G *является транзитивной группой тогда и только тогда, когда автоморфизмы группы* A *индуцируются автоморфизмами группы* G.

Доказательство. Необходимость. Пусть $G = A \oplus B$, причём G и A — транзитивные группы. Пусть $\rho\colon A \to G$ и $\pi\colon G \to A$ — канонические вложение и проекция соответственно. Тогда для любого ненулевого элемента $a \in A$ и для любого $x \in \mathrm{bc}(a)$ из транзитивности группы A следует существование $\psi \in \mathrm{Aut}\, A$, такого что $\psi(a) = x$.

Рассмотрим элемент ρx. Так как $H(\rho x) = H(\rho a)$, то из транзитивности группы G следует существование $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$, такого что $\varphi\rho a = \rho x$. Следовательно, $\pi\varphi\rho a = x = \psi(a)$.

Достаточность. Для транзитивности группы A согласно предложению 3 достаточно показать, что $\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a)$ для любого ненулевого элемента $a \in A$. Для произвольного элемента $x \in \mathrm{bc}(a)$ имеем $H(x) = H(a)$. Поскольку $H(\rho x) = H(\rho a)$, то из транзитивности группы G следует существование $\varphi \in \mathrm{Aut}\, G$, такого что $\varphi\rho(a) = \rho(x)$. Поскольку автоморфизмы группы G индуцируют автоморфизмы группы A, то существует $\psi \in \mathrm{Aut}\, A$, такой что $x = \pi\varphi\rho(a) = \psi(a)$. Следовательно, $\mathrm{bc}(a) = \mathrm{lc}(a)$. $\square$

Литература

[1] Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1982. — С. 56—92.

[2] Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. матем. — 2002. — Т. 8, № 2. — С. 407—472.

[3] Гриншпон С. Я., Мисяков В. М. О вполне транзитивных абелевых группах // Абелевы группы и модули. — 1986. — С. 12—27.

[4] Гриншпон С. Я., Мисяков В. М. Вполне транзитивность прямых произведений абелевых групп // Абелевы группы и модули. — 1991. — С. 23—30.

[5] Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения. II // Абелевы группы и модули. — 1985. — Вып. 5. — С. 31—41.

[6] Добрусин Ю. Б. О продолжениях частичных эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1986. — Вып. 4. — С. 36—53.

[7] Крылов П. А. О вполне характеристических подгруппах абелевых групп без кручения // Сборник аспирантских работ по математике. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1973. — С. 15—20.

[8] Крылов П. А. Некоторые примеры квазисервантно инъективных и транзитивных абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — 1988. — С. 81—99.

[9] Крылов П. А. Вполне транзитивные абелевы группы без кручения // Алгебра и логика. — 1990. — Т. 29, № 5. — С. 549—560.

[10] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. — Томск: ТГУ, 2002.

[11] Мисяков В. М. Вполне транзитивность редуцированных абелевых групп // Абелевы группы и модули. — 1994. — С. 134—156.

[12] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. I. — М.: Мир, 1974.

[13] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. II. — М.: Мир, 1977.

[14] Чехлов А. Р. Вполне транзитивные группы без кручения конечного p-ранга // Алгебра и логика. — 2001. — Т. 40, № 6. — С. 698—715.

[15] Чехлов А. Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Матем. заметки. — 2001. — Т. 69, № 6. — С. 944—949.

[16] Carroll D., Goldsmith B. On transitive and fully transitive Abelian p-groups // Proc. Royal Irish Academy. — 1996. — Vol. 96A, no. 1. — P. 33—41.

[17] Corner A. L. S. The independence of Kaplansly's notions of transitivity and full transitivity // Quart. J. Math. Oxford. — 1976. — Vol. 27, no. 105. — P. 15—20.

[18] Danchev P. V., Goldsmith B. On socle-regularity and some notions of transitivity for Abelian p-groups // J. Commut. Algebra. — 2011. — Vol. 3, no. 3. — P. 301—319.

[19] Dugas M., Shelah S. E-transitive groups in L // Abelian Group Theory (Perth, 1987). — Providence: Amer. Math. Soc., 1989. — (Contemp. Math.; Vol. 87). — P. 191—199.

[20] Files S. On transitive mixed Abelian groups // Abelian Group Theory: Proc. of the Int. Conf. at Colorado Springs. — New York: Marcel Dekker, 1996. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 182). — P. 243—251.

[21] Files S. Transitivity and full transitivity for nontorsion modules // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 468—478.

[22] Files S., Goldsmith B. Transitive and fully transitive groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, no. 6. — P. 1605—1610.

[23] Goldsmith B., Strungmann L. Torsion-free weakly transitive Abelian groups // Commun. Algebra. — 2005. — Vol. 33. — P. 1177—1191.

[24] Goldsmith B., Strungmann L. Some transitivity results for torsion Abelian groups // Houston J. Math. — 2007. — Vol. 33, no. 4. — P. 941—957.

[25] Griffith P. Transitive and fully transitive primary Abelian groups // Pacific J. Math. — 1968. — Vol. 25, no. 2. — P. 249—254.

[26] Hausen J. E-transitive torsion-free Abelian groups // J. Algebra. — 1987. — Vol. 107. — P. 17—27.

[27] Hennecke G., Strüngmann L. Transitivity and full transitivity for p-local modules // Arch. Math. — 2000. — Vol. 74. — P. 321—329.

[28] Hill P. On transitive and fully transitive primary groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 22, no. 2. — P. 414—417.

[29] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954.

[30] Meehan C., Strungmann L. Rational rings related to weakly transitive torsion-free groups // J. Algebra Its Appl. — 2009. — Vol. 8, no. 5. — P. 723—732.

[31] Paras A., Strungmann L. Fully transitive p-groups with finite first Ulm subgroup // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 131. — P. 371—377.