Об одной характеризации подгруппы Гашюца конечной разрешимой группы

С. Ф. КАМОРНИКОВ
Международный университет «МИТСО», Гомельский филиал, Белоруссия
e-mail: sfkamornikov@mail.ru

УДК 512.542.4

Ключевые слова: конечная разрешимая группа, подгруппа Гашюца, $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа.

Аннотация

Пусть H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G и $\Delta(G)$ — её подгруппа Гашюца. В работе доказывается, что существуют элементы $x, y \in G$, для которых выполняется равенство $H \cap H^x \cap H^y = \Delta(G)$.

Abstract

S. F. Kamornikov, One characterization of the Gaschütz subgroup of a finite soluble group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 6, pp. 65—75.

Let H be an $\mathfrak{N}$-prefrattini subgroup of a soluble finite group G and $\Delta(G)$ be its Gaschütz subgroup. In this paper, it is proved that there exist elements $x, y \in G$ such that the equality $H \cap H^x \cap H^y = \Delta(G)$ holds.

1. Введение

Исследуя свойства подгрупп фраттиниева типа, В. Гашюц в [7] рассмотрел для конечной группы G подгруппу $\Delta(G)$, равную пересечению всех абнормальных максимальных подгрупп группы G (если в G все максимальные подгруппы нормальны, т. е. группа G нильпотентна, то принимается, по определению, что $\Delta(G) = G$). В дальнейшем эту подгруппу мы будем называть *подгруппой Гашюца*.

Анализируя нормальную структуру конечной разрешимой группы G, В. Гашюц в [8] показал, что для любого её дополняемого главного фактора H/K в G существует такая нормальная секция C/R (она называется *короной* главного фактора H/K и обозначается через $\mathrm{Cr}_G(H/K)$), что:

1) $C = C_G(H/K)$;
2) R — пересечение ядер всех тех максимальных подгрупп группы G, которые дополняют H/K;
3) $C/R = \mathrm{Soc}(G/R)$;

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 6, с. 65—75.

4) каждая минимальная нормальная подгруппа группы G/R дополняема и G-изоморфна H/K;
5) длина G-главного ряда группы C/R равна числу всех G-изоморфных с H/K дополняемых главных факторов любого главного ряда группы G;
6) корона $\mathrm{Cr}_G(H/K)$ дополняема в G и любые два её дополнения являются сопряжёнными.

Выбирая для каждой короны в группе G по одному дополнению и пересекая их, В. Гашюц [8] показал, что такие пересечения являются сопряжёнными, изолируют все дополняемые главные факторы и покрывают все фраттиниевы главные факторы группы G. Такие пересечения он назвал *префраттиниевыми подгруппами*. Обосновывая терминологию, В. Гашюц пояснил, что для каждой префраттиниевой подгруппы H группы G можно получить подгруппу Фраттини любой фактор-группы G/N следующим образом:

$$\Phi(G/N) = \mathrm{Core}_{G/N}(HN/H).$$

Естественно, возникает идея рассмотрения подгрупп, изолирующих лишь некоторую выделенную систему корон, а не все короны в группе G, как это сделано в [8]. Такой подход, выполненный в рамках теории формаций, был реализован Т. О. Хоуксом в [9]. В частности, здесь определена $\mathfrak{N}$-*префраттиниева подгруппа* как пересечение дополнений всех эксцентральных корон группы G (взятых, разумеется, по одному для каждой короны). При этом установлена связь $\mathfrak{N}$-префраттиниевых подгрупп с подгруппами Гашюца:

$$\Delta(G/N) = \mathrm{Core}_{G/N}(HN/H)$$

для любой нормальной подгруппы N и каждой $\mathfrak{N}$-префраттиниевой подгруппы H группы G.

Таким образом, в $\mathfrak{N}$-префраттиниеву подгруппу проецируются подгруппы Гашюца всех гомоморфных образов группы (в частности, $\Delta(G) = \mathrm{Core}_G(H)$).

В связи с этим результатом в контексте общей проблемы характеризации ядра подгруппы пересечением ограниченного числа сопряжённых с ней подгрупп возникает следующий вопрос: существует ли такая абсолютная константа k, что для любой $\mathfrak{N}$-префраттиниевой подгруппы H в любой конечной разрешимой группе G найдётся k сопряжённых с H подгрупп, пересечение которых в точности равно $\Delta(G)$?

По сути, речь идёт о возможности представления ядра $\mathrm{Core}_G(H)$ $\mathfrak{N}$-префратиниевой подгруппы H группы G в виде пересечения не всех, а лишь некоторых сопряжённых с ней подгрупп.

В данной работе показывается, что такая константа k существует и равна 3. Наша главная цель — доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Пусть H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы G. Тогда $H \cap H^x \cap H^y = \Delta(G)$ для некоторых элементов x и y из G.*

Отметим, что постановка задачи инициирована центральными результатами работ [1, 5, 6, 10]. В [10] Д. С. Пассман доказал, что в каждой p-разрешимой группе G найдутся три силовские p-подгруппы, пересечение которых равно $O_p(G)$. В. И. Зенков в [1] установил, что аналогичный результат имеет место в любой конечной группе. В [5] С. Долфи доказал, что если $2 \notin \pi$, то в каждой π-разрешимой группе G найдутся три холловы π-подгруппы, пересечение которых равно $O_\pi(G)$. Позже в [6] установлено, что если H — холлова π-подгруппа π-разрешимой группы G, то $H \cap H^x \cap H^y = O_\pi(G)$ для некоторых элементов x и y из G (см. также [11]).

2. Предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы, поэтому термин «группа» всегда означает «конечная разрешимая группа». Мы используем определения и обозначения, принятые в [4].

Концепция $\mathfrak{N}$-префраттиниевой подгруппы разрешимой группы в оригинальном изложении [9] опирается на понятие силовской системы.

Пусть $\pi(G)$ — множество всех простых делителей порядка группы G. Тогда *силовской системой* Σ группы G называется множество всех p-дополнений G^p группы G, взятых по одному для каждого $p \in \pi(G)$.

Определение [9]. Пусть Σ — силовская система группы G и G^p — p-дополнение группы G, принадлежащее Σ. Обозначим через $W^p(G)$ пересечение множества всех абнормальных максимальных подгрупп из G, содержащих G^p (полагаем $W^p(G) = G$, если множество всех абнормальных максимальных подгрупп группы G пусто). Тогда пересечение

$$W(\Sigma) = \bigcap_{p \in \pi(G)} W^p(G)$$

называется *$\mathfrak{N}$-префраттиниевой подгруппой* группы G, соответствующей силовской системе Σ.

Подгруппа W группы G называется *$\mathfrak{N}$-префраттиниевой*, если $W = W(\Sigma)$ для некоторой силовской системы Σ группы G.

Из определения следует, что $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа существует в любой разрешимой группе. Другие свойства $\mathfrak{N}$-префраттиниевых подгрупп мы приведём в виде лемм. Напомним, что если M — подгруппа группы G, а H/K — её нормальный фактор, то говорят, что

- M является *дополнением* для H/K в G, если $MH = G$ и $M \cap H = K$ (в этом случае фактор H/K называется *дополняемым* фактором);
- M *покрывает* H/K, если $MK \supseteq H$;
- M *изолирует* H/K, если $M \cap H \subseteq K$.

Главный фактор H/K группы G называется *центральным*, если $H/K \subseteq \subseteq Z(G/K)$, и *эксцентральным* в противном случае.

Лемма 1 [9]. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G, то H^x — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G для любого $x \in G$*;
2) *любые две $\mathfrak{N}$-префраттиниевы подгруппы группы G являются сопряжёнными.*

Лемма 2 [9]. *Если H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G и $N \lhd G$, то HN/N — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G/N.*

Лемма 3 [9]. *Если H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G, то*

1) *H изолирует все дополняемые эксцентральные главные факторы группы G и покрывает все её остальные главные факторы*;
2) $\mathrm{Core}_G(H) = \Delta(G)$.

Лемма 4 [9]. *Пусть Σ — силовская система группы G,*

$$1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G \text{ —}$$

главный ряд группы G и $\{A_i/A_{i-1} \mid i \in I\}$ — множество всех дополняемых эксцентральных главных факторов этого ряда. Пусть M_i $(i \in I)$ — максимальная подгруппа группы G, которая дополняет главный фактор A_i/A_{i-1} и содержит некоторую подгруппу из Σ. Тогда

$$W(\Sigma) = \bigcap_{i \in I} M_i.$$

Лемма 5. *Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если M — абнормальная максимальная подгруппа группы G, дополняющая N, то каждая $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа из M является $\mathfrak{N}$-префраттиниевой подгруппой группы G.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа из M. Тогда $H = W(\Sigma)$ для некоторой силовской системы Σ группы M.

Пусть

$$1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = M \text{ —}$$

главный ряд группы M и $\{A_i/A_{i-1} \mid i \in I\}$ — множество всех дополняемых эксцентральных главных факторов этого ряда. Ввиду леммы 4 справедливо равенство

$$H = W(\Sigma) = \bigcap_{i \in I} M_i,$$

где M_i $(i \in I)$ — максимальная подгруппа группы M, которая дополняет главный фактор A_i/A_{i-1} и содержит некоторую подгруппу из Σ.

Рассмотрим нормальный ряд

$$1 \subset N = A_0N \subset A_1N \subset \ldots \subset A_nN = MN = G \qquad (1)$$

группы G. Так как

$$A_iN/A_{i-1}N = A_i/A_i \cap A_{i-1}N = A_i/A_{i-1}(A_i \cap N) = A_i/A_{i-1}$$

для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, то этот ряд является главным рядом группы G. Так как отображение $\alpha\colon m \mapsto mN$ — изоморфизм групп M и G/N, то фактор $A_iN/A_{i-1}N$ централен в G тогда и только тогда, когда фактор A_i/A_{i-1} централен в M. Поэтому в ряду (1) эксцентральными будут только факторы N и $A_iN/A_{i-1}N$ для всех $i \in I$. Кроме того, все эти факторы являются дополняемыми: подгруппа N дополняется подгруппой M по условию, а дополнением к главному фактору $A_iN/A_{i-1}N$ $(i \in I)$ является подгруппа M_iN.

Пусть $\pi(G) = \{p_1, p_2, \dots, p_t\}$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что N — p_1-группа. Пусть p_1 делит $|M|$ и $\Sigma = \{M^{p_1}, M^{p_2}, \dots, M^{p_t}\}$ — силовская система подгруппы M. Тогда $\Sigma_1 = \{M^{p_1}, M^{p_2}N, \dots, M^{p_t}N\}$ — силовская система группы G. При этом $M^{p_1} \subseteq M$ и для каждого $i \in I$ подгруппа M_iN содержит некоторую подгруппу из Σ_1, так как подгруппа M_i содержит некоторую подгруппу из Σ. Отсюда ввиду леммы 4 следует, что

$$W(\Sigma_1) = M \cap \left(\bigcap_{i\in I} M_iN\right) —$$

$\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G. Очевидно,

$$H = W(\Sigma) = \cap_{i\in I} M_i \subseteq M \cap \left(\bigcap_{i\in I} M_iN\right) = W(\Sigma_1).$$

Так как по лемме 3 подгруппы H и $W(\Sigma_1)$ изолируют все дополняемые эксцентральные главные факторы ряда (1) и покрывают все его остальные главные факторы, то по [4, лемма A.1.7] имеем, что $|H| = |W(\Sigma_1)|$. Отсюда и из того, что $H \subseteq W(\Sigma_1)$, следует, что $H = W(\Sigma_1)$, т. е. H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G.

Пусть p_1 не делит $|M|$ и $\Sigma = \{M^{p_2}, \dots, M^{p_t}\}$ — силовская система подгруппы M. Тогда система $\Sigma_1 = \{M, M^{p_2}N, \dots, M^{p_t}N\}$ является силовской системой группы G. При этом для каждого $i \in I$ подгруппа M_iN содержит некоторую подгруппу из Σ_1. Далее, как и в первом случае, получаем, что $H = W(\Sigma_1)$ — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G. □

Отметим ещё, что ряд интересных свойств $\mathfrak{N}$-префраттиниевых подгрупп приведён в [2].

Нам понадобится также информация о свойствах подгруппы Гашюца, изложенная в следующих леммах. Их доказательства можно найти в [3, 7] или осуществить простой проверкой. Напомним только, что подгруппа H группы G называется *абнормальной* в G, если $x \in \langle H, H^x \rangle$ для любого $x \in G$. Очевидно, максимальная подгруппа H группы G абнормальна в G тогда и только тогда, когда она не является нормальной подгруппой в группе G.

Лемма 6. *Для любой группы G подгруппа Гашюца $\Delta(G)$ нильпотентна и*

$$\Delta(G)/\Phi(G) = Z\big(G/\Phi(G)\big).$$

В частности, $\Delta(G) \subseteq F(G)$.

Лемма 7. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Delta(G)N/N \subseteq \Delta(G/N)$;
2) *если* $N \subseteq \Delta(G)$, *то* $\Delta(G/N) = \Delta(G)/N$;
3) $\Delta\big(G/\Delta(G)\big) = 1$.

Отметим, что если N — нормальная подгруппа группы $G = NS$, где $N \cap S = 1$, то ввиду естественного изоморфизма $S \to SN/N$ имеет место следующая лемма.

Лемма 8. *Пусть N — нормальная подгруппа группы $G = NS$, где $N \cap S = 1$. Тогда $\Delta(G/N) = \Delta(S)N/N$.*

Лемма 9. *Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если H — абнормальная максимальная подгруппа группы G, дополняющая N, то $\Delta(G) = C_{\Delta(H)}(N)$.*

Доказательство. Пусть T — пересечение всех абнормальных максимальных подгрупп группы G, содержащих N. Тогда $\Delta(G) \subseteq T$, и ввиду леммы 8 справедливо равенство $T/N = \Delta(H)N/N$. Кроме того, ввиду утверждения 1) леммы 7 имеет место включение $\Delta(G)N/N \subseteq T/N$. Поэтому $\Delta(G) \subseteq \Delta(H)N$.

Так как подгруппа N дополняема в G абнормальной максимальной подгруппой M, то $\Delta(G) \cap N = 1$. Следовательно,

$$\Delta(G) \subseteq C_G(N) \cap \Delta(H)N = \big(C_G(N) \cap \Delta(H)\big)N = C_{\Delta(M)}(N) \times N.$$

Пусть $K = C_{\Delta(H)}(N)$. Ясно, что $N_G(K) \supseteq \langle H, N\rangle = G$, т. е. K — нормальная подгруппа группы G. Предположим, что найдётся абнормальная максимальная подгруппа M группы G, которая не содержит K. В этом случае $KM = G$. Если $N \subseteq M$, то M/N — максимальная подгруппа группы G/N, а значит, $M \cap H$ — максимальная подгруппа группы H. Предположим, что $M \cap H \lhd H$. Тогда из того, что

$$M = M \cap HN = (M \cap H)N,$$

следует, что подгруппа M нормальна в G. Пришли к противоречию с тем, что M — абнормальная подгруппа группы G. Значит, подгруппа $M \cap H$ абнормальна в H. Но тогда

$$K \subseteq \Delta(H) \subseteq M \cap H \subseteq M,$$

что противоречит предположению о том, что подгруппа M не содержит подгруппу K.

Итак, подгруппа N не содержится в M. Тогда M и H — максимальные подгруппы группы G, дополняющие N. Подгруппы M и H не являются сопряжёнными в G, так как H содержит нормальную подгруппу K, а M не содержит K по предположению. Тогда по [4, утверждение A.16.9] $M \cap H$ — максимальная подгруппа группы H. Так как M не содержит K, то и подгруппа $M \cap H$ не содержит K. Отсюда и из того, что H содержит K, имеем равенство

$(M \cap H)K = H$. Если подгруппа $M \cap H$ абнормальна в H, то

$$K \subseteq \Delta(H) \subseteq M \cap H \subseteq M.$$

Пришли к противоречию с предположением, что подгруппа M не содержит K. Значит, подгруппа $M \cap H$ нормальна в H.

Отметим ещё, что так как подгруппа M нормализует подгруппу $M \cap K$, а подгруппа N её централизует, то $M \cap K \lhd G$.

Рассматривая группу $H/M \cap H$, получаем, что

$$H/M \cap H = (M \cap H)K/M \cap H \simeq K/M \cap H \cap K.$$

Так как $M \cap H$ — нормальная максимальная подгруппа группы H, то $K/M \cap H \cap K$ — группа простого порядка. Теперь из того, что $M \cap H \cap K \subseteq$ $\subseteq M \cap K$, и того, что M не содержит K, имеем равенство $M \cap H \cap K = M \cap K$. Значит,

$$H/M \cap K = H \cap M/M \cap K \times K/M \cap K.$$

Отсюда следует, что

$$H/M \cap K \subseteq C_{G/M \cap K}(K/M \cap K).$$

Кроме того, из того, что $N \subseteq C_G(K)$, следует, что

$$N(M \cap K)/M \cap K \subseteq C_{G/M \cap K}(K/M \cap K).$$

Следовательно,

$$\langle H/M \cap K,\, N(M \cap K)/M \cap K\rangle \subseteq C_{G/M \cap K}(K/M \cap K),$$

т. е. справедливо включение

$$K/M \cap K \subseteq Z(G/M \cap K).$$

Отсюда и из равенства

$$(M/M \cap K)(K/M \cap K) = G/M \cap K$$

следует, что M — нормальная максимальная подгруппа группы G. Снова пришли к противоречию.

Итак, каждая абнормальная максимальная подгруппа группы G содержит K. Поэтому $K \subseteq \Delta(G)$. Теперь окончательно имеем, что

$$\Delta(G) = \Delta(G) \cap NK = (\Delta(G) \cap N)K = K. \qquad \square$$

При доказательстве основной теоремы мы будем опираться на следующий известный результат С. Долфи и Е. П. Вдовина, который приведём в виде леммы.

Лемма 10 [5, 6, 11]. *Пусть π — множество простых чисел, G — π-разрешимая группа и S — холлова π-подгруппа группы G. Тогда существуют элементы $x, y \in G$, такие что $S \cap S^x \cap S^y = O_\pi(G)$.*

3. Доказательство теоремы

Пусть G — контрпример наименьшего порядка. Предположим сначала, что $\Delta(G) \neq 1$, и рассмотрим группу $G/\Delta(G)$. Ввиду выбора группы G для группы $G/\Delta(G)$ теорема верна. Поэтому для её $\mathfrak{N}$-префраттиниевой подгруппы $R/\Delta(G)$ в группе G найдутся такие элементы x и y, что

$$R/\Delta(G) \cap R^x/\Delta(G) \cap R^y/\Delta(G) = \Delta\big(G/\Delta(G)\big).$$

Так как ввиду утверждения 3) леммы 7 $\Delta\big(G/\Delta(G)\big) = 1$, то справедливо равенство

$$R \cap R^x \cap R^y = \Delta(G).$$

По лемме 2 $H\Delta(G)/\Delta(G)$ — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы $G/\Delta(G)$. Поэтому на основании леммы 1 найдётся элемент $z \in G$, такой что $H^z\Delta(G)/\Delta(G) = R/\Delta(G)$, а значит, $H^z\Delta(G) = R$. Аналогично с учётом утверждения 1) леммы 1 показывается, что $H^u\Delta(G) = R^x$ и $H^v\Delta(G) = R^y$ для некоторых элементов $u, v \in G$. Поэтому

$$H^z\Delta(G) \cap H^u\Delta(G) \cap H^v\Delta(G) = \Delta(G).$$

Так как по утверждению 1) леммы 1 подгруппы H^z, H^u и H^v являются $\mathfrak{N}$-префраттиниевыми подгруппами группы G, то ввиду утверждения 2) леммы 3 справедливы включения $\Delta(G) \subseteq H^z$, $\Delta(G) \subseteq H^u$ и $\Delta(G) \subseteq H^v$. Отсюда следует, что $H^z \cap H^u \cap H^v = \Delta(G)$. Сопрягая обе части последнего равенства элементом z^{-1}, получаем

$$H \cap H^{uz^{-1}} \cap H^{vz^{-1}} = \Delta(G).$$

Пришли к противоречию. Следовательно, полагаем далее, что подгруппа Гашюца $\Delta(G)$ группы G является единичной.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $\Delta(G) = 1$, то $\Phi(G) = 1$. Поэтому ввиду разрешимости группы G имеем, что N — дополняемая подгруппа группы G, а значит, существует такая максимальная подгруппа M группы G, что $G = MN$ и $M \cap N = 1$. Кроме того, подгруппа M абнормальна в G. С учётом леммы 5 можем полагать, что $H \subseteq M$.

Ввиду выбора группы G и на основании лемм 1 и 2 найдутся элементы x и y из G, такие что

$$HN/N \cap H^xN/N \cap H^yN/N = \Delta(G/N).$$

Так как $G = MN$ и $N \lhd G$, то можно считать, что $x \in M$ и $y \in M$. Таким образом, $H \cap H^x \cap H^y \subseteq M$. Кроме того, по утверждению 1) леммы 1 подгруппы H, H^x и H^y являются $\mathfrak{N}$-префраттиниевыми подгруппами группы M. Отсюда с учётом утверждения 2) леммы 3 следует, что

$$\Delta(M) \subseteq H \cap H^x \cap H^y.$$

Пусть Δ — полный прообраз подгруппы $\Delta(G/N)$ в группе G. Ввиду леммы 8 $\Delta(M)N = \Delta$. Поэтому

$$\Delta(M)N \subseteq (H \cap H^x \cap H^y)N \subseteq HN \cap H^xN \cap H^yN = \Delta = \Delta(M)N,$$

а значит,

$$\Delta(M) = H \cap H^x \cap H^y.$$

Кроме того, по лемме Фраттини имеют место равенства

$$H \cap \Delta(M)N = H^x \cap \Delta(M)N = H^y \cap \Delta(M)N = \Delta(M).$$

Пусть $|N| = p^\alpha$, $\alpha \geqslant 1$. Предположим, что N не является силовской p-подгруппой группы $\Delta(M)N$. Отметим, что ввиду леммы 6 подгруппа $\Delta(G)$ нильпотентна. Поэтому силовская p-подгруппа группы $\Delta(M)N$ нормальна в $\Delta(M)N$, а значит, совпадает с подгруппой $O_p(\Delta(M)N)$. По лемме Фраттини

$$O_p(\Delta(M)N) = O_p(\Delta(M)N) \cap \Delta(M)N = \big(O_p(\Delta(M)N) \cap \Delta(M)\big)N.$$

Так как $\Delta(M) \cap N = 1$, то ввиду предположения $N \subset O_p(\Delta(M)N)$ имеем, что $O_p(\Delta(M)N) \cap \Delta(M) \neq 1$. Так как подгруппа $\Delta(M)N$ нормальна в G, то $O_p(\Delta(M)N) \subseteq F(G)$. Отсюда по [4, теорема A.13.8] имеем, что

$$C_G(N) \supseteq F(G) \supseteq O_p(\Delta(M)N) \cap \Delta(M).$$

Но тогда ввиду леммы 9 $\Delta(G) \neq 1$. Пришли к противоречию.

Значит, остаётся принять, что $N = O_p(\Delta(M)N)$ — силовская p-подгруппа группы $\Delta(M)N$. В этом случае из того, что $M \cap N = 1$, следует, что $\Delta(M)$ — её холлова p'-подгруппа. Значит, ввиду леммы 10 найдутся элементы $u, v \in N$, такие что

$$\begin{aligned}
&\Delta(M) \cap \big(\Delta(M)\big)^u \cap \big(\Delta(M)\big)^v = \\
&\quad = (H \cap \Delta(M)N) \cap (H^x \cap \Delta(M)N)^u \cap (H^y \cap \Delta(M)N)^v = \\
&\quad = O_{p'}(\Delta(M)N) \subseteq O_{p'}(G).
\end{aligned}$$

Рассмотрим подгруппу $D = H \cap H^{xu} \cap H^{yv}$. Так как $D \subseteq H$, то $DN \subseteq HN$. Так как $D \subseteq H^{xu}$ и $u \in N$, то $DN \subseteq H^{xu}N = H^xN$. Так как $D \subseteq H^{yv}$ и $v \in N$, то $DN \subseteq H^{yv}N] = H^yN$. Поэтому

$$DN \subseteq HN \cap H^xN \cap H^yN = \Delta = \Delta(M)N.$$

Следовательно, $D \subseteq \Delta(M)N$.

Имеем, что

$$\begin{aligned}
D &= D \cap \Delta(M)N = H \cap H^{xu} \cap H^{yv} \cap \Delta(M)N = \\
&\quad = (H \cap \Delta(M)N) \cap (H^{xu} \cap \Delta(M)N) \cap (H^{yv} \cap \Delta(M)N) = \\
&\quad = (H \cap \Delta(M)N) \cap (H^x \cap \Delta(M)N)^u \cap (H^y \cap \Delta(M)N)^v = O_{p'}(\Delta(M)N).
\end{aligned}$$

Поэтому $DN = D \times N$. Отсюда ввиду леммы 9 получаем, что

$$D \subseteq C_{\Delta(M)}(N) = \Delta(G).$$

Если $D \neq 1$, то $\Delta(G) \neq 1$, и мы приходим к противоречию с тем, что $\Delta(G) = 1$. Значит, $D = 1$. Но тогда

$$D = H \cap H^{xu} \cap H^{yv} = 1 = \Delta(G).$$

Снова приходим к противоречию с выбором группы G. Теорема доказана.

4. Следствия

Следствие 1. *Пусть H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G. Тогда справедливы неравенства*

$$|H| \leqslant \sqrt[3]{|G|^2 \cdot |\Delta(G)|}$$

и

$$|H/\Delta(G)| \leqslant |G : H|^2.$$

Доказательство. Пусть $\alpha : G \to G/\Delta(G)$ — естественный гомоморфизм. Используя элементарное равенство

$$|A \cdot B| = \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|},$$

где A и B — подгруппы группы G, для $\mathfrak{N}$-префраттиниевой подгруппы H и элементов $x, y \in G$ получаем, что

$$\begin{aligned} |\alpha(G)| \geqslant |\alpha(H) \cdot \alpha(H^x)| = \frac{|\alpha(H)| \cdot |\alpha(H^x)|}{|\alpha(H) \cap \alpha(H^x)|} = \\ = \frac{|\alpha(H)| \cdot |\alpha(H^x)| \cdot |\alpha(H^y)|}{|\alpha(H) \cap \alpha(H^x) \cap \alpha(H^y)| \cdot \big|\big(\alpha(H) \cap \alpha(H^x)\big) \cdot \alpha(H^y)\big|} \geqslant \\ \geqslant \frac{|\alpha(H)| \cdot |\alpha(H^x)| \cdot |\alpha(H^y)|}{|\alpha(H) \cap \alpha(H^x) \cap \alpha(H^y)| \cdot |(\alpha(G)|} = \frac{|\alpha(H)|^3}{|\alpha(G)|}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$|H/\Delta(G)|^3 \leqslant |G/\Delta(G)|^2,$$

а значит,

$$|H| \leqslant \sqrt[3]{|G|^2 \cdot |\Delta(G)|}.$$

С другой стороны, из неравенства

$$|H/\Delta(G)|^3 \leqslant |G/\Delta(G)|^2$$

следует, что

$$|H/\Delta(G)| \leqslant |G : H|^2. \qquad \square$$

Следствие 2. *Пусть H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G. Если $\Delta(G) = 1$, то*

$$|H| \leqslant \sqrt[3]{|G|^2}$$

и

$$|H| \leqslant |G : H|^2.$$

Используя лемму 6, получаем следующий результат.

Следствие 3. *Пусть H — $\mathfrak{N}$-префраттиниева подгруппа группы G. Если $\Phi(G) = 1$, то*

$$H \cap H^x \cap H^y = Z(G)$$

для некоторых элементов x и y из G.

Литература

[1] Зенков В. И. Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах // Фундамент. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 1—92.

[2] Каморников С. Ф., Шеметков Л. А. О нормализаторе гашюцевой системы конечной разрешимое группы // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 8. — С. 129—136.

[3] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978.

[4] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. — Berlin: Walter de Gruyter, 1992.

[5] Dolfi S. Intersections of odd order Hall subgroups // Bull. London Math. Soc. — 2005. — Vol. 37, no. 1. — P. 61—66.

[6] Dolfi S. Large orbits in coprime actions of solvable groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 2008. — Vol. 360, no. 1. — P. 135—152.

[7] Gaschütz W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. — 1953. — Vol. 58. — P. 160—170.

[8] Gaschütz W. Praefrattinigruppen // Arch. Math. — 1962. — Vol. 13, no. 3. — P. 418—426.

[9] Hawkes T. O. Analogues of prefrattini subgroups // Proc. Int. Conf. Theory of Groups. Australian Nat. Univ., Canberra, 1965. — New York: Gordon and Breach, 1967. — P. 145—150.

[10] Passman D. S. Groups with normal solvable Hall p'-subgroups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 123, no. 1. — P. 99—111.

[11] Vdovin E. P. Regular orbits of solvable linear p'-groups // Sib. Electron. Math. Rep. — 2007. — Vol. 4. — P. 345—360.