О базовых полях csp-колец. II*

Е. А. ТИМОШЕНКО
Томский государственный университет
e-mail: tea471@mail.tsu.ru

УДК 512.62+510.22

Ключевые слова: csp-кольцо, базовое поле, кардинальные характеристики континуума.

Аннотация

Доказано, что всякое поле характеристики нуль, мощность которого не превышает кардинального числа $\mathfrak{b}$, является базовым полем некоторого csp-кольца.

Abstract

E. A. Timoshenko, Base fields of csp-rings. II, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 149—156.

We prove that every field of characteristic 0 whose cardinality does not exceed the bounding number $\mathfrak{b}$ is a base field of some csp-ring.

1. Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [3], в которой было начато систематическое исследование базовых полей csp-колец (такие кольца и модули над ними изучались, в частности, в [1,2,4,5]). Приведём основные определения и обозначения.

Через P, $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ будем обозначать соответственно множества всех простых, натуральных, целых и рациональных чисел. Под *характеристикой* в [3] понималась любая последовательность вида $\chi = (m_p)_{p \in P}$, где $m_p \in \{0\} \cup \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ (термин «характеристика поля» используем в его обычном смысле). Через P_χ обозначим множество всех простых p, для которых $m_p \neq 0$. Если $m_p = \infty$, то будем считать, что K_p — кольцо целых p-адических чисел; в противном случае полагаем $K_p = \mathbf{Z}/p^{m_p}\mathbf{Z}$. Пусть множество $L = P_\chi$ бесконечно. Обозначим

$$K_\chi = \prod_{p \in L} K_p, \quad T_\chi = \bigoplus_{p \in L} K_p \subset K_\chi. \tag{1}$$

Очевидно, что T_χ является идеалом кольца K_χ. Элемент кольца K_χ будем представлять как вектор вида $(k_p)_{p \in L}$, а сами компоненты $k_p \in K_p$, где $p \in L$, будем называть *p-координатами* или просто *координатами* этого элемента.

*Исследование выполнено при поддержке программы повышения конкурентоспособности Томского государственного университета.

Говоря о подкольце кольца с единицей, мы всегда подразумеваем, что подкольцо содержит единичный элемент этого кольца. Будем называть csp-*кольцом* всякое подкольцо R кольца K_χ, такое что $T_\chi \subset R$ и фактор-кольцо R/T_χ является полем. Поле R/T_χ, а также всякое изоморфное ему поле мы назовём *базовым полем* csp-кольца R. Наша цель — выяснить, какие поля могут служить базовыми полями csp-колец. Нетрудно убедиться, что всякое такое поле (иначе говоря, поле, вкладывающееся в K_χ/T_χ в качестве подкольца) имеет нулевую характеристику и мощность не выше мощности континуума $\mathfrak{c}$. Содержащееся в K_χ/T_χ простое поле будем отождествлять с полем $\mathbf{Q}$. Заметим, что если $(k_p)_{p\in L}$ есть элемент csp-кольца, то либо почти все k_p равны 0, либо, напротив, почти все k_p отличны от 0.

Напомним основные результаты, полученные в [3].

Факт 1 [3, теорема 1.3]. Если для характеристик χ и φ выполнено $P_\chi = P_\varphi$, то для всякого поля F вложение $F \to K_\chi/T_\chi$ существует в том и только в том случае, когда существует вложение $F \to K_\varphi/T_\varphi$.

Ввиду факта 1 вместо общей ситуации (1) мы далее ограничимся случаем

$$K = \prod_{p\in L} \mathbf{Z}_p, \quad T = \bigoplus_{p\in L} \mathbf{Z}_p \subset K, \tag{2}$$

где L — бесконечное множество простых чисел, а под $\mathbf{Z}_p$ понимается поле вычетов $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Факт 2 [3, теорема 2.2]. Для всякого бесконечного множества $L \subset P$ кольцо K/T содержит чисто трансцендентное расширение поля $\mathbf{Q}$ степени трансцендентности $\aleph_1$ в качестве подкольца.

Пусть F — поле. Через $\mathcal{M}_F$ мы будем обозначать множество всех отличных от 1 неприводимых унитарных многочленов кольца $F[y]$; если F бесконечно, то $F[y]$ и $\mathcal{M}_F$ (а также алгебраическое замыкание $\bar{F}$ и простое трансцендентное расширение $F(y)$ поля F) имеют ту же мощность, что и F. Заметим, что всякий многочлен из $\mathbf{Q}[y]$ почти для всех $p \in P$ можно рассматривать как элемент кольца $\mathbf{Z}_p[y]$.

Факт 3. Существует множество $L \subset P$, такое что

$$L \text{ бесконечно и всякий многочлен } h(y) \in \mathcal{M}_{\mathbf{Q}} \text{ при почти всех } p \in L \text{ имеет корень в поле } \mathbf{Z}_p \tag{3}$$

(см. теорему 3.2 в [3]; там же приведён ряд условий, равносильных данному).

Замечание. Таких множеств существует довольно много. Так, можно построить континуальное почти дизъюнктное семейство подмножеств множества P, каждое из которых обладает свойством (3). Для этого достаточно взять континуальное почти дизъюнктное семейство бесконечных подмножеств множества $L \subset P$, обладающего данным свойством.

Факт 4 [3, теорема 3.3]. Если множество $L \subset P$ удовлетворяет условию (3), то K/T содержит алгебраическое замыкание поля $\mathbf{Q}$ в качестве подкольца.

2. Основные результаты

Введём отношение порядка $\prec$ на множестве $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ всех функций $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$: будем считать, что $z' \prec z$ тогда и только тогда, когда почти для всех $i \in \mathbf{N}$ выполнено $z'(i) < z(i)$. Подмножество $B \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ назовём *ограниченным*, если существует функция $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, для которой $z' \prec z$ при всех $z' \in B$. Через $\mathfrak{b}$ обозначается наименьшая мощность неограниченного подмножества множества $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$; нетрудно проверить, что кардинал $\mathfrak{b}$ (известный в англоязычной литературе как *bounding number*) регулярен и $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{c}$. Известно [6, 7], что каждая из возможностей

$$\aleph_1 = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}, \quad \aleph_1 = \mathfrak{b} < \mathfrak{c}, \quad \aleph_1 < \mathfrak{b} = \mathfrak{c}, \quad \aleph_1 < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$$

совместима с системой аксиом ZFC (кардинал $\mathfrak{b}$ является одной из так называемых кардинальных характеристик континуума).

В [3] была сформулирована проблема: всякое ли счётное поле нулевой характеристики служит базовым полем некоторого csp-кольца? Ниже будет показано, что ответ положителен даже для всякого поля мощности не выше $\mathfrak{b}$ и характеристики 0. Если мы принимаем аксиому Мартина (в этом случае $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$, см. [6,7]), отсюда вытекает следующее утверждение: F является базовым полем некоторого csp-кольца тогда и только тогда, когда характеристика поля F равна нулю и $|F| \leqslant \mathfrak{c}$.

Через π_p обозначим проекции $K \to \mathbf{Z}_p$, через π — естественный эпиморфизм $K \to K/T$. Под π_p^y будем понимать кольцевой гомоморфизм $K[y] \to \mathbf{Z}_p[y]$, ставящий в соответствие всякому $\bar{\mu}(y) \in K[y]$ многочлен, коэффициенты которого являются образами соответствующих коэффициентов $\bar{\mu}(y)$ при отображении π_p. Аналогично задаются кольцевые гомоморфизмы π^y и π^x, индуцированные отображением π и определённые соответственно на $K[y]$ и $K[x]$. Очевидно, что ядро гомоморфизма π^y совпадает с множеством $T[y]$ многочленов, у которых все коэффициенты принадлежат идеалу T. Ясно также, что для многочленов $\bar{\mu}(y) \in K[y]$, $\mu_p = \pi_p^y(\bar{\mu})$, $\mu = \pi^y(\bar{\mu})$ и произвольного элемента $k = (k_p)_{p \in L} \in K$ справедливы равенства

$$\bar{\mu}(k) = \big(\mu_p(k_p)\big)_{p \in L}, \quad \mu(k+T) = \bar{\mu}(k) + T.$$

Лемма 2.1. *Если для многочлена $\bar{\mu}(y) \in K[y]$ выполнено $\pi^y(\bar{\mu}) = 0$, то почти для всех $p \in L$ справедливо равенство $\pi_p^y(\bar{\mu}) = 0$.*

Доказательство. Как было отмечено выше, из $\pi^y(\bar{\mu}) = 0$ следует, что все коэффициенты многочлена $\bar{\mu}(y)$ лежат в T. Множество простых $p \in L$, таких что хотя бы один из этих коэффициентов имеет ненулевую p-координату, является конечным; для всех остальных $p \in L$ имеем $\pi_p^y(\bar{\mu}) = 0$, что и требовалось. $\square$

Теорема 2.2. *Пусть K/T содержит подкольцо F, являющееся алгебраически замкнутым полем и такое что $|F| < \mathfrak{b}$. Тогда естественное вложение $F \to K/T$*

можно продолжить до вложения $\bar{F(x)} \to K/T$, где $\bar{F(x)}$ — алгебраическое замыкание простого трансцендентного расширения $F(x)$ поля F.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — поле частных кольца многочленов $F[x]$. Запишем $\mathcal{M}_{F(x)} = \{f_\xi(x,y)\}_{\xi\in\Gamma}$, где $|\Gamma| = |F| < \mathfrak{b}$. Коэффициентами многочленов $f_\xi(x,y) \in F(x)[y]$ служат элементы поля $F(x)$, т. е. отношения многочленов из $F[x]$. Произведение знаменателей всех коэффициентов многочлена $f_\xi(x,y)$ обозначим через $v_\xi(x)$. Заметим, что для всякого $v(x) \in F[x] \setminus \{0\}$ многочлен $y + 1/\bigl(v(x)\bigr)$ лежит в $\mathcal{M}_{F(x)}$, а значит, $\{v_\xi(x) \mid \xi \in \Gamma\} = F[x] \setminus \{0\}$.

Пусть y^s — старшая степень переменной y, входящая в $f_\xi(x,y)$. Положим $q_\xi(x,y) = v_\xi(x) f_\xi(x,y) \in F[x][y]$; многочлен $q_\xi(x,y)$ имеет при y^s коэффициент, равный $v_\xi(x)$. Обозначим через $\bar{q}_\xi(x,y)$ некоторый многочлен из $K[x][y]$, такой что его коэффициенты переходят в соответствующие коэффициенты многочлена $q_\xi(x,y)$ при отображении $\pi^x\colon K[x] \to (K/T)[x]$. Пусть коэффициент многочлена $\bar{q}_\xi(x,y)$ при y^s равен $\bar{v}_\xi(x)$, тогда $\pi^x(\bar{v}_\xi) = v_\xi$.

Для всякого $i \in \mathbf{N}$ положим $w_\xi^i(y) = q_\xi(i,y) \in F[y]$. Очевидно, что почти для всех $i \in \mathbf{N}$ выполнено $v_\xi(i) \neq 0$; зафиксируем некоторое число i, удовлетворяющее этому неравенству. В силу алгебраической замкнутости F многочлен $w_\xi^i(y)$ разлагается на линейные множители:

$$w_\xi^i(y) = v_\xi(i) \cdot (y - \alpha_1)(y - \alpha_2) \cdots (y - \alpha_s),$$

где $\alpha_j \in F$. Легко убедиться, что гомоморфизм π^y переводит $\bar{w}_\xi^i(y) = \bar{q}_\xi(i,y) \in K[y]$ в многочлен $w_\xi^i(y)$. Пусть $\alpha_j = \beta_j + T$, где $\beta_j \in K$. Заметим, что $\bar{v}_\xi(i) + T = v_\xi(i)$ — ненулевой элемент поля F, а значит, при почти всех $p \in L$ элемент $\bar{v}_\xi(i) \in K$ имеет ненулевую p-координату. Применяя к многочлену

$$\bar{\mu}(y) = \bar{w}_\xi^i(y) - \bar{v}_\xi(i) \cdot (y - \beta_1)(y - \beta_2) \cdots (y - \beta_s) \in K[y]$$

лемму 2.1, получаем, что почти для всех $p \in L$ многочлен $\pi_p^y(\bar{w}_\xi^i) \in \mathbf{Z}_p[y]$ имеет вид

$$\pi_p^y(\bar{w}_\xi^i) = \pi_p\bigl(\bar{v}_\xi(i)\bigr) \cdot \bigl(y - \pi_p(\beta_1)\bigr)\bigl(y - \pi_p(\beta_2)\bigr) \cdots \bigl(y - \pi_p(\beta_s)\bigr).$$

Отсюда следует, что при почти всех $p \in L$ многочлен $\pi_p^y(\bar{w}_\xi^i)$ имеет степень s и разлагается в произведение многочленов степени 1.

Построим теперь функцию $z_\xi \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Если $v_\xi(i) = 0$, полагаем $z_\xi(i) = 1$. Если же $v_\xi(i) \neq 0$, то выберем $z_\xi(i) \in \mathbf{N}$ так, чтобы при любом $p \in L$ из условия $p > z_\xi(i)$ следовало, что многочлен $\pi_p^y(\bar{w}_\xi^i)$ разлагается в $\mathbf{Z}_p[y]$ в произведение s многочленов степени 1.

Рассмотрим множество функций $\{z_\xi \mid \xi \in \Gamma\} \subset \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Из неравенства $|\Gamma| < \mathfrak{b}$ следует, что для некоторой функции $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ при всех $\xi \in \Gamma$ выполнено $z_\xi \prec z$. Будем считать, что функция z строго возрастает (очевидно, её можно выбрать обладающей этим свойством). Отображение $\varkappa\colon L \to \mathbf{N}$ зададим равенством

$$\varkappa(p) = \begin{cases} i, & \text{если } z(i) \leqslant p < z(i+1), \\ 1, & \text{если } p < z(1). \end{cases}$$

Зафиксируем произвольное $\xi \in \Gamma$. Убедимся, что справедливы следующие три свойства (как и раньше, через s мы обозначаем показатель старшей из входящих в $f_\xi(x,y)$ степеней переменной y).

1. *Почти для всех $p \in L$ выполнено $v_\xi\bigl(\varkappa(p)\bigr) \neq 0$.*

Утверждение следует из того факта, что каждое своё значение $\varkappa$ принимает лишь конечное число раз, а многочлен $v_\xi(x) \in F[x] \setminus \{0\}$ имеет конечное число корней в F.

2. *Почти для всех $p \in L$ многочлен $\pi_p^y(\bar{w}_\xi^{\varkappa(p)})$ разлагается в кольце $\mathbf{Z}_p[y]$ в произведение s многочленов степени* 1.

В самом деле, найдётся $i_\xi \in \mathbf{N}$, такое что $z_\xi(i) < z(i)$ при всех $i \geqslant i_\xi$. Пусть $p \geqslant z(i_\xi)$ и $v_\xi\bigl(\varkappa(p)\bigr) \neq 0$ (этим условиям удовлетворяют почти все $p \in L$). Тогда для некоторого $i \geqslant i_\xi$ имеем неравенства $z(i) \leqslant p < z(i+1)$ и, следовательно, $z_\xi\bigl(\varkappa(p)\bigr) = z_\xi(i) < z(i) \leqslant p$. Поэтому (по свойствам функции z_ξ) многочлен $\pi_p^y(\bar{w}_\xi^{\varkappa(p)})$ разлагается в произведение s многочленов степени 1.

3. *Почти для всех $p \in L$ элемент $\bar{v}_\xi\bigl(\varkappa(p)\bigr)$ имеет ненулевую p-координату.*

Можно заметить, что коэффициент многочлена $\bar{w}_\xi^{\varkappa(p)}(y) \in K[y]$ при y^s равен $\gamma_p = \bar{v}_\xi\bigl(\varkappa(p)\bigr)$; тогда многочлен $\pi_p^y\bigl(\bar{w}_\xi^{\varkappa(p)}\bigr) \in \mathbf{Z}_p[y]$ имеет при той же степени переменной коэффициент $\pi_p(\gamma_p)$. Из свойства 2 следует, что при почти всех $p \in L$ многочлен $\pi_p^y\bigl(\bar{w}_\xi^{\varkappa(p)}\bigr)$ имеет степень s, а значит, почти для всех $p \in L$ выполнено $\pi_p(\gamma_p) \neq 0$.

Положим $k = (\varkappa(p) + p\mathbf{Z})_{p \in L} \in K$ и $a = k + T \in K/T$. Вновь зафиксируем произвольное $\xi \in \Gamma$. Мы знаем, что почти для всех $p \in L$ вектор $\bar{v}_\xi\bigl(\varkappa(p)\bigr) \in K$ имеет ненулевую p-координату (равную p-координате вектора $\bar{v}_\xi(k) \in K$). Итак, почти все координаты вектора $\bar{v}_\xi(k)$ отличны от 0, т. е. элемент $v_\xi(a) = \bar{v}_\xi(k) + T$ обратим в K/T (и, в частности, не равен 0). Из сказанного ясно, что множество

$$F(a) = \bigl\{u(a) \cdot \bigl(v(a)\bigr)^{-1} \bigm| u(x), v(x) \in F[x],\ v(x) \neq 0\bigr\} \subset K/T$$

есть поле, F-изоморфное полю $F(x)$, а элемент a трансцендентен над F.

Рассмотрим множество $\mathcal{F}$, состоящее из всех полей $F' \subset K/T$, содержащих в себе поле $F(a)$ и являющихся алгебраическими расширениями последнего; это множество непусто, так как $F(a) \in \mathcal{F}$. Пусть G — максимальный по включению элемент множества $\mathcal{F}$ (такой элемент существует в силу леммы Цорна). Покажем, что поле G содержит хотя бы одно решение уравнения $f_\xi(a,y) = 0$ для всякого $\xi \in \Gamma$, т. е. что всякий многочлен из $\mathcal{M}_{F(a)}$ имеет корень в G. Поскольку поле $F(a)$ имеет характеристику нуль, отсюда будет следовать, что G служит для $F(a)$ алгебраическим замыканием и, значит, существует F-изоморфизм полей $F(x) \cong G$.

Предположим противное: пусть существует $\xi \in \Gamma$, такое что поле G не содержит решений уравнения $f_\xi(a,y) = 0$ (или, что то же самое, решений уравнения $q_\xi(a,y) = 0$). Многочлен $q_\xi(a,y) \in F(a)[y]$ можно представить в виде $q_\xi(a,y) = g(y)h(y)$, где $g(y), h(y) \in G[y]$, причём $h(y) \in \mathcal{M}_G$. Легко убедиться, что гомоморфизм π^y переводит $\bar{\nu}(y) = \bar{q}_\xi(k,y) \in K[y]$ в многочлен $q_\xi(a,y)$. Через

$\bar{g}(y)$ и $\bar{h}(y)$ обозначим некоторые многочлены из $K[y]$, такие что $\pi^y(\bar{g}) = g$ и $\pi^y(\bar{h}) = h$ (при этом $\bar{h}(y)$ выберем унитарным).

Из равенства $\pi_p(k) = \varkappa(p) + p\mathbf{Z}$ нетрудно вывести, что $\pi_p^y(\bar{\nu}) = \pi_p^y\big(\bar{w}_\xi^{\varkappa(p)}\big)$. Применяя к многочлену $\bar{\mu}(y) = \bar{\nu}(y) - \bar{g}(y)\bar{h}(y) \in K[y]$ лемму 2.1, получаем, что почти для всех $p \in L$ выполнено $\pi_p^y(\bar{\nu}) = \pi_p^y(\bar{g})\pi_p^y(\bar{h})$, и следовательно, $\pi_p^y\big(\bar{w}_\xi^{\varkappa(p)}\big) = \pi_p^y(\bar{g})\pi_p^y(\bar{h})$. По свойству 2 отсюда следует, что при почти всех $p \in L$ многочлен $\pi_p^y(\bar{h}) \in \mathbf{Z}_p[y]$ имеет в $\mathbf{Z}_p$ по меньшей мере один корень. Выберем $d \in K$ так, чтобы почти для всех $p \in L$ элемент $\pi_p(d) \in \mathbf{Z}_p$ был корнем многочлена $\pi_p^y(\bar{h})$. Тогда $d+T \in K/T$ является корнем многочлена $h(y)$ и, следовательно, уравнения $q_\xi(a, y) = 0$. Зададим F' как наименьшее подкольцо кольца K/T, содержащее G и $d + T$. Это подкольцо строго содержит в себе G и изоморфно фактор-кольцу $G[y]/h(y)G[y]$, а последнее является полем. Получаем, что $F' \in \mathcal{F}$, что противоречит выбору поля G. □

Убедимся теперь, что всякое поле характеристики 0 и мощности, не превышающей $\mathfrak{b}$, служит базовым полем некоторого csp-кольца. В следующей теореме считаем, что K и T заданы равенствами (2), причём под L понимается множество простых чисел, обладающее свойством (3).

Теорема 2.3. *Всякое поле характеристики нуль, мощность которого не превышает $\mathfrak{b}$, вкладывается в кольцо K/T в качестве подкольца.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathcal{F}$, которое состоит из всех подколец кольца K/T, являющихся алгебраически замкнутыми полями; это множество непусто по факту 4. Пусть G — максимальный по включению элемент множества $\mathcal{F}$ (существование такого элемента следует из леммы Цорна). Ввиду теоремы 2.2 поле G должно удовлетворять условию $|G| \geqslant \mathfrak{b}$. Остаётся заметить, что всякое поле характеристики 0 и мощности не выше $\mathfrak{b}$ вкладывается в G. □

Замечание. Применяя рассуждения, аналогичные использованным в доказательствах теорем 2.2 и 2.3, можно усилить факт 2, заменив в его формулировке $\aleph_1$ кардиналом $\mathfrak{b}$.

Следствие. *Пусть K и T заданы равенствами* (2), *где L — некоторое бесконечное множество простых чисел, и пусть F — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, мощность которого не превышает $\mathfrak{b}$. Следующие условия эквивалентны*:

1) *F вкладывается в K/T как подкольцо*;
2) *множество L обладает свойством* (3).

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из только что доказанной теоремы.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Из условия 1) получаем, что K/T содержит в качестве подкольца алгебраическое замыкание поля $\mathbf{Q}$. Следовательно, для всякого $h(y) \in \mathcal{M}_{\mathbf{Q}}$ должен найтись элемент $d \in K$, такой что $h(d+T) = 0$. Это возможно лишь в том случае, когда почти для всех $p \in L$ элемент $\pi_p(d) \in \mathbf{Z}_p$

является корнем многочлена $h(y)$, рассматриваемого как элемент кольца $\mathbf{Z}_p[y]$. Поэтому множество L должно обладать свойством (3). $\square$

Следующая теорема показывает, что существует довольно много различных csp-колец, имеющих одно и то же базовое поле. По-прежнему считаем, что K и T заданы равенствами (2), где L есть множество простых чисел, удовлетворяющее условию (3).

Теорема 2.4. *Пусть F — счётное поле характеристики нуль и $F \not\cong \mathbf{Q}$. Тогда множество csp-колец $R \subset K$, таких что $R/T \cong F$, имеет мощность $\mathfrak{c}$.*

Доказательство. Ясно, что искомая мощность не может быть больше $\mathfrak{c}$ (так как существует только $\mathfrak{c}$ различных счётных подмножеств кольца K/T). Пусть $\mathcal{X}$ — уже упоминавшееся континуальное почти дизъюнктное семейство бесконечных подмножеств множества L. Легко проверить, что для любых $X, Y \in \mathcal{X}$ множество $L \setminus (X \cup Y)$ бесконечно. Для всякого $X \in \mathcal{X}$ введём обозначения

$$K'_X = \prod_{p\in X} \mathbf{Z}_p, \quad T'_X = \bigoplus_{p\in X} \mathbf{Z}_p, \quad K''_X = \prod_{p\in L\setminus X} \mathbf{Z}_p, \quad T''_X = \bigoplus_{p\in L\setminus X} \mathbf{Z}_p;$$

будем отождествлять кольца K/T и $(K'_X/T'_X) \times (K''_X/T''_X)$. Через θ'_X и θ''_X обозначим соответственно проекции $K/T \to K'_X/T'_X$ и $K/T \to K''_X/T''_X$. Можно считать, что $F \subset G$, где $G \subset K/T$ — это алгебраически замкнутое поле из доказательства теоремы 2.3.

Предположим сначала, что F — алгебраическое расширение поля $\mathbf{Q}$. Выберем элемент $k = (k_p)_{p\in L} \in K$ со свойством $k + T \in F \setminus \mathbf{Q}$; элемент $k + T$ является корнем некоторого многочлена $h(y) \in \mathcal{M}_{\mathbf{Q}}$, степень которого не меньше 2. Пусть $d = (d_p)_{p\in L}$ — такой элемент кольца K, что $d + T$ принадлежит полю G и является корнем многочлена $h(y)$, отличным от $k + T$ (тогда $k_p \neq d_p$ почти для всех $p \in L$). Обозначим через ε вложение полей $F \to G$, переводящее $k + T$ в $d + T$. Для всякого $X \in \mathcal{X}$ зададим вложение $\varepsilon_X : F \to K/T$ формулой $\varepsilon_X(a) = \bigl(\theta'_X\bigl(\varepsilon(a)\bigr), \theta''_X(a)\bigr)$ для всех $a \in F$. Тогда $\varepsilon_X(k + T) = k^{(X)} + T$, где элемент $k^{(X)} \in K$ определяется условием

$$\pi_p\bigl(k^{(X)}\bigr) = \begin{cases} d_p, & \text{если } p \in X, \\ k_p, & \text{если } p \in L \setminus X. \end{cases}$$

Равенства $\varepsilon_X(F) = R_X/T$ задают континуальное семейство csp-колец $R_X \subset K$, имеющих F своим базовым полем; заметим, что $k^{(X)} \in R_X$. По свойствам семейства $\mathcal{X}$ для любых различных $X, Y \in \mathcal{X}$ у элемента $k^{(X)} - k^{(Y)} \in K$ есть бесконечно много как ненулевых, так и нулевых координат. Поэтому $k^{(X)}$ и $k^{(Y)}$ не могут быть элементами одного и того же csp-кольца. Итак, при $X \neq Y$ имеем, что $R_X \neq R_Y$.

Предположим теперь, что F есть трансцендентное расширение поля $\mathbf{Q}$. Выберем $k \in K$ так, чтобы элемент $k + T$ лежал в F и был трансцендентен над $\mathbf{Q}$. Полагая $d = -k$, получаем, что элемент $d + T$ также содержится в F и трансцендентен над $\mathbf{Q}$ (при этом $d + T \neq k + T$). Тогда существует вложение полей

$F \to G$, переводящее $k+T$ в $d+T$. Действуя так же, как и в случае алгебраического расширения, мы можем построить континуальное семейство различных csp-колец $R_X \subset K$, имеющих F своим базовым полем. $\square$

В заключение убедимся, что различные csp-кольца не являются изоморфными даже в том случае, когда они имеют общее базовое поле.

Предложение 2.5. *Пусть R и R' — два csp-кольца, являющиеся подкольцами кольца K_χ. Тогда аддитивные группы колец R и R' изоморфны в том и только в том случае, когда $R = R'$.*

Доказательство. Пусть существует групповой изоморфизм $\delta\colon R \to R'$. Обозначим $k = \delta(1)$ и зададим групповой гомоморфизм $\psi\colon R \to K_\chi$ равенством $\psi(r) = \delta(r) - kr$. Ядро этого гомоморфизма содержит $\mathbf{Z}$, т. е. ψ индуцирует гомоморфизм $\bar{\psi}\colon R/\mathbf{Z} \to K_\chi$. Однако группы $R/\mathbf{Z}$ и K_χ являются делимой и редуцированной соответственно. Следовательно, $\bar{\psi} = 0$, а значит, $\psi = 0$ и $\delta(r) = kr$ для всех $r \in R$. Тогда $R = \delta^{-1}(1)kR \subset kR = \delta(R) = R'$. Аналогичным образом показывается, что $R' \subset R$, и следовательно, $R = R'$. $\square$

Замечание. Если $R \subset K_\chi$ и $R' \subset K_\varphi$ — два csp-кольца и $\chi \neq \varphi$, то нетрудно убедиться, что аддитивные группы колец R и R' не могут быть изоморфными.

Литература

[1] Зиновьев Е. Г. csp-кольца как обобщение колец псевдорациональных чисел // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 35—38.

[2] Зиновьев Е. Г. Модули над обобщениями кольца псевдорациональных чисел // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 7. — С. 61—67.

[3] Тимошенко Е. А. О базовых полях csp-колец // Алгебра и логика. — 2010. — Т. 49, № 4. — С. 555—565.

[4] Тимошенко Е. А. Проективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Журн. СФУ. Математика и физика. — 2011. — Т. 4, № 4. — С. 541—550.

[5] Тимошенко Е. А. Проективные модули над csp-кольцами // Журн. СФУ. Математика и физика. — 2012. — Т. 5, № 4. — С. 581—585.

[6] Blass A. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum // Handbook of Set Theory. Vol. 1. — Dordrecht: Springer, 2010. — P. 395—489.

[7] Van Douwen E. K. The integers and topology // Handbook of Set-Theoretic Topology. — Amsterdam: North-Holland, 1984. — P. 111—167.