Об абелевых группах с перестановочными коммутаторами эндоморфизмов

А. Р. ЧЕХЛОВ
Томский государственный университет
e-mail: cheklov@math.tsu.ru

УДК 512.541+512.552

Ключевые слова: кольцо эндоморфизмов, E-коммутант группы, E-разрешимая группа, E-нильпотентная группа, полугрупповое кольцо.

Аннотация

Изучаются группы с перестановочными коммутаторами эндоморфизмов. Описано строение таких групп среди периодических, вполне разложимых, копериодических, расщепляющихся смешанных групп.

Abstract

A. R. Chekhlov, On Abelian groups with commutative commutators of endomorphisms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 227—233.

Abelian groups with commutative commutators of endomorphisms are studied. The structure of these groups is described among torsion, completely decomposable, coperiodic, and split mixed groups.

Пусть A — абелева группа. Через $E(A)$ будем обозначать кольцо её эндоморфизмов, через A_p — p-компоненту, через $t(A)$ — периодическую часть. Если $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, то $f|H$ — ограничение f на $H \subseteq A$. Если B, G — группы, $\varnothing \neq X \subseteq B$, то через

$$\mathrm{Hom}(B, G)X = \sum_{f \in \mathrm{Hom}(B,G)} fX$$

обозначим подгруппу группы G, порождённую всеми гомоморфными образами подмножества X. Через 0 обозначается как нулевой элемент группы, так и нулевая подгруппа; через $\langle X, Y, \ldots\rangle$ — подгруппа, порождённая подмножествами $X, Y, \ldots$ группы; через 1_A — тождественный автоморфизм группы A. $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо или группа целых чисел, $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел, Z_{p^∞} — квазициклическая группа.

Абелева p-группа называется *коциклической*, если она является циклической или изоморфна группе Z_{p^∞}. Напомним, что если R — кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b. Если $a_1, \ldots, a_n \in R$, то положим по индукции $[a_1, \ldots, a_n] = \big[[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n\big]$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 227—233.

Группу A назовём *E-нильпотентной* класса n, если $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}] = 0$ для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in E(A)$ и $[\beta_1, \ldots, \beta_n] \neq 0$ для некоторых $\beta_1, \ldots, \beta_n \in E(A)$.

Подгруппу

$$A' = \langle [\varphi, \psi]A \mid \varphi, \psi \in E(A) \rangle$$

назовём *E-коммутантом* группы A. Определим по индукции

$$A^{(0)} = A, \quad A^{(1)} = A', \ldots, \quad A^{(n+1)} = \langle [\varphi, \psi]A^{(n)} \mid \varphi, \psi \in E(A) \rangle$$

и

$$A^{(\alpha)} = \bigcap_{\rho < \alpha} A^{(\rho)}$$

при предельном ординале α.

Группу A назовём *E-разрешимой*, если $A^{(n)} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Наименьшее такое n назовём *ступенью E-разрешимости* группы A. E-разрешимые и E-нильпотентные группы изучались в [8—17]. Вопросы, связанные с рассматриваемыми, исследовались в [1—3, 5—7, 18—20, 22, 23].

Группу A назовём *V-группой*, если $\big[[\alpha, \beta], [\gamma, \delta]\big] = 0$ для всех $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E(A)$ (т. е. кольцо $E(A)$ метабелево). Ясно, что E-разрешимая группа ступени не выше 2 является V-группой. Из равенства

$$\big[[a, d], [c, d]\big] = [a, b, c, d] + [b, a, d, c]$$

следует, что всякая E-нильпотентная группа ступени не выше 3 является V-группой. Класс V-групп не совпадает с объединением двух других вышеупомянутых классов групп. Чтобы убедится в этом, рассмотрим прямую сумму $A = B \oplus G$ E-разрешимой группы B ступени 2, не являющейся E-нильпотентной (в качестве B можно взять, например, группу $C \oplus K$, где C и K — группы без кручения ранга 1, а тип группы C меньше типа группы K [10, лемма 2.2]), и E-нильпотентной группы G ступени 2, не являющейся E-разрешимой ступени 2 (такие группы существуют согласно [17, пример 2]). Если теперь подгруппы B и G выбрать так, чтобы они ещё были вполне инвариантными в A, то группа A будет требуемой. В отличие от только что рассмотренной группы, в следующем примере V-группа A является сильно неразложимой.

Пример. Пусть

$$S = \{0, 1, a, b, c, \ldots, g\} —$$

полугруппа с нулём 0 и единицей 1, заданная таблицей умножения

$\cdot$	a	b	c	d	p	q	r	s	x	y	z	u	v	e	t	w	h	f	m	g
a	0	x	w	h	q	0	0	z	0	e	0	0	t	0	0	0	0	u	r	e
b	0	p	v	f	m	0	0	0	0	s	0	0	g	0	0	0	0	0	0	s
c	w	v	0	y	g	e	z	0	t	0	0	z	0	0	0	0	e	s	s	0
d	h	f	0	0	0	0	0	0	u	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
p	0	m	g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	s	0	0	0	0	0	0	0
q	0	r	e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z	0	0	0	0	0	0	0
r	0	0	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x	0	q	t	u	r	0	0	0	0	z	0	0	e	0	0	0	0	0	0	z
y	e	s	0	0	0	0	0	0	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
v	0	g	0	s	s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
t	0	e	0	z	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
w	0	t	0	e	e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z	z	0
h	0	u	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
m	0	0	s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

.

$K = \mathbb{Z}S$ — полугрупповое целочисленное кольцо для S. Так как аддитивная группа K^+ кольца K является счётной редуцированной группой без кручения, то существует абелева группа A, кольцо эндоморфизмов которой совпадает с K, причём ввиду конечности ранга группы K^+ группу A тоже можно выбрать с конечным рангом [4, теорема 29.3]. Имеем

$$[a,b][c,d] = z \neq 0, \quad [a,b,b,b] = r \neq 0.$$

Поэтому группа A не является ни E-разрешимой группой ступени 2, ни E-нильпотентной группой ступени 3. Однако, из вышеприведённой таблицы следует, что A является V-группой ввиду билинейности коммутатора. Кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(A)$ группы A не имеет нетривиальных (отличных от 0 и 1) идемпотентов, поэтому A — сильно неразложимая группа с локальным кольцом $\mathcal{E}(A)$ [4, лемма 5.3]; локальность $\mathcal{E}(A)$ можно проверить и непосредственно.

Предложение 1. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, *где* $|I| > 1$. *Тогда* A *является* V*-группой в том и только в том случае, когда каждая* A_i *является* V*-группой,* $\alpha_i(\mathrm{Hom}(A_j, A_i)A_j) = 0$, $[\varphi_i, \psi_i](\mathrm{Hom}(A_j, A_i)A_j) = 0$ *и* $\alpha_i(A_i') = 0$ *для любых* $\alpha_i \in \mathrm{Hom}(A_i, A_k)$ *и* $\varphi_i, \psi_i \in E(A_i)$, *где* $j, k \in I \setminus \{i\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $B_j = \bigoplus\limits_{i \in I \setminus \{j\}} A_i$. Заметим, что действие всякого гомоморфизма $\gamma \in \mathrm{Hom}(A_j, A_i)$ $(j \neq i)$ можно рассматривать как действие некоторого коммутатора группы. Действительно, продолжим γ до эндоморфизма группы A, полагая $\gamma | B_j = 1_{B_j}$, и определим $\beta \in E(A)$ следующим образом: $\beta | A_j = \gamma | A_j$, $\beta | B_j = 0$. Тогда $[\gamma, \beta] | A_j = \gamma | A_j$ и $[\gamma, \beta] | B_j = 0$. Это завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть $B_j = \bigoplus\limits_{i \in I \setminus \{j\}} A_i$, $\pi \colon A \to A_j$ и $\theta \colon A \to B_j$ — проекции, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E(A)$. Если $a \in A_j$, то

$$\big[[\alpha, \beta], [\gamma, \delta]\big] a = \big[[(\pi + \theta)\alpha, (\pi + \theta)\beta], [(\pi + \theta)\gamma, (\pi + \theta)\delta]\big] a \big[[\pi\alpha, \pi\beta], [\pi\gamma, \pi\delta]\big] a + \\ + \big[[\pi\alpha, \pi\beta], [\pi\gamma, \theta\delta]\big] a + \ldots + \big[[\theta\alpha, \theta\beta], [\theta\gamma, \pi\delta]\big] a + \big[[\theta\alpha, \theta\beta], [\theta\gamma, \theta\delta]\big] a.$$

Здесь

$$\big[[\pi\alpha, \pi\beta], [\pi\gamma, \pi\delta]\big] a = 0,$$

поскольку $A_j \in V$. Далее,

$$\big[[\pi\alpha, \pi\beta], [\pi\gamma, \theta\delta]\big] a = [\pi\alpha, \pi\beta][\pi\gamma, \theta\delta] a - [\pi\gamma, \theta\delta][\pi\alpha, \pi\beta] a.$$

В скобку $[\pi\gamma, \theta\delta]$ входит $\theta\delta$, его ограничение на A_j есть гомоморфизм $A_j \to B_j$. Поэтому

$$[\pi\alpha, \pi\beta][\pi\gamma, \theta\delta] a \in \mathrm{Hom}(B_j, A_j)(\mathrm{Hom}(A_j, B_j) A_j) = 0,$$

и

$$[\pi\gamma, \theta\delta][\pi\alpha, \pi\beta] a \in \mathrm{Hom}(A_j, B_j)(A_j)' = 0.$$

Аналогичным образом проверяется равенство нулю оставшихся 14 слагаемых. $\square$

Отметим, что все условия предложения 1 (кроме того, что все A_i являются V-группами) аналогичны необходимым и достаточным условиям леммы 4.3 из [13] для E-разрешимых групп ступени не выше 2. В этом причина совпадения в некоторых случаях классов V-групп и E-разрешимых групп ступени не выше 2 (см. ниже).

Следствие 1. *Пусть $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ — V-группа. Тогда если каждая A_i является E-разрешимой группой ступени не выше 2, то и A — E-разрешимая группа ступени не выше 2.*

Следствие 2. *Если A — V-группа, то каждая её ненулевая p-компонента A_p есть либо циклическая группа, либо прямая сумма циклической группы B_p и группы Z_{p^∞}, причём в последнем случае если $B_p \neq 0$, то $A/A_p = p(A/A_p)$.*

Следствие 3. *Периодическая группа A является V-группой тогда и только тогда, когда каждая ненулевая p-компонента группы A есть либо циклическая группа, либо прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической группы и группы Z_{p^∞}. В частности, кольцо эндоморфизмов редуцированной периодической V-группы коммутативно.*

Из предложения 1 следует, что никакая V-группа не содержит прямые слагаемые, разложимые в прямые суммы изоморфных групп. Поэтому делимая группа D является V-группой тогда и только тогда, когда все её ненулевые p-компоненты имеют ранг 1, а часть без кручения либо нулевая, либо также имеет ранг 1.

Теорема 1. *Нередуцированная группа $A = B \oplus D$, где $0 \neq D$ — делимая часть группы A, является V-группой тогда и только тогда, когда*

1) *группы B, D являются V-группами*;
2) *E-коммутант B' группы B периодичен*;
3) *если $D_p, B_p \neq 0$, то $B/B_p = p(B/B_p)$*;
4) *$0 \neq t(D) \neq D$ влечёт периодичность B, в этом случае A имеет строение*

$$A = \left(\bigoplus_{p\in\Pi} A_p\right) \oplus D_0,$$

где Π — некоторое множество простых чисел, каждая A_p есть или циклическая группа, или прямая сумма некоторой (*возможно, нулевой*) *циклической p-группы и группы Z_{p^∞}, $D_0 \cong \mathbb{Q}$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1 из [13]. □

Теорема 1 обобщает описание нередуцированных групп G с нормальным кольцом эндоморфизмов: если G — периодическая группа, то каждая её p-компонента является коциклической группой; если G — группа без кручения, то G изоморфна группе $\mathbb{Q}$; если G — смешанная группа, то $G = T \oplus Q$, где T — периодическая группа, каждая p-компонента которой является циклической группой, $Q \cong \mathbb{Q}$. Кольцо эндоморфизмов такой группы G коммутативно [9, абзац после предложения 2]. Делимая группа $D = t(D) \oplus D_0$ имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов тогда и только тогда, когда либо $t(D) = 0$, $D_0 \cong \mathbb{Q}$, либо $D_0 = 0$, $D_p \cong Z_{p^\infty}$ для каждого p с условием $D_p \neq 0$. В [21, 24, 25] изучались кольца, близкие к нормальным.

Следствие 4. *Если $0 \neq D$ — делимая часть группы A, $A = B \oplus D$ и $0 \neq B$ — группа без кручения, то A является V-группой в том и только в том случае, когда $E(B)$, $E(D)$ — коммутативные кольца.*

Следствие 5. *Пусть $A = t(A) \oplus R$ — расщепляющаяся смешанная группа с ненулевой делимой частью $D = t(D) \oplus D_0$. Запишем A в виде*

$$A = T \oplus B \oplus t(D) \oplus D_0,$$

где $t(A) = T \oplus t(D)$. Группа A является V-группой в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:

1) *если $t(D) \neq 0$, то $t(D) \cong \bigoplus\limits_{p\in\Pi} Z_{p^\infty}$, где Π — некоторое множество простых чисел, $r(D_0) \leqslant 1$*;
2) *если $t(D) \neq 0$, то $T = \bigoplus\limits_{p\in\Pi_1} T_p$, где каждая T_p — некоторая ненулевая циклическая p-группа, Π_1 — некоторое множество простых чисел*;

3) *кольцо* $E(B)$ *коммутативно и* $pB = B$ *при* $p \in \Pi' = \Pi \cap \Pi_1$;
4) *если* $B, D_0 \neq 0$, *то* $t(D) = 0$.

V-группы из следствий 3—5 являются E-разрешимыми группами ступени не выше 2. По причинам, отмеченным выше, V-группы из классов вполне разложимых, векторных, сепарабельных групп без кручения, а также копериодических групп будут E-разрешимыми группами ступени не выше 2 (описание таких групп дано в [13]).

Литература

[1] Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 7. — С. 3—38.

[2] Благовещенская Е. А. Определяемость абелевых групп без кручения счётного ранга некоторого класса их кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 1. — С. 31—43.

[3] Гришин А. В., Царёв А. В. $\mathcal{E}$-замкнутые группы и модули // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 2. — С. 97—106.

[4] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал Пресс, 2006.

[5] Лыткина Д. В., Мазуров В. Д. О группах с заданными свойствами конечных подгрупп // Алгебра и логика. — 2012. — Т. 51, № 3. — С. 321—330.

[6] Туганбаев А. А. Автоморфизмы подмодулей и их продолжения // Дискрет. матем. — 2013. — Т. 25, № 1. — С. 144—151.

[7] Фомин А. А. Категория матриц, представляющая две категории абелевых групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 223—244.

[8] Чехлов А. Р. О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2009. — № 2 (6). — С. 78—84.

[9] Чехлов А. Р. Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, № 4. — С. 520—539.

[10] Чехлов А. Р. E-нильпотентные и E-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2010. — № 1 (9). — С. 59—71.

[11] Чехлов А. Р. E-разрешимые модули // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 7. — С. 221—236.

[12] Чехлов А. Р. О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сиб. матем. журн. — 2010. — Т. 51, № 5. — С. 1163—1174.

[13] Чехлов А. Р. Об абелевых группах, близких к E-разрешимым // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 183—219.

[14] Чехлов А. Р. E-энгелевы абелевы группы ступени $\leqslant 2$ // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2012. — № 1 (17). — С. 54—60.

[15] Чехлов А. Р. О проективно разрешимых абелевых группах // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 53, № 5. — С. 1157—1165.

[16] Чехлов А. Р. О проективном коммутанте абелевых групп // Сиб. матем. журн. — 2012. — Т. 53, № 2. — С. 451—464.

[17] Чехлов А. Р. Об абелевых группах с нильпотентными коммутаторами эндоморфизмов // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2012. — № 10. — С. 60—73.

[18] Чехлов А. Р. Об абелевых группах с перестановочными мономорфизмами // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 5. — С. 1182—1187.

[19] Чехлов А. Р. Слабо транзитивные E-энгелевы абелевы группы без кручения // Матем. заметки. — 2013. — Т. 94, № 4. — С. 620—627.

[20] Călugăreanu G., Schultz P. Modules with Abelian endomorphism rings // Bull. Austral. Math. Soc. — 2010. — Vol. 82, no. 1. — P. 99—112.

[21] Chen W. X. On semiabelian π-regular rings // Intern. J. Math. Sci. — 2007. — Vol. 23. — P. 1—10.

[22] Danchev P. V., Goldsmith B. On socle-regularity and some notions of transitivity for Abelian p-groups // J. Commut. Algebra. — 2011. — Vol. 3, no. 3. — P. 301—319.

[23] Ratseev S. M. On varieties of Leibniz—Poisson algebras with the identity $\{x, y\} \cdot \{z, t\} = 0$ // Журн. СФУ. Матем. и физ. — 2013. — Т. 6, № 1. — С. 97—104.

[24] Wei J. C., Li L. B. Quasi-normal rings // Commun. Algebra. — 2010. — Vol. 38. — P. 1855—1868.

[25] Wei J. C., Li L. B. Weakly normal rings // Turk. J. Math. — 2012. — Vol. 36. — P. 47—57.