T-кольца

А. В. ЦАРЁВ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: an-tsarev@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: T-кольцо, E-кольцо, факторно делимая группа, условие на проекции.

Аннотация

В работе рассматриваются различные способы характеризации аддитивных групп T-колец.

Abstract

A. V. Tsarev, T-rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 203—207.

We consider various ways of characterizing the additive groups of T-rings.

В теории абелевых групп без кручения важную роль играют E-кольца, введённые Ф. Шульцем в 1973 году [8]. Ассоциативное кольцо K с единицей называется *E-кольцом*, если оно удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

1) отображение, ставящее в соответствие элементу $a \in K$ эндоморфизм левого умножения $\lambda_a \in \mathsf{E}(K^+)$, где $\lambda_a(x) = ax$, является изоморфизмом колец K и $\mathsf{E}(K^+)$;
2) K — коммутативное кольцо и $K \cong \mathsf{E}(K^+)$;
3) если $f \in \mathsf{E}(K^+)$ и $f(1) = 0$, то $f = 0$.

Аддитивные группы E-колец называются *E-группами*.

В 1977 году Р. Боушел и Ф. Шульц [3] рассмотрели и описали E-кольца специального вида, которые они назвали T-кольцами.

Определение 1. Ассоциативное кольцо с единицей K называется *T-кольцом*, если умножение

$$\mu\colon K \otimes_{\mathbb{Z}} K \to K, \quad \mu(a \otimes b) = ab,$$

является изоморфизмом аддитивных групп.

Примерами T-колец служат подкольца с единицей поля $\mathbb{Q}$ и кольца классов вычетов.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 203—207.

Теорема 1 [3]. *Следующие утверждения равносильны*:

1) K — T-*кольцо*;
2) K — E-*кольцо и* $K \otimes K = K \otimes_K K$;
3) $K/t(K)$ *изоморфно подкольцу поля* $\mathbb{Q}$, *и если* $t_p(K^+) \neq 0$, *то* $t_p(K^+)$ — *циклическая группа и* $K/t(K)$ *делится на* p. □

В связи с последней теоремой Ш. Файгельшток в [4] поставил следующий вопрос.

Вопрос [4, 4.7.30]. Пусть группа A удовлетворяет следующим условиям:

1) $r\big(A/t(A)\big) = 1$;
2) $A/t(A)$ имеет идемпотентный тип;
3) $t_p(A)$ — циклическая группа при любом p;
4) если $t_p(A) \neq 0$, то $A/t_p(A)$ — p-делимая группа.

Верно ли, что тогда A является аддитивной группой T-кольца?

Условия из вопроса Файгельштока, конечно же, являются необходимыми для аддитивных групп T-колец, но не являются достаточными. Проиллюстрируем это с помощью следующей сравнительно простой конструкции. Пусть $\chi = (2, 2, \ldots)$ — характеристика, состоящая из одних двоек, и

$$\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^2},$$

где P — множество всех простых чисел и $\mathbb{Z}_{p^2}$ — кольцо классов вычетов по модулю p^2. Обозначим через ε_p единицу кольца $\mathbb{Z}_{p^2}$. Рассмотрим в $\mathbb{Z}_\chi$ подгруппу A, сервантно порождённую элементом $\alpha = (p\varepsilon_p)_{p \in P}$,

$$A = \langle \alpha \rangle_* \subset \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^2}.$$

Элемент $\beta \in \mathbb{Z}_\chi$ принадлежит группе A тогда и только тогда, когда $n\beta$ лежит в линейной оболочке $\langle \alpha \rangle$ при некотором натуральном числе n. Из этого, в частности, следует, что все элементы конечного порядка из $\mathbb{Z}_\chi$ принадлежат группе A, т. е.

$$t(A) = t(\mathbb{Z}_\chi) = \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^2}.$$

Из построения группы A следует, что $r\big(A/t(A)\big) = 1$, а значит, A удовлетворяет условию 1) вопроса Файгельштока. Далее, так как

$$\mathbb{Z}_\chi / t(\mathbb{Z}_\chi) = \Big[\prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^2}\Big] \Big/ \Big[\bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^2}\Big] \cong \bigoplus_{\mathfrak{c}} \mathbb{Q}$$

и фактор-группа $A/t(A)$ сервантно вкладывается в $\mathbb{Z}_\chi / t(\mathbb{Z}_\chi)$, то $A/t(A) \cong \mathbb{Q}$. Таким образом, $\operatorname{type}\big(A/t(A)\big) = (\infty, \infty, \ldots)$, и A удовлетворяет условию 2) вопроса Файгельштока.

По построению $t_p(A) = \mathbb{Z}_{p^2}$ для любого простого числа p, следовательно, A удовлетворяет условию 3) вопроса Файгельштока.

Заметим, что $A = t_p(A) \oplus A'_p$ и

$$A'_p = A/t_p(A) = A/\mathbb{Z}_{p^2} \subset \prod_{q \neq p} \mathbb{Z}_{q^2} = \mathbb{Z}_\kappa,$$

причём группа A'_p сервантно порождается элементом $\alpha' = (q\varepsilon_q)_{q\neq p}$ в группе $\mathbb{Z}_\kappa$,

$$A'_p = \langle \alpha' \rangle_* \subset \prod_{q \neq p} \mathbb{Z}_{q^2}.$$

Так как $\mathbb{Z}_\kappa$ — p-делимая группа, то для любого элемента $\beta \in A'_p$ уравнение $px = \beta$ имеет решение $x = \gamma$ в группе $\mathbb{Z}_\kappa$. Но $n\beta \in \langle \alpha' \rangle$ при некотором натуральном числе n, следовательно, $pn\gamma \in \langle \alpha' \rangle$ и $\gamma \in \langle \alpha' \rangle_* = A'_p$. Таким образом, A'_p — p-делимая группа, и значит, A удовлетворяет условию 4) вопроса Файгельштока.

Убедимся теперь, что построенная нами группа A не может служить аддитивной группой T-кольца. Для этого сначала заметим, что $t_p(A) = \mathbb{Z}_{p^2}$ является вполне характеристической подгруппой группы A при любом простом числе p, следовательно, любое умножение $* \in \operatorname{Mult} A$ индуцирует умножения на каждой p-примарной компоненте группы A, для обозначения которых мы также будем использовать символ $*$.

Пусть $*$ — произвольное умножение на группе A и $a_1, a_2 \in A$. Тогда $m_1 a_1 = n_1 \alpha$ и $m_2 a_2 = n_2 \alpha$ при некоторых натуральных m_1, m_2 и целых n_1, n_2, откуда следует, что

$$\begin{aligned} m_1 m_2 (a_1 * a_2) &= (m_1 a_1) * (m_2 a_2) = (n_1 \alpha) * (n_2 \alpha) = n_1 n_2 (\alpha * \alpha) = \\ &= n_1 n_2 [(p\varepsilon_p) * (p\varepsilon_p)] = n_1 n_2 \big(p^2 (\varepsilon_p * \varepsilon_p)\big) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, произведение $a_1 * a_2$ является элементом конечного порядка при любых $a_1, a_2 \in A$ и любом $* \in \operatorname{Mult} A$. Из этого следует, что на группе A нельзя задать умножения с единичным элементом, в частности, на группе A нельзя задать умножения, превращающего её в T-кольцо.

Отрицательное решение вопроса Файгельштока не означает невозможности описания аддитивных групп T-колец на языке элементарных групповых терминов. Более того, такое описание было получено Д. Уилсоном [9] в 1987 г. и автором [2] в 2013 г. Д. Уилсон дополнил условия Файгельштока следующим образом.

Теорема 2 [9]. *Группа A является аддитивной группой T-кольца тогда и только тогда, когда для неё выполняются следующие условия*:

1) *A удовлетворяет всем условиям из вопроса Файгельштока*;
2) *существует элемент $a \in A$, такой что для любой проекции $\pi_p\colon A \to t_p(A)$ элемент $\pi_p(a)$ порождает группу $t_p(A)$.* □

Описание Уилсона интересно ещё и тем, что его второе условие, по-видимому, является первым примером использования так называемого условия на проекции, которое с середины 1990-х годов широко используется при работе со смешанными самомалыми группами. Кроме того, Д. Уилсон заметил, что любая группа A, удовлетворяющая условиям из вопроса Файгельштока, допускает структуру кольца $(A, \cdot)$, при которой отображение $\mu\colon A \otimes A \to A$, действующее по закону $\mu(a \otimes b) = ab$, является изоморфизмом. Дополнительное условие (условие 2) из теоремы 2) необходимо для того, чтобы гарантировать существования на группе A структуры кольца с единицей.

В [2] для характеризации аддитивных групп T-колец мы использовали факторно делимые группы.

Теорема 3 [2]. *Если K — бесконечное T-кольцо, то его аддитивная группа — факторно делимая группа ранга 1. Если A — факторно делимая группа ранга 1, то на ней существует умножение, превращающее группу A в T-кольцо.* $\square$

Группу A мы называем *факторно делимой*, если A не содержит ненулевых делимых периодических подгрупп, но содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую что A/F — делимая периодическая группа. Это определение является обобщением известного определения Бьюмонта-Пирса на случай в том числе и смешанных групп. Впервые оно было использовано А. А. Фоминым и У. Уиклессом в [5], где они построили двойственность категорий групп без кручения конечного ранга и факторно делимых групп с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов.

Факторно делимые группы ранга 1 подробно исследовались О. И. Давыдовой в [1]. При этом использовалась следующая конструкция. Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика и $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p \in P} K_p$, где $K_p = \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ при $m_p < \infty$ и $K_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел при $m_p = \infty$. В аддитивной группе кольца $\mathbb{Z}_\chi$ построим подгруппу R^χ, сервантно порождённую единицей кольца $\mathbb{Z}_\chi$,

$$R^\chi = \langle 1 \rangle_* \subseteq \mathbb{Z}_\chi.$$

В [1] доказаны следующие факты.

1. Всякая редуцированная факторно делимая группа ранга 1 изоморфна группе R^χ для некоторой характеристики χ.
2. Любая бесконечная группа R^χ является факторно делимой группой ранга 1.
3. $R^\chi \cong R^\kappa$ тогда и только тогда, когда $\chi = \kappa$.
4. $\operatorname{End} R^\chi \cong R^\chi$, и кольцо $\mathsf{E}(R^\chi)$ коммутативное для любой характеристики χ, т. е. R^χ — E-группа.

Характеристика χ называется *кохарактеристикой* факторно делимой группы A ранга 1, если имеет место изоморфизм $A \cong R^\chi$. Заметим также, что нередуцированные факторно делимые группы ранга 1 — это группы вида $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$, а конечные T-кольца — это кольца классов вычетов. Таким образом, T-кольца — это (с точностью до изоморфизма) кольца вида $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$ и R^χ для всех натуральных m и произвольных характеристик χ.

В заключение отметим, что кольца R^χ, где характеристика χ не содержит бесконечных p-компонент, использовались ещё в 1964—1968 годах в работах Л. Фукса, И. Гальперина и К. Рангасвами [6, 7] при исследовании регулярных и π-регулярных колец.

Литература

[1] Давыдова О. И. Факторно делимые группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, № 3. — С. 25—33.

[2] Царёв А. В. T-кольца и факторно делимые группы ранга 1 // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. — 2013. — № 4 (24). — С. 50—53.

[3] Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. — 1977. — Vol. 228, no. 3. — P. 197—214.

[4] Feigelstock S. Additive Groups of Rings. — London: Pitman, 1983. — (Pitman Research Notes Math.).

[5] Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126. — P. 45—52.

[6] Fuchs L., Halperin I. On the imbedding of a regular ring with identity // Fund. Math. — 1964. — Vol. 54. — P. 285—290.

[7] Fuchs L., Rangaswamy K. M. On generalized regular rings // Math. Z. — 1968. — Vol. 107, no. 1. — P. 71—81.

[8] Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Austral. Math. Soc. — 1973. — Vol. 15. — P. 60—69.

[9] Wilson G. V. Additive groups of T-rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 99, no. 2. — P. 219—220.