Самомалые SP-группы с чистыми кольцами эндоморфизмов

К. С. СОРОКИН
Томский государственный университет
e-mail: sorokin_k@list.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: смешанная абелева группа, SP-группа, чистое кольцо, кольцо эндоморфизмов.

Аннотация

В работе рассматриваются вопросы чистоты колец эндоморфизмов SP-групп — одного из классов смешанных абелевых групп. Доказано, что кольца эндоморфизмов самомалых SP-групп являются чистыми. Приведены достаточные условия, при которых справедливо обратное утверждение.

Abstract

K. S. Sorokin, Self-small SP-groups with clean endomorphism rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 141—148.

In this work, some aspects of cleanness of endomorphism rings of SP-groups are considered. These groups form one of the classes of mixed Abelian groups. The cleanness of endomorphism rings of self-small SP-groups is proved. Some sufficient conditions are found for the converse proposition to hold.

Пусть R — кольцо с единицей. Элемент r кольца R называется чистым, если его можно представить в виде $r = u + e$, где e — идемпотент, а u — обратимый элемент кольца R. Кольцо R называется чистым, если всякий его элемент является чистым.

Понятие чистого кольца было предложено В. К. Николсоном в 1977 году как пример кольца, в котором идемпотенты поднимаются по модулю любого левого (правого) идеала [9], т. е. каждое чистое кольцо является заменяемым кольцом. Кроме того, В. К. Николсоном было доказано [9], что кольцо с центральными идемпотентами является чистым тогда и только тогда, когда оно заменяемо. В то же время имеется пример регулярного кольца, которое не является чистым [8]. Согласно [9] регулярные кольца являются заменяемыми кольцами, следовательно, класс чистых колец является собственным подклассом класса заменяемых колец.

Элемент r кольца R называется обратимо-регулярным, если $r = u \cdot e$, где e — идемпотент, а u — обратимый элемент кольца R. Кольцо R называется обратимо-регулярным, если всякий его элемент является обратимо-регулярным.

Доказано, что обратимо-регулярное кольцо является чистым [4]. Так как полупростое кольцо является обратимо-регулярным и кольцо R является чистым тогда и только тогда, когда $R/J(R)$ — чистое и идемпотенты кольца R поднимаются по модулю $J(R)$ [7], то полусовершенные кольца являются чистыми. Это означает, что, в частности, любое артиново (а значит, и любое конечное) кольцо является чистым. Кроме того, любое кольцо матриц над чистым кольцом является чистым [7].

В случае когда R является кольцом эндоморфизмов некоторого модуля, появляются новые описания свойства чистоты, которые могут оказаться полезными при изучении условий чистоты кольца R. В частности, если f — чистый элемент кольца эндоморфизмов модуля M, то существует такой идемпотентный эндоморфизм e модуля M, что f совпадает на $\operatorname{Ker} e$ с некоторым автоморфизмом модуля M. Эта тематика привлекла в последнее время внимание многих специалистов. Было доказано, что являются чистыми следующие кольца эндоморфизмов: проективного модуля над правым совершенным кольцом, векторного пространства над телом, непрерывного модуля [5, 10].

Поскольку абелевы группы являются $\mathbb{Z}$-модулями, возникает естественная задача о нахождении необходимых и достаточных условий чистоты колец эндоморфизмов абелевых групп. В [6] рассматривались вопросы чистоты колец эндоморфизмов периодических абелевых групп. Было показано, что кольцо эндоморфизмов тотально проективной периодической группы является чистым тогда и только тогда, когда эта группа ограниченна.

Автором были изучены вопросы чистоты колец эндоморфизмов вполне разложимых групп без кручения [3].

Целью настоящей работы является изучение вопросов чистоты колец эндоморфизмов одного из классов смешанных абелевых групп SP-групп конечного ранга без кручения.

Введём следующие обозначения.

A — SP-группа,

R — кольцо эндоморфизмов группы A,

R_p — кольцо эндоморфизмов p-компоненты группы A,

R_t — идеал эндоморфизмов группы A, образы которых лежат в периодической части группы A,

S — фактор-кольцо R/R_t.

Определение 1. Редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p-компонент называется *SP-группой*, если естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \to \prod\limits_p A_p$ продолжается до сервантного вложения $A \to \prod\limits_p A_p$. Здесь и далее предполагается, что p пробегает множество всех простых чисел $\mathbb{P}$, относящихся к A, т. е. таких что $A_p \neq 0$.

Определение 2. Группа A называется *самомалой*, если образ каждого гомоморфизма $A \to \bigoplus\limits_{\Re} A$ ($\Re$ — произвольный кардинал) содержится в сумме конечного числа слагаемых A.

В следующей лемме, как и далее в тексте, под рангом смешанной группы A понимается ранг без кручения, то есть ранг фактор-группы $A/T(A)$.

Лемма 1. *Пусть A — SP-группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *$A = A_p \oplus B_p$ для всякого простого p, причём $pB_p = B_p$.*
2. *Если A — группа конечного ранга, то S — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть A — SP-группа. Тогда естественное вложение
$$\bigoplus_p A_p \to \prod_p A_p$$
продолжается до сервантного вложения
$$A \to \prod_p A_p.$$
Поскольку $A_p \subseteq A$ и
$$\prod_p A_p = A_q \oplus \prod_{p \neq q} A_p,$$
то в группе A также можно выделить прямое слагаемое A_q:
$$A = A_q \oplus \left(A \cap \prod_{p\neq q} A_p\right).$$

Возьмём произвольный вектор
$$a = (\ldots, a_p, \ldots) \in \prod_{p \neq q} A_p.$$
Заметим, что $o(a_p) = p^k$ $(k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$ для любого p, поэтому $(o(a_p), q) = 1$. Тогда существуют такие $u, v \in \mathbb{Z}$, что $u \cdot o(a) + v \cdot q = 1$. Имеем
$$a_p = 1 \cdot a_p = (u \cdot o(a_p) + v \cdot q) \cdot a = q \cdot (v \cdot a).$$
Следовательно, a_p делится на q. Получаем, что $\prod\limits_{p\neq q} A_p$ — q-делимая группа. Поскольку A — сервантная подгруппа группы $\prod\limits_p A_p$ и $\prod\limits_{p\neq q} A_p$ — q-делимая группа, $A \cap \prod\limits_{p\neq q} A_p$ — q-делимая группа.

Докажем утверждение 2. Любому эндоморфизму $\alpha \in E(A)$ можно поставить в соответствие элемент $\acute{\alpha} \in E\big(A/T(A)\big)$ следующим образом: для любого элемента $\bar{a} = a + T(A) \in A/T(A)$ определим
$$\acute{\alpha}\bar{a} = \alpha(a) + T(A).$$
Поскольку α — эндоморфизм, в случае $a - b \in T(A)$ имеем $\alpha(a-b) \in T(A)$. Тем самым отображение $\acute{\alpha}$ задано корректно.

Рассмотрим произвольный элемент

$$\bar{\alpha} = \alpha + R_t \in S = E(A)/\operatorname{Hom}\bigl(A, T(A)\bigr).$$

Построим вложение φ из S в $E\bigl(A/T(A)\bigr)$: каждому $\bar{\alpha}$ поставим в соответствие $\acute{\alpha}$.

Пусть $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha - \beta \in R_t$. Тогда для всякого $a \in A$

$$\varphi(\bar{\alpha})\bar{a} = \acute{\alpha}\bar{a} = \alpha(a) + T(A),$$
$$\varphi(\bar{\beta})\bar{a} = \acute{\beta}\bar{a} = \beta(a) + T(A),$$

И далее получаем

$$\varphi(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\bar{a} = \varphi(\bar{\alpha})\bar{a} - \varphi(\bar{\beta})\bar{a} = \\ = (\alpha(a) + T(A)) - (\beta(a) + T(A)) = (\alpha - \beta)a + T(A) = 0 + T(A),$$

т. е. $\varphi(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) = \acute{0}$. Таким образом, вложение φ задано корректно.

Покажем теперь, что φ — мономорфизм. Пусть имеются два таких элемента $\bar{\alpha}, \bar{\beta} \in S$, что $\varphi\bar{\alpha} = \varphi\bar{\beta}$. В таком случае для всякого $a \in A$ справедливы равенства

$$\bar{0} = 0 + T(A) = \varphi(\bar{\alpha} - \bar{\beta})\bar{a} = \varphi(\bar{\alpha})\bar{a} - \varphi(\bar{\beta})\bar{a} = \\ = \bigl(\alpha(a) + T(A)\bigr) - \bigl(\beta(a) + T(A)\bigr) = (\alpha - \beta)a + T(A).$$

Значит, $(\alpha - \beta)a \in T(A)$ для любого $a \in A$. Тогда $\overline{\alpha - \beta} = \bar{\alpha} - \bar{\beta} = \bar{0}$, и φ действительно мономорфизм.

Для завершения доказательства достаточно убедиться, что $E\bigl(A/T(A)\bigr)$ — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра. Действительно, рассмотрим произвольный элемент $\bar{a} \in A/T(A)$. Покажем, что $\bar{a}$ делится на n для любого натурального n. Запишем $n = p_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{s_k}$, где p_i — различные простые числа, s_i — неотрицательные числа $(i = 1, \ldots, k)$, k — натуральное число. Из доказательства утверждения 1 следует, что имеет место равенство

$$A = \Bigl(\bigoplus_{p \in \{p_1, \ldots, p_k\}} A_p\Bigr) \oplus B,$$

причём B — p_1-, …, p_k-делимая группа. Тогда найдутся такие $a_{p_i} \in A_{p_i}$ и $b \in B$, что $a = a_{p_1} + \ldots + a_{p_k} + b$. Но $\bar{a} = \bar{b}$, следовательно, $\bar{a}$ делится на n.

Имеем, что $A/T(A)$ — делимая группа, а значит и $\mathbb{Q}$-пространство. Учитывая конечный ранг группы A, получаем, что $E\bigl(A/T(A)\bigr)$ — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра. □

Теорема 2. *Пусть A — самомалая SP-группа конечного ранга. Тогда кольцо R является чистым.*

Доказательство. Пусть α — произвольный эндоморфизм группы A. Рассмотрим $\bar{\alpha} \in S$. Так как A — SP-группа конечного ранга, то по лемме 1 S — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра. Поэтому S — чистое кольцо и $\bar{\alpha} = \bar{e} + \bar{u}$, где $\bar{e}$ —

идемпотентный, а $\bar{u}$ — обратимый элементы кольца S [10]. Это означает, что найдутся такие r_i $(i = \overline{1,4})$ и $v \in R$, что

$$\alpha = e + u + r_1, \quad e^2 - e = r_2, \quad uv = vu + r_3 = 1 + r_4,$$

где $\bar{v}$ — обратный к $\bar{u}$.

Так как A — самомалая SP-группа конечного ранга, то согласно [1] $R_t = \bigoplus_p R_p$. Значит, существует такое конечное подмножество простых чисел $\pi \subset \mathbb{P}$, что $r_i A \subseteq \bigoplus_{p\in\pi} A_p$. В силу того что A — SP-группа, по лемме 1 получаем, что $A = C \oplus B$, где $C = \bigoplus_{p\in\pi} A_p$, а B — p-делимая группа $(p \in \pi)$, причём $r_i C \subseteq C$ и $r_i B = 0$ $(i = \overline{1,4})$, поскольку $r_i \in R_t$. Следует также отметить, что C и B — вполне характеристические подгруппы (следует из доказательства леммы 1).

Рассмотрим теперь сужение эндоморфизма $\alpha|_B = e|_B + u|_B$. Имеют место равенства

$$(e|_B)^2 - e|_B = 0, \quad u|_B v|_B = v|_B u|_B = 1|_B.$$

Следовательно, $\alpha|_B$ — чистый элемент кольца $E(B)$.

По условию теоремы группа A — самомалая SP-группа конечного ранга, поэтому по [1] R_p — конечные кольца, а следовательно, чистые. Тогда и $E(C) = \prod_{p\in\pi} R_p$ — чистое кольцо.

Таким образом, мы показали, что $\alpha|_B$ — чистый элемент кольца $E(B)$ и $\alpha|_C$ — чистый элемент кольца $E(C)$. Принимая во внимание тот факт, что $A = C \oplus B$, и то, что C и B — вполне характеристические подгруппы группы A, согласно [7] получим, что α — чистый элемент кольца R. □

Рассмотрим далее некоторые следствия доказанной теоремы.

Лемма 3. *Пусть у группы A существует разложение $A = B \oplus C$, где C — самомалая SP-группа конечного ранга, а B — бесконечная периодическая группа. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если B — ограниченная группа, то $E(A)$ — чистое кольцо.*
2. *Если B содержит в качестве прямого слагаемого бесконечную прямую сумму циклических p-групп, порядки которых не ограничены в совокупности, то $E(A)$ не является чистым кольцом.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Согласно [6] кольцо эндоморфизмов ограниченной периодической группы является чистым. Так как C — самомалая группа конечного ранга, то, как следует из теоремы 2, кольцо эндоморфизмов C также является чистым. Поскольку $A = B \oplus C$, принимая во внимание [7], получаем, что $E(A)$ — чистое кольцо.

Докажем утверждение 2. В случае если p-группа содержит в качестве прямого слагаемого бесконечную прямую сумму циклических групп, порядки которых не ограничены, кольцо эндоморфизмов такой группы не является чистым согласно [6]. Тем самым $E(A_p)$ не является чистым кольцом. Поскольку A_p является вполне характеристическим прямым слагаемым группы A, то согласно [7] $E(A)$ не является чистым кольцом. $\square$

Следующая лемма даёт достаточное условие чистоты элемента кольца эндоморфизмов SP-группы.

Лемма 4. *Пусть f — эндоморфизм группы A и fA — ограниченная группа. Тогда f — чистый элемент кольца $E(A)$.*

Доказательство. Пусть f — эндоморфизм группы A и fA — ограниченная группа. В таком случае найдётся такое конечное множество простых чисел $\Lambda \subset \mathbb{P}$, что $fA \subseteq \bigoplus\limits_{p\in\Lambda} A_p$, так как в противном случае порядки элементов группы fA не будут ограничены в совокупности. Обозначим группу $\bigoplus\limits_{p\in\Lambda} A_p$ через C. Тогда согласно лемме 1 группу A можно представить в виде $A = C \oplus D$, где группы C и D являются вполне характеристическими.

Согласно результатам, представленным в [7], $f|_C$ — чистый элемент $E(C)$. Далее, $f|_D = 0 = 1 + (-1)$ также чистый элемент $E(D)$. Тогда согласно [7] f — чистый элемент кольца $E(A)$. $\square$

Возникает вопрос, в каких случаях справедлива импликация, обратная сформулированной в теореме 2. Другими словами, при каких условиях свойства чистоты кольца эндоморфизмов и самомалость группы совпадают? Следующий результат даёт частичный ответ на данный вопрос.

Теорема 5. *Пусть A — SP-группа конечного ранга, не имеющая бесконечных периодических прямых слагаемых, и $A_p \cong \mathbb{Z}_p$ для всякого $p \in \mathbb{P}$. Если при этом кольцо R является чистым, то A — самомалая группа.*

Доказательство. Предположим противное. В этом случае согласно [1] найдётся такой эндоморфизм $f \in R_t$, что $f(A_p) \neq 0$ для бесконечного числа простых чисел p, множество которых мы обозначим через Λ.

По условию теоремы f — чистый элемент кольца R, следовательно, найдутся такие обратимый и идемпотентный элементы u и e кольца R, что $f = e + u$. При этом, поскольку $A_p \cong Z_p$ для каждого $p \in \mathbb{P}$, e действует на A_p либо как тождественный, либо как нулевой эндоморфизм (т. е. группа A_p допускает только тривиальное разложение). Пользуясь свойствами идемпотента e, можно записать:

$$A = \operatorname{Ker} e \oplus \operatorname{Im} e,$$

причём

$$f|_{\operatorname{Ker} e} = (u+e)|_{\operatorname{Ker} e} = u|_{\operatorname{Ker} e}, \quad f|_{\operatorname{Im} e} = (u+e)|_{\operatorname{Im} e} = (u+1)|_{\operatorname{Im} e}.$$

Так как f совпадает на подгруппе $\operatorname{Ker} e$ с автоморфизмом u, то

$$\operatorname{Ker} e \cap \operatorname{Ker} f = 0, \quad \operatorname{Ker} e = f(\operatorname{Ker} e) \subseteq T(A).$$

В таком случае, поскольку по условию теоремы группа A не имеет бесконечных периодических слагаемых, а группа $\operatorname{Ker} e$ — периодическая группа, то это конечная группа. Значит,

$$\operatorname{Ker} e = \bigoplus_{p\in\pi} A_p,$$

где $\pi \subset \Lambda$ — конечное подмножество простых чисел. Тогда оставшиеся p-компоненты A_p лежат в $\operatorname{Im} e$ для всякого $p \in \Lambda' = \Lambda \setminus \pi$.

Предположим, что существует ненулевой элемент $a \in A_p$, такой что $fa = 0$. Поскольку $a \in \operatorname{Im} e$, то

$$fa = (u+1)a = 0,$$

откуда следует, что $ua = -a$. Учитывая, что $A_p \cong \mathbb{Z}_p$, можно записать $a = mc$, где c — образующий элемент группы A_p, $o(c) = p$, $1 \leqslant m < p$. Тогда

$$-mc = -a = ua = u(mc) = m \cdot uc,$$

т. е.

$$m \cdot (uc + c) = 0. \tag{1}$$

Поскольку u — автоморфизм, то $o(uc) = o(c) = p$. Тогда найдётся такое $l \in \mathbb{N}$, что $uc = lc$. С учётом этого равенство (1) примет вид

$$m(l+1)c = 0.$$

Так как $(m, p) = 1$ (в противном случае a равнялось бы нулю), то $(l+1) \,\vdots\, p$, т. е. $l + 1 = p$. В таком случае $uc = -c$, а $fc = (u+1)c = -c + c = 0$, что противоречит выбору множества Λ. Следовательно,

$$A_p \cap \operatorname{Ker} f = 0 \tag{2}$$

для всякого $p \in \Lambda'$.

С другой стороны,

$$f(A) \subseteq T(A), \tag{3}$$

откуда следует, что $A \cap \prod\limits_{p\in\Lambda'} A_p$ не содержит бесконечных векторов из A, иначе мы получили бы противоречие с (2) или (3).

Таким образом,

$$A \cap \prod_{p\in\Lambda'} A_p = \bigoplus_{p\in\Lambda'} A_p,$$

причём справедливо равенство

$$A = \Bigl(A \cap \prod_{p\in\Lambda'} A_p\Bigr) \oplus \Bigl(A \cap \prod_{p\in\mathbb{P}\setminus\Lambda'} A_p\Bigr).$$

Действительно, обозначим $A \cap \prod\limits_{p\in\Lambda'} A_p$ через B, а $A \cap \prod\limits_{p\in\mathbb{P}\setminus\Lambda'} A_p$ через C. Ясно, что $B \cap C = 0$. Покажем, что $A = B + C$.

Пусть $a \in A$. Предположим, что a — конечный вектор. Тогда справедливо

$$a \in \bigoplus_{p\in\mathbb{P}} A_p \subseteq \Bigl(\bigoplus_{p\in\Lambda'} A_p\Bigr) \oplus \Bigl(\bigoplus_{p\in\mathbb{P}\setminus\Lambda'} A_p\Bigr) \subseteq B \oplus C.$$

Рассмотрим теперь случай, когда a — бесконечный вектор. Тогда только на конечном числе позиций, соответствующих $p \in \Lambda'$, вектор a отличается от нуля. Следовательно, существует такой вектор $a' \in \bigoplus_{p \in \Lambda'} A_p$, что вектор $a'' = a - a'$ на всех позициях, соответствующих $p \in \Lambda'$, равен нулю, значит, принадлежит $A \cap \prod_{p \in \mathbb{P} \setminus \Lambda'} A_p$. Получаем, что $a = a' + a'' \in B + C$.

Таким образом, в A нашлось бесконечное периодическое прямое слагаемое, что противоречит условиям теоремы. К полученному противоречию мы пришли исходя из предположения, что группа A не является самомалой, следовательно, группа A самомалая. $\square$

Литература

[1] Крылов П. А. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестн. ТГУ. — 2000. — Т. 269. — С. 29—34.

[2] Крылов П. А. Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43, № 1. — С. 60—76.

[3] Сорокин К. С. Вполне разложимые абелевы группы с чистыми кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, № 8. — С. 105—108.

[4] Camillo V. P., Khurana D. A characterization of unit-regular rings // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 6. — P. 2293—2295.

[5] Camillo V. P., Khurana D., Lam T. Y., Nicholson W. K., Zhou Y. Continuous modules are clean // J. Algebra. — 2006. — Vol. 304. — P. 94—111.

[6] Goldsmith B., Vámos P. A note on clean Abelian groups // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 2007. — Vol. 117. — P. 181—191.

[7] Han J., Nicholson W. K. Extension of clean rings // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 6. — P. 2589—2595.

[8] Handelman D. Perspectivity and cancellation in regular rings // J. Algebra. — 1977. — Vol. 48. — P. 1—16.

[9] Nicholson W. K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 229. — P. 269—278.

[10] Nicholson W. K., Varadarajan K., Zhou Y. Clean endomorphism rings // Arch. Math. — 2004. — Vol. 83. — P. 340—343.