О теории почти-векторных пространств

К.-Т. ХАУЭЛЛ
Стелленбосский университет, ЮАР
e-mail: kthowell@sun.ac.za

Д. С. ЧИСТЯКОВ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: chistyakovds@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: поле, почти-поле, векторное пространство, почти-векторное пространство.

Аннотация

В статье приводится краткое введение в теорию почти-векторных пространств.

Abstract

K.-T. Howell, D. S. Chistyakov, On the theory of near-vector spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 197—202.

We give a brief introduction to near-vector spaces.

1. Введение

Как известно, теория векторных пространств над полем играет важную роль в линейной алгебре. Эта теория может быть обобщена, если вместо поля рассматривать почти-поле, т. е. структуру, близкую к полю, в которой справедлив лишь один из законов дистрибутивности. В [2] понятие векторного пространства (линейного пространства) обобщается на более нелинейные структуры, так называемые почти-векторные пространства. В [10] А. П. ван дер Валт показал, как можно строить почти-векторное пространство, используя конечное число почти-полей, которые имеют изоморфные мультипликативные полугруппы. В [6] эта конструкция использовалась для характеризации всех конечномерных почти-векторных пространств над $\mathbb{Z}_p$. В [7] эти результаты были применены к конечномерным почти-векторным пространствам над любым конечным полем. Настоящая статья знакомит читателя с основными понятиями теории почти-векторных пространств.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 197—202.

2. Основные результаты и некоторые примеры

Алгебраическая структура $(N,+,\cdot)$ называется правым почти-кольцом, если
— $(N,+)$ — группа (не обязательно коммутативная);
— $(N,\cdot)$ — полугруппа;
— $(x+y)z = xz + yz$ для всех $x,y,z \in N$.

Более детально познакомиться с основами теории почти-колец можно по [9].

Определение 2.1 [2]. Пара (V,A) называется *почти-векторным пространством* если

1) $(V,+)$ — группа и A — множество эндоморфизмов группы V;
2) A содержит эндоморфизмы 0, id и $-\mathrm{id}$;
3) $A^* = A \setminus \{0\}$ — подгруппа группы $\mathrm{Aut}(V)$;
4) A действует без неподвижных точек на V, т. е. для $x \in V$, $\alpha,\beta \in A$ из $x\alpha = x\beta$ следует, что $x = 0$ или $\alpha = \beta$;
5) квазиядро $Q(V)$ группы V порождает V как группу, где

$$Q(V) = \{x \in V \mid \text{для любых } \alpha,\beta \in A \text{ найдётся } \gamma \in A, \text{ такой что } x\alpha + x\beta = x\gamma\}.$$

Традиционно группа V также называется *почти-векторным пространством над* A, элементы V называются *векторами* и элементы группы A *скалярами*. Действие группы A на V называется *умножением на скаляры*. Заметим, что из того, что $-\mathrm{id} \in A$, следует, что $(V,+)$ является абелевой группой. Размерность $\dim V$ почти-векторного пространства V однозначно определяется мощностью независимых порождающих $Q(V)$.

В случае когда квазиядро содержит не только нулевой элемент, оно индуцирует новое сложение по следующему правилу. Каждому $u \in Q(V)$ соответствует сложение $+_u$, заданное на A по закону $u(\alpha +_u \beta) := u\alpha + u\beta$, где $\alpha,\beta \in A$. Множество F вместе с указанным сложением и естественным умножением образует почти-поле (см., например, [2]).

Приведём некоторые примеры.

Во-первых, каждое векторное пространство является почти-векторным пространством. Однако, например, почти-поле F не является векторным пространством размерности 1 над самим собой.

Возьмём $V := \mathbb{Z}_5^4$ и $F := \mathbb{Z}_5$. Пусть $\alpha \in F$ действует на V по правилу

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\alpha = (x_1\alpha, x_2\alpha^3, x_3\alpha^3, x_4\alpha).$$

Все аксиомы почти-векторного пространства выполнены, в чём можно убедиться рутинной проверкой, при этом

$$Q(V) = \{(a,0,0,d) \mid a,d \in F\} \cup \{(0,b,c,0) \mid b,c \in F\}.$$

Рассмотрим поле Галуа $(\mathrm{GF}(3^2),+,\cdot)$. Определим новое умножение $\circ$ на его аддитивной группе $(\mathrm{GF}(3^2),+)$ по правилу $x \circ y = xy$ если y является квадратом в $(\mathrm{GF}(3^2),+,\cdot)$ и $x \circ y = x^3y$ в противном случае. Тройка

$(\mathrm{GF}(3^2), +, \circ)$ образует почти-поле. Определим также мультипликативный автоморфизм $\psi\colon \mathrm{GF}(3^2) \to \mathrm{GF}(3^2)$ так, что

$$\psi(\gamma) = 2\gamma, \quad \psi(2\gamma) = \gamma, \quad \psi(2+\gamma) = 1 + 2\gamma,$$
$$\psi(1+2\gamma) = 2+\gamma, \quad \psi(x) = x \ \text{ в противном случае.}$$

Пусть F обозначает почти-поле $(\mathrm{GF}(3^2), +, \circ)$ и $V := F^2$. Пусть $\alpha \in F$ действует на V по правилу $(a, b)\alpha = \big(a\alpha, b\psi(\alpha)\big)$. В этом случае мы также получаем структуру почти-векторного пространства.

Как и в ситуации векторных пространств, в данной теории мы можем говорить о подпространстве.

Определение 2.2 [5, определение 2.2]. Пусть (V, A) — почти-векторное пространство и V' — подгруппа группы $(V, +)$, порождённая множеством $XA = \{xa \mid x \in X,\ a \in A\}$, где X — независимая система элементов из $Q(V)$. Тогда пара (V', A) называется подпространством почти-векторного пространства (V, A).

Также справедлива следующая лемма.

Лемма 2.3 [5, лемма 2.3]. *Пусть (V, A) — почти-векторное пространство. Тогда $\varnothing \neq V' \subseteq V$ будет подпространством V тогда и только тогда, когда V' замкнуто относительно сложения и умножения на скаляры.*

В [4] доказана следующая лемма.

Лемма 2.4 [4, лемма 2.5-16]. *Если W — подпространство V, то $Q(W) = W \cap Q(V)$.*

Кроме того, справедлив следующий результат.

Лемма 2.5 [5, лемма 2.5]. *Пусть (V, A) — почти-векторное пространство, (V_1, A) и (V_2, A) — подпространства V. Тогда $(V_1 \cap V_2, A)$ — подпространство V.*

Пусть V — абелева группа и A — группа автоморфизмов группы V, определим множество $M_A(V)$ [4, пример 1.2]:

$$M_A(V) := \{f \in M(V) \mid f(v\alpha) = f(v)\alpha \text{ для всех } \alpha \in A,\ v \in V\}.$$

В [10, теорема 3.4] ван дер Валт получил характеризацию конечномерных почти-векторных пространств, основываясь на свойствах данного почти-кольца.

Теорема 2.6. *Пусть V — группа и $A := D \cup \{0\}$, где D — группа автоморфизмов, действующая на V без неподвижных точек. Тогда (V, A) — конечномерное почти-векторное пространство тогда и только тогда, когда*

1) *существует конечное число почти-полей $F_1, F_2, \ldots, F_n$;*
2) *существуют полугрупповые изоморфизмы $\psi_i\colon A \to F_i$;*
3) *существует изоморфизм групп $\Phi\colon V \to F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$, такой что если*

$$\Phi(v) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (x_i \in F_i),$$

то

$$\Phi(v\alpha) = \big(x_1\psi_1(\alpha), x_2\psi_2(\alpha), \ldots, x_n\psi_n(\alpha)\big) \ \text{ для всех } \ v \in V \ \text{ и } \ \alpha \in A.$$

Следуя этой теореме, мы можем строить почти-векторные пространства при помощи n почти-полей $F_1, F_2, \ldots, F_n$, таких что существуют изоморфизмы полугрупп

$$\vartheta_{ij}\colon (F_j, \cdot) \to (F_i, \cdot), \quad \text{где} \quad \vartheta_{ij}\vartheta_{jk} = \vartheta_{ik} \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i, j, k \leqslant n.$$

Для этого можно взять прямую сумму $V := F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$ в качестве аддитивной группы почти-векторного пространства и, полагая, что все мультипликативные полугруппы данных почти-полей изоморфны полугруппе $(F_{i_o}, \cdot)$, мы определяем умножение на скаляры по правилу

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)\alpha := \big(x_1\vartheta_{1i_o}(\alpha), x_2\vartheta_{2i_o}(\alpha), \ldots, x_n\vartheta_{ni_o}(\alpha)\big)$$

для всех $x_j \in F_j$ и $\alpha \in F_{i_o}$.

В [10] А. П. ван дер Валт изучал различные свойства почти-кольца $N := M_{F_{i_o}}(V)$. Точнее, он определил наименьшее под-почти-кольцо S почти-кольца N, которое содержит полное множество дистрибутивных идемпотентов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, где все e_j такие, что $e_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) := x_j$, и которое 2-примитивно на V (о примитивности в почти-кольцах см. [9]). Он показал, что каждая квадратная матрица $C := (c_{ij})$, где $c_{ij} \in F_i$, представляет элемент S, при этом действие на V определяется по правилу

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_{11}\vartheta_{11}(x_1) + \cdots + c_{1n}\vartheta_{1n}(x_n) \\ \vdots \\ c_{n1}\vartheta_{n1}(x_1) + \cdots + c_{nn}\vartheta_{nn}(x_n) \end{pmatrix}.$$

Определение 2.7. Под-почти-кольцо S почти-кольца $M_{F_{i_o}}(V)$, которое порождается множеством всех квадратных матриц, действие каждой из которых на V определяется указанным выше способом, называется *почти-кольцом матриц, определённым почти-полями* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *и изоморфизмами* (ϑ_{ij}), и обозначается $\mathcal{M}_n\big(\{F_i\}, (\vartheta_{ij})\big)$.

Заметим, что выбор i_o не влияет на определение данного почти-кольца. Также отметим, что, в случае когда V — обычное векторное пространство, почти-кольцо $\mathcal{M}_n\big(\{F_i\}, (\vartheta_{ij})\big)$ будет кольцом.

Теорема 2.8 [10, теорема 3.5]. *Пусть (V, A) — $ncdf$ мерное почти-векторное пространство. Тогда почти-кольцо $M_A(V)$ содержит под-почти-кольцо?S, изоморфное почти-кольцу матриц, определённому почти-полями $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и изоморфизмами (ϑ_{ij}). Если S не кольцо, то S плотно в $M_A(V)$.*

Следствие 2.9 [10, следствие 3.6]. *Пусть (V, A) — n-мерное почти-векторное пространство, но не векторное пространство. Тогда почти-кольцо $M_A(V)$ изоморфно почти-кольцу матриц, определённому почти-полями $F_1, F_2, \ldots, F_n$ и изоморфизмами (ϑ_{ij}).*

Пример 2.10 [10, пример 3.7]. Пусть $F_1 = F_2 := \mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, и пусть ϑ_{11} — тождественная функция и $\vartheta_{21}(x) := x^3$. Тогда $(F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ — почти-векторное пространство с умножением на скаляры, определяемым правилом

$$(x_1, x_2)\alpha := (x_1\alpha, x_2\alpha^3).$$

Не составляет труда проверить, что $(x_1, x_2)(\alpha + \beta)$ для $\alpha, \beta \in F$ не равно, вообще говоря, $(x_1, x_2)\alpha + (x_1, x_2)\beta$. Поэтому $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ не является векторным пространством. Здесь действие матрицы (c_{ij}) из $\mathcal{M}_n\big(\{F_i\}, (\vartheta_{ij})\big)$ на $F_1 \oplus F_2 = \mathbb{R}^2$ определяется по правилу

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2^{1/3} \\ c_{21}x_1^3 + c_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Такая характеризация почти-векторных пространств была использована в [6] для описания почти-векторных пространств над $\mathbb{Z}_p$. Кроме того, в [7] исследованы конечномерные почти-векторные пространства над полем.

В [2] особое место было уделено понятию регулярности. Почти-векторное пространство *регулярно*, если любые два вектора в $Q(V) \setminus \{0\}$ *совместны*, т. е. для любых двух векторов u и v из $Q(V)$ существует элемент $\lambda \in A \setminus \{0\}$, такой что $u + v\lambda \in Q(V)$. Каждое почти-векторное пространство может быть однозначно разложено в прямую сумму регулярных почти-векторных пространств V_j $(j \in J)$ [4, теорема 2.7-17]. Таким образом, теория почти-векторных пространств сводится к теории регулярных пространств.

Следующий результат известен, и его доказательство может быть найдено в [4, теорема 2.4-15].

Теорема 2.11. *Почти-векторное пространство V регулярно тогда и только тогда, когда существует базис, содержащий попарно совместные векторы.*

В [5] исследовано свойство регулярности для различных конструкций почти-векторных пространств и показана инвариантность канонического разложения относительно линейных отображений.

В настоящее время в рассматриваемой теории остаётся много интересных областей для дальнейшего изучения, особенно важны приложения в теории почти-полей и геометрии.

Литература

[1] Allenby R. B. J. T. Rings, Fields and Groups. — Oxford: Butterworth—Heinemann, 1991.

[2] André J, Lineare Algebra über Fastkörpern // Math. Z. — 1974. — Bd. 136. — S. 295—313.

[3] Burton D. M. Elementary Number Theory. — New York: McGraw-Hill, 2007.

[4] Howell K.-T. Contributions to the theory of near-vector spaces: Ph. D. Thesis. — Univ. of the Free State, 2008.

[5] Howell K.-T. On subspaces and mappings of near-vector spaces // Commun. Algebra. — 2015. — Vol. 43, no. 6. — P. 2524—2540.

[6] Howell K.-T., Meyer J. H. Finite-dimensional near-vector spaces over finite fields // Commun. Algebra. — 2010. — Vol. 38. — P. 86—93.

[7] Howell K.-T., Meyer J. H. Near-vector spaces determined by finite fields // J. Algebra. — 2014. — Vol. 398. — P. 55—62.

[8] Meldrum J. D. P. Near-Rings and Their Links with Groups. — New York: Pitman, 1985. — (Adv. Publ. Prog.; Vol. 134).

[9] Pilz G. Near-Rings: The Theory and Its Applications. — New York: North Holland, 1983. — (Math. Stud.; Vol. 23).

[10] Van der Walt A. P. J. Matrix near-rings contained in 2-primitive near-rings with minimal subgroups // J. Algebra. — 1992. — Vol. 148. — P. 296—304.

[11] Van der Walt A. P. J. Near-linear transformations of near-vector spaces // Proc. of a Conf. held at Oberwolfach, 5—11 Nov. 1989 / G. Betsch, G. Pilz, H. Wefelscheid, eds. — Univ. of Duisburg, 1995. — P. 189—193.