К задаче о медленном вдвигании плоского поршня в сжимаемую жидкость

В. А. ШАРЫЙ
Национальный минерально-сырьевой университет «Горный», Санкт-Петербург
e-mail: shayanina@yandex.ru

А. М. СЕБЕЛЬДИН
Мининский университет, Нижний Новгород
e-mail: amseb@mail.ru

Б. МАНСАРЕ
Университет им. Г. А. Насера, Конакри, Гвинея
e-mail: babamansare@yahoo.fr

УДК 532.591

Ключевые слова: газовая динамика, ударная волна, решение Римана, метод малого параметра, теория простых волн, одномерные нестационарные уравнения.

Аннотация

В статье рассматривается медленное движение плоского поршня в сжимаемой жидкости. Решение задачи строится двумя различными методами: первый основан на теории простых волн Римана, а второй — на методе малого параметра. Затем мы сравниваем результаты, полученные этими методами.

Abstract

V. A. Shary, A. M. Sebeldin, B. Mansare, On the problem on slow entrance of a flat piston in compressed liquid, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 5, pp. 235—242.

In this paper, slow movement of the flat piston in compressed liquid is considered. The solution of the problem is constructed with two different methods: the first is based on the theory of Riemann's simple waves, and the second on the small parameter method. Then we compare the results obtained by the two methods.

Введение

Точное решение рассматриваемой задачи, ставшее впоследствии классическим, впервые было получено Б. Риманом. Это решение имеет место вплоть до момента образования в области течения ударной волны. Дальнейшее изучение свойств этого решения было проведено рядом авторов (см., например, [4]). Асимптотическое решение этой задачи для случаев, когда начальная скорость поршня больше нуля и ударная волна образуется в момент времени $t = 0$ на

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 5, с. 235—242.

поверхности поршня, было получено Д. Коулом [3]. В рассматриваемой работе построено асимптотическое решение задачи, когда начальная скорость поршня равна нулю. Показано, что это решение совпадает с главной частью римановского решения. Заметим, что аналогичный случай для цилиндрического и сферического поршня был исследован ранее В. А. Шарым [5, 6].

1. Точное решение задачи

Пусть плоский поршень двигается в цилиндрической трубе в положительном направлении оси OX. Предположим, что поршень двигается с небольшой скоростью и что его траектория задана уравнением $x = \varepsilon f(t)$, где $f(t)$ — заданная функция, дважды дифференцируемая по t. Кроме того, предположим, что движение жидкости является адиабатичным, т. е. давление p и плотность ρ связаны уравнением

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\varkappa},$$

где $\varkappa$ — показатель адиабатичности ($\varkappa = 1{,}4$ для воздуха, $\varkappa = 7{,}15$ для воды), p_0, ρ_0 — давление и плотность жидкости в покое соответственно.

Из [4] известно, что движение жидкости в области, прилегающей к поршню, определяется системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{2a}{\varkappa - 1}\dfrac{\partial a}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial a}{\partial t} + v\dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\varkappa - 1}{2}a\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где v — скорость частиц жидкости, a — скорость звука. Из [4] известно, что жидкость, приведённая в движение, отделяется от жидкости в состоянии покоя характеристикой, которая распространяется в положительном направлении оси OX. Ниже мы изложим несколько важных аспектов классического римановского решения движения жидкости.

Известно, что всюду в области движения скорость частиц жидкости и скорость звука связаны соотношением

$$v - \frac{2a}{\varkappa - 1} = -\frac{2a_0}{\varkappa - 1}. \tag{1.2}$$

С другой стороны, известно, что зона потока заполнена множеством прямолинейных характеристик, которые определяются дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} = v + a. \tag{1.3}$$

На каждой характеристике параметры потока v и a сохраняют свои постоянные значения, но они меняются от одной характеристики к другой [4]. Подставив

соотношение (1.2) в уравнение (1.3), получим

$$x + F(v) = \left(\frac{\varkappa + 1}{2} v + a_0\right) t. \tag{1.4}$$

В соотношении (1.4) скорость частиц v постоянна для каждой характеристики. Из соотношения (1.4) следует решение задачи, согласно теории простых волн Римана:

$$v = F^{-1}\left[\left(\frac{\varkappa + 1}{2} v + a_0\right) t - x\right]. \tag{1.5}$$

Обратная функция F^{-1}, которая присутствует в (1.5), получается из условия на поршне

$$v(\varepsilon f(t), t) = \varepsilon f'(t). \tag{1.6}$$

Соотношение (1.6) выражает, что скорость частиц жидкости на поверхности поршня в любой момент времени равна скорости поршня. Используя (1.6) в (1.5), получаем из (1.5) окончательную формулу точного решения:

$$v = \varepsilon f'\left[\left(\frac{\varkappa + 1}{2a_0} v + 1\right) t - \frac{x}{a_0}\right]. \tag{1.7}$$

Оценим порядки величин и их производных вблизи характеристики $x = a_0 t$. Для этого сделаем несколько предположений относительно закона движения поршня $x = \varepsilon f(t)$:

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(t) > 0, \quad t > 0, \quad f''(0) > 0.$$

Покажем, что в некоторый момент времени $t^* > 0$

$$\frac{\partial v}{\partial t} \to \infty \quad \text{при} \quad t \to t^*.$$

Вычислив эту частную производную из (1.7), получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\varepsilon f''(0)}{1 - \varepsilon f''(0) \frac{\varkappa + 1}{2a_0} t}. \tag{1.8}$$

Предположим, что ударная волна зарождается на характеристике $x = a_0 t$. Тогда

$$f''(x - a_0 t) = f''(0) > 0.$$

Приравнивая к нулю знаменатель в (1.8), получаем

$$\begin{cases} t = t^* = \dfrac{2a_0}{(\varkappa + 1)\varepsilon f''(0)}, \\ x^* = a_0 t^*, \end{cases} \tag{1.9}$$

где x^*, t^* — координаты места зарождения ударной волны.

Оценим порядок параметров потока перед зарождением ударной волны. Согласно формуле (1.7) во всей области потока $v = O(\varepsilon)$. Затем, чтобы определить

порядок частной производной $\frac{\partial v}{\partial t}$ в непосредственной близости от характеристики $x = a_0 t$, положим $t - t^* = -\varepsilon t^*$. Тогда $x - x^* = -a_0 \varepsilon t^*$. С геометрической точки зрения мы находимся в узкой полосе порядка ε, прилегающей к характеристике $x = a_0 t$.

Обратимся к формуле (1.8), приведённой к виду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\varepsilon f''(0)}{1 - t/t^*}. \tag{1.10}$$

Подставив в (1.10) $t = t^* - \varepsilon t^*$, мы получим, что

$$\frac{\partial v}{\partial t} = O(1)$$

в заданной полосе. Чтобы определить порядок $\frac{\partial v}{\partial t}$ в области, прилегающей к поршню, подставим в (1.10) $t = t^* - kt^*$, где $k = O(1)$. Тогда получим $v_t = O(\varepsilon)$. Аналогичным образом мы можем доказать, что частная производная $\frac{\partial v}{\partial x}$ имеет тот же порядок, что и $\frac{\partial v}{\partial t}$. Видно, что во всей области, прилегающей к поршню, скорость v и частные производные скорости имеют один порядок $O(\varepsilon)$, тогда как в рассматриваемой полосе $\frac{\partial v}{\partial t} = O(1)$ и $\frac{\partial v}{\partial x} = O(1)$. В дальнейшем мы перейдём к новым неизвестным функциям $M(x,t)$, $\alpha(x,t)$, которые заданы формулами

$$v = a_0 M, \quad a = a_0(1 + \alpha), \tag{1.11}$$

где M — безразмерная скорость. Используя соотношения (1.11) в (1.2), получаем соотношение

$$M = \frac{2\alpha}{\varkappa - 1}. \tag{1.12}$$

Равенство (1.12) представляет собой одно из известных соотношений теории коротких волн [1].

2. Линейное (акустическое) решение

Полученные ранее в области, прилегающей к поршню, порядки параметров потока

$$v = O(\varepsilon), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = O(\varepsilon), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = O(\varepsilon)$$

позволяют найти решение в этом диапазоне в виде следующих асимптотических разложений:

$$M(x,t,\varepsilon) = \varepsilon M_1(x,t) + (\varepsilon)^2 M_2(x,t) + \dots \tag{2.1}$$

$$\alpha(x,t,\varepsilon) = \varepsilon \alpha_1(x,t) + (\varepsilon)^2 \alpha_2(x,t) + \dots . \tag{2.2}$$

Путём переноса этих асимптотических разложений в систему уравнений (1.1) и при помощи известной процедуры метода малого параметра [2, 3] получаем

систему линейных уравнений для первых членов асимптотических разложений (2.1) и (2.2):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_1}{\partial t} + a_0 \dfrac{\partial \frac{2}{\varkappa-1}\alpha_1}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \frac{2}{\varkappa-1}\alpha_1}{\partial t} + a_0 \dfrac{\partial M_1}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Произведя вычитание уравнений (2.3), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(M_1 - \frac{2\alpha_1}{\varkappa - 1}\right) - a_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(M_1 - \frac{2\alpha_1}{\varkappa - 1}\right). \tag{2.4}$$

Из соотношения (2.4) следует, что в каждой точке линейных характеристик с уравнением

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -a_0$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(M_1 - \frac{2\alpha_1}{\varkappa - 1}\right) = 0. \tag{2.5}$$

Из (2.5) получаем

$$M_1 - \frac{2\alpha_1}{\varkappa - 1} = C.$$

Чтобы найти постоянную C, используем начальное условие на $x = a_0 t$:

$$v = 0, \quad a = a_0,$$

следовательно,

$$M_1 = 0, \quad \alpha_1 = 0.$$

Очевидно, что $C = 0$. Таким образом,

$$M_1 = \frac{2\alpha_1}{\varkappa - 1}. \tag{2.6}$$

Соотношение (2.6) представляет собой главную часть точного решения для вышеупомянутой области в линейном случае.

Вернёмся к линейной системе уравнений (2.3). Исключив функцию $\alpha_1(x,t)$ из этой системы, получаем волновое уравнение для функции $M_1(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2}. \tag{2.7}$$

Чтобы найти решение уравнения (2.7), нужно использовать условие на поршне $x = \varepsilon f(t)$. Очевидно, что скорость частиц на поршне равна скорости самого поршня, т. е.

$$v(\varepsilon f(t), t) = \varepsilon f'(t). \tag{2.8}$$

Разлагая соотношение (2.8) в ряд по степеням и приравнивая члены с одинаковой степенью ε, получаем

$$M_1(t) = \frac{1}{a_0} f'(t). \tag{2.9}$$

Решение волнового уравнения (2.7) даётся прямой волной:

$$M_1(x,t) = F(a_0 t - x), \tag{2.10}$$

где F — произвольная функция своего аргумента.

Используя условие (2.9) на поршне, определим произвольную функцию F и, соответственно, само линейное решение:

$$M_1(x,t) = \frac{1}{a_0} f'\left(t - \frac{x}{a_0}\right). \tag{2.11}$$

Разлагая точное решение (1.7) в ряд по степеням ε, мы получаем, что его главная часть совпадает с линейным решением (2.11). Следовательно, полученное линейное решение также представляет главную часть решения для вышеупомянутой области.

3. Нелинейное решение, полученное методом малого параметра

Чтобы получить уравнения движения в зоне порядка $O(\varepsilon)$, находящейся в непосредственной близости от характеристики $x = a_0 t$, мы полагаем, что $M(x,t)$ и $\alpha(x,t)$ имеют порядок $O(\varepsilon)$, а их частные производные имеют порядок $O(1)$. В заданной области мы вводим новые переменные δ, t' согласно формулам

$$\begin{cases} \varepsilon\delta = a_0 t - x, \text{ где } \delta = O(1), \\ t' = t. \end{cases} \tag{3.1}$$

Далее мы ищем решение системы (1.1) в виде тех же асимптотических разложений (2.1) и (2.2). Путём переноса искомых асимптотических разложений в систему (1.1), а также при помощи формул (3.1), группируя члены, содержащие одинаковые степени ε, получаем уравнение

$$a_0\left(\frac{\partial M_1}{\partial \delta} - \frac{2}{\varkappa - 1}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta}\right) + \\ + \left[\frac{\partial M_1}{\partial t'} + a_0\left(-M_1\frac{\partial M_1}{\partial \delta} - \frac{2}{\varkappa - 1}\alpha_1\frac{\partial \alpha_1}{\partial \delta}\right)\right]\varepsilon + O(\varepsilon^2) = 0. \tag{3.2}$$

Приравнивая к нулю в (3.2) члены с одинаковой степенью, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\delta}\left(M_1 - \dfrac{2\alpha_1}{\varkappa - 1}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial M_1}{\partial t} - a_0 M_1\dfrac{\partial M_1}{\partial \delta} - a_0\dfrac{2\alpha_1}{\varkappa - 1}\dfrac{\partial \alpha_1}{\partial \delta} = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Из первого уравнения (3.3) следует, что

$$M_1 - \frac{2\alpha_1}{\varkappa - 1} = \varphi(t), \tag{3.4}$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция от t.

Чтобы вычислить произвольную функцию $\varphi(t)$, возьмём те же начальные условия на характеристике $x = a_0 t$ (т. е. $M_1 = 0$ и $\alpha_1 = 0$). Следовательно, $\varphi(t) \equiv 0$. Таким образом, получаем, что

$$M_1 = \frac{2\alpha_1}{\varkappa - 1}. \tag{3.5}$$

Мы видим, что (3.5) представляет главную часть точного решения для зоны, находящейся в непосредственной близости от первой характеристики. Подставив во второе уравнение в (3.3) α_1 из (3.5), получаем уравнение

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} - \frac{\varkappa - 1}{2} a_0 M_1 \frac{\partial M_1}{\partial \delta} = 0. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) эквивалентно уравнению

$$dt = \frac{-2d\delta}{(\varkappa + 1) M_1 a_0}, \quad \text{где } M_1 = \text{const}. \tag{3.7}$$

Интегрируя (3.7), получаем

$$\left(\frac{\varkappa + 1}{2} M_1 a_0 \varepsilon + a_0 \right) t - x = \text{const}.$$

Таким образом, общее решение (3.6) может быть записано в виде

$$M_1 = \Phi \left[\left(\frac{\varkappa + 1}{2} M_1 \varepsilon + 1 \right) t - \frac{x}{a_0} \right], \tag{3.8}$$

где Φ — произвольная функция от своего аргумента.

Чтобы вычислить эту произвольную функцию, используем метод сращивания асимптотических разложений в применении к линейному (2.11) и нелинейному (3.8) решениям задачи. Нам нужно срастить два решения (2.11) и (3.8). В соответствии с этим методом

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \Phi \left[\left(\frac{\varkappa + 1}{2} M_1 \varepsilon + 1 \right) t - \frac{x}{a_0} \right] - \frac{1}{a_0} f' \left(t - \frac{x}{a_0} \right) \right\} = 0. \tag{3.9}$$

Предел (3.9) вычисляется при условии, что переменные x и t остаются неизменными. Таким образом,

$$\Phi \left(t - \frac{x}{a_0} \right) = \frac{1}{a_0} f' \left(t - \frac{x}{a_0} \right). \tag{3.10}$$

Итак, нелинейное решение, полученное методом малого параметра, записывается в виде

$$M_1 = \frac{1}{a_0} f' \left[\left(\frac{\varkappa + 1}{2} M_1 \varepsilon + 1 \right) t - \frac{x}{a_0} \right]. \tag{3.11}$$

Выводы

Разлагая (1.7) по степеням ε, можно сделать вывод, что решение, полученное методом малого параметра, представляет собой главную часть точного решения в области, прилегающей к первой характеристике.

Заметим, что, используя решение (3.11), полученное методом малого параметра, можно получить значения координат места зарождения ударной волны (x^*, t^*), совпадающие с даваемыми формулой (1.9).

Литература

[1] Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн // Журн. прикл. мех. и техн. физ. — 1960. — № 1. — С. 63—74.

[2] Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. — М.: Мир, 1967.

[3] Коул Д. Д. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.

[4] Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. — М.: Наука, 1971.

[5] Шарый В. А. О разрушении потенциального течения при движении цилиндрического поршня. — Деп. в ВИНИТИ 07.07.1993; № 1911-В93.

[6] Шарый В. А. О разрушении потенциального течения при движении сферического поршня. — Деп. в ВИНИТИ 07.07.1993; № 1912-В93.