К теории факторно делимых групп. II

А. А. ФОМИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, модуль, категория.

Аннотация

В статье доказываются некоторые базовые теоремы о факторно делимых абелевых группах.

Abstract

A. A. Fomin, On the quotient divisible group theory. II, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 157—196.

Some basic theorems on quotient divisible Abelian groups are proved.

Данная статья является продолжением работы [3]. Смешанные абелевы группы изучены мало. Факторно делимые группы представляют собой один из немногих примеров смешанных абелевых групп, которые достаточно хорошо поддаются изучению. Факторно делимые группы двойственны абелевым группам без кручения конечного ранга [10]. Целью данной статьи является изложение основных результатов о факторно делимых группах.

В первых двух разделах рассматриваются топологические аспекты. В частности, доказывается, что аддитивная группа конечно представимого модуля над кольцом полиадических чисел является полной в своей Z-адической топологии (теорема 2.7). Также доказано (следствие 2.9), что Z-адическое пополнение факторно делимой группы является конечно представимым модулем над кольцом полиадических чисел.

В третьем разделе доказывается теорема 3.3 о вложении. Всякая факторно делимая редуцированная группа A может быть вложена в конечно представимый модуль M над кольцом полиадических чисел так, что модуль M порождается базисом группы A.

В четвёртом разделе вводится понятие кохарактеристики элемента, рассматриваются свойства характеристики элемента и кохарактеристики.

В пятом разделе приводится описание факторно делимых групп ранга 1, полученное О. И. Давыдовой [1] в сравнении с классическим описанием Р. Бэра [6] абелевых групп без кручения ранга 1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 157—196.
© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

В шестом разделе доказывается эквивалентность двух категорий $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$, где $\mathcal{D}$ — категория факторно делимых групп с отмеченным базисом, а $\mathcal{S}$ — категория конечных последовательностей элементов конечно представимых модулей над кольцом полиадических чисел.

Всюду в этой статье слово «группа» означает «абелева группа». Группа A называется факторно делимой, если она содержит свободную подгруппу конечного ранга F, такую что фактор-группа A/F является делимой периодической группой, но сама группа A не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп. Ранг и свободный базис группы F называются соответственно рангом и базисом факторно делимой группы A.

Кольца целых чисел и рациональных чисел обозначаются $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Q}$ соответственно, Z_n — кольцо классов вычетов по модулю n, $\hat{\mathbf{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Наибольший общий делитель двух целых чисел m и n обозначается через (m, n).

Произведение
$$\hat{\mathbf{Z}} = \prod_p \hat{\mathbf{Z}}_p$$
колец целых p-адических чисел по всем простым числам p называется кольцом полиадических чисел. Кольцо полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$ может также рассматриваться как обратный предел спектра гомоморфизмов колец
$$Z_n \xrightarrow{\pi_m^n} Z_m$$
по всем парам натуральных чисел m и n, таким что число m является делителем числа n,
$$\pi_m^n(a + n\mathbf{Z}) = a + m\mathbf{Z}, \quad a \in \mathbf{Z}.$$
Для любого полиадического числа γ и любого натурального числа n существуют целое число m и полиадическое число β, такие что $\gamma = m + n\beta$.

Множество элементов $a_1, \ldots, a_n$ группы A называется линейно независимым (над $\mathbf{Z}$), если равенство нулю линейной комбинации с целыми коэффициентами $m_1a_1 + \ldots + m_na_n = 0$ влечёт равенство нулю коэффициентов $m_1 = \ldots = m_n = 0$. Бесконечное множество элементов называется линейно независимым, если любое его конечное подмножество линейно независимо. Число элементов в максимальном линейно независимом множестве называется рангом (без кручения) группы A и обозначается $r(A)$. Для любого простого числа p фактор-группа A/pA является векторным пространством над полем Z_p. Размерность этого векторного пространства называется p-рангом группы A и обозначается $r_p(A)$. Максимальное p-независимое множество элементов называется p-базисом группы A (см. определение в [3, 11]), p-базис состоит из $r_p(A)$ элементов.

Через $t(A)$ обозначается периодическая часть группы A, через $t_p(A)$ — p-примарная компонента группы $t(A)$, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ — подгруппа, порождённая данными элементами, $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_*$ — сервантная оболочка элементов (см. определение в разделе 3), $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_R$ — подмодуль R-модуля, порождённый этими элементами.

Пусть $m_p \in \{\infty, 0, 1, 2, \ldots\}$ для каждого простого числа p. Тогда последовательность (m_p) по всем простым числам p называется характеристикой. Две характеристики (m_p) и (k_p) эквивалентны, если множество $S = \{p \mid k_p \neq m_p\}$ конечно, а также $k_p < \infty$ и $m_p < \infty$ для всех $p \in S$. Классы эквивалентности характеристик называются типами (Бэра). Тип, содержащий характеристику χ, обозначается через $[\chi]$.

Если характеристика χ принадлежит нулевому типу, т. е. если χ эквивалентна характеристике $(0, 0, \ldots)$, то все её компоненты равны нулю, за исключением, быть может, конечного набора простых чисел $p_1, \ldots, p_n$, для которых соответствующие компоненты $m_1, \ldots, m_n$ являются неотрицательными целыми числами. Мы получаем соответствие

$$\chi \leftrightarrow p_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{m_n},$$

которое является взаимно-однозначным соответствием между характеристиками нулевого типа и неотрицательным целыми числами.

Пусть $\chi = (m_p)$ и $\varkappa = (k_p)$ — две характеристики. Тогда

$$\chi \wedge \varkappa = (\min\{m_p, k_p\}), \quad \chi \vee \varkappa = (\max\{m_p, k_p\}), \quad \chi + \varkappa = (m_p + k_p),$$
$$\chi \leqslant \varkappa \iff m_p \leqslant k_p \ \text{ для всех простых чисел } p.$$

При этом мы полагаем, что

$$\infty + k = \infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad k < \infty \ \text{ для любого целого } k.$$

Пусть

$$\alpha = (\alpha_p) \in \prod_p \hat{\mathbf{Z}}_p \ -$$

некоторое полиадическое число. Обозначим через m_p максимальную степень простого числа p, такую что p^{m_p} делит целое p-адическое число α_p в кольце $\hat{\mathbf{Z}}_p$,

$$m_p = \infty \iff \alpha_p = 0.$$

Характеристика $\operatorname{char}(\alpha) = (m_p)$ называется характеристикой полиадического числа α. Полиадическое число α делит полиадическое число β в кольце $\hat{\mathbf{Z}}$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{char}(\alpha) \leqslant \operatorname{char}(\beta)$. Каждый конечно порождённый идеал $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$ кольца $\hat{\mathbf{Z}}$ является главным, т. е. порождается одним элементом $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} = \langle \alpha \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$, где α — наибольший общий делитель полиадических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Этот идеал имеет вид

$$I_\chi = \{\gamma \in \hat{\mathbf{Z}} \mid \operatorname{char}(\gamma) \geqslant \chi\},$$

где $\chi = \operatorname{char}(\alpha)$. Фактор-кольцо $Z_\chi = \hat{\mathbf{Z}}/I_\chi$ имеет вид

$$Z_\chi = \prod_p K_p,$$

где $K_p = Z_{p^{m_p}}$, если $m_p < \infty$, или $K_p = \hat{\mathbf{Z}}_p$, если $m_p = \infty$, $\chi = (m_p)$. Кольцо Z_χ также является циклическим $\hat{\mathbf{Z}}$-модулем.

Пусть R — некоторое кольцо. R-модуль M называется конечно представимым, если существует точная последовательность гомоморфизмов

$$R^n \to R^k \to M \to 0$$

для некоторых натуральных чисел n и k.

Следующие две теоремы можно найти либо в [8], либо на русском языке в [4].

Теорема A. *$\hat{\mathbf{Z}}$-модуль M является конечно представимым тогда и только тогда, когда $M \cong Z_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus Z_{\chi_n}$ для некоторых характеристик $\chi_1, \ldots, \chi_n$.*

Вообще говоря, последовательность характеристик $\chi_1, \ldots, \chi_n$ в теореме A не является однозначно определённой для модуля M. Однако для любого модуля M существует последовательность $\chi_1, \ldots, \chi_n$, дополнительно удовлетворяющая условию $\chi_1 \geqslant \ldots \geqslant \chi_n$. Убывающая последовательность $\chi_1 \geqslant \ldots \geqslant \chi_n$ уже определена однозначно модулем M, она называется обобщённой характеристикой конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля M.

Теорема B. *Пусть N — конечно порождённый подмодуль конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля M. Тогда оба модуля N и M/N являются конечно представимыми.*

1. p-адическое пополнение

Фиксируем простое число p и для произвольной абелевой группы A рассмотрим бесконечную последовательность гомоморфизмов

$$\ldots \xrightarrow{i_{n+1}} A/p^nA \xrightarrow{i_n} A/p^{n-1}A \xrightarrow{i_{n-1}} \ldots \xrightarrow{i_3} A/p^2A \xrightarrow{i_2} A/pA \xrightarrow{i_1} 0, \qquad (1)$$

где

$$i_n(a + p^nA) = a + p^{n-1}A \in A/p^{n-1}A.$$

Такая последовательность гомоморфизмов называется обратным спектром. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots)$ — некоторый элемент группы $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A/p^nA$. Это означает, что $a_n \in A/p^nA$ для $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность a называется цепью, если $i_n(a_n) = a_{n-1}$ для всех $n = 2, 3, \ldots$. Все цепи, очевидно, образуют подгруппу группы $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A/p^nA$. Эта подгруппа цепей называется обратным пределом спектра (1).

Определение. Обратный предел спектра (1) называется p-адическим пополнением группы A и обозначается $\hat{A}_p$.

По этому определению имеет место включение

$$\hat{A}_p \subset \prod_{n=1}^{\infty} A/p^nA.$$

Для каждого элемента $a \in A$ последовательность $\mu_p(a) = (a + pA, a + p^2A, \ldots)$ является цепью. Таким образом, мы получаем гомоморфизм $\mu_p\colon A \to \hat{A}_p$. Так как нуль группы $\hat{A}_p$ представляет собой последовательность нулей, то ядро этого гомоморфизма имеет вид

$$\operatorname{Ker}(\mu_p) = \bigcap_n p^n A.$$

Гомоморфизм $\mu_p\colon A \to \hat{A}_p$ также будет называться p-адическим пополнением группы A.

Любое целое p-адическое число γ является цепью спектра

$$\ldots \to \mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \to 0, \tag{2}$$

т. е.

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots), \quad \gamma_n \in Z_{p^n} = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}.$$

Поскольку группа A/p^nA является модулем над кольцом Z_{p^n} для каждого $0 < n \in \mathbf{Z}$, то мы можем определить произведение $\gamma a = (\gamma_1 a_1, \gamma_2 a_2, \ldots)$ для любой цепи $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \hat{A}_p$. Произведение γa также является цепью, т. е. $\gamma a \in \hat{A}_p$. Легко проверить, что так определённое умножение превращает группу $\hat{A}_p$ в модуль над кольцом $\hat{\mathbf{Z}}_p$.

Любой гомоморфизм групп $f\colon A \to B$ индуцирует Z_{p^n}-модульные гомоморфизмы $f_n\colon A/p^nA \to B/p^nB$ для всех натуральных чисел n, где $f_n(a + p^nA) = f(a) + p^nB$. Более того, для всех натуральных чисел n следующая диаграмма гомоморфизмов является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} A/p^nA & \xrightarrow{i_n} & A/p^{n-1}A \\ {\scriptstyle f_n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\ B/p^nB & \xrightarrow[j_n]{} & B/p^{n-1}B \end{array},$$

где $j_n(b + p^nB) = b + p^{n-1}B$. Если последовательность $a = (a_1, a_2, \ldots)$ является цепью спектра (1), т. е. элементом $\hat{\mathbf{Z}}_p$-модуля $\hat{A}_p$, то последовательность $\hat{f}(a) = (f_1(a_1), f_2(a_2), \ldots)$ также является цепью спектра

$$\ldots \xrightarrow{j_{n+1}} B/p^nB \xrightarrow{j_n} B/p^{n-1}B \xrightarrow{j_{n-1}} \ldots \xrightarrow{j_3} B/p^2B \xrightarrow{j_2} B/pB \xrightarrow{j_1} 0,$$

т. е. элементом $\hat{\mathbf{Z}}_p$-модуля $\hat{B}_p$. Таким образом, мы получаем гомоморфизм групп $\hat{f}\colon \hat{A}_p \to \hat{B}_p$, который также является $\hat{\mathbf{Z}}_p$-модульным гомоморфизмом.

Теорема 1.1. *Для любого гомоморфизма групп $f\colon A \to B$ следующая диаграмма гомоморфизмов является коммутативной:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \mu_p}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu_p} \\ \hat{A}_p & \xrightarrow[\hat{f}]{} & \hat{B}_p \end{array}.$$

Вертикальные стрелки являются p-адическими пополнениями групп A и B соответственно.

Доказательство. Для всякого элемента $a \in A$ мы имеем равенство

$$\hat{f}\big(\mu_p(a)\big) = \hat{f}(a + pA, a + p^2A, \ldots) = (f(a) + pB, f(a) + p^2B, \ldots) = \nu_p\big(f(a)\big). \ \square$$

Следующая теорема даёт полное описание $\hat{\mathbf{Z}}_p$-модуля $\hat{A}_p$ в случае конечного p-ранга. Для краткости будем обозначать через $a^0 = \mu_p(a)$ образ элемента a при p-адическом пополнении μ_p.

Теорема 1.2. *Если элементы $a_1, \ldots, a_m$ составляют конечный p-базис группы A, то $\hat{\mathbf{Z}}_p$-модуль $\hat{A}_p$ раскладывается в прямую сумму циклических $\hat{\mathbf{Z}}_p$-модулей:*

$$\hat{A}_p = \langle a_1^0 \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}_p} \oplus \ldots \oplus \langle a_m^0 \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}_p}.$$

Кроме того, порядки элементов $a_1^0, \ldots, a_m^0 \in \hat{A}_p$ совпадают с порядками элементов $a_1, \ldots, a_m \in A$ соответственно.

Доказательство. Пусть $b \in \hat{A}_p$. Это означает, что b является цепью спектра (1), т. е. $b = (b_1, b_2, \ldots)$, $b_n \in A/p^nA$, и $i_{n+1}(b_{n+1}) = b_n$, $n = 1, 2, \ldots$. По [3, теорема 1.8] мы имеем прямое разложение

$$A/p^nA = \langle a_1 + p^nA \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_m + p^nA \rangle.$$

Следовательно, имеет место равенство с целыми коэффициентами

$$b_n = k_1^{(n)}(a_1 + p^nA) + \ldots + k_m^{(n)}(a_m + p^nA) = \big(k_1^{(n)}a_1 + \ldots + k_m^{(n)}a_m\big) + p^nA,$$

где $0 \leqslant k_i^{(n)} < \min\{p^n, \operatorname{ord}(a_i)\}$ и целые числа $k_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, m$, определены однозначно. Аналогично

$$b_{n-1} = \big(k_1^{(n-1)}a_1 + \ldots + k_m^{(n-1)}a_m\big) + p^{n-1}A.$$

Так как $i_n(b_n) = b_{n-1}$ в спектре (1), то мы получаем, что

$$\big(k_1^{(n)} - k_1^{(n-1)}\big)a_1 + \ldots + \big(k_m^{(n)} - k_m^{(n-1)}\big)a_m \in p^{n-1}A.$$

Так как сумма прямая,

$$k_i^{(n)} - k_i^{(n-1)} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^{n-1})$$

для всех натуральных n и для всех $i = 1, \ldots, m$. Следовательно, последовательность $\big(k_i^{(1)}, k_i^{(2)}, \ldots\big)$ является цепью спектра (2), т. е. $\gamma_i = \big(k_i^{(1)}, k_i^{(2)}, \ldots\big)$ является целым p-адическим числом, $i = 1, \ldots, m$. При этом если порядок, например, элемента a_1 конечен, т. е. $\operatorname{ord}(a_1) = p^s$, $0 < s \in \mathbf{Z}$, то порядок элемента $a_1^0 = (a_1 + pA, a_1 + p^2A, \ldots) \in \hat{A}_p$, очевидно, также равен p^s и последовательность коэффициентов $k_1^{(1)}, k_1^{(2)}, \ldots$ стабилизируется, т. е. $k_1^{(s)} = k_1^{(s+1)} = \ldots$, и тогда $\gamma_1 = k_1^{(s)} \in \mathbf{Z} \subset \hat{\mathbf{Z}}_p$.

Мы получаем представление $b = \gamma_1 a_1^0 + \ldots + \gamma_m a_m^0$. Так как коэффициенты γ_i определены либо однозначно для элементов a_i бесконечного порядка, либо однозначно по модулю порядка этого элемента, то сумма циклических модулей является прямой. □

Принимая во внимание теорему 1.10 из [3], мы получаем следствие.

Следствие 1.3. *Пусть $\mu_p\colon A \to \hat{A}_p$ — p-адическое пополнение группы конечного p-ранга A. Если группа A не содержит подгрупп типа p^∞, то ограничение гомоморфизма μ_p на p-примарную часть $t_p(A)$ группы A является изоморфизмом между p-примарными частями групп A и $\hat{A}_p$. В частности,*

$$\mu_p\big(t_p(A)\big) = t_p(\hat{A}_p) = t(\hat{A}_p).$$

Следствие 1.4. *Если A — конечная p-группа, то $\hat{A}_p = A$.*

Следствие 1.5. *Если A — группа без кручения конечного ранга, то*

$$\hat{A}_p \cong \bigoplus_{r_p(A)} \hat{\mathbf{Z}}_p.$$

Теперь мы обсудим топологические аспекты рассматриваемых понятий. Пусть A — некоторая группа и p — простое число. Подгруппы вида p^nA, $n = 0, 1, 2, \ldots$, образуют базу окрестностей нуля некоторой топологии, которая называется p-адической топологией на группе A. Это означает, что данные множества являются открытыми. Множества вида

$$a + p^nA, \quad a \in A, \quad 0 \leqslant n \in \mathbf{Z}, \tag{3}$$

также являются открытыми. В целом подмножество множества A является открытым в p-адической топологии группы A тогда и только тогда, когда оно является объединением множеств вида (3). Таким образом, группа A становится топологическим пространством.

Бесконечная последовательность $a = (a_1, a_2, \ldots)$ элементов группы A может рассматриваться как элемент группы $\prod_\omega A$. Последовательность a называется последовательностью Коши, если для любого натурального n существует натуральное число N, такое что для любых $k, l > N$ имеет место $a_k - a_l \in p^nA$. Ясно, что множество всех последовательностей Коши $\mathcal{C}$ является подгруппой группы $\prod_\omega A$. Последовательность Коши $a = (a_1, a_2, \ldots)$ индуцирует последовательность в группе A/p^nA для каждого $n = 1, 2, \ldots$

$$a_1 + p^nA,\ a_2 + p^nA, \ldots,$$

которая обязательно стабилизируется на некотором элементе $b_n \in A/p^nA$. Нетрудно заметить, что последовательность $b = (b_1, b_2, \ldots)$ является цепью спектра (1). Таким образом, мы получаем гомоморфизм групп $f\colon \mathcal{C} \to \hat{A}_p$, для которого $f(a) = b$. Ядро этого гомоморфизма состоит из всех последовательностей, сходящихся к нулю. По теореме об изоморфизме $\mathcal{C}/\operatorname{Ker}(f) \cong \hat{A}_p$. Мы можем видеть, что построение p-адического пополнения $\hat{A}_p$ из группы A похоже на построение действительных чисел из рациональных методом Коши. Грубо говоря, мы добавляем к группе A пределы всех последовательностей Коши. Полученное топологическое пространство $\hat{A}_p$ является полным в его p-адической топологии, т. е. любая последовательность Коши в группе $\hat{A}_p$ имеет предел в группе $\hat{A}_p$.

2. Z-адическое пополнение факторно делимых групп

Z-адическая топология на группе является более тонкой, чем p-адическая топология, в том смысле, что множество открытых подмножеств больше. Z-адическая топология на группе A определяется базой окрестностей нуля $\{nA \mid n = 1, 2, \ldots\}$. Это означает, что подмножество множества A является открытым в Z-адической топологии на группе A тогда и только тогда, когда оно является объединением множеств вида

$$a + nA, \quad a \in A, \quad 0 < n \in \mathbf{Z}.$$

Мы вводим Z-адическое пополнение $\hat{A}$ группы A как обратный предел обратного спектра гомоморфизмов

$$\pi_n^m\colon A/mA \to A/nA \tag{4}$$

для всех пар (m, n) натуральных чисел, таких что число n является делителем числа m. Здесь

$$\pi_n^m(a + mA) = a + nA.$$

Элемент $a = (a_1, a_2, \ldots)$ группы $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A/nA$ называется сетью, если $\pi_n^m(a_m) = a_n$ для любой пары (m, n) натуральных чисел, где n делит m. Легко убедиться, что все сети составляют подгруппу группы $\prod\limits_{n=1}^{\infty} A/nA$. Эта подгруппа называется обратным пределом спектра (4).

Определение. Обратный предел спектра (4) называется Z-адическим пополнением группы A и обозначается $\hat{A}$.

Для любого элемента $a \in A$ последовательность $\mu(a) = (a + A, a + 2A, a + 3A, \ldots)$ является сетью. Таким образом, мы получаем гомоморфизм $\mu\colon A \to \hat{A}$. Так как нуль группы $\hat{A}$ является последовательностью нулей, то ядро этого гомоморфизма имеет вид $\operatorname{Ker}(\mu) = \bigcap\limits_{n>0} nA = A^1$, т. е. оно является первой ульмовской подгруппой группы A. Гомоморфизм $\mu\colon A \to \hat{A}$ также будем называть Z-адическим пополнением группы A.

Предложение 2.1. *Пусть $a \in A$ и $m \in \mathbf{Z}$. Если элемент $\mu(a)$ делится на m в группе $\hat{A}$, то элемент a делится на m в группе A.*

Доказательство. Так как элемент $\mu(a) = (a+A, a+2A, a+3A, \dots)$ делится на m в группе $\hat{A}$, то каждая его координата также делится на m. Это, в частности, означает, что элемент $a+mA$ делится на m в группе A/mA. Это возможно, только если $a \in mA$. $\square$

Любое полиадическое число $\gamma \in \hat{\mathbf{Z}}$ также является сетью спектра

$$\pi_n^m \colon \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \tag{5}$$

по всем парам натуральных чисел (m, n), где число n является делителем числа m, т. е. $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$, $\gamma_n \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, и $\pi_n^m(\gamma_m) = \gamma_n$. Поскольку группа A/nA является модулем над кольцом $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ для любого $0 < n \in \mathbf{Z}$, мы можем определить произведение $\gamma a = (\gamma_1 a_1, \gamma_2 a_2, \dots)$ для любой сети $a = (a_1, a_2, \dots) \in \hat{A}$ спектра (4). Произведение γa также является сетью спектра (4), т. е. $\gamma a \in \hat{A}$. Нетрудно проверить, что так определённое умножение превращает группу $\hat{A}$ в модуль над кольцом $\hat{\mathbf{Z}}$.

Гомоморфизм групп $f \colon A \to B$ индуцирует Z_n-модульный гомоморфизм $f_n \colon A/nA \to B/nB$ для любого натурального n, где $f_n(a + nA) = f(a) + nB$. Более того, следующая диаграмма гомоморфизмов является коммутативной для любой пары натуральных чисел (m, n), где n делит m:

$$\begin{array}{ccc} A/mA & \xrightarrow{\pi_n^m} & A/nA \\ {\scriptstyle f_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_n} \\ B/mB & \xrightarrow[\lambda_n^m]{} & B/nB \end{array},$$

где $\lambda_n^m(b+mB) = b+nB$. Если $a = (a_1, a_2, \dots)$ является сетью спектра (4), т. е. элементом $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля $\hat{A}$, то последовательность $\hat{f}(a) = (f_1(a_1), f_2(a_2), \dots)$ также является сетью спектра

$$\lambda_n^m \colon B/mB \to B/nB, \tag{6}$$

т. е. элементом $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля $\hat{B}$. Таким образом, мы получаем гомоморфизм групп $\hat{f} \colon \hat{A} \to \hat{B}$, являющийся также гомоморфизмом $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей. Следующее предложение достаточно очевидно.

Предложение 2.2. *Пусть $f \colon A \to B$ — гомоморфизм. Тогда гомоморфизм $\hat{f} \colon \hat{A} \to \hat{B}$ является инъективным, если все гомоморфизмы $f_n \colon A/nA \to B/nB$ инъективны, и является изоморфизмом, если все гомоморфизмы $f_n \colon A/nA \to B/nB$ являются изоморфизмами.*

Так же как и в случае p-адической топологии, для Z-адических пополнений имеет место коммутативная диаграмма.

Теорема 2.3. *Пусть $f \colon A \to B$ — гомоморфизм групп. Тогда следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \arrow[d, "\mu_B"] \\ \hat{A} \arrow[r, "\hat{f}"'] & \hat{B} \end{tikzcd}.$$

Вертикальные стрелки являются Z-адическими пополнениями групп A и B соответственно.

Доказательство. Для всякого элемента $a \in A$ выполняется

$$\hat{f}\big(\mu_A(a)\big) = \hat{f}(a + A, a + 2A, \ldots) = (f(a) + B, f(a) + 2B, \ldots) = \mu_B\big(f(a)\big). \quad \square$$

Замечание. Группа A называется полной в своей Z-адической топологии, если гомоморфизм $\mu\colon A \to \hat{A}$ является изоморфизмом. В этом случае мы отождествляем по изоморфизму μ и полагаем $A = \hat{A}$. Для любой группы A её пополнение $\hat{A}$ является полным в своей Z-адической топологии, т. е. $\hat{A} = \hat{\hat{A}}$.

Поскольку p-адическое пополнение $\hat{A}_p$ является модулем над кольцом целых p-адических чисел $\hat{\mathbf{Z}}_p$ для любой группы A и любого простого числа p, то произведение $\prod\limits_p \hat{A}_p$ по всем простым числам p является модулем над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}} = \prod\limits_p \hat{\mathbf{Z}}_p$. А именно, если $\gamma = (\gamma_p) \in \prod\limits_p \hat{\mathbf{Z}}_p$ и $a = (a_p) \in \prod\limits_p \hat{A}_p$, то $\gamma a = (\gamma_p a_p) \in \prod\limits_p \hat{A}_p$.

В следующей теореме гомоморфизм $\pi_p\colon \prod\limits_p \hat{A}_p \to \hat{A}_p$ является проекцией на p-компоненту; $\mu\colon A \to \hat{A}$ и $\mu_p\colon A \to \hat{A}_p$ — Z-адическое и p-адическое пополнения соответственно.

Теорема 2.4. *Для любой группы A существует изоморфизм $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей $f\colon \hat{A} \to \prod\limits_p \hat{A}_p$, при котором $\mu_p = \pi_p f \mu$ для всех простых чисел p.*

Доказательство. Рассмотрим какую-нибудь сеть $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \hat{A}$ спектра (4). Так как спектр (1) является подспектром спектра (4) для любого простого числа p, то сеть a определяет цепь $b_p = (a_p, a_{p^2}, \ldots) \in \hat{A}_p$ спектра (1) для любого простого числа p. Мы определяем значение функции $f\colon \hat{A} \to \prod\limits_p \hat{A}_p$ на элементе a как последовательность элементов b_p по всем простым числам p, т. е. $f(a) = (b_p) \in \prod\limits_p \hat{A}_p$. Поскольку полиадическое число $\gamma \in \hat{\mathbf{Z}}$ само является сетью спектра (5), то оно аналогично определяет цепи $\gamma_p \in \hat{\mathbf{Z}}_p$ спектров (2) для всех простых чисел p. По определению умножения на скаляры мы имеем

$$f(\gamma a) = (\gamma_p b_p) = \gamma(b_p) = \gamma f(a).$$

Таким образом, $f\colon \hat{A} \to \prod\limits_p \hat{A}_p$ является гомоморфизмом $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей.

Теперь предположим, что для каждого простого числа p дана некоторая цепь $b_p \in \hat{A}_p$ спектра (1). Множество всех элементов всех этих цепей может быть расширено до сети спектра (4) по [3, теорема 2.11]. Это означает, что гомоморфизм $f\colon \hat{A} \to \prod\limits_p \hat{A}_p$ является сюръективным. По [3, теорема 2.11] такое расширение однозначно. Это означает, что гомоморфизм $f\colon \hat{A} \to \prod\limits_p \hat{A}_p$ является инъективным. Наконец, равенства $\mu_p = \pi_p f \mu$ очевидны из нашей конструкции. $\square$

Часто бывает полезно отождествлять по изоморфизму f. Тогда мы полагаем, что $\hat{A} = \prod\limits_p \hat{A}_p$ и $\mu_p = \pi_p \mu$ для всех простых чисел p.

Лемма 2.5. *Пусть $\mu_A\colon A \to \hat{A}$ — Z-адическое пополнение группы A и $f\colon B \to A$ — сюръективный гомоморфизм групп, такой что его ядро $\mathrm{Ker}(f)$ является делимой группой. Тогда $\hat{B} = \hat{A}$ и Z-адическое пополнение $\mu_B\colon B \to \hat{B}$ группы B представляется в виде композиции $\mu_B = \mu_A \cdot f$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.3 имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\ f\ } & A \\ {\scriptstyle \mu_B}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ \hat{B} & \xrightarrow[\hat{f}]{} & \hat{A} \end{array}.$$

Так как гомоморфизм f сюръективен, то все гомоморфизмы $f_n\colon B/nB \to A/nA$ сюръективны. Докажем, что все f_n инъективны. Действительно, пусть $f_n(b + nB) = 0$ для некоторого $b \in B$ и $0 < n \in \mathbf{Z}$. Тогда $f(b) = na \in nA$ для некоторого $a \in A$. Из сюръективности f следует, что найдётся элемент $c \in B$, для которого $a = f(c)$. Отсюда следует, что $f(b) - nf(c) = 0$ и $b - nc \in \mathrm{Ker}(f)$. Так как ядро является делимой группой, то найдётся элемент $c_1 \in B$, для которого $b - nc = nc_1$. Следовательно, $b \in nB$ и $b + nB = 0$ в группе B/nB. Это означает, что все гомоморфизмы f_n инъективны и поэтому являются изоморфизмами. Гомоморфизм $\hat{f}\colon \hat{B} \to \hat{A}$ также является изоморфизмом по предложению 2.2. Кроме того, $\hat{f} \cdot \mu_B = \mu_A \cdot f$. Отождествляя по изоморфизму $\hat{f}\colon \hat{B} \to \hat{A}$, $\hat{f} = \mathrm{id}_{\hat{B}}$, получаем окончательный результат. $\square$

Похожая лемма с похожим доказательством имеет место и для p-адических пополнений.

Лемма 2.6. *Пусть $\mu_{pA}\colon A \to \hat{A}_p$ — p-адическое пополнение группы A для некоторого простого числа p и $f\colon B \to A$ — сюръективный гомоморфизм групп, такой что его ядро $\mathrm{Ker}(f)$ является p-делимой группой. Тогда $\hat{B}_p = \hat{A}_p$ и p-адическое пополнение $\mu_{pB}\colon B \to \hat{B}_p$ группы B представляется в виде композиции $\mu_{pB} = \mu_{pA} \cdot f$.*

Теорема 2.7. *Аддитивная группа любого конечно представимого модуля над кольцом полиадических чисел полна в своей Z-адической топологии.*

Доказательство. По теореме A каждый конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль M представляется в виде $M = Z_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus Z_{\chi_n}$ для некоторых характеристик $\chi_1, \ldots, \chi_n$. С другой стороны, $M = \prod\limits_p M^{(p)}$, где каждая p-компонента $M^{(p)}$ является конечной прямой суммой циклических $\hat{\mathbf{Z}}_p$-модулей. Аддитивная группа каждого циклического $\hat{\mathbf{Z}}_p$-модуля, конечного или бесконечного, является полной в своей p-адической топологии. Поэтому группа $M^{(p)}$ также полна в своей p-адической топологии, $\hat{M}_p^{(p)} = M^{(p)}$. Рассмотрим проекцию $\pi_p\colon \prod\limits_p M^{(p)} \to M^{(p)}$. Она является сюръективным гомоморфизмом с p-делимым ядром $\operatorname{Ker}(\pi_p) = \prod\limits_{q \neq p} M^{(q)}$. По лемме 2.6 π_p совпадает с p-адическим пополнением группы M, $\hat{M}_p = M^{(p)}$. И наконец, применяя теорему 2.4, мы получаем $\hat{M} = \prod\limits_p \hat{M}_p = \prod\limits_p M^{(p)} = M$. □

Теорема 2.8. *Пусть A — факторно делимая группа ранга n. Тогда существуют единственная убывающая последовательность характеристик $\chi_1 \geqslant \ldots \geqslant \chi_n$ и множество элементов Z-адического пополнения $c_1, \ldots, c_n \in \hat{A}$, такие что*

1) $\hat{A} = \langle c_1 \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} \oplus \ldots \oplus \langle c_n \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$,
2) $\langle c_1 \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} \cong Z_{\chi_1}, \ldots, \langle c_n \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} \cong Z_{\chi_n}$.

Доказательство. По теореме 2.4 мы имеем изоморфизм $f\colon \hat{A} \to \prod\limits_p \hat{A}_p$. По [3, теорема 2.6] p-базис факторно делимой группы A является конечным для любого простого числа p, поэтому мы можем применить теорему 1.2:

$$\hat{A}_p = \langle a_1^0 \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}_p} \oplus \ldots \oplus \langle a_m^0 \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}_p},$$

где $m = r_p(A) \leqslant n$, $a_1^0, \ldots, a_m^0 \in \hat{A}_p$ являются образами элементов p-базиса $a_1, \ldots, a_m \in A$. Во-первых, мы можем упорядочить циклические прямые слагаемые по убыванию порядков. Во-вторых, мы можем добавить нулевые прямые слагаемые, если $r_p(A) < n$. Таким образом, мы получаем представление

$$\hat{A}_p = \langle b_{1p} \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}_p} \oplus \ldots \oplus \langle b_{np} \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}_p},$$

где $b_{1p}, \ldots, b_{np} \in \hat{A}_p$ являются элементами порядков $p^{k_{1p}}, \ldots, p^{k_{np}}$ соответственно и $k_{1p} \geqslant \ldots \geqslant k_{np}$. Если, например, $k_{1p} = \infty$, то $\langle b_{1p} \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}_p} \cong \hat{\mathbf{Z}}_p$. Если $k_{np} = 0$, то $\langle b_{np} \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}_p} = 0$. Теперь мы можем определить характеристики $\chi_1 = (k_{1p}), \ldots, \chi_n = (k_{np})$. Единственность последовательности характеристик $\chi_1 \geqslant \ldots \geqslant \chi_n$ следует из самой конструкции. Мы также определим элементы произведения групп

$$b_1 = (b_{1p}) \in \prod_p \hat{A}_p, \ldots,\ b_n = (b_{np}) \in \prod_p \hat{A}_p.$$

И наконец, элементы $c_1 = f^{-1}(b_1), \ldots, c_n = f^{-1}(b_n)$ $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля $\hat{A}$ удовлетворяют условию теоремы. $\square$

Определение. Последовательность характеристик $\chi_1 \geqslant \ldots \geqslant \chi_n$, определённая в теореме 2.8, будет называться обобщённой характеристикой факторно делимой группы A.

Следствие 2.9. *Z-адическое пополнение факторно делимой группы является конечно представимым $\hat{\mathbf{Z}}$-модулем, обобщённая характеристика которого совпадает с обобщённой характеристикой группы.*

Следующее утверждение получается из теоремы 2.4 и следствия 1.3.

Следствие 2.10. *Пусть $\mu\colon A \to \hat{A}$ — Z-адическое пополнение факторно делимой группы A. Тогда ограничение гомоморфизма μ на периодическую часть группы A является изоморфизмом между периодическими частями групп A и $\hat{A}$. В частности, $\mu(tA) = t(\hat{A})$.*

Замечание. На первый взгляд топология на группе A, определённая базой окрестностей нуля $\{n!\,A \mid 0 < n \in \mathbf{Z}\}$, кажется более грубой, чем Z-адическая топология. Однако каждое открытое множество $a+nA$ в Z-адической топологии также является открытым и в этой новой топологии как объединение множеств вида $c + n!\,A$. Следовательно, эти две топологии на группе A совпадают. Это означает, что Z-адическое пополнение группы A может быть также определено как обратный предел спектра

$$\ldots \to A/n!\,A \to \ldots \to A/3!\,A \to A/2!\,A \to 0.$$

3. Соответствие между группами и последовательностями элементов

Определение. Подгруппа B группы A называется сервантной, если для любого элемента $b \in B$ и для любого $0 < n \in \mathbf{Z}$ из разрешимости уравнения $nx = b$ в группе A следует его разрешимость также и в группе B.

Эквивалентным образом B является сервантной подгруппой группы A, если $nB = nA \cap B$ для всех целых чисел n. Это означает, что Z-адическая топология на группе A индуцирует на группе B топологию, которая совпадает с Z-адической топологией на группе B.

Отметим некоторые основные свойства сервантности.

1. Прямые слагаемые сервантны.
2. Периодическая часть $t(A)$ и p-примарные части $t_p(A)$ сервантны в группе A.
3. Если C сервантна в B и B сервантна в A, то C сервантна в A.
4. Если подгруппа B сервантна в группе A, то фактор-группа B/C сервантна в группе A/C для любой подгруппы $C \subset B$.

5. Если фактор-группа A/B является группой без кручения, то B сервантна в A.
6. Если подгруппа B сервантна в группе без кручения A, то фактор-группа A/B также является группой без кручения.
7. Если $\mu\colon A \to \hat{A}$ — Z-адическое пополнение группы A, то подгруппа $\mu(A)$ сервантна в группе $\hat{A}$ (см. предложение 2.1).

Понятие сервантности является очень важным в теории абелевых групп, однако в рамках данной статьи для нас более подходящим является следующее понятие.

Определение. Подгруппа B группы A называется сильно сервантной, если для любого элемента $b \in B$ и для любого целого положительного числа n из разрешимости уравнения $nx = b$ в группе A следует, что все решения этого уравнения принадлежат подгруппе B.

Предложение 3.1. *Следующие утверждения для подгруппы B группы A равносильны*:

1) *B сильно сервантна в A*;
2) *B сервантна в A и $t(B) = t(A)$*;
3) *A/B — группа без кручения.*

Доказательство. Все периодические элементы группы A принадлежат B, потому что они являются решениями уравнений вида $nx = 0$. Это доказывает импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2).

Группа $A/B \cong \bigl(A/t(A)\bigr)/\bigl(B/t(A)\bigr)$ является группой без кручения как фактор-группа группы без кручения по сервантной подгруппе. Значит, справедлива импликация 2) $\Longrightarrow$ 3).

Если $na = b \in B$ и элемент a не лежит в B, то элемент $a + B \in A/B$ имеет конечный порядок, поэтому он равен нулю и $a \in B$. Следовательно, справедлива импликация 3) $\Longrightarrow$ 1). $\square$

Из определения очевидно, что пересечение сильно сервантных подгрупп также является сильно сервантной подгруппой. Поэтому для любого подмножества S группы A мы можем определить наименьшую сильно сервантную подгруппу $S \subset \langle S \rangle_* \subset A$, содержащую множество S, как пересечение всех сильно сервантных подгрупп, содержащих S.

Определение. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — элементы некоторой группы A. Наименьшая сильно сервантная подгруппа, содержащая эти элементы, называется их сервантной оболочкой и обозначается $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle_*$.

Теорема 3.2. *Пусть $\mu\colon A \to \hat{A}$ — Z-адическое пополнение факторно делимой группы A с базисом $a_1, \ldots, a_n$. Обозначим $a^0 = \mu(a) \in \hat{A}$ для элемента $a \in A$. Тогда $\operatorname{Im}\mu = \langle a_1^0, \ldots, a_n^0 \rangle_*$.*

Доказательство. Для всякого элемента $c \in A$ найдутся целые числа $m > 0$, $m_1, \ldots, m_n$, такие что

$$mc = m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n.$$

Отсюда получаем, что

$$mc^0 = m_1a_1^0 + \ldots + m_na_n^0 \in \langle a_1^0, \ldots, a_n^0 \rangle.$$

Следовательно, элемент c^0 принадлежит любой сильно сервантной подгруппе, содержащей множество элементов $a_1^0, \ldots, a_n^0$. Таким образом,

$$\operatorname{Im}\mu \subset \langle a_1^0, \ldots, a_n^0 \rangle_*.$$

С другой стороны, покажем, что подгруппа $\operatorname{Im}\mu \subset \hat{A}$ сама является сильно сервантной. По предложению 2.1 она сервантна, и по следствию 2.10 она содержит периодическую часть группы $\hat{A}$. Следовательно,

$$\langle a_1^0, \ldots, a_n^0 \rangle_* \subset \operatorname{Im}\mu,$$

и эти две подгруппы совпадают. □

Следующая теорема была сформулирована в [2, лемма 4]. Как и раньше, $\mu\colon A \to \hat{A}$ и $\mu_p\colon A \to \hat{A}_p$ обозначают соответственно Z-адическое и p-адическое пополнения группы A, $a^0 = \mu(a) \in \hat{A}$ для элемента $a \in A$.

Теорема 3.3 (теорема о вложении). *Пусть A — группа с конечной максимальной линейно независимой над $\mathbf{Z}$ системой элементов $a_1, \ldots, a_n$, не содержащая ненулевых периодических делимых подгрупп. Группа A является факторно делимой и элементы $a_1, \ldots, a_n$ составляют её базис тогда и только тогда, когда элементы $a_1^0, \ldots, a_n^0$ порождают модуль $\hat{A}$ над кольцом $\hat{\mathbf{Z}}$.*

Доказательство. Сначала предположим, что $\hat{A} = \langle a_1^0, \ldots, a_n^0 \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$. Нам достаточно доказать, что группа A/F, где $F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, является делимой. Действительно, пусть $c \in A$ и $0 < m \in \mathbf{Z}$. Тогда для подходящих коэффициентов $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \hat{\mathbf{Z}}$ мы имеем равенство $c^0 = \gamma_1 a_1^0 + \ldots + \gamma_n a_n^0$. Мы можем выбрать целые числа $m_1, \ldots m_n$ таким образом, что $\gamma_1 = m_1 + m\beta_1$, …, $\gamma_n = m_n + m\beta_n$ для подходящих $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \hat{\mathbf{Z}}$. Тогда мы получаем равенство

$$c^0 - (m_1a_1^0 + \ldots + m_na_n^0) = m(\beta_1a_1^0 + \ldots + \beta_na_n^0),$$

которое показывает, что элемент $\mu\big(c - (m_1a_1 + \ldots + m_na_n)\big)$ делится на m в группе $\hat{A}$. Из предложения 2.1 следует, что $c - (m_1a_1 + \ldots + m_na_n) = mb$ для некоторого $b \in A$. Последнее равенство показывает, что элемент $c + F$ делится на m в группе A/F. Следовательно, группа A/F является делимой, группа A является факторно делимой, система элементов $a_1, \ldots, a_n$ является базисом факторно делимой группы A.

Обратно, пусть A является факторно делимой группой с базисом $a_1, \ldots, a_n$. По теореме 2.4 существует изоморфизм $f\colon \hat{A} \to \prod\limits_p \hat{A}_p$. Если для всякого простого числа p и для всякого элемента $c_p \in \hat{A}_p$ можно найти такие целые p-адические числа $\gamma_1^{(p)}, \ldots, \gamma_n^{(p)} \in \hat{\mathbf{Z}}_p$, что

$$c_p = \gamma_1^{(p)}\mu_p(a_1) + \ldots + \gamma_n^{(p)}\mu_p(a_n),$$

то
$$c = \gamma_1 a_1^0 + \ldots + \gamma_n a_n^0,$$
где $c = f^{-1}\big((c_p)\big) \in \hat{A}$ и $\gamma_1 = \big(\gamma_1^{(p)}\big), \ldots, \gamma_n = \big(\gamma_n^{(p)}\big)$ являются полиадическими числами. Поэтому достаточно доказать, что
$$\hat{A}_p = \langle \mu_p(a_1), \ldots, \mu_p(a_n)\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}_p}.$$
Пусть $c \in \hat{A}_p$. Элемент c является цепью $c = (c_1, c_2 \ldots)$ обратного спектра (1)
$$\ldots \xrightarrow{i_{k+1}} A/p^kA \xrightarrow{i_k} A/p^{k-1}A \xrightarrow{i_{k-1}} \ldots \xrightarrow{i_3} A/p^2A \xrightarrow{i_2} A/pA \xrightarrow{i_1} 0,$$
где $c_k \in A/p^kA$, $k = 1, 2, \ldots$. По [3, лемма 2.5] элементы $a_1 + p^kA, \ldots, a_n + p^kA$ порождают Z_{p^k}-модуль A/p^kA для всякого $k = 1, 2, \ldots$. Поэтому существуют элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ кольца Z_{p^k}, такие что c_k является линейной комбинацией порождающих, т. е.
$$c_k = \gamma_1(a_1 + p^kA) + \ldots + \gamma_n(a_n + p^kA). \tag{7}$$
Для любого $0 < k \in \mathbf{Z}$ мы определим множество $\Sigma_k \subset Z_{p^k}^n$, состоящее из всех векторов $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in Z_{p^k}^n$, для которых имеет место равенство (7). Рассмотрим обратный спектр
$$\ldots \xrightarrow{j_{k+1}} Z_{p^k}^n \xrightarrow{j_k} Z_{p^{k-1}}^n \xrightarrow{j_{k-1}} \ldots \xrightarrow{j_3} Z_{p^2}^n \xrightarrow{j_2} Z_p^n \xrightarrow{j_1} 0, \tag{8}$$
где
$$j_k(m_1 + p^k\mathbf{Z}, \ldots, m_n + p^k\mathbf{Z}) = (m_1 + p^{k-1}\mathbf{Z}, \ldots, m_n + p^{k-1}\mathbf{Z})$$
для целых чисел $m_1, \ldots, m_n$. Ясно, что обратный предел спектра (8) представляет собой прямую сумму n копий кольца целых p-адических чисел $\hat{\mathbf{Z}}_p$, т. е. $\hat{\mathbf{Z}}_p^n$. Пусть $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \Sigma_k$, $\gamma_1 = m_1 + p^k\mathbf{Z}, \ldots, \gamma_n = m_n + p^k\mathbf{Z}$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{Z}$. Тогда мы имеем
$$c_k = (m_1+p^k\mathbf{Z})(a_1+p^kA)+\ldots+(m_n+p^k\mathbf{Z})(a_n+p^kA) = (m_1a_1+\ldots+m_na_n)+p^kA.$$
Отсюда следует, что
$$\begin{aligned} c_{k-1} = i_k(c_k) = (m_1a_1 + \ldots + m_na_n) + p^{k-1}A = \\ = (m_1 + p^{k-1}\mathbf{Z})(a_1 + p^{k-1}A) + \ldots + (m_n + p^{k-1}\mathbf{Z})(a_n + p^{k-1}A). \end{aligned}$$
Мы получаем, что $j_k\big((\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\big) \in \Sigma_{k-1}$. Таким образом, ограничения гомоморфизмов j_k на подмножества Σ_k составляют последовательность функций
$$\ldots \xrightarrow{j_{k+1}} \Sigma_k \xrightarrow{j_k} \Sigma_{k-1} \xrightarrow{j_{k-1}} \ldots \xrightarrow{j_3} \Sigma_2 \xrightarrow{j_2} \Sigma_1 \xrightarrow{j_1} 0. \tag{9}$$
Проблема, однако, состоит в том, что эти функции не обязательно сюръективны. Обозначим через Σ_k^m образ множества Σ_m во множестве Σ_k, полученный в результате действия функций (9), для любых $m > k > 0$. Это даёт нам бесконечную последовательность включений
$$\Sigma_k \supset \Sigma_k^{k+1} \supset \Sigma_k^{k+2} \supset \ldots .$$

Все множества данной последовательности являются конечными и непустыми. Следовательно, последовательность стабилизируется на непустом множестве Ω_k. Ограничения гомоморфизмов j_k на подмножества Ω_k составляют последовательность функций

$$\ldots \xrightarrow{j_{k+1}} \Omega_k \xrightarrow{j_k} \Omega_{k-1} \xrightarrow{j_{k-1}} \ldots \xrightarrow{j_3} \Omega_2 \xrightarrow{j_2} \Omega_1 \xrightarrow{j_1} 0.$$

Теперь легко проверить, что все функции этой последовательности являются сюръективными. Это означает, что мы можем выбрать цепь элементов

$$\ldots \xmapsto{j_{k+1}} \omega_k \xmapsto{j_k} \omega_{k-1} \xmapsto{j_{k-1}} \ldots \xmapsto{j_3} \omega_2 \xmapsto{j_2} \omega_1 \xmapsto{j_1} 0,$$

где $\omega_k \in \Omega_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Эта цепь является элементом обратного предела спектра (8). Другими словами, это вектор $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \hat{\mathbf{Z}}_p^n$ целых p-адических чисел, для которого имеет место равенство $c = \gamma_1\mu_p(a_1) + \ldots + \gamma_n\mu_p(a_n)$. Таким образом, элементы $\mu_p(a_1), \ldots, \mu_p(a_n)$ порождают $\hat{\mathbf{Z}}_p$-модуль $\hat{A}_p$. $\square$

Лемма 3.4. *Пусть B — сильно сервантная подгруппа некоторой полной в своей Z-адической топологии группы A, при этом подгруппа B порождает группу A как модуль над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$. Тогда тождественное вложение $i\colon B \to A$ совпадает с Z-адическим пополнением $\mu_B\colon B \to \hat{B}$. В частности, $\hat{B} = A$.*

Доказательство. Мы покажем, что гомоморфизм $\hat{\imath}\colon \hat{B} \to \hat{A}$ является изоморфизмом в коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\mu_B"'] & A \arrow[d, "\mu_A"] \\ \hat{B} \arrow[r, "\hat{\imath}"'] & \hat{A} \end{tikzcd}.$$

Гомоморфизмы

$$i_n\colon B/nB \to A/nA, \quad i_n(b + nB) = b + nA \in A/nA,$$

инъективны для всех $0 < n \in \mathbf{Z}$, потому что из равенства $i_n(b + nB) = 0$ выводим, что $b \in nA$, откуда ввиду строгой сервантности следует, что $b \in nB$, и поэтому $b + nB = 0$ в группе B/nB.

Пусть $c \in A$ и $0 < n \in \mathbf{Z}$. Найдутся такие полиадические числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_s \in \hat{\mathbf{Z}}$, что $c = \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_s b_s$ для некоторых элементов $b_1, \ldots, b_s \in B$. Коэффициенты представляются в виде $\gamma_1 = m_1 + n\beta_1, \ldots, \gamma_s = m_s + n\beta_s$ для некоторых целых чисел $m_1, \ldots, m_s \in \mathbf{Z}$ и полиадических чисел $\beta_1, \ldots, \beta_s \in \hat{\mathbf{Z}}$. Мы получаем равенство

$$c = (m_1 b_1 + \ldots + m_s b_s) + n(\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_s b_s),$$

где $\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_s b_s \in A$. Следовательно,

$$i_n\big((m_1 b_1 + \ldots + m_s b_s) + nB\big) = c + nA \in A/nA.$$

Мы получили, что все гомоморфизмы $i_n\colon B/nB \to A/nA$ также являются сюръективными. Применяя предложение 2.2, заключаем, что гомоморфизм $\hat{\imath}\colon \hat{B} \to \hat{A}$ является изоморфизмом. Отождествляя по этому изоморфизму, мы получаем, что $\hat{B} = \hat{A}$ и $\hat{\imath} = \mathrm{id}_{\hat{B}}$. Так как группа A является полной, то $\hat{A} = A$ и $\mu_A = \mathrm{id}_A$. Наконец, равенство $\hat{\imath} \cdot \mu_B = \mu_A \cdot i$ влечёт $\mathrm{id}_{\hat{B}} \cdot \mu_B = \mathrm{id}_A \cdot i$, т. е. $\mu_B = i$ и $\hat{B} = A$. □

Теорема 3.5. *Пусть элементы $b_1, \ldots, b_n$ порождают конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль M над кольцом полиадических чисел. Тогда существует факторно делимая группа A с базисом $a_1, \ldots, a_n$, такая что $\hat{A} = M$ и Z-адическое пополнение $\mu_A\colon A \to \hat{A}$ отображает элементы $a_1, \ldots, a_n$ в элементы $b_1, \ldots, b_n$ соответственно, т. е. $\mu_A(a_1) = b_1, \ldots, \mu_A(a_n) = b_n$.*

Доказательство. Обозначим через B сервантную оболочку данных элементов в аддитивной группе модуля M, т. е. $B = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle_* \subset M$. Аддитивная группа модуля M полна в своей Z-адической топологии (теорема 2.7), и тождественное вложение $i\colon B \to M$ является Z-адическим пополнением группы B по лемме 3.4.

Введём вспомогательную делимую группу без кручения D с максимальной линейно независимой системой элементов $d_1, \ldots, d_n$, т. е. $D = Qd_1 \oplus \ldots \oplus Qd_n$. Сначала мы определим элементы $a_1 = b_1 + d_1, \ldots, a_n = b_n + d_n$ группы $B \oplus D$. Теперь мы определим группу A как сервантную оболочку элементов $a_1, \ldots, a_n$ в группе $B \oplus D$, т. е. $A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_* \subset B \oplus D$.

Для всякого элемента $a \in A$ имеем $a = b + d \in B \oplus D$, $b \in B$, $d \in D$. Определяя $f(a) = b$, мы получаем гомоморфизм $f\colon A \to B$.

Гомоморфизм f является сюръективным. Действительно, пусть $b \in B$. Тогда $mb = m_1b_1 + \ldots + m_nb_n$ для некоторых целых чисел $m > 0$, $m_1, \ldots, m_n$. Для элемента

$$c = b + \frac{1}{m}(m_1d_1 + \ldots + m_nd_n) \in B \oplus D$$

имеет место равенство

$$mc = m_1a_1 + \ldots + m_na_n \in A.$$

Так как подгруппа A сильно сервантна в группе $B \oplus D$, то элемент c принадлежит также подгруппе A. Получаем, что $f(c) = b$, т. е. гомоморфизм f сюръективен.

С другой стороны, ясно, что $\mathrm{Ker}(f) = A \cap D$. Поскольку $\mathrm{Ker}(f) \subset D$, то уравнение $mx = a$ имеет решение $c \in D \subset B \oplus D$ для всякого $a \in \mathrm{Ker}(f)$ и для всякого $0 < m \in \mathbf{Z}$. Так как A сильно сервантна в $B \oplus D$, то элемент c принадлежит также группам A и $A \cap D$. Это означает, что группа $\mathrm{Ker}(f)$ является делимой и мы можем применить лемму 2.5. По этой лемме $\hat{A} = M$ и гомоморфизм $i \cdot f = f\colon A \to M$ совпадает с Z-адическим пополнением $\mu_A\colon A \to \hat{A}$ группы A. Кроме того,

$$\mu_A(a_1) = f(a_1) = b_1, \ldots, \quad \mu_A(a_n) = f(a_n) = b_n.$$

Очевидно, что группа A не содержит подгрупп типа p^∞ и что множество элементов $a_1, \ldots, a_n$ является максимальным линейно независимым над $\mathbf{Z}$ в группе A. Следовательно, по теореме 3.3 группа A является факторно делимой и элементы $a_1, \ldots, a_n$ составляют её базис. Это завершает доказательство. □

Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — элементы некоторого конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля. Напомним, что $\operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n)$ — это число элементов в максимальном линейно независимом над $\mathbf{Z}$ подмножестве данного множества элементов. Очевидным образом, $\operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n)$ совпадает с рангом без кручения группы $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle_* \subset M$.

Следствие 3.6. *Пусть элементы $b_1, \ldots, b_n$ порождают конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль M и $\operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n) = r \leqslant n$. Тогда соответствующая факторно делимая группа имеет вид $A \cong B \oplus C$, где $B = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_* \subset M$ и C — делимая группа без кручения ранга $n - r$.*

Покажем как находить делимую часть C факторно делимой группы A, заданной последовательностью элементов конечно представимого модуля. Следуя доказательству теоремы 3.5, имеем $A = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle_* \subset B \oplus D$, где $a_1 = b_1 + d_1, \ldots, a_n = b_n + d_n$, и $C = \operatorname{Ker}(f)$. Для любых целых коэффициентов

$$m_1 d_1 + \ldots + m_n d_n \in C$$

тогда и только тогда, когда

$$m_1 b_1 + \ldots + m_n b_n = 0.$$

Группа

$$K = \{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbf{Z}^n \mid m_1 b_1 + \ldots + m_n b_n = 0\}$$

является свободной как подгруппа свободной группы $\mathbf{Z}^n$. Пусть векторы

$$(m_{11}, \ldots, m_{1n}), \ldots, \ (m_{s1}, \ldots, m_{sn})$$

составляют свободный базис группы K. Здесь $s = n - r$, $r = \operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n)$. Тогда элементы

$$c_1 = m_{11} d_1 + \ldots + m_{1n} d_n, \ldots, \ c_s = m_{s1} d_1 + \ldots + m_{sn} d_n$$

образуют максимальную линейно независимую систему делимой группы без кручения C. Таким образом, $C = Qc_1 \oplus \ldots \oplus Qc_s$.

Мы можем отказаться от условия, что элементы $b_1, \ldots, b_n$ порождают конечно представимый модуль M, потому что конечно порождённый подмодуль конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля сам является конечно представимым по теореме B.

Следствие 3.7. *Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — произвольная последовательность* (с *возможными повторениями*) *элементов конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля M и $N = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$. Тогда существует факторно делимая группа A с базисом $a_1, \ldots, a_n$, такая что $\hat{A} = N$ и Z-адическое пополнение $\mu_A \colon A \to \hat{A}$*

отображает элементы $a_1, \ldots, a_n$ *в элементы* $b_1, \ldots, b_n$ *соответственно, т. е.* $\mu_A(a_1) = b_1, \ldots, \mu_A(a_n) = b_n$.

Следствие 3.8. *Пусть* $b_1, \ldots, b_n$ *— элементы некоторого* $\hat{\mathbf{Z}}$*-модуля* M. *Соответствующая факторно делимая группа является редуцированной тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n) = n$.

В этом случае факторно делимая группа $A = B = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_* \subset N$ *является сервантной оболочкой данных элементов в* $\hat{\mathbf{Z}}$*-подмодуле* N, *порождённом данными элементами,* $N = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$. *Соответствующий базис факторно делимой группы совпадает с* $b_1, \ldots, b_n$.

Теорема 3.9. *Пусть* $\varphi\colon M \to N$ *— некоторый гомоморфизм конечно представимых* $\hat{\mathbf{Z}}$*-модулей, при этом* $M = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$, $N = \langle b'_1, \ldots, b'_k\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$. *Пусть* $A, a_1, \ldots, a_n$ *и* $A', a'_1, \ldots, a'_k$ *— две факторно делимые группы с базисами, которые соответствуют двум последовательностям элементов* $b_1, \ldots, b_n$ *и* $b'_1, \ldots, b'_k$. *Пусть* T *— матрица размера* $k \times n$ *с целыми элементами. Если имеет место матричное равенство*

$$(\varphi b_1, \ldots, \varphi b_n) = (b'_1, \ldots, b'_k)T,$$

то существует гомоморфизм $f\colon A \to A'$, *такой что*

$$(fa_1, \ldots, fa_n) = (a'_1, \ldots, a'_k)T.$$

Доказательство. Следуя доказательству теоремы 3.5, мы получаем, что $a_1 = b_1 + d_1, \ldots, a_n = b_n + d_n \in B \oplus D$ и $a'_1 = b'_1 + d'_1, \ldots, a'_k = b'_k + d'_k \in B' \oplus D'$, где $D = \mathbf{Q}d_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Q}d_n$ и $D' = \mathbf{Q}d'_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Q}d'_k$ являются делимыми группами без кручения, $B = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_* \subset M$ и $B' = \langle b'_1, \ldots, b'_k\rangle_* \subset N$. Условие $(\varphi b_1, \ldots, \varphi b_n) = (b'_1, \ldots, b'_k)T$, в частности, показывает, что ограничение гомоморфизма $\varphi\colon M \to N$ на подгруппу B является гомоморфизмом групп $\varphi\colon B \to B'$. Определяя гомоморфизм $g\colon D \to D'$ при помощи матричного равенства $(gd_1, \ldots, gd_n) = (d'_1, \ldots, d'_k)T$, мы получаем гомоморфизм $f\colon B \oplus D \to B' \oplus D'$, $f(b + d) = \varphi(b) + g(d)$, $b \in B$, $d \in D$, такой что имеет место матричное равенство $(fa_1, \ldots, fa_n) = (a'_1, \ldots, a'_k)T$ в группе $B' \oplus D'$. Ясно, что $f(\langle a_1, \ldots, a_n\rangle_*) \subset \langle a'_1, \ldots, a'_k\rangle_*$. Поэтому ограничение гомоморфизма f на подгруппу $A = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle_*$ является искомым гомоморфизмом. $\square$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 3.1. Последовательность элементов $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля состоит из n нулей $0, \ldots, 0$. В этом случае соответствующая факторно делимая группа является делимой группой без кручения ранга n. В наших обозначениях $A = C = D = Qd_1 \oplus \ldots \oplus Qd_n$. Соответствующим базисом является множество элементов $d_1, \ldots, d_n$.

Пример 3.2. Последовательность $b_1, \ldots, b_n$ состоит из периодических элементов. Тогда группа $G = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$ является конечной. Кстати, любая конечная группа полна в своей Z-адической топологии, а также является конечно представимым $\hat{\mathbf{Z}}$-модулем. Соответствующая факторно делимая группа имеет вид $A = G \oplus D$, где $D = Qd_1 \oplus \ldots \oplus Qd_n$ — делимая группа без кручения. Соответствующим базисом факторно делимой группы A является множество элементов $a_1 = b_1 + d_1, \ldots, a_n = b_n + d_n$. Пример 3.1 является частным случаем этого примера.

Пример 3.3. Кольцо целых p-адических чисел $\hat{\mathbf{Z}}_p$ может рассматриваться как конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль. Пусть $b_1, \ldots, b_n \in \hat{\mathbf{Z}}_p$ — линейно независимая над $\mathbf{Z}$ последовательность целых p-адических чисел. Тогда конечно порождённый подмодуль $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$ представляет собой идеал кольца $\hat{\mathbf{Z}}_p$, т. е. имеет вид $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} = p^m\hat{\mathbf{Z}}_p$. Умножение на p^m является $\hat{\mathbf{Z}}$-модульным изоморфизмом $\hat{\mathbf{Z}}_p \to p^m\hat{\mathbf{Z}}_p$. Таким образом, соответствующая факторно делимая группа $A = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_* \subset p^m\hat{\mathbf{Z}}_p$ изоморфна сервантной оболочке $\langle p^{-m}b_1, \ldots, p^{-m}b_n\rangle_* \subset \hat{\mathbf{Z}}_p$ целых p-адических чисел $p^{-m}b_1, \ldots, p^{-m}b_n$ в аддитивной группе кольца $\hat{\mathbf{Z}}_p$. Эти же элементы образуют базис данной факторно делимой группы. Если НОД$(b_1, \ldots, b_n) = 1$ и $\operatorname{rank}(b_1, \ldots, b_n) = r < n$, то соответствующая факторно делимая группа имеет вид $A = B \oplus C$, где $B = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_* \subset \hat{\mathbf{Z}}_p$ и C — делимая группа без кручения ранга $n - r$. Соответствующий базис имеет вид $a_1 = b_1 + d_1, \ldots, a_n = b_n + d_n$, как это показано в теореме 3.5 и следствии 3.6. Важным частным случаем является последовательность, состоящая из одной единицы 1 кольца $\hat{\mathbf{Z}}_p$. Тогда соответствующей факторно делимой группой является группа

$$Q_p = \left\{ \frac{m}{n} \in Q \;\middle|\; (n, p) = 1 \right\}$$

с единицей 1 в качестве базиса факторно делимой группы Q_p.

Пример 3.4. Предположим, что факторно делимая группа A соответствует последовательности элементов $b_1, \ldots, b_n$ некоторого конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля M. Элементы $b_1, \ldots, b_n$ порождают циклический $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль, т. е. $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} \cong Z_\chi$ для некоторой характеристики χ, тогда и только тогда, когда $r_p(A) \leqslant 1$ для всех простых чисел p. Пример 3.3 является частным случаем для характеристики $\chi = (0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots)$.

Рассмотрим ещё один частный случай для характеристики

$$\varkappa = (\infty, \ldots, \infty, 0, \infty, \ldots).$$

Циклический $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль $M = \langle x\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} = x \prod\limits_{q \neq p} \hat{\mathbf{Z}}_q$, порождённый элементом x, изоморфен модулю $Z_\varkappa = \prod\limits_{q \neq p} \hat{\mathbf{Z}}_q$. Факторно делимая группа $xQ^{(p)}$ с базисом x соответствует последовательности из одного элемента x, где

$$Q^{(p)} = \left\{ \frac{m}{p^n} \in Q \;\middle|\; m, n \in \mathbf{Z} \right\}.$$

Пример 3.5. Пусть

$$M = x_1 \prod_{p \neq 2} \hat{\mathbf{Z}}_p \oplus x_2 \prod_{p \neq 5} \hat{\mathbf{Z}}_p \supset N = 3x_1 \prod_{p \neq 2} \hat{\mathbf{Z}}_p \oplus 3x_2 \prod_{p \neq 5} \hat{\mathbf{Z}}_p.$$

Тогда фактор-модуль $M/N \cong \bar{x}_1 Z_3 \oplus \bar{x}_2 Z_3$, где $\bar{x}_1 = x_1 + N \in M/N$, $\bar{x}_2 = x_2 + N \in M/N$ и $Z_3 = \{0, 1, 2\}$ — поле из трёх элементов, содержит в точности четыре собственных подмодуля: $\langle \bar{x}_1 \rangle$, $\langle \bar{x}_2 \rangle$, $\langle \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \rangle$ и $\langle 2\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \rangle$. Это означает, что существуют в точности четыре собственных $\hat{\mathbf{Z}}$-подмодуля между M и N, а именно $M_1 = \langle x_1, N \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$, $M_2 = \langle x_2, N \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$, $M_3 = \langle x_1 + x_2, N \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$ и $M_4 = \langle 2x_1 + x_2, N \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$. Факторно делимой группой, соответствующей последовательности x_1, x_2, является группа $A = \langle x_1, x_2 \rangle_* \subset M$ с базисом x_1, x_2. Факторно делимой группой, соответствующей последовательности $3x_1$, $3x_2$, является группа $B = \langle 3x_1, 3x_2 \rangle_* \subset N$ с базисом $3x_1$, $3x_2$. Заметим, что сервантная оболочка $\langle 3x_1, 3x_2 \rangle_*$ внутри модуля M совпадает с A, она также факторно делима, но в этом случае множество $3x_1$, $3x_2$ не является базисом факторно делимой группы A. Мы имеем включение $B = 3x_1 Q^{(2)} \oplus 3x_2 Q^{(5)} \subset A = x_1 Q^{(2)} \oplus x_2 Q^{(5)}$, для которого фактор-группа $A/B \cong \bar{x}_1 Z_3 \oplus \bar{x}_2 Z_3$ также состоит из девяти элементов. Существуют в точности четыре собственных подгруппы между группами A и B, а именно $A_1 = \langle x_1, B \rangle$, $A_2 = \langle x_2, B \rangle$, $A_3 = \langle x_1 + x_2, B \rangle$ и $A_4 = \langle 2x_1 + x_2, B \rangle$. Они все являются факторно делимыми и соответствуют последовательностям $(x_1, 3x_2)$, $(3x_1, x_2)$, $(x_1 + x_2, 3x_2)$ и $(2x_1 + x_2, 3x_2)$. При этом $A \cong B \cong A_1 \cong A_2 \cong Q^{(2)} \oplus Q^{(5)}$.

Докажем, что группа без кручения $A_3 = \langle x_1 + x_2, 3x_2 \rangle_* \subset M_3$ ранга 2 не может быть разложена в прямую сумму двух собственных подгрупп. Предположим, что $A_3 = U \oplus V$. Тогда $A_3 \ni 3x_1 = u_1 + v_1$, $u_1 \in U$, $v_1 \in V$. Так как элемент $3x_1$ делится на любую степень числа 2 в группе A_3, то то же самое верно и для u_1, и для v_1. Если $u_1 \neq 0$ и $v_1 \neq 0$, то любой элемент группы U и любой элемент группы V делится на любую степень числа 2, потому что $r(U) = r(V) = 1$. Отсюда следует, что это верно для любого элемента группы A_3, что невозможно. Поэтому один из двух элементов u_1 и v_1 равен нулю, скажем, $v_1 = 0$, тогда $3x_1 = u_1 \in U$. Аналогично $3x_2 = v_2 \in V$.

Элемент x_1 не может принадлежать группе A_3, потому что иначе $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 \in A_3$ и $A_3 = A$. Следовательно, элемент $3x_1 = u_1$ не делится на 3 в группе A_3. Поэтому элемент $u_1 + v_2 \in U \oplus V = A_3$ также не может делиться на 3 в группе A_3. Но, с другой стороны, $u_1 + v_2 = 3(x_1 + x_2)$ и $x_1 + x_2 \in A_3$. Это противоречие показывает, что группа A_3 не может быть разложена в прямую сумму собственных подгрупп.

Функция $f\colon A \to A$, где $f(r_1 x_1 + r_2 x_2) = 2r_1 x_1 + r_2 x_2$, $r_1 \in Q^{(2)}$, $r_2 \in Q^{(5)}$, является изоморфизмом. Изоморфизм f отображает группу A_3 на группу $A_4 = \langle B, 2x_1 + x_2 \rangle$. Таким образом, $A_4 \cong A_3$, и группа A_4 также является неразложимой в прямую сумму.

Следующая теорема прямо следует из теоремы 3.3.

Теорема 3.10. *Пусть A — факторно делимая группа с базисом $a_1, \ldots, a_n$ и $0 < k < n$. Тогда $A = B \oplus C$, где B и C — факторно делимые группы с базисами $a_1, \ldots, a_k$ и $a_{k+1}, \ldots, a_n$ соответственно, тогда и только тогда, когда*

$$\hat{A} = \langle a_1^0, \ldots, a_k^0 \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} \oplus \langle a_{k+1}^0, \ldots, a_n^0 \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}},$$

где элементы $a_1^0, \dots, a_n^0 \in \hat{A}$ *являются образами элементов* $a_1, \dots, a_n$ *при* Z*-адическом пополнении* $A \to \hat{A}$.

Пример 3.6. Пусть $M = b_1 Z_{\chi_1} \oplus \ldots \oplus b_n Z_{\chi_n}$ — конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль для некоторых характеристик $\chi_1, \ldots, \chi_n$ ненулевого типа. Тогда факторно делимая группа, соответствующая последовательности $b_1, \ldots, b_n$, является редуцированной и раскладывается в прямую сумму n факторно делимых групп ранга 1. В частности, если $M = b_1\hat{\mathbf{Z}} \oplus \ldots \oplus b_n\hat{\mathbf{Z}}$, то факторно делимая группа, соответствующая последовательности $b_1, \ldots, b_n$, является свободной со свободным базисом $b_1, \ldots, b_n$.

4. Характеристики, кохарактеристики, типы и котипы элементов

Определение. Пусть A — некоторая группа и $a \in A$. Для всякого простого числа p мы определим целое неотрицательное число k_p как максимальную степень числа p, такую что элемент a делится на p^{k_p} в группе A, т. е. уравнение $p^{k_p}x = a$ имеет решение в группе A. Если такой максимальной степени не существует, то мы полагаем $k_p = \infty$. Это означает, что элемент a делится на любую степень числа p, т. е. $a \in \bigcap\limits_n p^n A$.

Для всякого простого числа p мы также определим целое неотрицательное число m_p как минимальную степень числа p, такую что элемент $p^{m_p}a$ делится на любую степень числа p, т. е. $p^{m_p}a \in \bigcap\limits_n p^n A$. Если такой минимальной степени не существует, то мы полагаем $m_p = \infty$.

Характеристики $\operatorname{char}(a) = (k_p)$ и $\operatorname{cochar}(a) = (m_p)$ называются соответственно характеристикой и кохарактеристикой элемента a в группе A.

Мы также будем использовать обозначения $k_p = \operatorname{char}(a)_p$ и $m_p = \operatorname{cochar}(a)_p$, $k_p = \operatorname{char}(a)_p$ называется также p-высотой элемента a в группе A и обозначается через $h_p(a) = k_p$.

Типы, которые содержат эти характеристики, $\operatorname{type}(a) = [(k_p)]$ и $\operatorname{cotype}(a) = [(m_p)]$ соответственно называются типом и котипом элемента a в группе A.

Отметим некоторые свойства этих понятий.

1. $\operatorname{char}(0) = (\infty, \infty, \ldots)$, $\operatorname{cochar}(0) = (0, 0, \ldots)$.
2. $\operatorname{char}(-a) = \operatorname{char}(a)$, $\operatorname{cochar}(-a) = \operatorname{cochar}(a)$.
3. Пусть $\operatorname{char}(a) = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $\operatorname{cochar}(a) = (m_1, \ldots, m_n, \ldots)$. Мы предполагаем, что k_n и m_n соответствуют простому числу p_n, а все простые числа упорядочены по возрастанию: $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$. Тогда
$$\operatorname{cochar}(p_n a) = (m_1, \ldots, m_{n-1}, m_n - 1, m_{n+1}, \ldots),$$
здесь мы полагаем $\infty - 1 = \infty$, $0 - 1 = 0$, $\infty + 1 = \infty$,
$$\operatorname{char}(p_n a) \geqslant (k_1, \ldots, k_{n-1}, k_n + 1, k_{n+1}, \ldots).$$

Если группа A без кручения, то имеет место равенство

$$\operatorname{char}(p_n a) = (k_1, \dots, k_{n-1}, k_n + 1, k_{n+1}, \dots).$$

4. $\operatorname{char}(a)_p = \infty$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{cochar}(a)_p = 0$, или, что равносильно, $\operatorname{char}(a)_p < \infty$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{cochar}(a)_p > 0$.
5. $\operatorname{char}(a+b) \geqslant \operatorname{char}(a) \wedge \operatorname{char}(b)$ и $\operatorname{cochar}(a+b) \leqslant \operatorname{cochar}(a) \vee \operatorname{cochar}(b)$. Напомним, что

$$(m_p) \wedge (n_p) = (\min\{m_p, n_p\}), \quad (m_p) \vee (n_p) = (\max\{m_p, n_p\}).$$

6. Если $A = B \oplus C$ и $b \in B$, $c \in C$, то

$$\operatorname{char}(b+c) = \operatorname{char}(b) \wedge \operatorname{char}(c), \quad \operatorname{cochar}(b+c) = \operatorname{cochar}(b) \vee \operatorname{cochar}(c).$$

7. Пусть $f\colon A \to B$ — гомоморфизм групп. Тогда

$$\operatorname{char}\bigl(f(a)\bigr) \geqslant \operatorname{char}(a), \quad \operatorname{cochar}\bigl(f(a)\bigr) \leqslant \operatorname{cochar}(a)$$

для любого элемента $a \in A$.
8. Кохарактеристика периодического элемента принадлежит нулевому типу или, что равносильно, если $\operatorname{cochar}(a)$ ненулевого типа, то элемент a имеет бесконечный порядок.
9. Если A является группой без кручения, то $\operatorname{cochar}(a)$ идемпотентна для любого элемента $a \in A$. Это означает, что характеристика $\operatorname{cochar}(a)$ состоит только из нулей и бесконечностей.
10. Если a и b линейно зависимы, так что $ma + nb = 0$ и оба целых коэффициента отличны от 0, $m \neq 0$, $n \neq 0$, то $\operatorname{cotype}(a) = \operatorname{cotype}(b)$. Если дополнительно группа A без кручения, то также $\operatorname{type}(a) = \operatorname{type}(b)$. (Это свойство следует из свойства 3.)
11. $\operatorname{type}(b+c) \geqslant \operatorname{type}(b) \wedge \operatorname{type}(c)$ и $\operatorname{cotype}(b+c) \leqslant \operatorname{cotype}(b) \vee \operatorname{cotype}(c)$. Если $A = B \oplus C$ и $b \in B$, $c \in C$, то

$$\operatorname{type}(b+c) = \operatorname{type}(b) \wedge \operatorname{type}(c), \quad \operatorname{cotype}(b+c) = \operatorname{cotype}(b) \vee \operatorname{cotype}(c).$$

12. Пусть $A \to B$ — гомоморфизм групп. Тогда

$$\operatorname{type}\bigl(f(a)\bigr) \geqslant \operatorname{type}(a), \quad \operatorname{cotype}\bigl(f(a)\bigr) \leqslant \operatorname{cotype}(a)$$

для любого элемента $a \in A$.

Понятия характеристики и особенно типа элемента являются важными для групп без кручения. Понятие кохарактеристики элемента более важно для факторно делимых групп, как мы увидим дальше. Понятия характеристики и кохарактеристики аналогичны соответственно понятиям p-высоты и порядка для элементов p-группы.

Теорема 4.1. *Пусть A — факторно делимая группа. Если характеристики $\operatorname{cochar}(a)$ принадлежат нулевому типу для любых элементов $a \in A$, то группа A имеет вид $A = T \oplus D$, где D — делимая группа без кручения ранга r и T — конечная группа, такая что $r_p(T) \leqslant r$ для любого простого числа p.*

Доказательство. Из свойства 3 следует, что для любого элемента $a \in A$ можно найти целое число $m > 0$, такое что $\operatorname{cochar}(ma) = (0, 0, \ldots)$. Это означает, что ma принадлежит первой ульмовской подгруппе $A^1 = \bigcap\limits_{n \neq 0} nA$. Поэтому фактор-группа $T = A/A^1$ является периодической. По [3, теорема 2.14] первая ульмовская подгруппа A^1 является делимой группой без кручения конечного ранга r и выделяется прямым слагаемым в группе A. Таким образом, $A \cong T \oplus A^1$, где T — периодическая группа и $D = A^1$ — группа без кручения. По [3, теорема 2.9] периодическая группа T должна быть конечной. Условия $r_p(T) \leqslant r$ следуют из [3, теорема 2.6]. □

Следующая теорема показывает, что Z-адическое пополнение сохраняет характеристики и кохарактеристики элементов.

Теорема 4.2. *Если гомоморфизм $\mu\colon A \to \hat{A}$ является Z-адическим пополнением группы A, то*

$$\operatorname{char}\bigl(\mu(a)\bigr) = \operatorname{char}(a), \quad \operatorname{cochar}\bigl(\mu(a)\bigr) = \operatorname{cochar}(a)$$

для любого элемента $a \in A$.

Доказательство. Согласно теореме 2.4

$$\mu(a) = \bigl(\mu_p(a)\bigr) \in \prod_p \hat{A}_p = \hat{A}_p \oplus \prod_{q \neq p} \hat{A}_q.$$

Пусть k_p максимальное, такое что элемент a делится на p^{k_p}. Тогда первые k_p компонент цепи

$$\mu_p(a) = (a + pA,\, a + p^2A, \ldots,\, a + p^{k_p}A,\, a + p^{k_p+1}A, \ldots) \in \hat{A}_p$$

равны нулю, но (k_p+1)-я компонента $a+p^{k_p+1}A$ отлична от нуля (см. раздел 1). Это означает, что p-высота элемента $\mu_p(a)$ в группе $\hat{A}_p$ равна k_p. Поскольку прямое слагаемое $\prod\limits_{q \neq p} \hat{A}_q$ в группе $\hat{A}$ является p-делимой группой, то p-высота элемента $\mu(a)$ в группе $\hat{A}$ также равна k_p. Таким образом, $\operatorname{char}\bigl(\mu(a)\bigr) = \operatorname{char}(a)$.

Пусть m_p минимальное, такое что $p^{m_p}a \in \bigcap\limits_n p^nA$. Это означает, что m_p является минимальным, таким что $p^{m_p}\mu_p(a) = 0$, потому что

$$\operatorname{Ker}(\mu_p) = \bigcap_n p^nA.$$

Так как

$$\prod_{q \neq p} \hat{A}_q = \bigcap_n p^n\hat{A},$$

мы можем заключить, что m_p является минимальным, таким что $p^{m_p}\mu(a) \in \bigcap\limits_n p^n\hat{A}$. Таким образом, $\operatorname{cochar}\bigl(\mu(a)\bigr) = \operatorname{cochar}(a)$. □

5. Группы ранга 1

В этом разделе мы рассмотрим группы ранга 1, как факторно делимые, так и без кручения.

5.1. Кольца R^χ

Пусть $\chi = (k_p)$ — некоторая характеристика. Напомним, что множество

$$I_\chi = \{\alpha \in \hat{\mathbf{Z}} \mid \operatorname{char}(\alpha) \geqslant \chi\}$$

является идеалом кольца полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$. Фактор-кольцо $Z_\chi = \hat{\mathbf{Z}}/I_\chi$ может рассматриваться как конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль, порождённый элементом $1 + I_\chi \in Z_\chi$. Аддитивная группа кольца Z_χ является полной в своей Z-адической топологии (теорема 2.7). Для характеристики χ ненулевого типа мы определим группу R^χ как подгруппу аддитивной группы кольца Z_χ следующим образом.

Определение. Если характеристика χ относится к ненулевому типу, то $R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subset Z_\chi$, т. е. это сервантная оболочка единицы в аддитивной группе кольца Z_χ.

Если характеристика χ принадлежит нулевому типу и соответствует целому неотрицательному числу m, то $R^\chi = Z_m \oplus \mathbf{Q}$, где $Z_m = Z_\chi$ — кольцо классов вычетов по модулю m и $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел.

Все группы R^χ естественным образом являются коммутативными кольцами. Если характеристика χ принадлежит ненулевому типу, то R^χ — подкольцо кольца Z_χ. Элемент $r \in Z_\chi$ принадлежит подгруппе R^χ тогда и только тогда, когда существуют два целых числа $n \neq 0$ и m, такие что $nr = m1$, $1 \in Z_\chi$. Если равенство $n_1 r_1 = m_1 1$ имеет место для ещё одного элемента $r_1 \in R^\chi$, то, умножая, мы получаем, что $(nn_1)(rr_1) = (mm_1)1$. Это показывает, что произведение rr_1 также принадлежит подгруппе R^χ, т. е. подгруппа R^χ замкнута относительно умножения в кольце Z_χ. Если характеристика χ относится к нулевому типу, то кольцо $R^\chi = Z_m \oplus \mathbf{Q}$ является прямой суммой двух коммутативных колец.

Мы определим три множества простых чисел для данной характеристики $\chi = (k_p)$:

$$P_\infty = \{p \mid k_p = \infty\}, \quad P_f = \{p \mid 0 < k_p < \infty\}, \quad P_0 = \{p \mid k_p = 0\}.$$

Очевидно, что их объединение $P_\infty \cup P_f \cup P_0$ совпадает с множеством всех простых чисел, а пересечение любых двух из этих трёх множеств пусто. Кольцо Z_χ имеет вид $Z_\chi = \prod\limits_p K_p$, где $K_p = \hat{\mathbf{Z}}_p$ для $p \in P_\infty$, K_p является кольцом классов вычетов по модулю p^{k_p} для $p \in P_f$ и $K_p = 0$ для $p \in P_0$.

Пусть $\alpha = (\alpha_p) \in Z_\chi = \prod\limits_p K_p$. Элемент $\alpha_p \in K_p$ определяет два неотрицательных целых числа или символа ∞, а именно h_p — максимальное, такое что p^{h_p} делит α_p в кольце K_p (p-высота элемента α_p в K_p), и s_p — минимальное, такое что $p^{s_p}\alpha_p = 0$, т. е. p^{s_p} — порядок элемента $\alpha_p \in K_p$. Тогда $\mathrm{char}(\alpha) = (h_p)$ и $\mathrm{cochar}(\alpha) = (s_p)$. Если $\alpha_p = 0$, то $h_p = \infty$ и $s_p = 0$. Элемент α_p является обратимым в кольце K_p для $p \in P_\infty \cup P_f$ тогда и только тогда, когда $h_p = 0$, в этом случае $s_p = k_p$. Элемент $\alpha = (\alpha_p) \in Z_\chi$ обратим тогда и только тогда, когда α_p обратим в K_p для каждого $p \in P_\infty \cup P_f$. Таким образом, α обратим тогда и только тогда, когда $\mathrm{char}(\alpha) = \mathrm{char}(1)$. Характеристика элемента $1 = (1_p) \in Z_\chi$ является идемпотентной, её p-компоненты равны 0 для всех $p \in P_\infty \cup P_f$, и они равны ∞ для $p \in P_0$. Ясно, что $\mathrm{char}(\alpha) \geqslant \mathrm{char}(1)$ и $\mathrm{cochar}(\alpha) \leqslant co\,\mathrm{char}(1) = \chi$ для любого элемента $\alpha \in Z_\chi$.

Если целое число n взаимно просто с простым числом p и $p \in P_\infty \cup P_f$, то уравнение $nx = 1$ имеет единственное решение в кольце K_p, которое мы будем обозначать через $1/n \in K_p$. Следующая теорема характеризует элементы кольца R^χ.

Теорема 5.1. *Пусть χ — некоторая характеристика ненулевого типа. Тогда кольцо R^χ является подкольцом кольца Z_χ. Элемент $r = (\alpha_p) \in Z_\chi$ принадлежит подкольцу R^χ тогда и только тогда, когда он имеет следующий вид.*

1. *Существуют рациональное число $m/n \in \mathbf{Q}$, $(m, n) = 1$, и конечное подмножество P_r множества P_f, такие что $\alpha_p = m/n$ для всех простых чисел $p \in P_\infty \cup (P_f \setminus P_r)$.*
2. *p-компоненты α_p могут быть произвольными для $p \in P_r$.*
3. *Все простые делители p знаменателя n принадлежат множеству $P_r \cup P_0$.*

Доказательство. Пусть $r = (\alpha_p) \in R^\chi$. Тогда существуют два целых числа $N \neq 0$ и M, такие что $Nr = M1$, $1 \in Z_\chi$. Это означает, что $N\alpha_p = M1_p$ для любого кольца K_p, $p \in P_\infty \cup P_f$, 1_p является единицей кольца K_p. Поэтому

$$\alpha_p = \frac{M}{N} = \frac{md}{nd} = \frac{m}{n},$$

где $d = (M, N)$ и $(m, n) = 1$, для всех простых чисел p, исключая конечное множество простых делителей знаменателя N. Кроме того, α_p обязательно равно m/n для всех $p \in P_\infty$. Это, в частности, означает, что знаменатель n взаимно прост с каждым $p \in P_\infty$.

Рассмотрим простой делитель p знаменателя n. Имеем $p \in P_f \cup P_0$. Предположим, что $p \in P_f$. Тогда α_p не может быть равен m/n, потому что $m/n \notin K_p \neq 0$. Такие простые числа образуют множество P_r. Заметим, что конечное множество P_r не является однозначно определённым, оно может также содержать некоторые простые числа p, для которых $\alpha_p = m/n$ и $p \in P_f$. В любом случае все простые делители знаменателя n обязательно принадлежат множеству $P_r \cup P_0$.

Обратно, предположим, что элемент $r = (\alpha_p) \in Z_\chi$ имеет данный вид. Поскольку множество P_r конечно и $P_r \subset P_f$, мы можем рассмотреть целое число $d = \prod\limits_{p \in P_r} p^{k_p}$, где $\chi = (k_p)$. Тогда p-компоненты элемента dr равны нулю для всех $p \in P_r$ и p-компоненты dr равны dm/n для всех остальных простых чисел

$p \in P_\infty \cup P_f$. Поэтому мы получаем равенство $(dn)r = (dm)1$ в кольце Z_χ, которое показывает, что $r \in R^\chi$. $\square$

Определение. Рациональное число m/n, соответствующее элементу $r \in R^\chi$ по теореме 5.1, называется рациональной нормой элемента r и обозначается $|r|$. Если характеристика χ принадлежит нулевому типу, то $R^\chi = Z_k \oplus \mathbf{Q}$, и мы можем определить рациональную норму как проекцию $|r| = m/n$, где

$$r = t + \frac{m}{n} \in R^\chi = Z_k \oplus \mathbf{Q}, \quad t \in Z_k, \quad \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}.$$

Отметим некоторые свойства рациональной нормы. Для любых двух элементов $r, s \in R^\chi$ выполняется $|r+s| = |r| + |s|$, $|rs| = |r|\,|s|$, $|1| = 1$. Это означает, что функция $f\colon R^\chi \to Q$, где $f(r) = |r|$, является кольцевым гомоморфизмом.

Следствие 5.2. *Пусть r — некоторый элемент кольца R^χ. Тогда существует прямое разложение кольца $R^\chi = Z_d \oplus R^\varkappa$, где $\varkappa$ — характеристика того же типа, $\varkappa \leqslant \chi$ и $[\varkappa] = [\chi]$, $0 \leqslant d \in \mathbf{Z}$, так что элемент r имеет вид $r = t + |r|1$, где $t \in Z_d$, 1 — единица кольца $R^\varkappa$, $|r|$ — рациональная норма r в кольце R^χ, которая также совпадает с рациональной нормой r в кольце $R^\varkappa$.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $\varepsilon_p \in Z_\chi$, у которого p-компонента равна единице 1_p кольца K_p, а все остальные компоненты нулевые. Элемент ε_p является идемпотентом. Следуя доказательству теоремы 5.1, определим целое число $d = \prod\limits_{p \in P_r} p^{k_p}$, а также идемпотент $\varepsilon = \sum\limits_{p \in P_r} \varepsilon_p$, который даст нам прямое разложение $R^\chi = \varepsilon R^\chi \oplus (1-\varepsilon)R^\chi$. Кольцо εR^χ изоморфно кольцу Z_d. Кольцо $(1-\varepsilon)R^\chi$ изоморфно кольцу $R^\varkappa$, где p-компоненты характеристики $\varkappa$ равны нулю для всех $p \in P_r$ и совпадают с p-компонентами характеристики χ для всех остальных простых чисел p. $\square$

Теперь мы охарактеризуем обратимые элементы кольца R^χ.

Следствие 5.3. *Пусть $\chi = (k_p)$ — некоторая характеристика ненулевого типа. Следующие утверждения для элемента $r = (\alpha_p) \in R^\chi \subset Z_\chi$ равносильны*:

1) *r обратим в кольце R^χ*;
2) *r обратим в кольце Z_χ*;
3) *α_p не делится на p для всех простых чисел $p \in P_\infty \cup P_f$*;
4) $\mathrm{char}(r) = \mathrm{char}(1)$;
5) *характеристика $\mathrm{char}(r) = (m_p)$ имеет вид $m_p = 0$ для $p \in P_\infty \cup P_f$ и $m_p = \infty$ для $p \in P_0$.*

Предложение 5.4. *Пусть χ — характеристика нулевого типа, которая соответствует целому числу m. Тогда $R^\chi = Z_m \oplus \mathbf{Q}$. Элемент $r = t + q \in R^\chi$, $t \in Z_m$, $q \in \mathbf{Q}$, обратим в кольце R^χ тогда и только тогда, когда элемент t обратим в кольце Z_m и рациональное число q отлично от нуля.*

Проиллюстрируем связь между характеристиками и кольцами на примерах.

Характеристика χ	Кольцо R^χ
$(\infty, \infty, \ldots)$	$\mathbf{Z}$
$(\infty, \ldots, \infty, 0, \infty, \ldots)$	$Q^{(p)}$
$(0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots)$	Q_p
$(1, 1, \ldots)$	[3, пример 2.4]
$(3, 2, 1, 0, 0, \ldots)$	$Z_{360} \oplus \mathbf{Q}$ [3, пример 2.3]
$(0, 0, \ldots)$	$\mathbf{Q}$

5.2. Факторно делимые группы ранга 1

Теорема 5.5. *Аддитивная группа кольца R^χ является факторно делимой группой ранга 1 для любой характеристики χ. Единица $1 \in R^\chi$ является базисом факторно делимой группы R^χ.*

Доказательство. Единица $1 \in Z_\chi$ порождает Z_χ как конечно представимый $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль. Ранг множества $\{1\}$ равен единице, если характеристика χ бесконечна (ненулевого типа). Ранг множества $\{1\}$ равен нулю, если характеристика χ конечна. В любом случае элемент $1 \in Z_\chi$ задаёт факторно делимую группу ранга 1 по следствию 3.6. Эта группа совпадает с группой R^χ. Тождественное вложение $R^\chi \to Z_\chi$ совпадает с Z-адическим пополнением группы R^χ, если характеристика χ бесконечна. Если характеристика χ конечна, то $R^\chi = Z_\chi \oplus \mathbf{Q}$ и Z-адическое пополнение группы R^χ совпадает с проекцией на первую координату. Элемент $1 \in R^\chi$ является базисом факторно делимой группы R^χ по теореме 3.3. □

Теорема 5.6. *Всякая факторно делимая группа ранга 1 изоморфна группе R^χ для некоторой характеристики χ.*

Доказательство. Пусть A — факторно делимая группа и элемент $a \in A$ является её базисом. Z-адическое пополнение $\mu\colon A \to \hat{A}$ сохраняет кохарактеристики элементов по теореме 4.2, т. е. $\mathrm{cochar}(a^0) = \mathrm{cochar}(a) = \chi$, где $a^0 = \mu(a)$. Так как $\hat{A} = \langle a^0 \rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$ является циклическим конечно представимым модулем по теореме 3.3 и $\mathrm{cochar}(a^0) = \chi$, то $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль $\hat{A}$ имеет вид $\hat{A} = a^0 Z_\chi$, т. е. $\hat{A} \cong Z_\chi$. Если характеристика бесконечна (ненулевого типа), то гомоморфизм μ инъективен и является изоморфизмом между группой A и её образом $\langle a^0 \rangle_*$ (теорема 3.2), который изоморфен группе $R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subset Z_\chi$. Если же характеристика χ конечна, то $A \cong Z_m \oplus \mathbf{Q}$ по теореме 4.1. Легко убедиться, что целое число m соответствует характеристике χ, т. е. $Z_m = Z_\chi$ и $A \cong Z_\chi \oplus \mathbf{Q} = R^\chi$. □

Теорема 5.7. *$R^\chi \cong R^\varkappa$ тогда и только тогда, когда $\chi = \varkappa$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $\chi \neq \varkappa$, то группы R^χ и $R^\varkappa$ не могут быть изоморфны. Пусть $\chi = (k_p)$, $\varkappa = (m_p)$ и $k_p \neq m_p$ для некоторого простого числа p. Если $0 < k_p < \infty$ и $0 < m_p < \infty$, то p-примарные компоненты групп R^χ и $R^\varkappa$ различны и группы не могут быть изоморфны. Если $k_p = 0$, то R^{χ} является p-делимой группой, а $R^{\varkappa}$ нет. Если $k_p = \infty$, то все элементы бесконечного порядка имеют конечную p-высоту в группе R^{χ}, что неверно для группы $R^{\varkappa}$. □

Пусть A — факторно делимая группа ранга 1. Мы будем называть элемент $a \in A$ базовым, если он может служить базисом этой факторно делимой группы.

Теорема 5.8. *Все базовые элементы факторно делимой группы ранга* 1 *имеют одну и ту же кохарактеристику* χ *и одну и ту же характеристику* $\varkappa$. *Для любого элемента* $b \in A$ *выполняются неравенства* $\operatorname{cochar}(b) \leqslant \chi$ *и* $\operatorname{char}(b) \geqslant \varkappa$. *Кохарактеристики всех элементов бесконечного порядка принадлежат одному и тому же типу* $[\chi]$. *Характеристика* $\varkappa$ *идемпотентна. Элемент* $c \in A$ *является базовым тогда и только тогда, когда* $\operatorname{char}(c) = \varkappa$.

Доказательство. В силу теоремы 5.6 нам достаточно доказать теорему для групп вида R^{χ}. Тождественное вложение $R^{\chi} \to Z_{\chi}$ является Z-адическим пополнением, если характеристика χ бесконечна. По теореме 3.3 элемент $r \in R^{\chi}$ является базисом факторно делимой группы R^{χ} тогда и только тогда, когда r порождает Z_{χ} как модуль над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$. Это означает, что элемент r обратим в кольце Z_{χ}. Применяя следствие 5.3, мы получаем, что элемент $r \in R^{\chi}$ является базовым в аддитивной группе кольца R^{χ} тогда и только тогда, когда этот элемент обратим в кольце R^{χ}. То же самое верно и для конечной характеристики χ. Далее нам остаётся только применить следствие 5.3 или предложение 5.4. □

Поскольку кохарактеристика базового элемента не зависит от выбора этого элемента, мы можем определить кохарактеристику факторно делимой группы ранга 1 как кохарактеристику её базового элемента. Теперь основная теорема этого раздела является простым следствием предыдущих теорем.

Теорема 5.9 (О. И. Давыдова [1]). *Две факторно делимые группы ранга* 1 *изоморфны тогда и только тогда, когда их кохарактеристики равны. Каждая характеристика является кохарактеристикой некоторой факторно делимой группы ранга* 1.

5.3. Группы без кручения ранга 1

Пусть дана некоторая характеристика $\chi = (k_p)$. Сначала мы определим множество рациональных чисел S_{χ}, зависящее от характеристики χ. Если $0 \leqslant k_p < \infty$ для некоторого простого числа p, то множество $S_{\chi}^{(p)}$ состоит из одного элемента p^{-k_p}. Если $k_p = \infty$, то $S_{\chi}^{(p)}$ состоит из бесконечного числа рациональных чисел $p^{-1}, p^{-2}, \ldots, p^{-k}, \ldots$. Наконец, $S_{\chi} = \bigcup\limits_{p} S_{\chi}^{(p)}$ есть объединение по всем простым числам p.

Определение. Обозначим через R_{χ} подгруппу аддитивной группы рациональных чисел $\mathbf{Q}$, порождённую множеством S_{χ}, т. е. $R_{\chi} = \langle S_{\chi} \rangle$.

По этому определению рациональная единица 1 принадлежит группе R_χ. Поэтому имеют место включения $\mathbf{Z} \subset R_\chi \subset \mathbf{Q}$ для любой характеристики χ. Группа R_χ состоит из рациональных чисел m/n, $(m,n)=1$, удовлетворяющих следующему условию. Для любого простого числа p если степень p^k делит знаменатель n, то $k \leqslant k_p$. Это, в частности, означает, что $R_\chi = R_\varkappa$ тогда и только тогда, когда $\chi = \varkappa$.

Приведём некоторые примеры групп R_χ.

Характеристика χ	Группа R_χ
$(\infty, \infty, \ldots)$	$\mathbf{Q}$
$(\infty, \ldots, \infty, 0, \infty, \ldots)$	Q_p
$(0, \ldots, 0, \infty, 0, \ldots)$	$Q^{(p)}$
$(1, 1, \ldots)$	группа рациональных чисел со знаменателями, свободными от квадратов
$(3, 2, 1, 0, 0, \ldots)$	циклическая подгруппа, порождённая числом $1/360$
$(0, 0, \ldots)$	$\mathbf{Z}$

Следующая теорема достаточно очевидна.

Теорема 5.10. *Каждая группа R_χ является группой без кручения ранга* 1. *Рациональная единица $1 \in R_\chi$ является базисом* (*максимальной линейно независимой системой*) *группы без кручения R_χ, $\mathrm{char}(1) = \chi$.*

Теорема 5.11. *Каждая группа без кручения ранга* 1 *изоморфна группе R_χ для некоторой характеристики χ.*

Доказательство. Пусть A — некоторая группа без кручения ранга 1 и элемент $a \in A$ составляет её базис. Для любого элемента $b \in A$ (включая 0) множество $\{a, b\}$ линейно зависимо. Это означает, что $ma = nb$ для некоторых целых коэффициентов m и $n \neq 0$. Отображение $f \colon A \to \mathbf{Q}$, где $b \mapsto m/n$, является инъективным гомоморфизмом, $\operatorname{Im} f = R_\chi$, где $\chi = \mathrm{char}(a)$ в группе A. Таким образом, $A \cong R_\chi$. □

Теорема 5.12. *$R_\chi \cong R_\varkappa$, если и только если $[\chi] = [\varkappa]$.*

Доказательство. Пусть $f \colon R_\chi \to R_\varkappa$ — изоморфизм. Тогда $f(1) = m/n \in R_\varkappa$ и характеристика $\mathrm{char}(m/n)$ в группе $R_\varkappa$ совпадает с характеристикой χ. Тогда характеристика $\chi = \mathrm{char}(m/n)$ эквивалентна характеристике $\mathrm{char}(1) = \varkappa$ по свойству 3 или по свойству 10 раздела 4. Следовательно, типы этих характеристик равны $[\chi] = [\varkappa]$.

Обратно, пусть дана группа $R_\varkappa$. Для любой характеристики χ, эквивалентной характеристике $\varkappa$, найдётся элемент $m/n \in R_\varkappa$ характеристики χ. Этот элемент может быть найден по свойству 3 раздела 4. Тогда умножение на число m/n является изоморфизмом $f \colon R_\chi \to R_\varkappa$. □

В отличие от факторно делимого случая, в группе без кручения ранга 1 любой ненулевой элемент является базовым, т. е. может служить базисом этой группы без кручения. В следующей теореме мы предпочитаем слово «базовый» слову «ненулевой», чтобы подчеркнуть сходство с теоремой 5.8.

Теорема 5.13. *Все базовые элементы группы без кручения ранга* 1 *имеют одну и ту же кохарактеристику, которая является идемпотентной. Характеристики всех базовых элементов принадлежат одному и тому же типу.*

Доказательство. Если $\mathrm{char}(a) = (k_p)$ для некоторого базового элемента $a \in A$, то $\mathrm{cochar}(a) = (m_p)$, где $m_p = 0$, если $k_p = \infty$, и $m_p = \infty$, если $0 \leqslant k_p < \infty$. Для любого другого базового элемента $b \in A$ имеем $\mathrm{char}(b) \sim \mathrm{char}(a)$ по свойству 10 и $\mathrm{cochar}(b) = \mathrm{cochar}(a)$. □

Поскольку тип базового (ненулевого) элемента не зависит от выбора этого элемента, то мы можем определить тип группы без кручения ранга 1 как тип её базового элемента. Теперь основная теорема этого раздела является простым следствием предыдущих теорем.

Теорема 5.14 (Р. Бэр [6]). *Две группы без кручения ранга* 1 *изоморфны тогда и только тогда, когда их типы равны. Каждый тип является типом некоторой группы без кручения ранга* 1.

5.4. Два спектра гомоморфизмов групп ранга 1

Предложение 5.15. *Пусть* $\chi = (k_p)$ *и* $\varkappa = (m_p)$ — *две характеристики. Факторно делимая группа* R^χ *изоморфна группе без кручения* $R_\varkappa$ *тогда и только тогда, когда характеристики* χ *и* $\varkappa$ *являются идемпотентными и дополнительными. Это означает, что* $k_p = 0$ *тогда и только тогда, когда* $m_p = \infty$, *и* $k_p = \infty$ *тогда и только тогда, когда* $m_p = 0$. *Эти группы в точности являются подкольцами кольца рациональных чисел* $\mathbf{Q}$.

Доказательство. p-примарная компонента факторно делимой группы R^χ равна нулю тогда и только тогда, когда $k_p = 0$ или $k_p = \infty$. Поэтому группа R^χ является группой без кручения тогда и только тогда, когда характеристика χ идемпотентна. В этом случае характеристика $\varkappa$ базового элемента факторно делимой группы R^χ является идемпотентной и дополнительной до характеристики χ по теореме 5.8.

Предположим, что подгруппа $R_\varkappa$ является подкольцом кольца $\mathbf{Q}$. Если $m_p > 0$ для некоторого простого числа p, то $1/p \in R_\varkappa$, откуда следует, что $(1/p)^k \in R_\varkappa$ для всех $0 < k \in \mathbf{Z}$. Поэтому $m_p = \infty$, и характеристика $\varkappa$ идемпотентна. □

Это показывает нам разницу между группами R^χ и R_χ. Все факторно делимые группы R^χ естественным образом являются коммутативными кольцами. А группы без кручения R_χ являются подкольцами кольца $\mathbf{Q}$ тогда и только тогда, когда они факторно делимы.

Рассмотрим две характеристики χ и $\varkappa$, такие что $\chi \geqslant \varkappa$. Они определяют два идеала в кольце полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$:

$$I_\chi = \{\alpha \in \hat{\mathbf{Z}} \mid \operatorname{char}(\alpha) \geqslant \chi\} \subset I_\kappa = \{\alpha \in \hat{\mathbf{Z}} \mid \operatorname{char}(\alpha) \geqslant \kappa\}.$$

Включение $I_\chi \subset I_\varkappa$ индуцирует естественный кольцевой гомоморфизм $f^\chi_\varkappa\colon \hat{\mathbf{Z}}/I_\chi \to \hat{\mathbf{Z}}/I_\varkappa$, где $f^\chi_\varkappa(\alpha + I_\chi) = \alpha + I_\varkappa \in \hat{\mathbf{Z}}/I_\varkappa$. Гомоморфизм $f^\chi_\varkappa$ будет называться спуском от характеристики χ к характеристике $\varkappa$. Таким образом, спуск $f^\chi_\varkappa\colon Z_\chi \to Z_\varkappa$ является гомоморфизмом коммутативных колец. Он сюръективен, и $\operatorname{Ker}(f^\chi_\varkappa) = \{\alpha \in Z_\chi \mid \operatorname{char}(\alpha) \geqslant \varkappa\}$.

Если характеристики χ и $\varkappa$ бесконечны, то кольца R^χ и $R^\varkappa$ являются подкольцами колец Z_χ и $Z_\varkappa$ соответственно. Легко убедиться, что $f^\chi_\varkappa(R^\chi) \subset R^\varkappa$, поэтому ограничение спуска $f^\chi_\varkappa$ на подкольцо R^χ также яляется гомоморфизмом колец $g^\chi_\varkappa\colon R^\chi \to R^\varkappa$. Гомоморфизм $g^\chi_\varkappa\colon R^\chi \to R^\varkappa$ уже не обязательно сюръективен. Если, например, $\chi = (2, 2, \ldots)$ и $\varkappa = (1, 1, \ldots)$, то гомоморфизм $g^\chi_\varkappa\colon R^\chi \to R^\varkappa$ сюръективен, его ядро $\operatorname{Ker}(g^\chi_\varkappa) = \bigoplus\limits_p pZ_{p^2}$ является периодической группой. Если же $\chi = (\infty, \infty, \infty, \ldots)$ и $\varkappa = (0, \infty, \infty, \ldots)$, то, напротив, гомоморфизм $g^\chi_\varkappa\colon R^\chi \to R^\varkappa$ инъективен. В самом деле, этот гомоморфизм совпадает с тождественным вложением $\mathrm{id}\colon \mathbf{Z} \to Q^{(2)}$. Таким образом, мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} R^\chi & \xrightarrow{g^\chi_\kappa} & R^\kappa \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ Z_\chi & \xrightarrow[f^\chi_\kappa]{} & Z_\kappa \end{array}.$$

Если характеристика $\varkappa$ конечна, а характеристика χ бесконечна, то кольцо $Z_\varkappa$ является кольцом классов вычетов по модулю некоторого целого числа m, кольцо $R^\varkappa$ является прямой суммой $R^\varkappa = Z_\varkappa \oplus \mathbf{Q}$. В этом случае мы определяем гомоморфизм $g^\chi_\varkappa\colon R^\chi \to R^\varkappa$ по правилу $g^\chi_\varkappa(r) = \bar{r} + |r| \in Z_\varkappa \oplus \mathbf{Q}$, где $\bar{r} = f^\chi_\varkappa(r) \in Z_\varkappa$ является спуском элемента r, $|r| \in \mathbf{Q}$ — рациональная норма элемента $r \in R^\chi$. Коммутативная диаграмма принимает вид

$$\begin{array}{ccc} R^\chi & \xrightarrow{g^\chi_\kappa} & R^\kappa = Z_\kappa \oplus \mathbf{Q} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Z_\chi & \xrightarrow[f^\chi_\kappa]{} & Z_\kappa \end{array},$$

где гомоморфизм π является проекцией на первое слагаемое. При этом π совпадает с Z-адическим пополнением, так же как и гомоморфизм $\mathrm{id}\colon R^\chi \to Z_\chi$.

Если обе характеристики χ и $\varkappa$ конечны, то

$$g^\chi_\varkappa = f^\chi_\varkappa \oplus \mathrm{id}\colon Z_\chi \oplus \mathbf{Q} \to Z_\varkappa \oplus \mathbf{Q}$$

и диаграмма принимает вид

$$
\begin{array}{ccc}
R^{\chi} = Z_{\chi} \oplus \mathbf{Q} & \xrightarrow{g^{\chi}_{\kappa}} & R^{\kappa} = Z_{\kappa} \oplus \mathbf{Q} \\
\pi \big\downarrow & & \big\downarrow \pi \\
Z_{\chi} & \xrightarrow[f^{\chi}_{\kappa}]{} & Z_{\kappa}
\end{array}
.
$$

Все три диаграммы, приведённые выше, являются частными случаями коммутативной диаграммы теоремы 2.3.

Обозначим через $\vartheta = (0, 0, \ldots)$ наименьшую (нулевую) характеристику. Тогда гомоморфизм $g^{\chi}_{\vartheta}\colon R^{\chi} \to R^{\vartheta} = \mathbf{Q}$ совпадает с рациональной нормой на кольце R^{χ} для любой характеристики χ.

Кольцевые гомоморфизмы $g^{\chi}_{\varkappa}$ удовлетворяют следующему условию: для любых трёх характеристик $\chi \geqslant \varkappa \geqslant \eta$ имеет место равенство $g^{\varkappa}_{\eta} g^{\chi}_{\varkappa} = g^{\chi}_{\eta}$. Таким образом, мы получаем спектр гомоморфизмов

$$g^{\chi}_{\kappa}\colon R^{\chi} \to R^{\kappa} \quad \text{для любых двух характеристик} \quad \chi \geqslant \kappa. \tag{10}$$

С другой стороны, мы знаем, что имеют место включения рациональных групп $R_{\chi} \subset R_{\varkappa} \subset \mathbf{Q}$ для любых двух характеристик $\chi \leqslant \varkappa$. Обозначая тождественное вложение рациональных групп через $h^{\chi}_{\varkappa}\colon R_{\chi} \to R_{\varkappa}$, $\chi \leqslant \varkappa$, мы получаем ещё один спектр гомоморфизмов групп:

$$h^{\chi}_{\kappa}\colon R_{\chi} \to R_{\kappa} \quad \text{для любых двух характеристик} \quad \chi \leqslant \kappa. \tag{11}$$

Множество всех характеристик является решёткой относительно бинарных операций $\vee$ и $\wedge$. Идемпотентные характеристики образуют подрешётку этой решётки. Рассматривая только идемпотентные характеристики в спектре (10), мы получим подспектр, который назовём идемпотентным подспектром спектра (10). Идемпотентный подспектр спектра (11) определяется аналогично.

Теорема 5.16. *Идемпотентные подспектры спектров* (10) *и* (11) *совпадают.*

Доказательство. Обозначим через $\bar{\chi}$ дополнительную идемпотентную характеристику для идемпотентной характеристики χ. Мы имеем, что для любых двух идемпотентных характеристик χ и $\varkappa$ $\bar{\chi} \leqslant \bar{\varkappa}$ тогда и только тогда, когда $\chi \geqslant \varkappa$. В соответствии с предложением 5.15 мы также имеем, что $R^{\chi} = R_{\bar{\chi}}$ для любой идемпотентной характеристики χ. Гомоморфизм $g^{\chi}_{\varkappa}\colon R^{\chi} \to R^{\varkappa}$ является тождественным вложением для идемпотентных характеристик $\chi \geqslant \varkappa$. Поэтому он совпадает с гомоморфизмом $h^{\bar{\chi}}_{\bar{\varkappa}}\colon R_{\bar{\chi}} \to R_{\bar{\varkappa}}$, где $\bar{\chi} \leqslant \bar{\varkappa}$. □

Идемпотентный спектр теоремы 5.16 в действительности является спектром кольцевых гомоморфизмов. Предложение 5.15, в частности, показывает, что подкольца поля $\mathbf{Q}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии $R_{\chi} \leftrightarrow \chi$ с идемпотентными характеристиками.

Заметим, что возможен только единственный кольцевой гомоморфизм $R_{\chi} \to R_{\varkappa}$ для идемпотентных характеристик $\chi \leqslant \varkappa$, потому что кольцевой гомоморфизм отображает единицу кольца в единицу. Этот гомоморфизм есть тождественное вложение $h^{\chi}_{\varkappa}\colon R_{\chi} \to R_{\varkappa}$.

В заключение отметим интересную двойственность для рациональных колец. Скажем, что кольца R^{χ} и R_{χ} являются взаимно двойственными для любой идемпотентной характеристики χ, а кольцевые гомоморфизмы $g^{\chi}_{\varkappa}\colon R^{\chi} \to R^{\varkappa}$ и $h^{\varkappa}_{\chi}\colon R_{\varkappa} \to R_{\chi}$ взаимно двойственны для любых идемпотентных характеристик $\chi \geqslant \varkappa$.

Пусть $f\colon R \to S$ — некоторый гомоморфизм рациональных колец. Обозначим двойственные кольца через R^* и S^*, а двойственный гомоморфизм через $f^*\colon S^* \to R^*$. Для любого рационального кольца R и любых гомоморфизмов рациональных колец f и g выполняются следующие свойства:

1) $R^{**} = R$, $f^{**} = f$;
2) $R + R^* = \mathbf{Q}$, $R \cap R^* = \mathbf{Z}$;
3) $(fg)^* = g^* f^*$.

Например, тождественное вложение $\mathbf{Z} \subset Q^{(p)}$ двойственно тождественному вложению $Q_p \subset \mathbf{Q}$, а тождественное вложение $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ двойственно самому себе.

В заключение раздела отметим одно интересное свойство колец R^{χ}. В [7] вводится класс T-колец. Ассоциативное кольцо R с единицей называется T-кольцом, если гомоморфизм групп $R \otimes R \to R$, где $a \otimes b \mapsto ab$, является изоморфизмом. Тензорное произведение здесь рассматривается над кольцом целых чисел, т. е. это тензорное произведение абелевых групп. А. В. Царёв [5] показал, что бесконечные T-кольца — это в точности кольца R^{χ}.

6. Категории

Напомним, что категория $\mathcal{A}$ состоит из объектов $\mathrm{Ob}\mathcal{A}$ и морфизмов $\mathrm{Mor}\,\mathcal{A}$, для любых двух объектов A и B имеется множество $\mathrm{Mor}(A,B)$ морфизмов из объекта A в объект B. При этом в категории задана композиция (произведение) морфизмов, т. е. функция

$$\mathrm{Mor}(B,C) \times \mathrm{Mor}(A,B) \to \mathrm{Mor}(A,C), \quad (g,f) \mapsto gf,$$

для любых трёх объектов A, B, C. Более того, предполагается, что выполняются следующие три аксиомы.

1. Пересечение любых двух множеств $\mathrm{Mor}(A,B)$ и $\mathrm{Mor}(C,D)$ пусто за исключением случая, когда $A = C$ и $B = D$. В этом случае множества совпадают.
2. $f(gh) = (fg)h$ для любых трёх морфизмов, для которых определены эти произведения.
3. Для каждого объекта A существует единичный морфизм $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}(A,A)$, такой что $f\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B f$ для любого морфизма $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$.

Мы будем использовать для морфизмов $f \in \mathrm{Mor}(A,B)$ такие же обозначения, как и для функций, т. е. $f\colon A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Обратимые морфизмы категории $\mathcal{A}$ называются изоморфизмами категории $\mathcal{A}$.

6.1. Категория $\mathcal{D}$

Теперь мы определим категорию $\mathcal{D}$ факторно делимых групп с отмеченными базисами. Эта категория была введена в [9]. Объектом категории $\mathcal{D}$ является любая пара, состоящая из факторно делимой группы A и базиса $a_1, \ldots, a_n$ факторно делимой группы A. Мы обозначаем этот объект через $A, a_1, \ldots, a_n$ или просто через A, если из контекста ясно, какой базис фиксирован.

Морфизмами из объекта $A, a_1, \ldots, a_n$ в объект $B, b_1, \ldots, b_k$ являются пары (f, T), где $f\colon A \to B$ — гомоморфизм групп и T — матрица размера $k \times n$ с целыми элементами, такие что выполняется матричное равенство $\big(f(a_1), \ldots, f(a_n)\big) = (b_1, \ldots, b_k)T$, т. е. $f(a_i) = t_{1i}b_1 + \ldots + t_{ki}b_k$, $i = 1, \ldots, n$, где $T = \|t_{ij}\|$. Композиция $(g, S)(f, T)$ двух морфизмов

$$A, a_1, \ldots, a_n \xrightarrow{(f,T)} B, b_1, \ldots, b_k \xrightarrow{(g,S)} C, c_1, \ldots, c_m$$

определяется как морфизм

$$A, a_1, \ldots, a_n \xrightarrow{(gf,ST)} C, c_1, \ldots, c_m,$$

т. е. $(g, S)(f, T) = (gf, ST)$. Единичный морфизм для объекта $A, a_1, \ldots, a_n$ состоит из тождественного гомоморфизма $\mathrm{id}\colon A \to A$ и единичной матрицы I размера $n \times n$, т. е. $\mathrm{id}_A = (\mathrm{id}, I)$.

Пусть (f, T) и (f_1, T_1) — два морфизма категории $\mathcal{D}$. Очевидно, что если $f = f_1$, то $T = T_1$. Таким образом, гомоморфизм f определяет матрицу T в паре (f, T).

Пусть $A, a_1, \ldots, a_n$ и $B, b_1, \ldots, b_k$ — два объекта категории $\mathcal{D}$. Мы рассмотрим все гомоморфизмы $f\colon A \to B$, такие что пары (f, T) являются морфизмами категории $\mathcal{D}$ для подходящих матриц T. Эти гомоморфизмы образуют подгруппу $\mathrm{Mor}(A, B)$ группы $\mathrm{Hom}(A, B)$.

Теорема 6.1. *Группа* $\mathrm{Mor}(A, B)$ *является свободной подгруппой группы* $\mathrm{Hom}(A, B)$. *Ранг свободной группы* $\mathrm{Mor}(A, B)$ *совпадает с рангом* (*без кручения*) *группы* $\mathrm{Hom}(A, B)$.

Доказательство. Пусть $(f, T)\colon A, a_1, \ldots, a_n \to B, b_1, \ldots, b_k$ — некоторый морфизм категории $\mathcal{D}$. Определяя $\varphi(f) = T$, мы получаем гомоморфизм $\varphi\colon \mathrm{Mor}(A, B) \to \mathbf{Z}^{k\times n}$, где $\mathbf{Z}^{k\times n}$ является аддитивной группой матриц размера $k \times n$ с целыми элементами.

Предположим, что $\varphi(f) = 0$. Тогда матрица T состоит из нулей и $f(a_1) = \ldots = f(a_n) = 0$. Отсюда следует, что свободная подгруппа $F = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \subset A$ является подгруппой группы $\mathrm{Ker}(f)$. Поэтому имеет место следующая коммутативная диаграмма гомоморфизмов:

$$\begin{tikzcd} & A/F \arrow[dr] & \\ A \arrow[ur] \arrow[rr, "f"'] & & B \end{tikzcd}.$$

Так как группа A/F делимая периодическая, а группа B не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, то гомоморфизм f обязан быть нулевым. Это означает, что гомоморфизм $\varphi\colon \operatorname{Mor}(A,B) \to \mathbf{Z}^{k\times n}$ является инъективным. Следовательно, группа $\operatorname{Mor}(A,B)$ свободна как группа, изоморфная подгруппе свободной группы $\mathbf{Z}^{k\times n}$.

Пусть $f \in \operatorname{Hom}(A,B)$. Поскольку фактор-группа $B/\langle b_1,\dots,b_k\rangle$ периодическая, то найдётся целое положительное число m, такое что элементы $mf(a_1),\dots,mf(a_n)$ принадлежат подгруппе $\langle b_1,\dots,b_k\rangle$. Это означает, что $mf \in \operatorname{Mor}(A,B)$. Поэтому фактор-группа $\operatorname{Hom}(A,B)/\operatorname{Mor}(A,B)$ является периодической. Следовательно, ранги без кручения этих двух групп равны. $\square$

Следствие 6.2. *Пусть (f,T) и (g,S) — два морфизма категории $\mathcal{D}$ из объекта $A,a_1,\dots,a_n$ в объект $B,b_1,\dots,b_k$. Тогда если $T=S$, то $f=g$.*

Доказательство. Так как $\varphi(f-g)=T-S=0$, то $f-g=0$. $\square$

Следствие показывает, что и матрица T определяет гомоморфизм f в паре (f,T).

6.2. Категория $\mathcal{S}$

Напомним, что функтор $F\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$ из категории $\mathcal{A}$ в категорию $\mathcal{B}$ состоит из соответствия для объектов $A\mapsto F(A)$ и функций для морфизмов $F\colon \operatorname{Mor}_{\mathcal{A}}(A,B)\to \operatorname{Mor}_{\mathcal{B}}\bigl(F(A),F(B)\bigr)$ по всем объектам A и B категории $\mathcal{A}$. При этом $F(gf)=F(g)F(f)$ и $F(\mathrm{id}_A)=\mathrm{id}_{F(A)}$ для всех морфизмов f и g и всех объектов A категории $\mathcal{A}$.

Два функтора $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ и $G\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ называются изоморфными ($F\cong G$), если для любого $A\in\operatorname{Ob}\mathcal{A}$ имеется некоторый изоморфизм $h_A\colon F(A)\to G(A)$ категории $\mathcal{B}$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "h_A"'] & F(B) \arrow[d, "h_B"] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

в категории $\mathcal{B}$ коммутативна для любого морфизма $f\colon A\to B$ категории $\mathcal{A}$.

Функтор $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ называется эквивалентностью, если существует функтор $G\colon\mathcal{B}\to\mathcal{A}$, такой что композиции этих двух функторов изоморфны тождественным функторам, т. е. $FG\cong\mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ и $GF\cong\mathrm{id}_{\mathcal{A}}$. В этом случае категории $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называются эквивалентными.

Теперь мы определим категорию последовательностей $\mathcal{S}$. Эта категория была введена в [9], так же как и категория $\mathcal{D}$. Объектами категории $\mathcal{S}$ являются любые конечные последовательности элементов $a_1,\dots,a_n$ любых конечно представимых модулей M над кольцом полиадических чисел $\hat{\mathbf{Z}}$. Порядок элементов в последовательности существен, повторения в последовательности возможны.

Морфизмами из объекта $a_1, \ldots, a_n$ в объект $b_1, \ldots, b_k$ являются пары (φ, T), где $\varphi\colon \langle a_1, \ldots, a_n\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}} \to \langle b_1, \ldots, b_k\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$ — гомоморфизм $\hat{\mathbf{Z}}$-модулей, порождённых этими множествами элементов, и T — матрица размера $k \times n$ с целыми элементами, такая что имеет место матричное равенство

$$(\varphi a_1, \ldots, \varphi a_n) = (b_1, \ldots, b_k)T,$$

т. е. $\varphi(a_i) = t_{1i}b_1 + \ldots + t_{ki}b_k$, $i = 1, \ldots, n$, $T = \|t_{ij}\|$.

Пусть даны два морфизма

$$a_1, \ldots, a_n \xrightarrow{(\varphi,T)} b_1, \ldots, b_k \xrightarrow{(\psi,S)} c_1, \ldots, c_m.$$

Композиция этих двух морфизмов определяется равенством $(\psi, S)(\varphi, T) = (\psi\varphi, ST)$. Единичный морфизм какого-либо объекта состоит из тождественного гомоморфизма и единичной матрицы.

Теорема 6.3. *Категории $\mathcal{D}$ и $\mathcal{S}$ эквивалентны.*

Доказательство. Сначала мы определим функтор $\Phi\colon \mathcal{D} \to \mathcal{S}$. Пусть A — некоторая факторно делимая группа с базисом $a_1, \ldots, a_n$. Гомоморфизм $\mu\colon A \to \hat{A}$ — это Z-адическое пополнение группы A. Мы определяем $\Phi(A, a_1, \ldots, a_n)$ как последовательность $\mu(a_1), \ldots, \mu(a_n)$. Эта последовательность является объектом категории $\mathcal{S}$, потому что пополнение $\hat{A}$ является конечно представимым $\hat{\mathbf{Z}}$-модулем, порождённым элементами $\mu(a_1), \ldots, \mu(a_n)$, согласно следствию 2.9 и теореме 3.3. Если пара $(f, T)\colon A, a_1, \ldots, a_n \to B, b_1, \ldots, b_k$ является морфизмом категории $\mathcal{D}$, то пара $\Phi(f, T) = (\hat{f}, T)$ является морфизмом категории $\mathcal{S}$, определение гомоморфизма $\hat{f}$ см. в теореме 2.3.

Функтор $\Psi\colon \mathcal{S} \to \mathcal{D}$ определяется следующим образом. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — последовательность элементов некоторого конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля. Тогда $\hat{\mathbf{Z}}$-модуль $M = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$ также является конечно представимым (теорема B). По теореме 3.5 существует факторно делимая группа A с базисом $a_1, \ldots, a_n$, такая что $\hat{A} = M$ и $\mu(a_1) = b_1, \ldots, \mu(a_n) = b_n$. Мы определяем $\Psi(b_1, \ldots, b_n) = A, a_1, \ldots, a_n$, откуда немедленно получаем, что $\Phi\bigl(\Psi(b_1, \ldots, b_n)\bigr) = b_1, \ldots, b_n$. Пусть $(\varphi, T)\colon b_1, \ldots, b_n \to b'_1, \ldots, b'_k$ — морфизм категории $\mathcal{S}$. Тогда мы определяем $\Psi(\varphi, T)$ как морфизм категории $\mathcal{D}$, который был построен в теореме 3.9: $(f, T)\colon A, a_1, \ldots, a_n \to A', a'_1, \ldots, a'_k$. Так как $\hat{\mathbf{Z}}$-модульные гомоморфизмы φ и $\hat{f}$ совпадают на множестве порождающих элементов $b_1, \ldots, b_n$, то мы имеем $\varphi = \hat{f}$, откуда немедленно получаем, что $\Phi\bigl(\Psi(\varphi, T)\bigr) = (\varphi, T)$.

Таким образом, композиция функторов $\Phi\Psi$ совпадает с тождественным функтором категории $\mathcal{S}$, т. е. $\Phi\Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{S}}$. Теперь мы рассмотрим композицию этих функторов в обратном порядке $\Psi\Phi$.

Пусть $A', a'_1, \ldots, a'_n$ — некоторый объект категории $\mathcal{D}$. Тогда $\Phi(A', a'_1, \ldots, a'_n)$ — последовательность $\mu(a'_1), \ldots, \mu(a'_n)$ конечно представимого $\hat{\mathbf{Z}}$-модуля $\hat{A}'$. Обозначая $M = \hat{A}'$, $b_1 = \mu(a'_1), \ldots, b_n = \mu(a'_n)$, мы можем видеть, что $M = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle_{\hat{\mathbf{Z}}}$ по теореме 3.3. Далее мы в точности следуем доказательству теоремы 3.5, включая обозначения. $\Psi(b_1, \ldots, b_n) = A, a_1, \ldots, a_n$, где

$a_1 = b_1 + d_1, \ldots, a_n = b_n + d_n \in B \oplus D$, $B = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle_* \subset M$ и $D = \mathbf{Q}d_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{Q}d_n$ — это делимая группа без кручения с максимальной линейно независимой системой элементов $d_1, \ldots, d_n$. Мы собираемся определить некоторый гомоморфизм $h\colon A' \to A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_* \subset B \oplus D$. Пусть $a \in A'$. Тогда $ma = m_1 a'_1 + \ldots + m_n a'_n$ для подходящих целых чисел $m > 0, m_1, \ldots, m_n$. Отсюда следует, что $m\mu(a) = m_1 b_1 + \ldots + m_n b_n$. С другой стороны, мы имеем равенство $md = m_1 d_1 + \ldots + m_n d_n$ для элемента $d = (1/m)(m_1 d_1 + \ldots + m_n d_n)$. Следовательно, $m(\mu(a) + d) = m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n$. Это означает, что $\mu(a) + d \in A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_* \subset B \oplus D$. Наконец, мы можем определить $h(a) = \mu(a) + d$. Нетрудно проверить, что $h\colon A' \to A$ является корректно определённым гомоморфизмом групп.

Докажем, что гомоморфизм $h\colon A' \to A$ инъективен. Предполагая $h(a) = 0$, мы получаем, что $\mu(a) = 0$ и $m_1 = \ldots = m_n = 0$, откуда следует, что $ma = 0$. Тогда элемент a должен быть равен нулю, потому что он является периодическим и принадлежит группе без кручения $\mathrm{Ker}(\mu)$ [3, теорема 2.14].

Теперь докажем, что гомоморфизм $h\colon A' \to A$ сюръективен. Пусть $a = b + d \in A$, $b \in B$, $d \in D$. Тогда $ma = m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n$ для некоторых целых чисел $m > 0, m_1, \ldots, m_n$. В частности, имеет место равенство $mb = m_1 b_1 + \ldots + m_n b_n$. Так как $b \in \langle b_1, \ldots, b_n \rangle_* = \mathrm{Im}(\mu)$, то существует элемент $c \in A'$, такой что $\mu(c) = b$. Тогда $\mu(mc) = m_1 b_1 + \ldots + m_n b_n$. Отсюда следует, что $\mu\bigl(mc - (m_1 a'_1 + \ldots + m_n a'_n)\bigr) = 0$. Элемент $g = mc - (m_1 a'_1 + \ldots + m_n a'_n)$ принадлежит ядру гомоморфизма μ. Поскольку группа $\mathrm{Ker}(\mu)$ является делимой, то найдётся элемент $g' \in \mathrm{Ker}(\mu) \subset A'$, такой что $g = mg'$. Мы получаем равенство $m(c - g') = m_1 a'_1 + \ldots + m_n a'_n$, которое показывает, что $h(c - g') = a$, т. е. гомоморфизм h сюръективен.

Мы доказали, что гомоморфизм $h\colon A' \to A$ является изоморфизмом. Он также удовлетворяет матричному условию $\bigl(h(a'_1), \ldots, h(a'_n)\bigr) = (a_1, \ldots, a_n)I$, где I — единичная матрица. Это означает, что пара $h_{A'} = (h, I)\colon A' \to (\Psi\Phi)(A')$ является изоморфизмом категории $\mathcal{D}$.

Наконец, мы заметим, что в категории $\mathcal{D}$ диаграмма морфизмов

$$\begin{tikzcd}
A, a_1, \ldots, a_n \arrow[r, "{(f,T)}"] \arrow[d, "h_A"'] & B, b_1, \ldots, b_k \arrow[d, "h_B"] \\
(\Psi\Phi)(A) \arrow[r, "{(\Psi\Phi)(f,T)}"'] & (\Psi\Phi)(B)
\end{tikzcd}$$

является коммутативной, потому что вертикальные морфизмы соответствуют единичным матрицам, а горизонтальные морфизмы соответствуют одной и той же матрице T.

Следовательно, мы доказали, что $\Psi\Phi \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ и $\Phi\Psi = \mathrm{id}_{\mathcal{S}}$, т. е. функторы Φ и Ψ являются взаимно обратными эквивалентностями. $\square$

Литература

[1] Давыдова О. И. Факторно делимые группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 25—33.

[2] Фомин А. А. Категория матриц, представляющая две категории абелевых групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 223—244.

[3] Фомин А. А. К теории факторно делимых групп. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 153—167.

[4] Фомин А. А. Числовые кольца и модули над ними. — М.: Прометей, 2013.

[5] Царёв А. В. T-кольца и факторно делимые группы ранга 1 // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. — 2013. — № 4 (24). — С. 50—53.

[6] Baer R. Abelian groups without elements of finite order // Duke Math. J. — 1937. — Vol. 3. — P. 68—122.

[7] Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. — 1977. — Vol. 228, no. 3. — P. 197—214.

[8] Fomin A. A. Finitely presented modules over the ring of universal numbers // Abelian Group Theory and Related Topics. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 171). — P. 109—120.

[9] Fomin A. Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra. — 2009. — Vol. 322, no. 7. — P. 2544—2565.

[10] Fomin A. A., Wickless W. J. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126, no. 1. — P. 45—52.

[11] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vols. I, II. — New York: Academic Press, 1970; 1973.