О кольцах квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с сильно неразложимым квазислагаемым ранга 2

А. В. ЧЕРЕДНИКОВА
Костромской государственный технологический университет
e-mail: av-cherednikova@list.ru

УДК 512.541.7

Ключевые слова: кольцо квазиэндоморфизмов, абелева группа, группа без кручения, квазиразложимая группа.

Аннотация

Получено описание колец квазиэндоморфизмов абелевых групп G без кручения ранга 4, квазиразложимых в прямую сумму групп A_1, A_2 ранга 1 и сильно неразложимой группы B ранга 2, в случае когда группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\otimes\mathrm{Hom}(B, A_2)$ имеет ранг 2.

Abstract

A. V. Cherednikova, On the quasi-endomorphism rings of quasi-decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 *with a strongly indecomposable quasi-summand of rank* 2, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 209—225.

We obtain a description of quasi-endomorphism rings of torsion-free Abelian groups G of rank 4 that are quasi-decomposable into a direct sum of groups A_1 and A_2 of rank 1 and a strongly indecomposable group B of rank 2 in the case where the quasi-homomorphism group $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}(B, A_2)$ has rank 2.

Все рассматриваемые в работе группы абелевы без кручения конечного ранга, записаны аддитивно.

Группа G называется *квазиразложимой*, если она квазиравна прямой сумме ненулевых подгрупп её делимой оболочки.

Под *кольцом квазиэндоморфизмов* $\mathcal{E}(G)$ группы G понимается минимальная рациональная алгебра, содержащая кольцо $E(G)$ эндоморфизмов группы G.

В статье даётся описание колец квазиэндоморфизмов абелевых групп G без кручения ранга 4, квазиразложимых в прямую сумму групп A_1, A_2 ранга 1 и сильно неразложимой группы B ранга 2, в случае когда группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}(B, A_2)$ имеет ранг 2. Доказано, что с точностью до изоморфизма существуют 19 алгебр и 6 бесконечных серий алгебр, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов этих групп.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 209—225.
© 2015 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Приведём используемые в работе обозначения.

Пусть G — группа. Тогда $\mathrm{IT}(G)$ и $\mathrm{OT}(G)$ — это соответственно внутренний и внешний типы группы G [9]. Если $S \subseteq G$, то через $\langle S \rangle$ обозначается подгруппа группы G, порождённая множеством S, а через $\langle S \rangle_*$ — сервантная подгруппа группы G, порождённая множеством S.

Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Через $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A, B)$ условимся обозначать группу квазигомоморфизмов $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}(A, B)$ для произвольных групп A и B.

Если группа R ранга 1 имеет тип τ, то будем писать $t(R) = \tau$. Пусть R_i, R_j — группы ранга 1, такие что $t(R_i) = \tau_i$ и $t(R_j) = \tau_j$. Запись $\tau_i \ \xi \ \tau_j$ означает, что тип τ_i несравним с типом τ_j.

Отсутствующие в тексте определения, факты и обозначения можно найти в [1, 3].

Соглашение 1. Всюду далее G будет обозначать квазиразложимую абелеву группу без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение

$$G \doteq A_1 \oplus A_2 \oplus B, \tag{1}$$

где A_1 и A_2 — группы ранга 1, B — сильно неразложимая группа ранга 2.

Соглашение 2. В теоремах 1—6 нижний индекс $\mathbf{i}$ в обозначении алгебры $\mathbf{A}_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{j})}$ — её размерность над $\mathbb{Q}$, верхний индекс $\mathbf{j}$ — порядковый номер алгебры. Кроме этого, $\mathbf{k}$ в обозначении алгебры $\mathbf{A}_{\mathbf{i}}^{(\mathbf{j})}(\mathbf{k})$ и в записи представляющей её матрицы — целое число, свободное от квадратов.

Теорема 1. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (1), *где*

$$t(A_1) = \tau_1, \quad t(A_2) = \tau_2, \quad \mathrm{IT}(B) = \tau_3, \quad \mathrm{OT}(B) = \tau_4.$$

Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1)$ и $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_2)$ имеют ранг 2. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{2})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{3})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом справедливы следующие утверждения:

1) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k})$, *если и только если* $\tau_1 \, \xi \, \tau_2$, $\tau_1 > \tau_4$, $\tau_2 > \tau_4$;
2) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{2})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k})$, *если и только если* $\tau_1 > \tau_2$, $\tau_1 > \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$;
3) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{3})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k})$, *если и только если* $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 \geqslant \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$.

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы. Обозначим через H прямую сумму групп A_1, A_2 ранга 1 и сильно неразложимой группы B ранга 2, т. е. $H = A_1 \oplus A_2 \oplus B$.

Замечание 1. Кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(H)$ группы H изоморфно подалгебре полной матричной алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ порядка 4 над полем $\mathbb{Q}$.

Зафиксируем ненулевые элементы $a_i \in A_i$, $i = 1, 2$, и линейно независимые элементы $b_1, b_2 \in B$. Положим

$$R_1 = \langle a_1 \rangle_*, \quad R_2 = \langle a_2 \rangle_*, \quad R_3 = \langle b_1 \rangle_*, \quad R_4 = \langle b_2 \rangle_*.$$

Обозначим через $i_k \colon R_k \to H$ и $\pi_l \colon H \to \mathbb{Q} \otimes R_l$, $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции соответственно. Тогда элементы $i_1(a_1)$, $i_2(a_2)$, $i_3(b_1)$, $i_4(b_2)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы H.

Всякий квазиэндоморфизм $\varphi \in \mathcal{E}(H)$ вполне определяется элементами $\varphi i_1(a_1)$, $\varphi i_2(a_2)$, $\varphi i_3(b_1)$, $\varphi i_4(b_2)$, которые могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \varphi i_1(a_1) &= \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \alpha_{31} b_1 + \alpha_{41} b_2, \\ \varphi i_2(a_2) &= \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \alpha_{32} b_1 + \alpha_{42} b_2, \\ \varphi i_3(b_1) &= \alpha_{13} a_1 + \alpha_{23} a_2 + \alpha_{33} b_1 + \alpha_{43} b_2, \\ \varphi i_4(b_2) &= \alpha_{14} a_1 + \alpha_{24} a_2 + \alpha_{34} b_1 + \alpha_{44} b_2, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$. При этом $\alpha_{lk} r_l = \pi_l \varphi i_k(r_k)$, $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, где под r_l и r_k понимаются элементы из системы a_1, a_2, b_1, b_2, принадлежащие соответственно R_l и R_k.

Вернёмся к доказательству теоремы. Группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2)$ имеют ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_1 \geqslant \tau_4$ и $\tau_2 \geqslant \tau_4$ [9]. Отсюда следует, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) = 0$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B) = 0$ [5]. Тогда α_{31}, α_{41}, α_{32}, α_{42} в равенствах (2) замечания 1 равны нулю.

Известно [8], что если B — сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 2, то кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(B)$ имеет один из следующих видов:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Q} \right\}, \quad \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \mathbf{k}y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q}, \ \mathbf{k} \text{ — целое число, свободное от квадратов} \right\}.$$

Согласно условию теоремы между типами квазислагаемых группы G в разложении (1) возможны следующие случаи соотношений:

1) $\tau_1 \, \xi \, \tau_2$, $\tau_1 > \tau_4$, $\tau_2 > \tau_4$;
2) $\tau_1 > \tau_2$, $\tau_1 > \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$;
3) $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 \geqslant \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$.

Вычислим непосредственно кольца квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(H)$ группы H, исходя из возможных соотношений между типами квазислагаемых группы G в разложении (1) и классификации колец квазиэндоморфизмов сильно неразложимых групп ранга 2.

Пусть типы квазислагаемых группы G в разложении (1) удовлетворяют условиям $\tau_1 \ \xi \ \tau_2$, $\tau_1 > \tau_4$, $\tau_2 \leqslant \tau_4$. Так как $\tau_1 \ \xi \ \tau_2$, то α_{21} и α_{12} в равенствах (2) замечания 1 равны нулю.

Пусть $\mathcal{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. Тогда равенства (2) замечания 1 примут вид

$$\begin{aligned}
&\varphi i_1(a_1) = \alpha_{11}a_1,\\
&\varphi i_2(a_2) = \alpha_{22}a_2,\\
&\varphi i_3(b_1) = \alpha_{13}a_1 + \alpha_{23}a_2 + \alpha_{33}b_1,\\
&\varphi i_4(b_2) = \alpha_{14}a_1 + \alpha_{24}a_2 + \alpha_{33}b_2,
\end{aligned}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$. Следовательно, в этом случае

$$\mathcal{E}(H) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{1})}.$$

Если

$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \ x, y \in \mathbb{Q} \right\},$$

то равенства (2) замечания 1 примут вид

$$\begin{aligned}
&\varphi i_1(a_1) = \alpha_{11}a_1,\\
&\varphi i_2(a_2) = \alpha_{22}a_2,\\
&\varphi i_3(b_1) = \alpha_{13}a_1 + \alpha_{23}a_2 + \alpha_{33}b_1 + \alpha_{43}b_2,\\
&\varphi i_4(b_2) = \alpha_{14}a_1 + \alpha_{24}a_2 + \alpha_{33}b_2,
\end{aligned}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$. Тогда

$$\mathcal{E}(H) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{1})}.$$

В случае когда

$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \mathbf{k}y & x \end{pmatrix} \middle| \ x, y \in \mathbb{Q},\ \mathbf{k} \text{ — целое число, свободное от квадратов} \right\},$$

равенства (2) замечания 1 имеют вид

$$\begin{aligned}
&\varphi i_1(a_1) = \alpha_{11}a_1,\\
&\varphi i_2(a_2) = \alpha_{22}a_2,\\
&\varphi i_3(b_1) = \alpha_{13}a_1 + \alpha_{23}a_2 + \alpha_{33}b_1 + \mathbf{k}\alpha_{34}b_2,\\
&\varphi i_4(b_2) = \alpha_{14}a_1 + \alpha_{24}a_2 + \alpha_{34}b_1 + \alpha_{33}b_2,
\end{aligned}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{E}(H) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k}).$$

Кольца квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(H)$ группы H для остальных возможных случаев соотношений между типами квазислагаемых группы G в разложении (1) вычисляются аналогично.

Таким образом,

1) $\mathcal{E}(H)$ изоморфно одному из колец $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k})$ тогда и только тогда, когда $\tau_1 \,\xi\, \tau_2$, $\tau_1 > \tau_4$, $\tau_2 > \tau_4$;
2) $\mathcal{E}(H)$ изоморфно одному из колец $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{2})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k})$ тогда и только тогда, когда $\tau_1 > \tau_2$, $\tau_1 > \tau_4$, $\tau_2 > \tau_4$;
3) $\mathcal{E}(H)$ изоморфно одному из колец $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{3})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{10}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{k})$ тогда и только тогда, когда $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 \geqslant \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$.

Так как по условию $G \doteq H$, то $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$ [7]. Теорема доказана. □

Теорема 2. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (1), *где*

$$t(A_1) = \tau_1, \quad t(A_2) = \tau_2, \quad \mathrm{IT}(B) = \tau_3, \quad \mathrm{OT}(B) = \tau_4.$$

Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_2)$ и $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1)$ имеют соответственно ранги 2 и 1, $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_1, B) = 0$. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{2})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{3})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{4})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом справедливы следующие утверждения:

1) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A_6^{(1)}}$, $\mathbf{A_7^{(2)}}$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_1 \ \xi \ \tau_2$, $\tau_1 > \tau_3$, $\tau_1 \ \xi \ \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$ *и существует однозначно определённая сервантная подгруппа* D *ранга* 1 *группы* B,*такая что* $t(B/D) \leqslant \tau_1$;
2) $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A_7^{(3)}}$, $\mathbf{A_8^{(4)}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:
   а) $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_1 > \tau_3$, $\tau_1 \ \xi \ \tau_4$, $\tau_2 > \tau_4$ *и существует однозначно определённая сервантная подгруппа* D *ранга* 1 *группы* B, *такая что* $t(B/D) \leqslant \tau_1$;
   б) $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$ *и существует однозначно определённая сервантная подгруппа* D *ранга* 1 *группы* B, *такая что* $t(B/D) \leqslant \tau_1$, *но не существует сервантной подгруппы* C *ранга* 1 *группы* B, *такой что* $t(C) \geqslant \tau_1$.

Доказательство. Пусть G удовлетворяет условию теоремы и $H = A_1 \oplus \oplus A_2 \oplus B$. Задача описания колец квазиэндоморфизмов группы G сводится к описанию колец квазиэндоморфизмов группы H, так как $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$ [7].

Группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_2 \geqslant \tau_4$ [9]. Следовательно, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B) = 0$ [5]. Тогда α_{32}, α_{42} в равенствах (2) замечания 1 равны нулю.

Далее, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ имеет ранг 1 и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий [2]:

а) $\tau_3 \leqslant \tau_1$, $\tau_1 \ \xi \ \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$;
б) $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа D ранга 1 группы B, такая что $t(B/D) \leqslant \tau_1$, но не существует сервантной подгруппы C ранга 1 группы B, такой что $t(C) \geqslant \tau_1$.

Пусть выполняется условие а). В этом случае типы квазислагаемых A_1 и A_2 могут удовлетворять одному из следующих соотношений: $\tau_1 \ \xi \ \tau_2$ или $\tau_1 < \tau_2$. Условие $\tau_1 \geqslant \tau_2$ не может выполняться, так как в противном случае $\tau_1 \geqslant \tau_4$, что противоречит условию $\tau_1 \ \xi \ \tau_4$.

Рассмотрим ненулевой элемент $a_2 \in A_2$ и линейно независимые элементы $b_1, b_2 \in B$. Пусть $g \in \mathcal{E}(H)$, $g\colon B \to A_1$ и $g\colon A_1 \to A_1$. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что $g(b_1) = a_1$ и $\operatorname{Ker}(g) = \langle b_2 \rangle_*$, где $a_1 \in A_1$.

Положим

$$R_1 = \langle a_1 \rangle_*, \quad R_2 = \langle a_2 \rangle_*, \quad R_3 = \langle b_1 \rangle_*, \quad R_4 = \langle b_2 \rangle_*.$$

Обозначим через $i_k\colon R_k \to H$ и $\pi_l\colon H \to \mathbb{Q} \otimes R_l$, $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции соответственно. Тогда элементы $i_1(a_1)$, $i_2(a_2)$, $i_3(b_1)$, $i_4(b_2)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы H.

Пусть $\tau_1 \ \xi \ \tau_2$. В этом случае не может выполняться условие $\tau_1 = \tau_3$, так как в противном случае получаем, что $\tau_2 > \tau_1$. Заметим также, что если $\tau_1 \ \xi \ \tau_2$, то α_{21}, α_{12} в равенствах (2) замечания 1 равны нулю.

Легко убедиться, что если $\mathcal{E}(B) \cong \mathbb{Q}$, то

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{1})}.$$

Если

$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\},$$

то мощность множества типов группы B равна 2 [6]. Следовательно, $t(b_1) < t(b_2)$. Действительно, предположим, что $t(b_1) > t(b_2)$. Тогда $t(B/\langle b_2 \rangle_*) = \tau_4$ [2]. Получили противоречие, так как $t(B/\langle b_2 \rangle_*) \leqslant \tau_1$ и $\tau_1 \; \xi \; \tau_4$. Следовательно, в рассматриваемом случае выполнение условий $g(b_1) = a_1$ и $\mathrm{Ker}(g) = \langle b_2 \rangle_*$ обязательно. Тогда равенства (2) замечания 1 примут следующий вид:

$$\begin{aligned} &\varphi i_1(a_1) = \alpha_{11} a_1, \\ &\varphi i_2(a_2) = \alpha_{22} a_2, \\ &\varphi i_3(b_1) = \alpha_{13} a_1 + \alpha_{23} a_2 + \alpha_{33} b_1 + \alpha_{43} b_2, \\ &\varphi i_4(b_2) = \alpha_{24} a_2 + \alpha_{33} b_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{2})}.$$

Замечание 2. Если $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1) \neq 0$, то группа B не может быть однородной, так как в противном случае $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1)$, очевидно, имеет ранг 2. Значит, кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(B)$ не может быть полем квадратичных чисел [6].

Пусть теперь $\tau_1 < \tau_2$, значит, α_{12} в равенствах (2) замечания 1 равно нулю. В этом случае не могут выполняться условия $\tau_1 = \tau_3$ и $\tau_2 = \tau_4$, так как иначе получаем, что $\tau_4 > \tau_1$, что противоречит условию $\tau_1 \; \xi \; \tau_4$. Легко убедиться, что в этом случае

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{3})},$$

если $\mathcal{E}(B) \cong \mathbb{Q}$, и

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{4})},$$

если

$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Перейдём к рассмотрению случая, когда выполняется условие б). Так как $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и $\tau_2 \geqslant \tau_4$, то $\tau_1 < \tau_2$. Следовательно, $\mathcal{E}(G)$ изоморфно $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{3})}$ или $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{4})}$. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (1)*), где*

$$t(A_1) = \tau_1, \quad t(A_2) = \tau_2, \quad \mathrm{IT}(B) = \tau_3, \quad \mathrm{OT}(B) = \tau_4.$$

Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_1, B)$ и $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_2)$ имеют соответственно ранги 1 и 2, $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1) = 0$. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{4})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{5})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом $\mathbf{K}$ изоморфно одному из колец $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{4})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{5})}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

а) *$\tau_1 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$;*

б) *$\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$, но не существует сервантной подгруппы D ранга 1 группы B, такой что $t(B/D) \leqslant \tau_1$.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A_1 \oplus A_2 \oplus B$.

Группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_2)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_2 \geqslant \tau_4$ [9]. Отсюда следует, что $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_2, B) = 0$ [5]. Значит, α_{32}, α_{42} в равенствах (2) замечания 1 равны нулю.

Далее, $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_1, B)$ имеет ранг 1 и $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий [2]:

а) $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_1 \leqslant \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$;

б) $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и существует однозначно определённая сервантная подгруппа C ранга 1 группы B, такая что $t(C) \geqslant \tau_1$, но не существует сервантной подгруппы D ранга 1 группы B, такой что $t(B/D) \leqslant \tau_1$.

Рассмотрим случай а). Так как $\tau_1 \leqslant \tau_4$ и $\tau_4 \leqslant \tau_2$, то $\tau_1 \leqslant \tau_2$. Однако условие $\tau_1 = \tau_2$ не может выполняться, так как иначе $\tau_1 = \tau_4$ и, значит, $\tau_1 > \tau_3$. Получили противоречие, так как $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$. Таким образом, в рассматриваемом случае типы квазислагаемых A_1 и A_2 должны удовлетворять соотношению $\tau_1 < \tau_2$. Более того, в этом случае не может выполняться условие $\tau_1 = \tau_4$, так как иначе отсюда следует, что $\tau_1 > \tau_3$, что противоречит условию $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$.

Пусть $f \in \mathcal{E}(H)$, $f\colon A_1 \to B$ и $f\colon B \to B$. Предположим, что $f(a_1) = b_1$, где $a_1 \in A_1$, $b_1 \in B$. Возьмём элемент $b_2 \in B$, такой что b_1 и b_2 линейно независимы. Положим

$$R_1 = \langle a_1 \rangle_*, \quad R_2 = \langle a_2 \rangle_*, \quad R_3 = \langle b_1 \rangle_*, \quad R_4 = \langle b_2 \rangle_*.$$

Обозначим через $i_k\colon R_k \to H$ и $\pi_l\colon H \to \mathbb{Q} \otimes R_l$, $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции соответственно. Тогда элементы $i_1(a_1)$, $i_2(a_2)$, $i_3(b_1)$, $i_4(b_2)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы H.

Замечание 3. Если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) \neq 0$, то группа B не может быть однородной, так как иначе $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$, очевидно, имеет ранг 2. Значит, кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(B)$ не может быть полем квадратичных чисел [6].

Продолжим доказательство теоремы. Пусть $\mathcal{E}(B) \cong \mathbb{Q}$. Тогда равенства (2) замечания 1 примут вид

$$\begin{aligned}
&\varphi i_1(a_1) = \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \alpha_{31} b_1,\\
&\varphi i_2(a_2) = \alpha_{22} a_2,\\
&\varphi i_3(b_1) = \alpha_{23} a_2 + \alpha_{33} b_1,\\
&\varphi i_4(b_2) = \alpha_{24} a_2 + \alpha_{33} b_2.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}(H) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{4})}.$$

Если

$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\},$$

то мощность множества типов группы B равна 2 [6]. Так как по предположению $f(a_1) = b_1$, то $t(a_1) \leqslant t(b_1)$. Тогда $t(b_1) > t(b_2)$. Действительно, если бы $t(b_1) < t(b_2)$, то $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ имел бы ранг 2, что противоречило бы условию теоремы. В этом случае равенства (2) замечания 1 примут вид

$$\begin{aligned}
&\varphi i_1(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \alpha_{31}b_1,\\
&\varphi i_2(a_2) = \alpha_{22}a_2,\\
&\varphi i_3(b_1) = \alpha_{23}a_2 + \alpha_{33}b_1,\\
&\varphi i_4(b_2) = \alpha_{24}a_2 + \alpha_{34}b_1 + \alpha_{33}b_2.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{E}(H) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{5})}.$$

Перейдём к рассмотрению случая б). Так как $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и $\tau_4 \leqslant \tau_2$, то $\tau_1 < \tau_2$. Следовательно, в этом случае кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(H)$ группы H также изоморфно $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{4})}$ или $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{5})}$.

Так как $\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}(G)$ [7], то теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (1), *где*

$$t(A_1) = \tau_1, \quad t(A_2) = \tau_2, \quad \mathrm{IT}(B) = \tau_3, \quad \mathrm{OT}(B) = \tau_4.$$

Пусть группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_2)$ имеет ранг 2, а $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1)$ и $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_1, B)$ имеют ранг 1. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно алгебре

$$\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{4})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом $\mathbf{K} \cong \mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{4})}$ тогда и только тогда, когда $\tau_2 \geqslant \tau_4$, $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и существуют однозначно определённые сервантные подгруппы C и D ранга 1 группы B, такие что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$.

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A_1 \oplus A_2 \oplus B$. Зафиксируем ненулевые элементы $a_i \in A_i$, $i = 1, 2$.

Группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_2)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_2 \geqslant \tau_4$ [9]. Отсюда следует, что $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_2, B) = 0$ [5]. Тогда α_{32}, α_{42} в равенствах (2) замечания 1 равны нулю.

Группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1)$ и $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_1, B)$ имеют ранг 1 тогда и только тогда, когда $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и существуют однозначно определённые сервантные подгруппы C и D ранга 1 группы B, такие что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$ [2]. Имеем, что $\tau_1 < \tau_4 \leqslant \tau_2$. Следовательно, $\tau_1 < \tau_2$. Отсюда следует, что α_{12} в равенствах (2) замечания 1 равны нулю.

Из условия теоремы и замечаний 2, 3 следует, что кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(B)$ квазислагаемого B не может быть полем квадратичных чисел. Так как группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(B, A_1)$ и $\mathbb{Q}\,\mathrm{Hom}(A_1, B)$ имеют ранг 1,

то кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(B)$ не может быть изоморфно полю рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Пусть

$$\mathcal{E}(B) \cong \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Покажем, что в этом случае элементы b_1 и b_2 линейно зависимы. Предположим противное: элементы b_1 и b_2 линейно независимы. Тогда $t(b_1) > t(b_2)$. Действительно, если $t(b_1) < t(b_2)$, то $\tau_3 = t(b_1)$ [6]. Так как $f(a_1) = b_1$, то $\tau_1 \leqslant \tau_3$, что противоречит условию теоремы. Из условия $t(b_1) > t(b_2)$ следует, что $t(B/\langle b_2 \rangle_*) = \tau_4$ [2]. Получили противоречие, так как, с одной стороны, $\tau_4 = t(B/\langle b_2 \rangle_*) \leqslant \tau_1$, а с другой стороны — $\tau_1 < \tau_4$.

Таким образом, если $f(a_1) = b_1$, то $\operatorname{Ker}(g) = \langle b_1 \rangle_*$. Выберем элемент $b_3 \in B$, такой что элементы b_1 и b_3 линейно независимы. При этом должно выполняться условие $t(b_1) > t(b_3)$, так как в противном случае $\tau_1 \leqslant t(b_1) < t(b_3)$, и значит, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) = 0$ имеет ранг 2. Положим

$$R_1 = \langle a_1 \rangle_*, \quad R_2 = \langle a_2 \rangle_*, \quad R_3 = \langle b_1 \rangle_*, \quad R_4 = \langle b_3 \rangle_*.$$

Обозначим через $i_k \colon R_k \to H$ и $\pi_l \colon H \to \mathbb{Q} \otimes R_l$, $k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции соответственно. Тогда элементы $i_1(a_1)$, $i_2(a_2)$, $i_3(b_1)$, $i_4(b_3)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы H.

В этом случае равенства (2) замечания 1 примут вид

$$\begin{aligned} &\varphi i_1(a_1) = \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \alpha_{31} b_1, \\ &\varphi i_2(a_2) = \alpha_{22} a_2, \\ &\varphi i_3(b_1) = \alpha_{23} a_2 + \alpha_{33} b_1, \\ &\varphi i_4(b_3) = \alpha_{14} a_1 + \alpha_{24} a_2 + \alpha_{34} b_1 + \alpha_{33} b_3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}(H) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{4})}.$$

Так как $\mathcal{E}(H) = \mathcal{E}(G)$ [7], то теорема доказана. □

Теорема 5. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (1), *где*

$$t(A_1) = \tau_1, \quad t(A_2) = \tau_2, \quad \operatorname{IT}(B) = \tau_3, \quad \operatorname{OT}(B) = \tau_4.$$

Пусть группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2)$ имеет ранг 2, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) = 0$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1) = 0$. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда,

когда $\mathbf{K}$ *изоморфно одной из следующих алгебр*:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{2})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{4})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{5})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом справедливы следующие утверждения.

1. $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{1})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{2})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k})$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:
   а) $\tau_1 \,\xi\, \tau_2$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$;
   б) $\tau_1 \,\xi\, \tau_2$, $\tau_1 > \tau_3$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$ *и не существует сервантной подгруппы* D *ранга* 1 *группы* B, *такой что* $t(B/D) \leqslant \tau_1$.
2. $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{4})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{5})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k})$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:
   а) $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_2 > \tau_4$;
   б) $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$ *и не существует сервантной подгруппы* C *ранга* 1 *группы* B, *такой что* $t(C) \geqslant \tau_1$;
   в) $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_1 > \tau_3$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_2 > \tau_4$ *и не существует сервантной подгруппы* D *ранга* 1 *группы* B, *такой что* $t(B/D) \leqslant \tau_1$;

г) *$\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$ и не существуют сервантных подгрупп C и D ранга 1 группы B, таких что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$.*

Доказательство. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы и $H = A_1 \oplus A_2 \oplus B$. Так как по условию $G \doteq H$, то $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$ [7].

Группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2)$ имеет ранг 2 тогда и только тогда, когда $\tau_2 \geqslant \tau_4$ [9]. Отсюда следует, что $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B) = 0$ [5]. Значит, α_{32}, α_{42} в равенствах (2) замечания 1 равны нулю.

Далее, $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B) = 0$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1) = 0$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий [2]:

1) $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_4$;
2) $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_1 \leqslant \tau_4$ и не существует сервантной подгруппы C ранга 1 группы B, такой что $t(C) \geqslant \tau_1$;
3) $\tau_1 > \tau_3$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_4$ и не существует сервантной подгруппы D ранга 1 группы B, такой что $t(B/D) \leqslant \tau_1$;
4) $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и не существует сервантных подгрупп C и D ранга 1 группы B, таких что $t(B/D) \leqslant \tau_1 \leqslant t(C)$.

Пусть $\tau_1 \,\xi\, \tau_2$, тогда условия 2) и 4) не могут выполняться. Действительно, в случае 2) имеют место условия $\tau_1 \leqslant \tau_4$ и $\tau_4 \leqslant \tau_2$, следовательно, $\tau_1 \leqslant \tau_2$. В случае 4) типы квазислагаемых A_1 и A_2 должны удовлетворять условию $\tau_1 < \tau_2$, так как $\tau_3 < \tau_1 < \tau_4$ и $\tau_4 \leqslant \tau_2$.

Таким образом, если $\tau_1 \,\xi\, \tau_2$, то, очевидно, кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{5}}^{(\mathbf{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{2})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{3})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Предположим, что $\tau_1 \geqslant \tau_2$. Так как $\tau_2 \geqslant \tau_4$, то $\tau_1 \geqslant \tau_4$. Но в этом случае $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ имеет ранг 2, что противоречит условию теоремы.

Если $\tau_1 < \tau_2$, то все условия 1)—4) с отмеченными ниже изменениями могут иметь место. Очевидно, что в случае 1) не может выполняться равенство $\tau_2 = \tau_4$. В случае 2) не может выполняться условие $\tau_1 = \tau_4$. Действительно,

в противном случае $\tau_3 \ \xi \ \tau_4$. Получили противоречие, так как $\tau_4 > \tau_3$. В случае 3) не могут выполняться условия $\tau_1 = \tau_3$ и $\tau_2 = \tau_4$, так как если $\tau_1 = \tau_3$, то $\tau_3 \ \xi \ \tau_4$, а если $\tau_2 = \tau_4$, то $\tau_1 \ \xi \ \tau_2$. Легко видеть, что в рассматриваемом случае кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{6}}^{(\mathbf{4})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{5})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{7}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Таким образом, теорема доказана. □

Пусть для квазиразложимой абелевой группы G без кручения ранга 4 имеет место квазиразложение (1). Очевидно, что задачи описания колец квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G с точностью до изоморфизма в случае, когда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ имеют ранг 2, и в случае, когда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ имеют ранг 2, эквивалентны. Можно доказать, что в последнем случае имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение* (1), *где*

$$t(A_1) = \tau_1, \quad t(A_2) = \tau_2, \quad \mathrm{IT}(B) = \tau_3, \quad \mathrm{OT}(B) = \tau_4.$$

Пусть группы квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_1)$ имеют ранг 2. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{6})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{5})} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \ \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \mathbf{k}\alpha_{34} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

При этом кольцо $\mathbf{K}$ *изоморфно одному из колец* $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{6})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{5})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k})$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_2 < \tau_1$, $\tau_2 \leqslant \tau_3$, $\tau_4 \leqslant \tau_1$.

Значит, если $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2)$ и $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_1, B)$ имеют ранг 2, то кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфно одному из колец $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{6})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{5})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k})$. При этом $\mathcal{E}(G)$ изоморфно одному из этих колец тогда и только тогда, когда $\tau_1 \leqslant \tau_3$, $\tau_2 \geqslant \tau_4$.

Замечание 4. Нетрудно убедиться, что все алгебры, перечисленные в формулировках теорем 1—6, попарно не изоморфны.

Таким образом, если G — квазиразложимая абелева группа без кручения ранга 4, для которой имеет место квазиразложение (1) и группа гомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2)$ имеет ранг 2, то кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из алгебр, перечисленных в формулировках теорем 1—6. Доказано, что с точностью до изоморфизма существуют 19 алгебр и 6 бесконечных серий алгебр, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов абелевых групп G без кручения ранга 4, квазиразложимых в прямую сумму групп A_1, A_2 ранга 1 и сильно неразложимой группы B ранга 2, в случае когда группа квазигомоморфизмов $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(B, A_2)$ имеет ранг 2. При этом две алгебры и одна серия алгебр, а именно, алгебры $\mathbf{A}_{\mathbf{8}}^{(\mathbf{6})}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{5})}$ и серия алгебр $\mathbf{A}_{\mathbf{9}}^{(\mathbf{6})}(\mathbf{k})$ относятся также к случаю, когда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(A_2, B)$ имеет ранг 2.

Замечание 5. Все кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимой абелевой группы G без кручения ранга 4, перечисленные в формулировках теорем 1—6 реализуются. Примеры реализаций этих колец квазиэндоморфизмов легко строятся на основе примеров реализаций колец квазиэндоморфизмов абелевых групп без кручения ранга 3, квазиразложимых в прямую сумму группы ранга 1 и сильно неразложимой группы ранга 2 [5].

Литература

[1] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[2] Фомин А. А. Абелевы группы с одним τ-адическим соотношением // Алгебра и логика. — 1989. — Т. 28, № 1. — С. 83—104.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[4] Чередникова А. В. Кольца квазиэндоморфизмов абелевых почти вполне разложимых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули. Вып. 13-14. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1996. — С. 237—242.

[5] Чередникова А. В. Кольца квазиэндоморфизмов квазиразложимых абелевых групп без кручения ранга 3 // Абелевы группы и модули. Вып. 13-14. — Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1996. — С. 224—236.

[6] Arnold D. M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[7] Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free groups of rank two // Mem. Amer. Math. Soc. — 1961. — Vol. 38. — P. 1—41.

[8] Reid J. D. On the rings of quasi-endomorphism of torsion-free Abelian groups // Topics in Abelian Groups. — Chicago: Scott, Foresman, 1963. — P. 51—68.

[9] Warfield R. Homomorphisms and duality for torsion free groups // Math. Z. — 1968. — Vol. 107. — P. 189—200.