Градуированные кольца частных*

А. Л. КАНУННИКОВ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

УДК 512.552

Ключевые слова: кольца частных, градуированные кольца, ортогональное пополнение.

Аннотация

В основе данной обзорной статьи лежит диссертация, защищённая автором в диссертационном совете при механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова 6 декабря 2013 года. Статья посвящена градуированным кольцам частных градуированных по группе колец. В работе доказаны градуированные аналоги теоремы Фейса—Утуми о порядках в матричных кольцах, теорем Голди о порядках во вполне приводимых кольцах, а также построено и исследовано ортогональное градуированное пополнение — аналог кольца частных, лежащего в основе теории ортогональной полноты Бейдара—Михалёва.

Abstract

A. L. Kanunnikov, Graded quotient rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 6, pp. 77—145.

This survey is based on the PhD Thesis which was defended at the Dissertation council of the Faculty of Mechanics and Mathematics of Moscow State University on December 6, 2013. This paper is devoted to the study of quotient rings of rings graded by a group. Graded analogs of the Faith—Utumi theorem of orders of matrix rings, Goldie's theorems of orders of completely reducible rings are proved and the orthogonal graded completion, which is an analog of the quotient ring underlying the orthogonal completion theory of Beidar—Mikhalev, is constructed.

Введение

В последнее время отмечается значительный интерес к кольцам и другим алгебраическим структурам, снабжённым градуировкой. Это объясняется тем, что многие важные классы колец, например кольца многочленов, матричные кольца, групповые кольца, допускают естественную градуировку. В 1979 и 2000 годах К. Настасеску и Ф. ван Ойстайен выпустили монографии [36,38], посвящённые

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 14-01-00452 «Теория колец: структурная теория; комбинаторные методы; приложения».

кольцам и модулям, градуированным по группе, причём в [36], как и во всех работах раннего периода, рассматривалась только градуировка по группе $\mathbb{Z}$ целых чисел.

В теории градуированных колец вводятся стандартные градуированные аналоги понятий классической теории колец, которые принято обозначать приставкой «gr-». Например, gr-артинов (gr-нётеров) модуль — это градуированный модуль с условием минимальности (максимальности) для градуированных подмодулей. Естественный и важный вопрос в теории градуированных колец состоит в следующем. Пусть градуированное кольцо (градуированный модуль) X удовлетворяет условию gr-P. Выполнено ли условие P для кольца (модуля) X, рассматриваемого без градуировки?

При построении структурной теории градуированных колец важную роль играют градуированные кольца частных — такие кольца частных, которые естественным образом наследуют градуировку кольца. Каждое градуированное кольцо R обладает полным правым градуированным кольцом частных $Q^{\mathrm{gr}}(R)$, в которое вкладывается любое другое градуированное правое кольцо частных кольца R. Кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ является градуированным аналогом полного правого кольца частных $Q(R)$ и может быть построено аналогичными способами [2, 5, 32, 38]. Другим важным правым кольцом частных является классическое $Q_{\mathrm{cl}}(R)$, образуемое с помощью локализации по мультипликативной системе всех регулярных элементов данного кольца R (и существующее при выполнении условий Оре). При построении его градуированного аналога $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ используется та же конструкция, но среди регулярных элементов берутся только однородные для наследования градуировки [38]. Одной из первых проблем в теории градуированных колец частных является получение градуированной версии теоремы Голди, описывающей кольца, классические кольца частных которых вполне приводимы. Строение вполне приводимых колец описывает теорема Молина—Веддербёрна—Артина, градуированный аналог которой известен [3, 33, 38].

В конце 1950-х годов английский математик А. Голди исследовал порядки во вполне приводимых кольцах и установил, что для полупервичного нётерова справа кольца R кольцо $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ существует и вполне приводимо. Позднее А. Голди показал, что условие нётеровости справа можно ослабить до системы следующих двух условий:

1) кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов;
2) кольцо R не содержит бесконечных прямых сумм правых идеалов.

Кольца со свойством 2) стали называть конечномерными справа, а кольца со свойствами 1) и 2) — правыми кольцами Голди. Например, кольцо $k[x_1, x_2, \ldots]$ многочленов над полем k от счётного числа коммутирующих переменных — коммутативное не нётерово кольцо Голди с полем частных $k(x_1, x_2, \ldots)$.

А. Голди доказал не только достаточность, но и необходимость условий 1), 2) и полупервичности кольца для полной приводимости его классического правого кольца частных.

Теорема Голди [20, 23, 27]. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

1) *R — полупервичное правое кольцо Голди;*
2) *правый идеал в R существен в точности тогда, когда он содержит хотя бы один регулярный элемент;*
3) *кольцо R обладает правым классическим кольцом частных $Q_{\mathrm{cl}}(R)$, которое является вполне приводимым кольцом.*

При выполнении этих условий кольцо $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ просто в точности тогда, когда кольцо R первично.

Часто утверждение о первичных кольцах Голди называют первой теоремой Голди, а о полупервичных кольцах — второй, так же как в случае теорем Молина—Веддербёрна—Артина. Отметим также, что вполне приводимые кольца являются правыми (и левыми) кольцами Голди и совпадают со своими кольцами частных, поэтому для полупервичного правого кольца Голди R справедливо равенство $Q_{\mathrm{cl}}(R) = Q(R)$.

Отдельно выделим случай колец главных правых идеалов, так называемых pri-колец (от английского «principal right ideal rings»). В 1962 году А. Голди [28] описал первичные и полупервичные pri-кольца.

Третья теорема Голди [28, 31].

1. *Полупервичные pri-кольца — это в точности конечные прямые суммы первичных pri-колец.*
2. *Первичные pri-кольца — это в точности матричные pri-кольца над нётеровыми справа областями Оре.*

Перейдём к градуированным правым кольцам Голди. Так называются [36,38] градуированные кольца, не содержащие бесконечных прямых сумм градуированных правых идеалов (gr-конечномерные справа) и удовлетворяющие условию максимальности для правых градуированных аннуляторов.

Один из первых градуированных вариантов теоремы Голди доказан в [36].

Теорема [36, предложение 9.2.3]. *Пусть*

$$R = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} R_n \; —$$

gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди,

$$R_0^+ = \bigoplus_{n\geqslant 0} R_n, \quad R^+ = \bigoplus_{n>0} R_n.$$

Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) *R^+ содержит центральный однородный регулярный элемент;*
2) *$R = R_0^+$ и ни один минимальный gr-первичный идеал кольца R не содержит R^+;*
3) *$R = R_0^+$ и R^+ содержит однородный регулярный элемент;*

4) *все однородные элементы в* R_0^+ *нильпотентны.*

Тогда существует и вполне gr*-приводимо кольцо* $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$.

В [38] приведён пример gr-полупервичного коммутативного градуированного кольца Голди, для которого классическое градуированное кольцо частных не является вполне gr-приводимым. Тем самым показано, что стандартный градуированный аналог второй теоремы Голди неверен.

Пример 1 [29; 36, пример 9.2.2; 38, пример 8.4.7]. Пусть k — поле, кольцо $R = k[X,Y]/(XY)$ градуировано группой $\mathbb{Z}$ (обозначим $x = X + (XY)$ и $y = Y + (XY)$):

$$R_n = \begin{cases} kx^n, & n > 0, \\ k, & n = 0, \\ ky^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ совпадает с кольцом R и не является gr-артиновым (и тем более вполне gr-приводимым), а (x,y) — gr-существенный идеал, все однородные элементы которого — делители нуля.

Мы покажем, что полное градуированное кольцо частных $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ кольца R из этого примера вполне gr-приводимо и, в частности, не совпадает с классическим $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Поэтому градуированный вариант теоремы Голди следует рассматривать для колец частных $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ и Q^{gr} отдельно. Отметим, что как вопрос об их совпадении, так и вопрос о полной gr-приводимости кольца $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ упираются в проблему существования однородного регулярного элемента в каждом gr-существенном правом идеале кольца R. В неградуированном случае это условие выполнено и такой проблемы не возникает, но повторение рассуждений Голди в градуированном случае приводит, вообще говоря, к неоднородному регулярному элементу. Эта проблема решалась в [29,35—38] наложением дополнительных ограничений на однородные компоненты кольца R и градуирующую группу G.

В 1986 году в [35] был доказан градуированный вариант теоремы Голди в предположении, что R_e — полупервичное левое кольцо Голди, на само кольцо R было наложено ограничение, эквивалентное e-точности слева ($R_g \neq 0$ влечёт $R_{g^{-1}}R_g \neq 0$ для всех $g \in G$). Сформулируем правосторонний вариант этой теоремы.

Теорема [35, предложение 1.4]. *Пусть R — e-точное справа градуированное кольцо с множеством однородных регулярных элементов S, R_e — полупервичное правое кольцо Голди. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *S — правое множество Оре в R;*
2) *множество $S_e = S \cap R_e$ совпадает с множеством всех элементов кольца R_e, регулярных в R_e;*
3) *кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R) = RS^{-1}$ существует, вполне* gr*-приводимо и e-точно справа;*
4) *$RS^{-1} = RS_e^{-1}$ и $(RS^{-1})_e = R_eS_e^{-1}$.*

В 2000 году К. Гудёрл и Т. Стэффорд [29] доказали градуированную версию первой теоремы Голди для gr-первичных колец, градуированных абелевой группой. Этот результат вошёл в [38].

Теорема [29; 38, теорема 8.4.4]. *Если группа G абелева и G-градуированное кольцо R gr-первично, то кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существует и вполне gr-приводимо.*

В [38] доказан вариант теоремы Голди для gr-полупервичных колец, сильно градуированных конечной группой.

Теорема [38, теорема 8.4.9]. *Если R — gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди, сильно градуированное конечной группой G, то R_e — полупервичное правое кольцо Голди, кольцо $Q_{\mathrm{cl}}(R) = Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существует, является сильно G-градуированным и вполне gr-приводимым, при этом $\left(Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)\right)_e = Q_{\mathrm{cl}}(R_e) = R_e S_e^{-1}$.*

В работе получены новые градуированные варианты теорем Голди. Доказано, что для gr-полупервичного правого градуированного кольца Голди R кольцо Q^{gr} вполне gr-приводимо. Также доказано обращение градуированной версии теоремы Голди (аналоги импликаций 2) $\Longleftrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 1) в теореме Голди) и найдены различные условия, при которых кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ существует и вполне gr-приводимо (и тогда совпадает с кольцом Q^{gr}). В частности, доказано, что для колец с конечным носителем справедлив полный аналог теоремы Голди — в форме критерия.

В работе введено понятие gr-pri-кольца и получены градуированные аналоги третьей теоремы Голди для gr-первичных и gr-полупервичных gr-pri-колец. Ясно, что такие кольца gr-нётеровы справа и тем более являются правыми градуированными кольцами Голди. Доказано, что для них условие gr-полупервичности гарантирует существование и полную gr-приводимость кольца $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$.

Мощным логическим средством исследования в теории колец является метод ортогональной полноты, разработанный К. И. Бейдаром и А. В. Михалёвым в конце 1970-х и начале 1980-х годов (см. [1, 6—9, 12, 19, 24, 25] и др.). Его основная идея состоит в рассмотрении полупервичных колец как булевых произведений первичных, что позволяет теоремы с определённой логической структурой о первичных кольцах «поднимать» до теорем об ортогонально полных полупервичных кольцах. Основные объекты теории строятся последовательно по заданному полупервичному кольцу A: его полное правое кольцо частных $Q = Q(A)$, центр C кольца Q (называемый расширенным центроидом кольца A) и булево кольцо B идемпотентов кольца C. С помощью кольца B вводится понятие ортогональной полноты и строится ортогональное пополнение $O(A)$ кольца A. На кольцо $O(A)$ удаётся перенести теоремы, справедливые в классе первичных колец, если их условия и заключения имеют определённую логическую структуру.

В работе построены и исследованы основные объекты теории ортогональной полноты для градуированных колец. Для данного gr-полупервичного кольца R вместо колец $Q(R)$ и $C(R)$ рассматриваются их градуированные аналоги: кольцо

$Q^{\mathrm{gr}}(R)$ и максимальное градуированное подкольцо $C^{\mathrm{gr}}(R)$ его центра (градуированный расширенный центроид кольца R). Среди идемпотентов кольца $C^{\mathrm{gr}}(R)$ используются только однородные для согласования построений с градуировкой. Ортогональная полнота рассматривается относительного образуемого указанными идемпотентами булева кольца B.

На следующем этапе в неградуированном случае устанавливается ортогональная полнота кольца $Q(R)$ [7]. В градуированном случае это оказывается верным не всегда. В работе доказан критерий ортогональной полноты кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$, который в случае точной градуировки кольца R приобретает следующую форму: кольцо B конечно или группа G конечна. Чтобы каждое (а не только удовлетворяющее условиям критерия) gr-полупервичное кольцо имело ортогональное градуированное пополнение, вводится понятие ортогональной gr-полноты — ортогональной полноты однородных компонент. Заметим, что кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ ортогонально gr-полно всегда.

Ортогональное градуированное пополнение находит интересное применение к градуированным кольцам Голди. Так, для кольца R из примера на с. 80 кольцо $O^{\mathrm{gr}}(R)$ является прямой суммой $k[x] \oplus k[y]$ двух градуированных областей. В работе доказано, что ортогональное градуированное пополнение $O^{\mathrm{gr}}(R)$ gr-полупервичного правого градуированного кольца Голди R является прямой суммой gr-первичных колец Голди. Этот факт позволяет редуцировать полупервичный случай к первичному, реализовав генеральную идею метода ортогональной полноты, что иллюстрирует теорема 4.4.5.

Обозначения и соглашения

Все рассматриваемые кольца ассоциативные с ненулевой единицей (в разделе 2.4 рассматриваются градуированные предкольца), все модули правые унитальные, G — мультипликативная группа с единичным элементом e, все градуированные кольца и модули по умолчанию градуированы группой G. Так, фраза «X — градуированный модуль» означает, если не оговорено противное, что X — правый G-градуированный R-модуль, где R — G-градуированное кольцо.

Если M — правый R-модуль, N — подмодуль в M, K — подмножество в M, то обозначим

$$(N : K) = \{r \in R \mid Kr \subseteq N\}.$$

В частности, при $N = 0$ получаем аннулятор $\operatorname{Ann} K = (0 : K)$ подмножества K.

Если R — кольцо, K — подмножество в R, то определяется правый аннулятор

$$r_R(K) = \{r \in R \mid Kr = 0\}$$

и левый аннулятор

$$l_R(K) = \{r \in R \mid rK = 0\}$$

множества K (индекс R будем опускать, если ясно, о каком кольце идёт речь).

Под регулярным кольцом понимается кольцо, регулярное по фон Нейману. Под регулярным элементом кольца R понимается элемент, не являющийся ни левым, ни правым делителем нуля в R.

Для кольца или группы X центр обозначается через $Z(X)$, а централизатор подмножества $M \subseteq X$ — через $\mathrm{Cent}_X(M)$.

1. Предварительные сведения и результаты

1.1. Основные понятия теории градуированных колец и модулей

Градуированные кольца

Определение.

1. Кольцо R называется *G-градуированным* (или градуированным по группе G), если $R = \bigoplus\limits_{g \in G} R_g$, где $\{R_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца R, таких что $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Если при этом $R_g R_h = R_{gh}$ для всех $g, h \in G$, то кольцо R называется *сильно градуированным*.
2. Элементы множества $h(R) = \bigcup\limits_{g \in G} R_g$ называются *однородными*, ненулевой элемент $r \in R_g$ называется однородным элементом *степени* g; обозначение: $\deg r = g$.
3. Подкольцо T градуированного кольца R называется *градуированным*, если $T = \bigoplus\limits_{g \in G} T_g$, $T_g = T \cap R_g$.

Всюду далее фраза «R — градуированное кольцо» означает, что кольцо R градуировано по группе G.

Пример 1.1.1.

1. Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел можно градуировать группой $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$:
$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}, \quad \mathbb{C}_0 = \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}_1 = i\mathbb{R}.$$
2. Тело $\mathbb{H}$ кватернионов можно градуировать группой $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$:
$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R} \oplus j\mathbb{R} \oplus k\mathbb{R},$$
$$\mathbb{H}_{(0,0)} = \mathbb{R}, \quad \mathbb{H}_{(0,1)} = i\mathbb{R}, \quad \mathbb{H}_{(1,0)} = j\mathbb{R}, \quad \mathbb{H}_{(1,1)} = k\mathbb{R}.$$

В обоих случаях градуировка сильная.

Определение. Градуированное кольцо R называется

— *g-точным справа* (*слева*), где $g \in G$, если для всех $r \in h(R) \setminus 0$ найдётся такое $r' \in h(R)$, что $rr' \in R_g \setminus 0$ ($r'r \in R_g \setminus 0$);

— *точным справа* (*слева*), если оно g-точно справа (слева) для всех $g \in G$;

— *g-точным* (*точным*), если оно g-точно (точно) справа и слева.

Предложение 1.1.2 [38, предложение 1.1.1]. *Для градуированного кольца R верны следующие утверждения*:

1) $1 \in R_e$;
2) *если элемент* $r \in R_g$ *обратим, то* $r^{-1} \in R_{g^{-1}}$;
3) *кольцо R является сильно градуированным тогда и только тогда, когда* $R_e = R_g R_{g^{-1}}$ *для всех* $g \in G$.

Очевидно, что сильно градуированное кольцо точно справа и слева. Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Пример 1.1.3.

1. Кольцо многочленов $R = A[x]$ над кольцом A естественным образом градуировано по группе $\mathbb{Z}$:
$$R_n = Ax^n \quad \text{при} \quad n \geqslant 0 \quad \text{и} \quad R_n = 0 \quad \text{при} \quad n < 0.$$
Данная градуировка не является сильной, так как, например,
$$0 = R_{-1}R_2 \neq R_1 = Ax.$$
Эту градуировку далее будем называть стандартной.
2. Кольцо многочленов $R = A[x]$ можно градуировать по группе $\mathbb{Z}_n$, положив
$$R_{\bar{k}} = \begin{cases} A[x^n] & \text{при } k = 0, \\ x^k A[x^n] & \text{при } 1 \leqslant k \leqslant n-1. \end{cases}$$
Если A — область целостности, то кольцо $A[x]$ точно во всех компонентах, но не является сильно градуированным, поскольку
$$R_{\bar{1}} R_{\overline{n-1}} = x^n A[x^n] \neq A[x^n] = R_{\bar{0}}.$$

Скрещённые произведения

Определение.

1. Пусть A — кольцо, $U(A)$ — множество всех его обратимых элементов, G — группа, $\sigma\colon G \to \operatorname{Aut} A$, $\alpha\colon G^2 \to U(A)$ — два отображения. Обозначим $\sigma(g)(a)$ через ${}^g a$. Четвёрка (A, G, σ, α) называется *скрещённой системой*, если выполнены следующие условия ($a \in A$, $g, h, k \in G$):
   1) ${}^g({}^h a) = \alpha(g,h)\, {}^{gh}a\, \alpha(g,h)^{-1}$;
   2) $\alpha(g,h)\alpha(gh,k) = {}^g\alpha(h,k)\alpha(g,hk)$;
   3) $\alpha(g,e) = \alpha(e,g) = 1$;
   4) ${}^e a = a$.
2. Пусть (A, G, σ, α) — скрещённая система. Свободный левый A-модуль с базисом G, на котором определено умножение по правилу
$$(ag)(bh) = \big(a\, {}^g b\, \alpha(g,h)\big) gh, \quad a, b \in A, \quad g, h \in G,$$
называется *скрещённым произведением* и обозначается $A * G(\sigma, \alpha)$ (используется также обозначение $A^\sigma_\alpha G$).

3. Если $\sigma(g) = \mathrm{id}_A$ при всех $g \in G$, то скрещённое произведение $A * G(\sigma, \alpha)$ называется *скрещённым групповым кольцом* и обозначается $A_\alpha G$.
4. Если $\alpha(g, h) = 1$ при всех $g, h \in G$, то скрещённое произведение $A^\sigma_\alpha G = A^\sigma G$ называется *косым групповым кольцом*.
5. Если $\sigma(g) = \mathrm{id}_A$ и $\alpha(g, h) = 1$ при всех $g, h \in G$, то скрещённое произведение $A * G(\sigma, \alpha)$ превращается в *групповое кольцо* AG.

Предложение 1.1.4 [38, предложения 1.4.1, 1.4.2].

1. *Скрещённое произведение* $R = A * G(\sigma, \alpha)$ *превращается в* G*-градуированное кольцо, если положить* $R_g = Ag$*. При этом* $R_e = A$ *и каждая однородная компонента* R *содержит обратимый элемент* g.
2. *Всякое* G*-градуированное кольцо* R*, такое что при каждом* $g \in G$ *компонента* R_g *содержит обратимый элемент* u_g*, причём* $u_e = 1$*, является скрещённым произведением для скрещённой системы* (R_e, G, σ, α)*, где* $\sigma(g)(a) = u_g a u_g^{-1}$, $\alpha(g, h) = u_g u_h u_{gh}^{-1}$.

Градуированные модули и гомоморфизмы

Определение.

1. Правый модуль X над градуированным кольцом R называется G-градуированным, если $X = \bigoplus_{g \in G} X_g$, где $\{X_g \mid g \in G\}$ — семейство таких аддитивных подгрупп в абелевой группе $(X, +)$, что $X_g R_h \subseteq X_{gh}$ для всех $g, h \in G$.
2. Элементы множества $h(X) = \bigcup_{g \in G} X_g$ называются *однородными*; ненулевые элементы в X_g называются однородными степени g.
3. Для элемента $x \in X$ и подмножества $T \subseteq X$ определяются *носители*: $\mathrm{Supp}(x) = \{g \in G \mid x_g \neq 0\}$ и $\mathrm{Supp}(T) = \bigcup_{x \in T} \mathrm{Supp}(x)$.
4. Градуированный модуль X_R назовём g-точным ($g \in G$), если для любого $x \in h(X) \setminus 0$ существует такое $r \in h(R)$, что $0 \neq xr \in M_g$.

Аналогично определяются левый G-градуированный модуль и G-градуированный бимодуль. Всюду далее фраза «X_R — градуированный модуль» означает, что X — G-градуированный модуль над G-градуированным кольцом R.

Определение. Подмножество (в частности, идеал или подмодуль) градуированного кольца или модуля называется *градуированным*, если с каждым своим элементом оно содержит все его однородные компоненты.

Решётку всех идеалов (подмодулей) не обязательно градуированного кольца R (модуля X) будем обозначать через $\mathcal{I}d(R)$ ($\mathcal{L}(X)$), а решётку всех градуированных идеалов (подмодулей) градуированного кольца R (модуля X) — через $\mathcal{I}d^{\mathrm{gr}}(R)$ ($\mathcal{L}^{\mathrm{gr}}(X)$).

Определение.

1. Гомоморфизм $\varphi\colon R \to S$ градуированных колец называется *однородным*, если $\varphi(R_g) \subseteq S_g$ для всех $g \in G$.
2. Гомоморфизм $f\colon X_R \to Y_R$ градуированных модулей называется *однородным степени* $g \in G$, если $f(X_h) \subseteq Y_{gh}$ для всех $h \in G$. Аддитивная группа всех таких гомоморфизмов обозначается $\mathrm{HOM}_R(X,Y)_g$.
3. Гомоморфизмы градуированных R-модулей из аддитивной подгруппы
$$\mathrm{HOM}_R(X,Y) := \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_R(X,Y)_g \subseteq \mathrm{Hom}_R(X,Y)$$
называются градуированными.
4. Градуированное кольцо
$$\mathrm{END}_R(X) := \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_R(X,X)_g \subseteq \mathrm{End}_R(X)$$
называется *кольцом градуированных эндоморфизмов* градуированного R-модуля X.

Замечание 1.1.5.

1. Градуировка модуля X индуцирует градуировку на фактор-модуле X/Y по градуированному подмодулю Y:
$$(X/Y)_g = \{x + Y \mid x \in X_g\}.$$
2. Для всякого однородного гомоморфизма $f\colon X \to Y$ подмодули $\mathrm{Ker}\, f \subseteq X$ и $\mathrm{Im}\, f \subseteq Y$ являются градуированными.
3. Если $Y \subseteq X$ — градуированные модули, то канонический эпиморфизм $\pi\colon X \to X/Y$ является однородным степени e.
4. Для любого градуированного кольца R имеет место изоморфизм градуированных колец:
$$R \cong \mathrm{END}_R(R) = \mathrm{End}_R(R), \quad r \mapsto (f\colon x \mapsto rx).$$

Предложение 1.1.6 [38, следствия 2.4.4—2.4.6]. *Пусть X_R и Y_R — градуированные модули. Тогда если модуль X конечно порождён или оба модуля X и Y имеют конечные носители (например, если группа G конечна), то*
$$\mathrm{HOM}_R(X,Y) = \mathrm{Hom}_R(X,Y).$$

Существуют градуированное кольцо R и градуированные модули X_R, Y_R, такие что $\mathrm{HOM}_R(X,Y) \subsetneq \mathrm{Hom}_R(X,Y)$.

Пример 1.1.7 [38, пример 2.4.1]. Пусть $R = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ — $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо, $R_n \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Выберем любой элемент $a = \sum\limits_{n\in K} a_n$, где K — некоторое конечное подмножество в $\mathbb{Z}$, $0 \neq a_n \in R_n$ при всех $n \in K$. Пусть X — $\mathbb{Z}$-градуированный R-модуль, $X_k = \prod\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_k$ для $k \in \mathbb{Z}$ (умножение

$X \times R \to X$ индуцировано умножением в R). Определим $f \in \mathrm{Hom}_R(X,R)$ правилом $f\big((x_n)_n\big) = \sum\limits_{k\in K} x_k a_k$, $(x_n)_n \in R$. Тогда $f \notin \mathrm{HOM}_R(X,R)$.

1.2. Градуированные матричные кольца

Если R — G-градуированное кольцо, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, то через $R_n(\bar{g})$ обозначается матричное кольцо R_n с градуировкой

$$R_n(\bar{g})_h = (R_{g_i^{-1}hg_j})_{ij} = \begin{pmatrix} R_{g_1^{-1}hg_1} & R_{g_1^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_1^{-1}hg_n} \\ R_{g_2^{-1}hg_1} & R_{g_2^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_2^{-1}hg_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{g_n^{-1}hg_1} & R_{g_n^{-1}hg_2} & \ldots & R_{g_n^{-1}hg_n} \end{pmatrix}, \quad h \in G. \tag{1}$$

Легко убедиться, что при такой градуировке матричная единица e_{ij} имеет степень $g_i g_j^{-1}$.

Возможно ли отождествление градуированного кольца R с подкольцом скалярных матриц в $R_n(\bar{g})$, как в неградуированном случае? Вообще говоря, нет, поскольку последнее может не быть градуированным подкольцом в $R_n(\bar{g})$ (т. е. градуировка на $R_n(\bar{g})$, вообще говоря, не индуцирует градуировку на подкольце скалярных матриц).

Замечание 1.2.1. Для возможности указанного отождествления необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{Cent}(\mathrm{Supp}\, R). \tag{2}$$

Действительно, элементу $0 \neq r \in h(R)$ степени $h \in \mathrm{Supp}\, R$ соответствует скалярная матрица

$$\mathrm{diag}(r, \ldots, r) = \mathrm{diag}(r, \ldots, 0) + \ldots + \mathrm{diag}(0, \ldots, r),$$

представленная в виде суммы n однородных матриц, i-я из которых имеет степень $g_i h g_i^{-1}$. Поэтому

$$\mathrm{diag}(r, \ldots, r) \in h\big(R_n(\bar{g})\big) \iff \deg \mathrm{diag}(r, \ldots, r) = h \iff$$
$$\iff g_i h g_i^{-1} = h \ \text{ for all } \ i = 1, \ldots, n \iff g_1, \ldots, g_n \in \mathrm{Cent}(h).$$

Когда r пробегает $h(R) \setminus 0$, его степень $\deg r = h$ пробегает $\mathrm{Supp}\, R$.

В дальнейшем при выполнении условия (2) мы будем отождествлять рассматриваемые градуированные кольца. Ясно, что условие (2) выполнено в случае абелевой группы G, а также в случае $g_1 = \ldots = g_n = e$.

Известно (см., например, [10, с. 82]), что кольцо, содержащее полную систему n^2 матричных единиц (т. е. такую систему элементов e_{ij}, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} e_{ii} = 1$ и $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$) изоморфно $(n \times n)$-матричному кольцу над централизатором этой системы. Нам понадобится градуированный аналог этого факта. Заметим, что централизатор системы однородных матричных единиц может оказаться неградуированным подкольцом в R.

Пример 1.2.2. Пусть G — группа, $g, h \in G$, $gh \neq hg$, D — G-градуированное кольцо, $d \in D_h \setminus 0$, $R = D_2(e, g)$ — G-градуированное кольцо, C — централизатор системы $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ матричных единиц в R. Тогда

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in C, \quad \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R_h, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in R_{g^{-1}hg} \neq R_h,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \notin C\colon \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

т. е. C не является G-градуированным подкольцом в R.

Для $h \in G$ обозначим через ${}^hR^{h^{-1}}$ кольцо R с *h-сопряжённой* градуировкой: $({}^hR^{h^{-1}})_g = R_{hgh^{-1}}$.

Предложение 1.2.3. *Пусть R — градуированное кольцо, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, $\{e_{ij}\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ — полная система матричных единиц в R, такая что $e_{ij} \in R_{g_i g_j^{-1}}$, C — её централизатор. Тогда существует такое градуированное кольцо D, что $D \cong C \cong Ce_{11} = e_{11}Re_{11}$ — изоморфизм колец, $R \cong D_n(\bar{g})$ — изоморфизм градуированных колец. Если выполнено условие* (2), *то C — градуированное подкольцо в R и его можно взять в качестве кольца D.*

Доказательство. Имеют место изоморфизмы колец (с забытой градуировкой) [10, с. 82]:

$$R \cong C_n, \quad a \mapsto (b_{ij})_{ij}, \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ki} a e_{jk};$$
$$C \cong Ce_{11}, \quad c \mapsto ce_{11}; \quad e_{11}Re_{11} = Ce_{11}; \quad R \cong (Ce_{11})_n.$$

При этом градуировка на кольце R индуцирует градуировку на кольце

$$Ce_{11} = e_{11}Re_{11} = \bigoplus_{g \in G} e_{11}R_g e_{11}$$

с единицей e_{11}, а при сквозном изоморфизме $R \to (Ce_{11})_n$ элемент $a \in R_h$ ($h \in G$) переходит в матрицу с элементом

$$b_{ij}e_{11} = e_{1i} a e_{j1} \in (Ce_{11})_{g_1 g_i^{-1} h g_j g_1^{-1}}$$

на (ij)-м месте, поэтому

$$R \cong D_n(\bar{g}), \quad \text{где} \quad D = {}^{g_1}(Ce_{11})^{g_1^{-1}}.$$

Пусть теперь выполнено условие (2). Если $c_1 + \ldots + c_m \in C$, $\deg c_k = h_k$ ($k = 1, \ldots, m$), то $c_1 e_{ij} + \ldots + c_m e_{ij} = e_{ij} c_1 + \ldots + e_{ij} c_m$ для всех i, j. При всех $k = 1, \ldots, m$ имеем $c_k e_{ij} \in R_{h_k g_i g_j^{-1}}$, $e_{ij} c_k \in R_{g_i g_j^{-1} h_k}$, откуда согласно равенству $h_k g_i g_j^{-1} = g_i g_j^{-1} h_k$ получаем, что $c_k e_{ij} = e_{ij} c_k$, т. е. $c_k \in C$. Значит, C — градуированное подкольцо в R. В этом случае все указанные выше изоморфизмы колец являются изоморфизмами градуированных колец, в частности,

$$D = {}^{g_1}(Ce_{11})^{g_1^{-1}} = Ce_{11} \cong C. \qquad \square$$

1.3. Градуированные аналоги классических понятий

Однопорождённость идеалов

Естественным градуированным аналогом главного идеала является следующее понятие.

Определение.

1. Градуированный идеал (односторонний или двусторонний) назовём *gr-главным*, если он порождается одним однородным элементом.
2. Градуированное кольцо R назовём *кольцом gr-главных* (*gr-главных правых, gr-главных левых*) *идеалов*, если в нём каждый (каждый правый, каждый левый) градуированный идеал является gr-главным.

Отметим, что градуированный идеал может порождаться одним элементом, но не иметь одного однородного порождающего. Такой идеал мы не считаем gr-главным.

Пример 1.3.1. В кольце $R = \mathbb{Z}[\sqrt{6}] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{6}$ с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой $R_0 = \mathbb{Z}$, $R_1 = \mathbb{Z}\sqrt{6}$ градуированный идеал $(2, \sqrt{6})$ порождается элементом $2 + \sqrt{6}$, но не имеет однородного порождающего.

Градуированные кольца главных правых идеалов будем называть *gr-pri-кольцами*.

Тела и регулярные кольца

Определение. Градуированное кольцо, каждый ненулевой однородный элемент которого обратим, называется *градуированным телом*. Коммутативное градуированное тело называется *градуированным полем*.

Пример 1.3.2. Групповое кольцо FG с канонической G-градуировкой является градуированным телом в точности тогда, когда кольцо F является телом. Если $G \neq \{e\}$, то кольцо FG не является телом, поскольку содержит нетривиальный фундаментальный идеал $\omega G = \left\{\sum \alpha_g g \mid \sum \alpha_g = 0\right\}$.

Определение. Градуированное кольцо R называется *gr-регулярным*, если $a \in aRa$ для каждого $a \in h(R)$, т. е. если уравнение $a = axa$ разрешимо относительно $x \in R$ при всех $a \in h(R)$.

Если $a \in R_g$, то в равенстве $a = axa$ элемент x можно заменить его однородной компонентой $x_{g^{-1}}$. Элементы $ax_{g^{-1}}, x_{g^{-1}}a \in R_e$ являются однородными идемпотентами кольца R.

Отметим, что gr-регулярное кольцо может не быть регулярным, как показывают примеры групповых колец.

Теорема 1.3.3 [11, теорема 10.4]. *Групповое кольцо AG регулярно в точности тогда, когда кольцо A регулярно, группа G локально конечна* (*т. е. каждая конечно порождённая подгруппа в G конечна*) *и порядок каждой конечной подгруппы в G обратим в кольце A.*

Таким образом, групповое кольцо $k\mathbb{Z}$, где k — поле, является $\mathbb{Z}$-градуированным полем (и тем более gr-регулярным кольцом), но не является регулярным кольцом.

Предложение 1.3.4 [38, следствие 6.3.5]. *Пусть кольцо R градуировано конечной группой G, причём $|G|^{-1} \in R$. Тогда если кольцо R gr-регулярно, то оно регулярно.*

Аналогично неградуированному случаю справедливо следующее предложение, характеризующее gr-регулярные кольца.

Предложение 1.3.5 [37, предложение C.1.5.1]. *Для градуированного кольца R следующие условия равносильны:*

1) *кольцо R gr-регулярно;*
2) *каждый gr-главный правый (левый) идеал кольца R порождается однородным идемпотентом;*
3) *каждый конечно порождённый правый (левый) градуированный идеал порождается однородным идемпотентом.*

Предложение 1.3.6 [37, следствие C.1.5.3; 41, теорема 3]. *Если кольцо R является сильно градуированным и кольцо R_e регулярно, то кольцо R gr-регулярно.*

Предложение 1.3.7. *Между правыми градуированными идеалами gr-регулярного кольца R и правыми идеалами кольца R_e имеется биекция, задаваемая взаимно-обратными отображениями*

$$\mathcal{I}d^{\mathrm{gr}}(R) \ni I \mapsto I_e \in \mathcal{I}d(R_e), \quad \mathcal{I}d(R_e) \ni K \mapsto KR \in \mathcal{I}d^{\mathrm{gr}}(R).$$

Доказательство. Если $K \in \mathcal{I}d(R_e)$, то $(KR)_e = KR_e = K$. Если кольцо R gr-регулярно, то $I_eR = I$ для любого $I \in \mathcal{I}d^{\mathrm{gr}}(R)$. Действительно, $\mathcal{I}d^{\mathrm{gr}}(R) \ni I_eR \subseteq I$ и для всякого $a \in h(I)$ существует такое $x \in h(R)$, что $a = axa$, при этом $ax \in R_e \cap I$, так что $a = (ax)a \in I_eR$. □

Простота и полная приводимость

Определение.

1. Градуированный модуль X, имеющий ровно два градуированных подмодуля 0 и X, называется *gr-неприводимым*.
2. Градуированный модуль, в котором каждый градуированный подмодуль выделяется прямым слагаемым, называется *вполне gr-приводимым*.
3. Градуированное кольцо R, имеющее ровно два градуированных идеала 0 и R, называется *gr-простым*.
4. Градуированное кольцо R, такое что модуль R_R (${}_RR$) вполне gr-приводим, называется *вполне gr-приводимым справа* (*слева*).

Замечание 1.3.8 [38, следствие 2.3.4]. Если градуированный подмодуль Y градуированного модуля X выделяется прямым слагаемым, то в разложении $X = Y \oplus Z$ модуль Z можно выбрать градуированным.

Определение.

1. Градуированный модуль, удовлетворяющий условию минимальности (максимальности) для градуированных подмодулей, т. е. условию обрыва убывающих (возрастающих) цепей градуированных подмодулей, называется *gr-артиновым* (*gr-нётеровым*).
2. Градуированное кольцо R, такое что модуль R_R gr-артинов (gr-нётеров), называется *gr-артиновым* (*gr-нётеровым*) *справа*. Аналогичные определения даются в левостороннем случае.

Справедлив градуированный аналог теоремы Молина—Веддербёрна—Артина, описывающий строение вполне gr-приводимых колец.

Теорема 1.3.9 [3, теорема 6.5.2; 33, предложение 2.9; 38, теорема 2.10.10]. *Для градуированного кольца R равносильны следующие условия*:

1) *кольцо R вполне gr-приводимо справа и gr-просто*;
2) *кольцо R gr-просто и gr-артиново справа*;
3) $R \cong D_n(\bar{g})$ *для некоторого градуированного (той же группой) тела D, числа $n \in \mathbb{N}$ и набора $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$.*

Также равносильны следующие условия:

4) *кольцо R вполне gr-приводимо справа*;
5) *кольцо R gr-артиново справа и gr-регулярно*;
6) *кольцо R изоморфно конечной прямой сумме gr-простых gr-артиновых справа колец.*

Замечание 1.3.10. Поскольку условие 3) теоремы 1.3.9 право-левосимметрично, то условия полной gr-приводимости модулей R_R и ${}_R R$ равносильны. Поэтому говорят просто о *вполне gr-приводимых кольцах.*

Отметим, что для градуированных колец условие полной gr-приводимости, вообще говоря, слабее условия полной приводимости, как показывает теорема Машке.

Теорема 1.3.11 (теорема Машке). *Для группового кольца AG следующие условия равносильны*:

1) *кольцо AG вполне приводимо*;
2) *кольцо A вполне приводимо, группа G конечна и её порядок обратим в кольце A*;
3) *фундаментальный идеал ωG выделяется прямым слагаемым в кольце AG.*

В то же время градуированное кольцо AG (с канонической G-градуировкой) вполне gr-приводимо в точности тогда, когда кольцо A вполне приводимо.

Первичность и полупервичность

Определение.

1. Градуированное кольцо R называется *gr-первичным*, если выполнено любое из эквивалентных условий:

а) $IJ \neq 0$ для всех ненулевых градуированных левых (или правых, или двусторонних) идеалов I и J кольца R;

б) для всех $a, b \in h(R)$ если $aRb = 0$, то $a = 0$ или $b = 0$.

2. Градуированное кольцо R называется *gr-полупервичным*, если выполнено любое из эквивалентных условий:

   а) $I^2 \neq 0$ для всех ненулевых левых (или правых, или двусторонних) градуированных идеалов I кольца R;

   б) для всех $a \in h(R)$ если $aRa = 0$, то $a = 0$.

3. Градуированное кольцо, не содержащее однородных делителей нуля, называется *градуированной областью*.
4. Градуированное кольцо, не содержащее однородных нильпотентных элементов, называется *gr-редуцированным*.

Замечание 1.3.12. Всякая градуированная область gr-первична, всякое gr-редуцированное кольцо gr-полупервично. В случае коммутативных колец верно и обратное.

Не всякое gr-первичное (gr-полупервичное) кольцо первично (полупервично), как показывают примеры групповых колец.

Теорема 1.3.13 [18, предложения 8 и 9 на с. 255 и 258]. *Групповое кольцо AG первично в точности тогда, когда кольцо A первично и $\{e\}$ — единственная конечная нормальная подгруппа в G. Групповое кольцо AG полупервично в точности тогда, когда кольцо A полупервично и порядки конечных нормальных подгрупп группы G не являются делителями нуля в A.*

Например, градуированное поле $k\mathbb{Z}_2$ не является первичным ни при каком поле k и не является полупервичным, если $\operatorname{char} k = 2$.

Теорема 1.3.14 [38, теорема 2.11.4]. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо с конечным носителем. Тогда*

1) *кольцо R e-точно*;
2) *кольцо R_e полупервично*;
3) *для всех $g \in G$ $g \in \operatorname{Supp}(R)$ тогда и только тогда, когда $g^{-1} \in \operatorname{Supp}(R)$.*

Условие конечности носителя в теореме 1.3.14 существенно, как показывает следующий пример.

Пример 1.3.15. Пусть k — поле, $R = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ — $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо:

$$R_n = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \left(\begin{smallmatrix} k & k \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right), & n = 0, \\ \left(\begin{smallmatrix} k & k \\ k & k \end{smallmatrix}\right), & n > 0. \end{cases}$$

Тогда кольцо R gr-первично, а кольцо R_0 не полупервично.

Определение. Группа G называется *упорядоченной*, если на ней задан линейный порядок $\leqslant$, такой что

$$a \leqslant b \implies ac \leqslant bc \text{ и } ca \leqslant cb \text{ при всех } a, b, c \in G.$$

Предложение 1.3.16 [38, предложение 5.2.6]. *Если G — упорядоченная группа, то всякое gr-первичное (gr-полупервичное) G-градуированное кольцо первично (полупервично).*

Замечание 1.3.17. Пусть кольцо R e-точно справа или слева. Тогда если кольцо R_e первично (полупервично), то кольцо R gr-первично (gr-полупервично).

В самом деле, если I и J — ненулевые градуированные идеалы в R, такие что $IJ = 0$, то в силу e-точности I_e и J_e — ненулевые идеалы в R_e и $I_e J_e = 0$. (В полупервичном случае то же рассуждение с $I = J$.)

Радикал Джекобсона

Определение.

1. *Градуированный радикал Джекобсона* градуированного модуля X — это пересечение всех его максимальных градуированных подмодулей. Обозначение: $\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(X)$.
2. *Градуированный радикал Джекобсона* градуированного кольца R — это его правый градуированный идеал $\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R_R)$.

Предложение 1.3.18. *Для градуированного кольца R верны следующие утверждения:*

1) $\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}_g(R) = \{r \in R_g \mid \text{для всех } s \in R_{g^{-1}} \text{ элемент } 1 - rs \text{ обратим справа}\}$ *для всех $g \in G$;*
2) $\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)$ *— градуированный идеал кольца R;*
3) $\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}\big(R/\,\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)\big) = 0$;
4) $\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)$ *наибольший среди таких градуированных идеалов K кольца R, что элемент $1 - r$ обратим для всех $r \in K_e$;*
5) $\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)$ *совпадает с пересечением всех максимальных градуированных левых идеалов.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех максимальных градуированных правых идеалов кольца R.

Докажем утверждение 1). Так как $r \in M$ тогда и только тогда, когда $1 \notin M + rR$ для всех $r \in h(R)$ и $M \in \mathcal{M}$, то для всех $g \in G$ и $r \in R_g$ имеем:

$$r \in h\big(\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)\big) \iff 1 \notin M + rR \text{ для каждого } M \in \mathcal{M} \iff$$
$$\iff 1 - rs \notin M \text{ для каждого } M \in \mathcal{M} \text{ и каждого } s \in R. \quad (*)$$

Так как M — градуированный правый идеал в R, то условие $1-rs\notin M$ равносильно условию $(1-rs)_h\notin M$ для некоторого $h\in G$. Поэтому цепь равносильностей $(*)$ продолжается так:

$$1-rs\notin M \text{ для каждого } M\in\mathcal{M} \text{ и каждого } s\in R_{g^{-1}}. \qquad (**)$$

Действительно, импликация $(*)\Longrightarrow(**)$ очевидна. Обратно, взяв $M\in\mathcal{M}$ и $s\in R$, получаем, что $(1-rs)_e=1-rs_{g^{-1}}\notin M$. Остаётся заметить, что условие $(**)$ равносильно тому, что элемент $1-rs$ обратим справа для всех $s\in R_{g^{-1}}$.

Докажем утверждение 2). Надо показать, что $\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)$ — левый идеал в R, т. е. по доказательству пункта 1) что для всех $r\in h\big(\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)\big)$ и $s,t\in h(R)$ с условием $trs\in R_e$ элемент $1-trs$ обратим справа. Так как $rs\in \mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)$, то последнее равносильно тому, что

$$\text{для каждого } \rho\in G,\ \text{каждого } r\in \mathrm{J}^{\mathrm{gr}}_\rho(R) \text{ и каждого } t\in R_{\rho^{-1}}$$
$$\text{элемент } 1-tr \text{ обратим справа.}$$

По доказательству пункта 1) элемент $1-rt$ обратим справа, т. е. $(1-rt)u=1$ для некоторого $u\in R_e$. Тогда $1+rtu=u$ и $(1-tr)(1+tur)=1+tur-t(1+rtu)=1$.

Докажем утверждение 3). Пусть $\pi\colon R\to R/\,\mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)$ — канонический эпиморфизм и $\pi r\in \mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(\pi R)$. Тогда $r\in M$ для всех таких $M\in\mathcal{M}$, что $M\supseteq \mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)$. Но $M\supseteq \mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)$ для всех $M\in\mathcal{M}$. Значит, $r\in \mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)$ и $\pi r=0$.

Докажем утверждение 4). По доказательству пункта 1) любой такой идеал K содержится в J. Остаётся показать, что элемент $1-r$ обратим для всякого $r\in \mathrm{J}^{\mathrm{gr}}_e(R)$. Обратимость справа обеспечивается пунктом 1) при $s=1$: $(1-r)u=1$, $u\in R_e$. Отсюда следует, что $1-u=-ru\in \mathrm{J}^{\mathrm{gr}}(R)$, и так как $u=1-(1-u)$, то $uv=1$ для некоторого $v\in R_e$. Тогда $v=(1-r)uv=1-r$ и $u(1-r)=1$.

Утверждение 5) следует из симметричности пункта 4). □

Униформность и конечномерность

Определение.

1. Ненулевой градуированный модуль называется *gr-униформным* (или *gr-равномерным*), если любые два его ненулевых градуированных подмодуля имеют ненулевое пересечение.
2. Градуированное кольцо R, такое что модуль R_R (${}_RR$) gr-униформен, называется *gr-униформным справа* (*слева*).
3. Элемент $r\in h(R)$, для которого модуль $(rR)_R$ (${}_R(Rr)$) gr-униформен, называется *gr-униформным справа* (*слева*).

Замечание 1.3.19. Свойство gr-униформности и униформности, вообще говоря, неравносильны. Например, групповое кольцо kG, где k — поле, является градуированным полем и тем более gr-униформным кольцом (справа и слева).

В то же время по теореме Машке 1.3.11 при определённых условиях фундаментальный (неградуированный) идеал ωG выделяется в kG прямым слагаемым, и значит, кольцо kG при этих условиях не униформно.

Определение.

1. Градуированный модуль, не содержащий бесконечных прямых сумм градуированных подмодулей, называется *gr-конечномерным*.
2. Градуированное кольцо R, такое что модуль R_R $({}_RR)$ gr-конечномерен, называется *gr-конечномерным справа* (*слева*).

Предложение 1.3.20. *Если градуированный R-модуль X g-точен $(g \in G)$, то модуль X_R gr-конечномерен в точности тогда, когда модуль $(X_g)_{R_e}$ конечномерен. В частности, e-точное справа градуированное кольцо R gr-конечномерно справа в точности тогда, когда кольцо R_e конечномерно справа.*

Доказательство. 1. Если сумма $\sum\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ ненулевых градуированных подмодулей в X прямая, то прямая и сумма $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (Y_i \cap X_g)$ подмодулей в $(X_g)_{R_e}$, ненулевых ввиду g-точности модуля X.

2. Если сумма $\sum\limits_{i=1}^{\infty} Y_i$ ненулевых подмодулей в $(X_g)_{R_e}$ прямая, то прямая и сумма $\sum\limits_{i=1}^{\infty} Y_i R$ градуированных подмодулей в X. Действительно, пусть $\sum\limits_{i=1}^{k} y_i r_i = 0$, $y_i \in Y_i \subseteq X_g$, $r_i \in h(R)$, $y_i r_i \neq 0$. Можно считать, что все элементы r_i одной степени. Найдём такое $r' \in h(R)$, что $0 \neq y_1 r_1 r' \in X_g$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{k} y_i r_i r' = 0$, причём $r_i r' \in R_e$ и $y_i r_i r' \in Y_i$ при всех i, поэтому $y_i r_i r' = 0$ при всех i — противоречие. □

Инъективность

Определение.

1. Градуированный модуль X_R называется *gr-инъективным*, если для любых градуированных модулей A_R и B_R, любого градуированного мономорфизма $\varphi\colon A \to B$ и любого градуированного гомоморфизма $f\colon A \to X$ существует такой градуированный гомоморфизм $h\colon B \to X$, что $h \circ \varphi = f$.
2. Градуированное кольцо R называется *gr-самоинъективным справа* (*слева*), если модуль R_R $({}_RR)$ gr-инъективен.

Теорема 1.3.21 (критерий Бэра для градуированных модулей [38, следствие 2.4.8]). *Градуированный модуль X_R gr-инъективен тогда и только тогда, когда для любого градуированного правого идеала K кольца R, любого $g \in G$ и любого $\varphi \in \big(\mathrm{HOM}_R(K, X)\big)_g$ найдётся такой элемент $x \in X_g$, что $\varphi(k) = xk$ для всех $k \in K$.*

Замечание 1.3.22 [38, следствия 2.3.2, 2.5.2, замечание 2.3.3].

1. Всякий инъективный градуированный модуль gr-инъективен.
2. Если группа G конечна, то всякий gr-инъективный G-градуированный модуль инъективен.
3. Пусть k — поле, $R = k[x, x^{-1}]$ — $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо с градуировкой $R_n = kx^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда R_R — gr-инъективный, но не инъективный модуль.

Градуированные аналоги существенных и рациональных расширений рассмотрим в разделе 2.

1.4. Ортогональная полнота в теории колец

Булевы кольца

Определение. Пусть B — булево кольцо.

1. Подмножество $T \subseteq B$ называется *ортогональным*, если $uv = 0$ для всех различных $u, v \in T$. Подмножество $T \subseteq B$ называется *плотным*, если $\mathrm{Ann}_B(T) = 0$.
2. Булево кольцо B называется *ортогонально полным*, если для любого плотного ортогонального семейства $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в B и любого семейства $\{t_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ в B существует такой элемент $t \in B$, что $tu_\gamma = t_\gamma u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$.

Из плотности системы $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ следует, что элемент t определяется однозначно; он обозначается через $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} t_\gamma u_\gamma$.

Пример 1.4.1. Для любого множества I булево кольцо $\mathbb{Z}_2^I$ ортогонально полно. Для бесконечного множества I булево кольцо $\bigoplus\limits_{i\in I} \mathbb{Z}_2$ не является ортогонально полным.

Нам также понадобится следующий известный результат.

Лемма 1.4.2. *Во всяком бесконечном булевом кольце найдётся бесконечная ортогональная система элементов.*

Доказательство. Пусть B — бесконечное булево кольцо. Найдём элемент $u_1 \in B$, $u_1 \neq 0, 1$. Хотя бы одно из булевых колец u_1B, $(1 - u_1)B$ бесконечно. Если u_1B бесконечно, то обозначим $v_1 := u_1$, иначе обозначим $v_1 := 1 - u_1$. Тогда $1 - v_1 \neq 0, 1$, и в бесконечном булевом кольце v_1B найдётся элемент $u_2 \neq 0, v_1$. Хотя бы одно из булевых колец $u_2v_1B = u_2B$ или $(1 - u_2)v_1B = (v_1 - u_2)B$ бесконечно. Если u_2B бесконечно, то обозначим $v_2 := u_2$, иначе обозначим $v_2 := v_1 - u_2$. Продолжая этот процесс, получим бесконечную ортогональную систему элементов в B:

$$1 - v_1,\ v_1(1 - v_2),\ v_1v_2(1 - v_3),\ v_1v_2v_3(1 - v_4), \ldots . \qquad \square$$

Определение. *Фильтром* булева кольца B называется любое его подмножество $\mathcal{F}$, удовлетворяющее следующим трём условиям:

1) $1 \in \mathcal{F}$, $0 \notin \mathcal{F}$;
2) если $u \in \mathcal{F}$ и $B \ni v \geqslant u$, то $v \in \mathcal{F}$;
3) если $u, v \in \mathcal{F}$, то $uv \in \mathcal{F}$.

Фильтр $\mathcal{F}$, удовлетворяющий дополнительному условию

4) для всех $u \in B$ $u \in \mathcal{F}$, если и только если $1 - u \notin \mathcal{F}$,

называется *ультрафильтром*.

Замечание 1.4.3 [18]. Если M — максимальный идеал в B, то $B \setminus M$ — ультрафильтр в B.

Теорема 1.4.4 [5, следствие 8.5; 24, теорема 2.3.9, с. 98]. *Пусть C — коммутативное регулярное самоинъективное кольцо, B — булево кольцо его идемпотентов со сложением*

$$u \oplus v = u + v - 2uv \tag{3}$$

и порядком

$$u \leqslant v \iff uv = u. \tag{4}$$

Тогда верны следующие утверждения:

1) *полное кольцо частных $Q(C)$ кольца C совпадает с C*;
2) *идеал $\mathrm{Ann}_C(T)$ является главным для любого подмножества $T \subseteq C$, причём порождающий этого идеала можно выбрать в B*;
3) *булево кольцо B ортогонально полно.*

Ортогональная полнота

Определение. Сохраним предположения теоремы 1.4.4. Подмножество M несингулярного C-модуля X называется *ортогонально полным относительно булева кольца B*, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий [7, с. 36; 24, с. 100]:

1) для любой плотной ортогональной системы $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и любой системы $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в M существует такой элемент $x \in M$, что $x_\gamma u_\gamma = x u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$;
2) для любой ортогональной системы $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и любой системы $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в M существует такой элемент $x \in M$, что $x_\gamma u_\gamma = x u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$ и $vx = 0$, где элемент $v \in B$ однозначно определён условием
$$\mathrm{Ann}_C\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma C\right) = vC$$
(пункт 2) теоремы 1.4.4).

Замечание 1.4.5.

1. Из несингулярности C-модуля X следует, что элемент x в данном выше определении определён однозначно [24, с. 100]. Он обозначается через $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma$.
2. Если кольцо B конечно, то ортогональные суммы $\sum^{\perp}$ совпадают с обычными конечными суммами $\sum$.

Теорема 1.4.6 [7, лемма 1; 24, теорема 2.3.9]. *Пусть A — полупервичное кольцо, $Q = Q(A)$ — его полное правое кольцо частных, C — центр кольца Q* (*расширенный центроид кольца A*). *Тогда верны следующие утверждения*:

1) *кольцо C регулярно и самоинъективно*;
2) *C-модуль Q несингулярен и ортогонально полон.*

2. Кольца частных градуированных колец

2.1. Существенные и рациональные расширения

Определение.

1. Расширение градуированных модулей $X_R \subseteq Y_R$ называется *gr-существенным*, если

   $$\text{для каждого } y \in h(Y)\setminus 0 \text{ найдётся } r \in h(R), \text{ такой что } yr \in h(X)\setminus 0.$$

   Расширение градуированных модулей $X_R \subseteq Y_R$ называется *gr-рациональным*, если

   $$\text{для каждого } y_1 \in h(Y)\setminus 0 \text{ и каждого } y_2 \in h(Y) \text{ найдётся } r \in h(R), \text{ такой что } y_1 r \neq 0,\ y_2 r \in h(X).$$

2. Градуированный правый идеал I градуированного кольца R называется *gr-существенным* (*gr-плотным*), если $I_R \subseteq R_R$ — gr-существенное (gr-рациональное) расширение.
3. Градуированное кольцо S называется *градуированным правым кольцом частных* своего градуированного подкольца R, если $R_R \subseteq S_R$ — gr-рациональное расширение.

Отметим, что расширение $X_R \subseteq Y_R$ gr-существенно в точности тогда, когда $X \cap Z \neq 0$ для любого ненулевого градуированного подмодуля $Z \subseteq Y$.

Очевидно, что всякое существенное (рациональное) градуированное расширение градуированных модулей является gr-существенным (gr-рациональным). Следующее предложение показывает, что верно и обратное.

Предложение 2.1.1 [2, предложение 9; 38, предложение 2.3.5]. *Всякое gr-существенное (gr-рациональное) расширение градуированных модулей является существенным (рациональным). В частности, gr-существенные (gr-плотные) правые идеалы являются существенными (плотными), а градуированные правые кольца частных являются правыми кольцами частных.*

Замечание 2.1.2. Из предложения 2.1.1 и свойств существенных и рациональных расширений вытекают следующие утверждения, которыми мы будем далее пользоваться без ссылок.

1. Оба расширения $X_R \subseteq Y_R \subseteq Z_R$ градуированных модулей gr-существенны (gr-рациональны) в точности тогда, когда таковым является расширение $X_R \subseteq Z_R$.
2. Градуированное кольцо S является правым градуированным кольцом частных градуированного кольца R в точности тогда, когда для всякого $s \in h(S) \setminus 0$ правый идеал $(R : s)_R$ является gr-плотным и $s(R : s) \neq 0$.

Предложение 2.1.3. *Пусть S — градуированное правое кольцо частных кольца R. Тогда если сумма $\sum\limits_\alpha I_\alpha$ градуированных правых идеалов I_α в R прямая, то сумма $\sum\limits_\alpha I_\alpha S$ градуированных правых идеалов в S также прямая и*

$$\left(\bigoplus_\alpha I_\alpha\right)S = \bigoplus_\alpha (I_\alpha S).$$

Доказательство. Пусть Q — полное правое кольцо частных кольца R и $S \subseteq Q$. По [20, п. 14.9 (5)]

$$\left(\bigoplus_\alpha I_\alpha\right)Q = \bigoplus_\alpha (I_\alpha Q).$$

Отсюда следует требуемое утверждение. □

Установим связь между gr-существенностью (gr-рациональностью) градуированных R-подмодулей и существенностью (рациональностью) их компонент как R_e-подмодулей.

Предложение 2.1.4. *Пусть $X_R \subseteq Y_R$ — градуированные модули, причём модуль Y точен в компоненте $g \in G$. Тогда подмодуль X_R gr-существен в Y_R тогда и только тогда, когда подмодуль $(X_g)_{R_e}$ существен в $(Y_g)_{R_e}$.*

Доказательство. Отметим, что по определению g-точности $X \neq 0$ тогда и только тогда, когда $X_g \neq 0$.

Докажем необходимость. Если $0 \neq K_{R_e} \subseteq (Y_g)_{R_e}$, то $0 \neq KR$ — градуированный подмодуль в Y_R, поэтому $X \cap KR \neq 0$ и $(X \cap KR)_g = X_g \cap K \neq 0$.

Докажем достаточность. Если $0 \neq Z_R \subseteq Y_R$, то $0 \neq Z_g \subseteq Y_g$, поэтому $Z_g \cap X_g \neq 0$ и $Z \cap X \neq 0$. □

Следствие 2.1.5. *Пусть градуированное кольцо R e-точно справа. Тогда для всех градуированных правых идеалов I кольца R и всех правых идеалов K кольца R_e верны следующие утверждения:*

1) *I gr-существен в R тогда и только тогда, когда I_e существен в R_e;*
2) *K существен в R_e тогда и только тогда, когда KR gr-существен в R.*

Замечание 2.1.6. Условие точности существенно, как показывает пример кольца многочленов $A[x]$ со стандартной $\mathbb{Z}$-градуировкой над областью A, в котором градуированный идеал $I = (x)$ существен, но $I_0 = 0$.

Предложение 2.1.7. *Пусть $X \subseteq Y$ — gr-рациональное расширение градуированных модулей и модуль Y g-точен. Тогда $X_g \subseteq Y_g$ — рациональное расширение R_e-модулей.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in Y_g$, $y_1 \neq 0$. Так как расширение $X \subseteq Y$ gr-рационально, то найдётся такое $r \in h(R)$, что $y_1 r \neq 0$ и $y_2 r \in h(X)$. Ввиду g-точности модуля Y найдётся такое $r' \in h(R)$, что $0 \neq (y_1 r)r' \in Y_g$. Поскольку $y_1 \in Y_g$, $y_1 rr' \in Y_g$ и $r, r' \in h(R)$, то $rr' \in R_e$. Значит, $y_2(rr') \in X_g$ и $X_g \subseteq Y_g$ — рациональное R_e-расширение. □

Следствие 2.1.8. *Пусть S — градуированное правое кольцо частных кольца R и S_R — e-точный модуль. Тогда S_e — правое кольцо частных кольца R_e.*

Замечание 2.1.9. Пример 3.2.1 показывает, что условие e-точности существенно. В этом примере Q^{gr} — $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо частных кольца R, причём

$$R_0 \cong k \hookrightarrow k \oplus k = Q_0^{\mathrm{gr}}, \quad k \ni a \mapsto (a, a) \in k \oplus k.$$

При этом кольцо $k \oplus k$ не является кольцом частных своего подкольца $\{(a, a) \mid a \in k\} \cong k$.

Следствие 2.1.10. *Пусть градуированное кольцо R e-точно справа и I — его gr-плотный правый идеал. Тогда I_e — плотный правый идеал кольца R_e.*

Лемма 2.1.11. *Пусть R — точное градуированное кольцо. Тогда если K — плотный правый идеал в R_e, то KR — gr-плотный правый идеал в R.*

Доказательство. Пусть $r_1 \in h(R) \setminus 0$ и $r_2 \in R_g$ $(g \in G)$. Так как кольцо R точно слева, то $tr_1 \in R_g \setminus 0$ для некоторого $t \in h(R)$. Так как кольцо R точно справа, то $tr_1 r' \in R_e \setminus 0$ для некоторого $r' \in h(R)$. Тогда $r_2 r' \in R_e$, и поскольку правый идеал K является плотным в R_e, то $(tr_1 r')r \in R_e \setminus 0$ и $(r_2 r')r \in K$ для некоторого $r \in R_e$. Следовательно, $r_1 r' r \in h(R) \setminus 0$, и для элементов r_1 и r_2 мы нашли элемент $r'r$, для которого $r_1(r'r) \neq 0$ и $r_2(r'r) \in KR$. Значит, KR — gr-плотный правый идеал в R. □

Сингулярность

Сингулярный подмодуль $\mathrm{Sing}(X)$ градуированного модуля X_R над градуированным кольцом R может не быть градуированным.

Пример 2.1.12. Для группового кольца $R = \mathbb{Z}_2 \mathbb{Z}_2 = \{0, 1, e, 1 + e\}$ с канонической $\mathbb{Z}_2$-градуировкой имеем $\mathrm{Sing}(R_R) = \{0, 1 + e\}$.

В качестве градуированного аналога сингулярного подмодуля градуированного модуля X рассматривается наибольший градуированный подмодуль $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(X)$ в $\mathrm{Sing}(X)$. Его эквивалентная характеризация дана в следующем определении.

Определение.

1. Градуированный подмодуль X_R модуля Y_R, удовлетворяющий условию

   $x \in h(X)$ тогда и только тогда,

   когда $r_R(x)$ — gr-существенный правый идеал в R

   для всех $x \in h(Y)$, называется *gr-сингулярным подмодулем* модуля Y и обозначается $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(Y)$.
2. Градуированный модуль X называется *gr-несингулярным*, если $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(X) = 0$.
3. Правый градуированный идеал $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ кольца R называется *правым gr-сингулярным идеалом* кольца R.
4. Градуированное кольцо R называется *gr-несингулярным справа*, если $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0$.

Замечание 2.1.13 [38, следствие 5.3.4]. Если модуль X градуирован по упорядоченной группе, то подмодуль $\mathrm{Sing}(X)$ является градуированным, и поэтому $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(X) = \mathrm{Sing}(X)$.

Предложение 2.1.14. *Пусть R и S — градуированные кольца, причём $R_R \subseteq S_R$ — gr-существенное расширение (например, S — правое градуированное кольцо частных кольца R). Тогда верны следующие утверждения:*

1) $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_R) = \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_S)$;
2) *кольцо R gr-несингулярно справа в точности тогда, когда кольцо S gr-несингулярно справа.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $x \in h(S)$. Если $x \notin \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_S)$, то $xI = 0$ для некоторого gr-существенного правого идеала I в S. Так как $I \cap R$ — gr-существенный правый идеал в R (если $0 \neq r \in h(R)$, то $0 \neq rs \in I$ для некоторого $s \in h(R)$ и $0 \neq rsr' \in I \cap R$ для некоторого $r' \in h(R)$) и $x(I \cap R) = 0$, то $x \notin \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_R)$. Обратно, если $x \notin \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_R)$, то $xK = 0$ для некоторого gr-существенного правого идеала K в R. Тогда KS — gr-существенный правый идеал в S (если $0 \neq y \in h(S)$, то $0 \neq yr \in h(R)$ для некоторого $r \in h(R)$ и $0 \neq yrr' \in K \subseteq KS$ для некоторого $r' \in h(R)$) и $xKS = 0$, значит, $x \notin \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_S)$.

Докажем утверждение 2). Импликация

$$\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_S) = 0 \implies \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0$$

следует из доказательства пункта 1) и равенства

$$\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_R) \cap R.$$

Обратно, пусть $0 \neq y \in h\big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_R)\big)$. Тогда $yI = 0$ для некоторого gr-существенного правого идеала I в R. Правый идеал $(R : y)_R$ в R gr-существен, поэтому таков же правый идеал $I \cap (R : y)$. Значит, $y \in h\big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)\big)$. □

Предложение 2.1.15. *Если кольцо R e-точно справа, X_R — градуированный модуль, $g \in G$, то $\mathrm{Sing}(X_g)_{R_e} = \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}_g(X_R)$.*

Доказательство. Докажем включение $\subseteq$. Пусть K — существенный правый идеал в R_e, $x \in X_g$, $xK = 0$. Тогда KR — gr-существенный правый идеал в R (следствие 2.1.5) и $xKR = 0$.

Докажем включение $\supseteq$. Пусть I — gr-существенный правый идеал в R, $x \in X_g$, $xI = 0$. Тогда I_e — существенный правый идеал в R_e (следствие 2.1.5) и $xI_e = 0$. □

Положив $X_R = R_R$ и $g = e$, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.1.16. *Если градуированное кольцо R e-точно справа, то $\mathrm{Sing}\big((R_e)_{R_e}\big) = \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}_e(R)$.*

Замечание 2.1.17. Аналогично неградуированному случаю имеет место следующее утверждение: если кольцо R gr-несингулярно справа, то всякий gr-существенный правый идеал I в R является gr-плотным. Действительно, пусть $r_1 \in h(R) \setminus 0$ и $r_2 \in h(R)$. Тогда правый градуированный идеал $(I : r_2)_R = \{r \in R \mid r_2 r \in I\}$ является существенным по [20, 6.21, 5)] и градуированным, а значит, gr-существенным по предложению 2.1.1. Ввиду gr-несингулярности модуля R_R и условия $r_1 \neq 0$ получаем, что $r_1(I : r_2) \neq 0$, т. е. правый идеал I gr-плотный.

2.2. Полное градуированное кольцо частных

Определение и основные свойства

Градуированным аналогом полного правого кольца частных является полное правое градуированное кольцо частных $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R)$ градуированного кольца R, которое может быть определено (см. [3, 5, 32]) как

$$Q^{\mathrm{gr}} = \Bigg(\bigcup_{D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_r} \mathrm{HOM}_R(D, R) \Bigg) \Big/ \theta,$$

где $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_r$ — семейство gr-плотных правых идеалов в R, θ — отношение эквивалентности на множестве $\bigcup\limits_{D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_r} \mathrm{HOM}_R(D, R)$, которое вводится следующим образом.

Пусть $D_1, D_2 \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_r$, $D = D_1 \cap D_2$, $f_1 \colon D_1 \to R$, $f_2 \colon D_2 \to R$ — градуированные гомоморфизмы R-модулей. Тогда

$$f_1 \,\theta\, f_2 \iff f_1|_D = f_2|_D.$$

Операции в $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ корректно определяются равенствами

$$[f_1]_\theta * [f_2]_\theta = [f_1 * f_2]_\theta, \quad * \in \{+, \cdot\},$$

при этом $f_1 + f_2 \in \mathrm{HOM}_R(D_1 \cap D_2, R)$, $f_1 f_2 \in \mathrm{HOM}_R(f_2^{-1} D_1, R)$, а градуировка наследуется с кольца R:

$$Q_g^{\mathrm{gr}} = \bigcup_{D \in \mathcal{D}_r^{\mathrm{gr}}} (\mathrm{HOM}_R(D, R)_g)/\theta.$$

Замечание 2.2.1. Если градуированное кольцо R содержит наименьший gr-плотный правый идеал D (например, если R gr-артиново справа), то, как следует из определения, $Q^{\mathrm{gr}}(R) \cong \mathrm{END}_R(D)$. В частности, если кольцо R вполне gr-приводимо (и потому не содержит собственных gr-плотных правых идеалов), то $Q^{\mathrm{gr}}(R) \cong \mathrm{END}_R(R) \cong R$.

В следующем предложении собраны основные свойства кольца Q^{gr}, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем без ссылок.

Предложение 2.2.2 [5, предложение 39]. *Для градуированного кольца R с полным правым градуированным кольцом частных Q^{gr} верны следующие утверждения:*

1) *Q^{gr} — градуированное правое кольцо частных кольца R;*
2) *для всякого градуированного правого кольца частных S кольца R тождественное отображение кольца R может быть продолжено, и притом однозначно, до гомоморфизма R-модулей S_R в Q_R^{gr}, являющегося мономорфизмом градуированных колец;*
3) *для каждого gr-плотного правого идеала D кольца R и каждого $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ правый градуированный идеал $(D : q)_R = \{r \in R \mid qr \in D\}$ является gr-плотным;*
4) *$Q^{\mathrm{gr}}(Q^{\mathrm{gr}}) = Q^{\mathrm{gr}}$.*

Как и любое правое кольцо частных кольца R, кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ можно считать подкольцом кольца $Q(R)$. Эти кольца, вообще говоря, не совпадают.

Пример 2.2.3. Для кольца $R = k[x]$ многочленов над полем k со стандартной $\mathbb{Z}$-градуировкой $Q(R) = k(x)$, $Q^{\mathrm{gr}}(R) = k[x, x^{-1}]$.

Предложение 2.2.4 [38, предложение 8.3.4]. *Если кольцо R имеет конечный носитель, то $Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q(R)$ и кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ также имеет конечный носитель.*

Следующий пример взят из [20, пример 14.10]: это пример неинъективного кольца R, совпадающего с $Q(R)$. Мы вычислим кольцо $Q(R)$, введя естественную градуировку на кольце R.

Пример 2.2.5. Вычислим кольцо $Q(R)$ для кольца $R = k[X, Y]/I$, где $I = (X^2, Y^2, XY)$. Обозначим $x = X + I$, $y = Y + I$ и градуируем кольцо R по группе $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$:

$$R = k \oplus kx \oplus ky, \quad R_0 = k, \quad R_1 = kx, \quad R_2 = ky.$$

Поскольку R — единственный gr-плотный идеал в R, то $Q^{\mathrm{gr}}(R) = \mathrm{END}_R(R) \cong R$. По предложению 2.2.4 $Q(R) = Q^{\mathrm{gr}}(R) = R$.

Отметим следующее утверждение, неградуированный аналог которого хорошо известен [18, § 4.3, предложение 9].

Предложение 2.2.6. *Пусть* $R_1, \ldots, R_n$ — G*-градуированные кольца,* $R = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i = \bigoplus_{g \in G} R_g$, *где* $R_g = \bigoplus_{i=1}^{n} (R_i)_g$, $g \in G$. *Тогда* $Q^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q^{\mathrm{gr}}(R_i)$.

Связь колец $Q_e^{\mathrm{gr}}(R)$ и $Q(R_e)$

Исследуем связь между единичной компонентой кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ и полным правым кольцом частных единичной компоненты кольца R.

Предложение 2.2.7 [38, предложение 8.3.5, п. 2]. *Пусть группа* G *конечная и кольцо* R *сильно* G*-градуированное. Тогда* $Q_e^{\mathrm{gr}}(R) \cong Q(R_e)$.

Теорема 2.2.8. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) *кольцо* R gr*-несингулярно справа и* e*-точно справа;*
2) *кольцо* R *точно слева и справа во всех компонентах.*

Тогда $Q^{\mathrm{gr}}(R)_e \cong Q(R_e)$.

Доказательство. 1. Если I — gr-плотный правый идеал в R, то в силу e-точности справа кольца R I_e — плотный правый идеал в R_e (следствие 2.1.10).

Если K — плотный правый идеал в R_e, то KR — плотный правый идеал в R. Действительно, если выполнено условие 2), то это верно по лемме 2.1.11, а если выполнено условие 1), то это вытекает из следствия 2.1.5 и того, что gr-существенные правые идеалы gr-несингулярного кольца являются gr-плотными (замечание 2.1.17).

2. Сохраним обозначение θ для отношения эквивалентности, введённого выше при определении кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$, и обозначим через θ_e аналогичное отношение для кольца $Q(R_e)$. Если $f_i \in \mathrm{HOM}_R(I_i, R)_e$, $i = 1, 2$, и $f_1 \ \theta \ f_2$, то $f_1|_{I_e} \ \theta_e \ f_2|_{I_e}$. Поэтому каждому элементу $q \in Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$ можно поставить в соответствие такой элемент $\bar{q} \in Q(R_e)$, что $\bar{q} = [f|_{I_e}]_{\theta_e}$, где $q = [f]_\theta$, $f \colon I \to R$, I — gr-плотный правый идеал в R.

Обратно, пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{R_e}(K, R_e)$, где K — плотный правый идеал в R_e. Определим отображение $\tilde{\varphi}$ правилом

$$\tilde{\varphi}\left(\sum_m k_m r_m\right) = \sum_m \varphi(k_m) r_m,$$

где $k_m \in K$, $r_m \in R$. Докажем корректность этого отображения. Пусть $\sum\limits_m k_m r_m = 0$. Тогда все элементы r_m можно считать однородными одной степени. Поэтому $\sum\limits_m \varphi(k_m) r_m \in h(R)$. Если $\sum\limits_m \varphi(k_m) r_m \neq 0$, то в силу e-точности справа кольца R найдётся такое $r' \in h(R)$, что $\left(\sum\limits_m \varphi(k_m) r_m\right) r' \in R_e \setminus 0$. Но тогда $r_m r' \in R_e$ (поскольку $\varphi(k_m) \in R_e$), так что

$$\left(\sum_m \varphi(k_m) r_m\right) r' = \varphi\left(\sum_m (k_m r_m) r'\right) = 0 -$$

противоречие. Итак, $\tilde{\varphi} \in \mathrm{HOM}_R(KR, R)_e$.

3. Если $\varphi_i \in \mathrm{HOM}_{R_e}(K_i, R_e)$, $i = 1, 2$, и $\varphi_1\ \theta_e\ \varphi_2$, то $\tilde{\varphi}_1\ \theta\ \tilde{\varphi}_2$. Поэтому каждому элементу $t \in Q(R_e)$ можно поставить в соответствие такой элемент $\tilde{t} \in Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$, что $\tilde{t} = [\tilde{\varphi}]_\theta$, где $t = [\varphi]_{\theta_e}$, $\varphi\colon K \to R_e$, K — плотный правый идеал в R_e. Легко убедиться, что $\bar{\tilde{t}} = t$ для каждого $t \in Q(R_e)$ и $\tilde{\bar{q}} = q$ для каждого $q \in Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$, а также что $\bar{\cdot}$ и $\tilde{\cdot}$ — гомоморфизмы колец. □

Пример 2.2.9. Для группового кольца AG с канонической G-градуировкой $Q^{\mathrm{gr}}(AG) \cong Q(A)G$. Действительно, между правыми идеалами кольца A и градуированными правыми идеалами кольца AG имеется естественная биекция $K \mapsto KG$, при которой плотным правым идеалам в A соответствуют gr-плотные правые идеалы в AG. Каждому элементу

$$qg \in Q(A)G, \quad \text{где} \quad q = [f]_{\theta_e} \in Q(A), \quad f\colon \mathcal{D}(A) \ni D \to A, \quad g \in G,$$

ставится во взаимно-однозначное соответствие элемент

$$q'_g = [f']_\theta \in Q^{\mathrm{gr}}_g, \quad \text{где} \quad f'\colon DG \to AG, \quad \sum_i d_i h_i \mapsto \sum_i d_i g h_i, \quad d_i \in D, \quad h_i \in G.$$

Поскольку каноническая градуировка группового кольца является точной, то так же, как и в теореме 2.2.8, получаем, что данная биекция является изоморфизмом колец.

Условие точности в теореме 2.2.8 существенно, как показывает пример 3.2.1 коммутативного полупервичного (а значит, и несингулярного) кольца.

Gr-регулярность кольца Q^{gr}

В классической теории колец хорошо известны следующие утверждения о полном правом кольце частных Q кольца A:

1) кольцо Q регулярно тогда и только тогда, когда кольцо A несингулярно справа [18, § 4.5, предложение 2; 20, утверждение 14.11];
2) кольцо Q вполне приводимо тогда и только тогда, когда кольцо A несингулярно справа и конечномерно справа [20, утверждение 14.14].

Справедливы градуированные аналоги обоих утверждений. В [4, теорема 1] доказан аналог утверждения 1) при условии gr-полупервичности кольца R. Доказательство в [5, предложение 44], не использующее этого предположения, основано на построении кольца Q^{gr} с помощью градуированной инъективной оболочки и опирается на характеризацию градуированного радикала Джекобсона из предложения 1.3.18. Здесь мы приведём более короткое доказательство, основанное на конструкции кольца Q^{gr}, описанной выше (с помощью gr-плотных правых идеалов). Градуированный аналог утверждения 2) мы докажем в разделе 3.2 и получим с его помощью один из градуированных вариантов теоремы Голди.

Предложение 2.2.10. *Для градуированного кольца R с полным правым градуированным кольцом частных Q^{gr} справедлива равносильность: кольцо Q^{gr} регулярно тогда и только тогда, когда кольцо R gr-несингулярно справа.*

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть $0 \neq q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ и $q' \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ — такой элемент, что $qq'q = q$. Тогда $(q'q)^2 = q'q$ и

$$r_{Q^{\mathrm{gr}}}(q) \subseteq r_{Q^{\mathrm{gr}}}(q'q) \subseteq r_{Q^{\mathrm{gr}}}(qq'q) = r_{Q^{\mathrm{gr}}}(q).$$

поэтому

$$r_{Q^{\mathrm{gr}}}(q) = r_{Q^{\mathrm{gr}}}(q'q) = (1 - q'q)Q^{\mathrm{gr}}.$$

Так как $q'qQ^{\mathrm{gr}} \cap (1 - q'qQ^{\mathrm{gr}}) = 0$ и $q'q \neq 0$, то правый идеал $(1 - q'q)Q^{\mathrm{gr}}$ (градуированный, поскольку $q'q \in Q^{\mathrm{gr}}_e$) не является gr-существенным. Значит, кольцо Q^{gr} gr-несингулярно справа, поэтому таково же кольцо R по пункту 2) предложения 2.1.14.

Докажем достаточность. Сразу отметим, что по предложению 2.1.17 все gr-существенные правые идеалы в R gr-плотны. Пусть $h(Q^{\mathrm{gr}}) \ni q = [f]_\theta$, $f\colon D \to R$, $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}(R)$. Обозначим $K := \operatorname{Ker} f$ (градуированный правый идеал) и последовательно возьмём градуированные правые идеалы L и N в R, максимальные по отношению к свойствам $K \cap L = 0$ и $f(D \cap L) \cap N = 0$. Тогда градуированный правый идеал $f(D \cap L) \oplus N$ gr-существен, и правило

$$f'\colon f(D \cap L) \oplus N \to R, \quad f(d) + n \mapsto d,$$

где $d \in D \cap L$, $n \in N$, корректно определяет гомоморфизм R-модулей. Действительно, если $f(d_1) + n_1 = f(d_2) + n_2$, то $n_1 - n_2 = 0 = f(d_2 - d_1)$, $d_2 - d_1 \in L \cap K = 0$. Докажем теперь, что гомоморфизм f' однороден. Пусть $d \in D \cap L$ и $n \in N$ — такие элементы, что элемент $f(d) + n$ однороден. Так как гомоморфизм f однороден и сумма $f(D \cap L) + N$ прямая, то элементы $f(d)$ и n однородны и имеют одинаковую степень (если отличны нуля). Значит, если $f \neq 0$, то $\deg f' = (\deg f)^{-1}$.

Учитывая также, что $f(K) = 0$, получаем, что $ff'f(d) = f(d)$ для всех $d \in (D \cap L) \oplus K = D \cap (K \oplus L) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}(R)$ (мы использовали закон модулярности и gr-существенность правых идеалов D и $K \oplus L$). Значит, для $q' = [f']_\theta$ имеем $qq'q = q$, и кольцо Q^{gr} gr-регулярно. □

Градуированный расширенный центроид

Одним из основных объектов теории ортогональной полноты является центр полного правого кольца частных данного полупервичного кольца A, который называется расширенным центроидом кольца A. Его градуированным аналогом является максимальное градуированное подкольцо центра полного правого градуированного кольца частных gr-полупервичного кольца R, которое называется *градуированным расширенным центроидом* кольца R и обозначается через

$C^{\mathrm{gr}}(R)$. (Как уже отмечалось, центр градуированного кольца может не быть градуированным.)

Соберём вместе основные свойства кольца $C^{\mathrm{gr}} = C^{\mathrm{gr}}(R)$ и его единичной компоненты $C_e = C_e^{\mathrm{gr}}(R)$.

Предложение 2.2.11. *Для любого gr-полупервичного кольца R верны следующие утверждения*:

1) $h(C^{\mathrm{gr}}) = \{q \in h(Q^{\mathrm{gr}}) \mid qr = rq$ *для всех* $r \in R\}$, *в частности*, $C_e = \{q \in Q_e^{\mathrm{gr}} \mid qr = rq$ *для всех* $r \in R\}$;
2) *кольцо C^{gr} gr-регулярно и gr-самоинъективно*;
3) *кольцо C_e регулярно и самоинъективно*;
4) *следующие утверждения эквивалентны*: *кольцо R gr-первично*; *кольцо C^{gr} — градуированное поле*; *кольцо C_e — поле.*

Доказательство. Пункты 1), 2) и 4) доказаны в [3, теоремы 3.3.1, 3.3.2, предложение 3.3.6]. Докажем пункт 3). Из gr-регулярности кольца C^{gr} следует его e-точность, а также регулярность кольца C_e. Пусть теперь I — идеал в C_e, $f\colon I \to C_e$ — гомоморфизм C_e-модулей. Тогда IC^{gr} — градуированный идеал в C^{gr}, и правило

$$\tilde{f}\colon IC^{\mathrm{gr}} \to C^{\mathrm{gr}}, \quad \sum_{k=1}^{n} i_k c_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} f(i_k) c_k, \quad i_k \in I, \quad c_k \in C^{\mathrm{gr}}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

корректно задаёт однородный степени e гомоморфизм градуированных C^{gr}-модулей (это следует из e-точности кольца C^{gr} и доказывается так же, как в теореме 2.2.8). Так как кольцо C^{gr} gr-самоинъективно, то существует такой элемент $a \in IC^{\mathrm{gr}}$, что $\tilde{f}(x) = ax$ для всех $x \in IC^{\mathrm{gr}}$. Так как $\deg \tilde{f} = e$, то $a \in (IC^{\mathrm{gr}})_e = IC_e = I$. Поскольку $\tilde{f}$ продолжает f, то $f(x) = ax$ для всех $x \in I$. Значит, кольцо C_e самоинъективно. □

Следствие 2.2.12. *Для любого gr-полупервичного кольца R верны равенства $Q^{\mathrm{gr}}(C^{\mathrm{gr}}) = C^{\mathrm{gr}}$ и $Q(C_e) = C_e$.*

2.3. Классическое градуированное кольцо частных

Подмножество S (не обязательно градуированного) кольца R называется мультипликативным, если $0 \notin S$, $1 \in S$ и $xy \in S$ для всех $x, y \in S$.

Мультипликативное множество S называется правым множеством Оре, если оно удовлетворяет правым условиям Оре:

1) для любых $r \in R$ и $s \in S$ существуют такие $r' \in R$ и $s \in S$, что $rs' = sr'$;
2) если $sr = 0$ для $r \in R$ и $s \in S$, то $rs' = 0$ для некоторого $s' \in S$.

Для кольца R и правого множества Оре $S \subset R$ определено кольцо правых частных RS^{-1}, для которого кольцо R является подкольцом в точности тогда, когда все элементы из S регулярны (второе условие Оре тогда выполнено автоматически). В случае когда S состоит из всех регулярных элементов кольца R, кольцо RS^{-1} называется классическим правым кольцом частных кольца R и обозначается $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ [18, § 4.6; 20, гл. 10].

Если кольцо R градуированное и все элементы множества S однородны, то кольцо RS^{-1} наследует градуировку кольца R.

Предложение 2.3.1 [38, утверждения 8.1.1, 8.1.2]. *Пусть R — градуированное кольцо, $S \subset h(R)$ — мультипликативное множество. Тогда множество S является правым множеством Оре в точности тогда, когда выполняются условия Оре для однородных элементов:*

1′) *для любых $r \in h(R)$ и $s \in S$ существуют такие $r' \in h(R)$ и $s \in S$, что $rs' = sr'$;*

2′) *если $sr = 0$ для $r \in h(R)$ и $s \in S$, то $rs' = 0$ для некоторого $s' \in S$.*

При выполнении условий 1′) и 2′) кольцо RS^{-1} является градуированным кольцом с градуировкой

$$(RS^{-1})_g = \bigcup_{h \in G} \{rs^{-1} \mid r \in R_h,\ s \in S_{h^{-1}g}\}.$$

Если при этом все элементы из S регулярны, то кольцо RS^{-1} является правым градуированным кольцом частных кольца R.

Определение. Если множество S всех однородных регулярных элементов градуированного кольца R является правым множеством Оре, то кольцо RS^{-1} называется *классическим правым градуированным кольцом частных* кольца R и обозначается через $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Кольцо R называется при этом *правым градуированным* (*классическим*) *порядком* в кольце $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Мы часто будем пользоваться следующей хорошо известной леммой о приведении к общему знаменателю.

Лемма 2.3.2. *Пусть R — градуированное кольцо, S — правое множество Оре, лежащее в $h(R)$, $Q = RS^{-1}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ и $q_1, \ldots, q_n \in h(Q)$ существуют такие $r_1, \ldots, r_n \in h(R)$ и $s \in S$, что $q_i = r_i s$, $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. По [20, п. 10.7] существуют такие $r_1, \ldots, r_n \in R$ и $s \in S$, что $q_i = r_i s$, $i = 1, \ldots, n$. Так как $q_1, \ldots, q_n, s \in h(Q)$, то можно считать, что $r_1, \ldots, r_n \in h(R)$. □

В дальнейшем нам также понадобится следующая лемма.

Лемма 2.3.3. *Пусть S — множество всех однородных регулярных элементов кольца R и кольцо $Q = Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}} = RS^{-1}$ gr-просто. Тогда если $u, v \in h(Q) \setminus 0$, то $uRv \neq 0$.*

Доказательство. Предположим противное: $u, v \in h(Q) \setminus 0$ и $uRv = 0$. Так как кольцо Q gr-просто и QuQ — ненулевой градуированный идеал в Q, то $QuQ = Q$. Запишем $1 \in Q$ в виде $\sum\limits_{k=1}^{n} q_k u q_k'$, $q_k, q_k' \in Q$. Все однородные компоненты элементов q_k', $k = 1, \ldots, n$, образуют некоторое конечное множество $H \subseteq h(Q)$, и по лемме 2.3.2 можно найти такое $s \in S$, что $Hs \subseteq R$. Тогда

$s = \sum\limits_{k=1}^{n} q_k u q_k' s \in QuR$ и $sv \in QuRv = 0$, откуда следует, что $v = 0$. Получили противоречие. $\square$

2.4. Порядки в градуированных матричных кольцах

Основной результат этого раздела — градуированный аналог теоремы Фейса—Утуми о порядках в матричных кольцах.

Сначала докажем градуированный аналог теоремы Утуми [40, п. (2.3)] о полном правом кольце частных матричного кольца.

Предложение 2.4.1. *Для градуированного кольца R, числа $n \in \mathbb{N}$ и набора $\bar{g} \in G^n$ верны следующие утверждения:*

1) *если Q — градуированное правое кольцо частных кольца R, то $Q_n(\bar{g})$ — градуированное правое кольцо частных кольца $R_n(\bar{g})$;*
2) *если M — gr-плотный правый идеал в R, то $M_n(\bar{g})$ — gr-плотный правый идеал в $R_n(\bar{g})$;*
3) *всякий gr-плотный правый идеал D в $R_n(\bar{g})$ содержит gr-плотный правый идеал вида $M_n(\bar{g})$, где M — gr-плотный правый идеал в R;*
4) $Q^{\mathrm{gr}}\big((R_n)(\bar{g})\big) = Q^{\mathrm{gr}}(R)_n(\bar{g})$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) в случае $G = \{e\}$ доказаны в [40, п. (2.3)]. Остаётся заметить, что gr-рациональные расширения рациональны по предложению 2.1.1. Поэтому, в частности, утверждение 3) достаточно доказать в случае $\bar{g} = \bar{e}$.

Докажем утверждение 3). Пусть N_k — правый градуированный идеал в R, состоящий из элементов матриц из $D \cap e_{kk} R_n$ $(k = 1, \ldots, n)$. Зафиксируем $x \in h(R) \setminus 0$, $y \in h(R)$. Существует такая матрица $A = \sum a_{ij} e_{ij} \in D$, что $e_{kk} A, e_{kk} y A \in D$, $e_{kk} x A \neq 0$. Поэтому $x a_{ki} \neq 0$ для некоторого i. Так как $a_{ki}, y a_{ki} \in N_k$, то N_k — gr-плотный правый идеал в R. Значит, $M := \bigcap\limits_{k=1}^{n} N_k$ — gr-плотный правый идеал в R. Пусть $z \in h(M)$. При всех $k \in \{1, \ldots, n\}$ существует такая матрица $B^{(k)} \in D \cap e_{kk} R_n$, что $B^{(k)}_{k1} = z$. Тогда $B^{(k)} e_{kj} = z e_{kj} \in D$ для всех $k, j \in \{1, \ldots, n\}$. Это доказывает, что $M_n \subseteq D$.

Докажем утверждение 4). Пусть $q \in Q^{\mathrm{gr}}_\rho\big(R_n(\bar{g})\big)$, $\rho \in G$, $q = [f]_\theta$, $f \in \mathrm{HOM}_R(D, R)_\rho$, M — такой gr-плотный правый идеал в R, что $\big(M_n(\bar{g})\big)_h \subseteq D_h$ для всех $h \in G$ (сохранение градуировки можно предполагать с учётом 3)). При всех $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ определим $f_{jk} \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ правилом $f_{jk}(x) = \big(f(\mathrm{diag}(x) e_{k1})\big)_{j1}$, $x \in M$. Так как $\deg(\mathrm{diag}(x) e_{k1}) = g_k^{-1} \chi g_1$ при $x \in M_\chi$, $\chi \in G$, то $\deg\big(f_{jk}(x)\big) = g_j \rho g_k^{-1} \chi g_1 g_1^{-1}$ и $\deg f_{jk} = g_j \rho g_k^{-1}$. Обозначив $q_{jk} = [f_{jk}]_\theta \in Q^{\mathrm{gr}}(R)$, получим

$$f\left(\sum_{ik} x_{ik} e_{ik}\right) = \left(\sum_{ik} q_{ik} e_{ik}\right)\left(\sum_{ik} x_{ik} e_{ik}\right)$$

для всех $x_{ik} \in M$, поэтому $q = (q_{ij})_{ij} \in Q^{\mathrm{gr}}(R)_n$, причём $\deg(q) = g_i(g_i^{-1}\rho g_j)g_j^{-1} = \rho$. Значит, $Q^{\mathrm{gr}}\big(R_n(\bar g)\big)_\rho \subseteq \big(Q^{\mathrm{gr}}(R)(\bar g)_n\big)_\rho$. Обратное включение следует из 1). □

Предложение 2.4.2. *Пусть $R \subseteq Q$ — градуированные кольца, S — множество всех однородных регулярных элементов в R, $n \in \mathbb{N}$, $\bar g \in G^n$. Тогда при выполнении условия* (2) *верна равносильность*

$$Q_n(\bar g) = R_n(\bar g)S^{-1} \iff Q = RS^{-1}.$$

Доказательство. Докажем импликацию $\Longleftarrow$. Пусть $q = (q_{ij})_{ij} \in h\big(Q_n(\bar g)\big)$. Тогда все q_{ij} принадлежат $h(Q)$ и по лемме 2.3.2 найдутся такие $r_{ij} \in h(R)$ и $s \in S$, что $q_{ij} = r_{ij}s^{-1}$. Ввиду условия (2) скалярная матрица с элементом s однородна в $R_n(\bar g)$ степени $\deg s$ и может быть отождествлена с s. Тогда $q = (r_{ij})_{ij}s^{-1}$.

Докажем импликацию $\Longrightarrow$. Пусть $q \in Q$. Тогда для некоторых $r_{ij} \in R$ и $s \in S$ имеем $\operatorname{diag}(q,\ldots,q) = (r_{ij})_{ij}\operatorname{diag}(s^{-1},\ldots,s^{-1})$. Ясно, что тогда матрица $(r_{ij})_{ij}$ скалярная и $q = rs^{-1}$ для $r := r_{ii}$. □

Докажем градуированный аналог теоремы Фейса—Утуми [21, теорема 10.15] в случае градуировки по абелевой группе (условие (2) при этом, очевидно, выполнено). Распространим понятие градуированного правого порядка на предкольца аналогично неградуированному случаю [18, § 4.7; 21, гл. 10]. Градуированные предкольца определяются так же, как градуированные кольца, но без предположения наличия единицы.

Определение.

1. Градуированное подмножество градуированного кольца, являющееся аддитивной группой по сложению и замкнутое относительно умножения, назовём *градуированным подпредкольцом*.
2. Градуированное подпредкольцо R градуированного кольца Q назовём *градуированным правым порядком* в Q, если выполнены следующие условия:
   а) множество S однородных регулярных элементов (неделителей нуля) в R непусто и все элементы из S обратимы в Q;
   б) $Q = \{rs^{-1} \mid r \in R,\ s \in S\} =: RS^{-1}$.

Замечание 2.4.3. На случай градуированных правых порядков распространяется лемма 2.3.2 о приведении к общему знаменателю, поскольку в её доказательстве не используется наличие единицы в R.

Теорема 2.4.4. *Пусть кольцо Q градуировано по абелевой группе G, $n \in \mathbb{N}$, $\bar g = (g_1,\ldots,g_n) \in G^n$, $M = \{e_{ij} \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$ — система матричных единиц в $Q_n(\bar g)$, $\deg e_{ij} = g_ig_j^{-1}$, R — градуированное подпредкольцо в $Q_n(\bar g)$, S — множество всех однородных регулярных элементов в R. Считая, что $Q = \mathrm{Cent}_{Q_n(\bar g)}(M)$, введём обозначения*:

— *$A_M = \{a \in R \mid aM \subseteq R\}$ — градуированный левый идеал в R,*
— *$B_M = \{b \in R \mid Mb \subseteq R\}$ — градуированный правый идеал в R,*
— *$F_M = B_M A_M \cap Q$ — градуированный идеал в $R \cap Q$.*

Тогда верны следующие утверждения.

1. *$(F_M)_n(\bar{g}) = B_M A_M$.*
2. *Если $Q_n(\bar{g}) = RS^{-1}$, то найдётся система N однородных матричных единиц в $Q_n(\bar{g})$, для которой $B_N A_N$ — градуированный правый порядок в $Q_n(\bar{g})$.*
3. *В предположениях пункта 2: если Q — градуированное тело, то F_N (для любой системы N из пункта 2) — градуированный правый порядок в некотором градуированном теле $Q' \cong Q$ и*

$$Q_n(\bar{g}) \cong Q'_n(\bar{g}) \cong (F_N)_n(\bar{g})(F_N \cap S)^{-1}.$$

Доказательство. Докажем утверждение 1. Любой элемент $x \in Q_n(\bar{g})$ можно однозначно записать в виде $x = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_{ij} e_{ij}$, где $x_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} e_{ik} x e_{kj} \in Q$. Поэтому если $x \in B_M A_M$, то $x_{ij} \in M(B_M A_M)M \cap Q = B_M A_M \cap Q = F_M$. Обратно, возьмём $x_{ij} = b_{ij} a_{ij} \in F_M$, где $a_{ij} \in A_M$, $b_{ij} \in B_M$. Учитывая, что элементы x_{ij} коммутируют с e_{ij}, получаем $x_{ij} e_{ij} = e_{ij} x_{ij} = e_{ij} b_{ij} a_{ij} \in B_M A_M$.

Докажем утверждение 2. По лемме 2.3.2 (с учётом замечания 2.4.3) существует такой элемент $a \in S$, что $Ma \subseteq R$. Обозначим $\alpha := \deg a$. Тогда $N = a^{-1} M a$ — множество однородных матричных единиц в $Q_n(\bar{g})$ с централизатором $a^{-1} Q a$ — градуированным кольцом, изоморфным градуированному кольцу Q, поскольку группа G абелева.

Элемент $a \in A_N$ обратим в $Q_n(\bar{g})$ и найдётся однородный элемент $b \in B_N$, обратимый в $Q_n(\bar{g})$.

Покажем, что $B_N A_N$ — градуированный правый порядок в $Q_n(\bar{g})$. Возьмём любой элемент $q \in h\big(Q_n(\bar{g})\big)$ и представим его в виде $b q_1 b^{-1}$, а однородный элемент q_1 $(:= b^{-1} q b)$ представим в виде rs^{-1}, где $r \in h(R)$ и $s \in S$. Тогда

$$q = b(rs^{-1})b^{-1} = (bra)(bsa)^{-1},$$

причём $bra \in B_N A_N$ и bsa — однородный регулярный элемент в $B_N A_N$.

Докажем утверждение 3. Пусть a, b, N такие же, как и в пункте 2 доказательства, $A := A_N$, $B := B_N$. Положим $f_{ij} := a^{-1} e_{ij} a$ и

$$C := \left\{ \sum_{k=1}^{n} f_{k1} q f_{1k} \mid q \in BA \right\}.$$

Множество C замкнуто относительно сложения и умножения и является градуированным ввиду абелевости группы G. Действительно, так как $\deg f_{ij} = \deg e_{ij} = g_i g_j^{-1}$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$, то

$$\deg(f_{k1} q f_{1k}) = g_k g_1^{-1} (\deg q) g_1 g_k^{-1} = \deg q$$

для всех $k = 1, \ldots, n$ и всех таких $q \in h(Q)$, что $f_{k1} q f_{1k} \neq 0$, поэтому

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f_{k1} q f_{1k} \right)_g = \sum_{k=1}^{n} f_{k1} q_g f_{1k}$$

для всех $g \in G$ и $q \in BA$, причём множество BA является градуированным. Кроме того, $C \subseteq a^{-1}Qa$, так как каждая сумма вида $\sum_{k=1}^{n} e_{k1} a b_1 a_1 a^{-1} e_{1k}$, где $a_1 \in A$, $b_1 \in B$, коммутирует со всеми e_{ij}.

Покажем, что кольцо C не только лежит в градуированном теле $a^{-1}Qa$, но и является градуированным правым порядком в нём. Это равносильно тому, что $fBAf$ является градуированным правым порядком в $fQ_n(\bar{g})f$, где $f := f_{11}$, поскольку $C \cong fBAf$ (изоморфизм градуированных колец, индуцированный изоморфизмом $a^{-1}Qa \cong fQ_n(\bar{g})f$).

Возьмём произвольный элемент $q \in h(fQ_n(\bar{g})f) \setminus 0$. Найдём такое $t \in S$, что $b^{-1}qbt \in R$, т. е. $qbt \in bR$. Далее, так как $qf = q = fq$ и $btR \subseteq B$, то

$$q(fbtRaf) \subseteq f(qbtRa)f \subseteq f(bRa)f \subseteq fBAf.$$

Остаётся заметить, что $h(fbtRaf) \neq 0$ по лемме 2.3.3: $fbt \neq 0$, $af \neq 0$, а кольцо $Q_n(\bar{g})$ gr-просто (и gr-артиново), так как Q — градуированное тело. □

3. Градуированные кольца Голди

В этом разделе через S обозначено множество всех однородных регулярных элементов градуированного кольца R.

Определение. Градуированное кольцо R, gr-конечномерное справа (слева) и удовлетворяющее условию максимальности для правых (левых) градуированных аннуляторов, называется *правым* (*левым*) *градуированным кольцом Голди*.

3.1. Вспомогательные результаты

Следующая лемма и следствие из неё аналогичны неградуированному случаю [23, лемма 7.2.1, следствия 1 и 2] и приводятся для доказательства ключевой леммы 3.1.3.

Лемма 3.1.1. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо с условием максимальности для правых градуированных аннуляторов. Если A и B — такие правые градуированные идеалы в R, что $A \supset B$ и $l(A) \neq l(B)$, то существует такой элемент $a \in h(A)$, что $aA \neq 0$ и $aA \cap B = 0$.*

Доказательство. Кольцо R удовлетворяет условию минимальности для левых градуированных аннуляторов (так как из $l(M) \supseteq r(N)$ следует, что $r\big(l(M)\big) \subseteq r\big(l(N)\big)$), поэтому найдётся левый градуированный аннулятор U, минимальный по отношению к свойству $l(A) \subsetneq U \subseteq l(B)$. Тогда $UA \neq 0$ и $(UA)^2 \neq 0$ (ввиду gr-полупервичности кольца R), так что найдутся такие $u \in h(U)$ и $a \in h(A)$, что $UauA \neq 0$. Покажем, что $auA \cap B = 0$. Если это не так, то существует такой элемент $x \in h(A)$, что $0 \neq aux \in auA \cap B$. Очевидно, что $l(x) \supseteq l(A)$ и $l(x) \cap U$ — градуированный левый аннулятор, лежащий между $l(A)$ и $l(B)$. Кроме того, $l(x) \cap U \neq l(A)$: $aux \in B$, поэтому $Uaux = 0$ и $Uau \subseteq \subseteq l(x) \cap U$, но $Uau \subseteq U \nsubseteq l(A)$. Из минимальности U следует, что $U \cap l(x) = U$, т. е. $U \subseteq l(x)$. Но тогда $ux \in Ux = 0$, что противоречит условию $aux \neq 0$. □

Следствие 3.1.2. *В условиях леммы* 3.1.1 *верны следующие утверждения*:

1) *для всех* $x, y \in h(R)$ *если правые идеалы* xR *и* yR *gr-существенны, то таков же правый идеал* yxR;
2) *для всех* $s \in h(R)$ *если правый идеал* sR *gr-существен, то элемент* s *регулярен.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть I — ненулевой правый градуированный идеал в R. Так как правый идеал yR gr-существен, то $(I : y) = \{r \in R \mid yr \in I\} \neq 0$ и $y(I : y) = yR \cap I \neq 0$. Поскольку $(I : y) \supseteq r(y)$ и $l\big(r(y)\big) \ni y \notin l(I : y)$, то условия леммы выполнены для $A = (I : y)$ и $B = r(y)$. Поэтому существует такой ненулевой правый идеал $J \subseteq (I : y)$, что $J \cap r(y) = 0$. Из gr-существенности правого идеала xR следует, что $x(J : x) = xR \cap J \neq 0$, так что $yx(J : x) \neq 0$. Но $yx(J : x) \subseteq yJ \subseteq y(I : y) \subseteq I$. Значит, $yxR \cap I \neq 0$ и yxR — gr-существенный правый идеал в R.

Докажем утверждение 2). Если $l(s) \neq 0$, то условия леммы выполнены для $A = R$ и $B = sR$, следовательно, $aR \neq 0$ и $aR \cap sR = 0$ для некоторого $a \in h(R)$, что противоречит gr-существенности правого идеала sR.

Пусть цепь аннуляторов $r(s) \subseteq r(s^2) \subseteq \ldots$ стабилизируется на k-м шаге: $r(s^k) = r(s^{k+1})$. Тогда $s^kR \cap r(s) = 0$. Действительно, если $x \in s^kR \cap r(s)$, то $x = s^ky$ для некоторого $y \in R$ и $0 = sx = s^{k+1}y$, откуда следует, что $y \in r(s^{k+1}) = r(s^k)$ и $x = 0$. По пункту 1) правый идеал s^kR gr-существен, значит, $r(s) = 0$. □

Лемма 3.1.3. *Пусть* R — *gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди. Тогда для любого* $s \in h(R)$ *равносильны следующие условия*:

1) *правый идеал* sR *кольца* R *gr-существен*;
2) $s \in S$;
3) $r_R(s) = 0$.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) составляет утверждение 2) следствия 3.1.2.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть A — ненулевой правый градуированный идеал в R, такой что $A \cap sR = 0$. Покажем, что градуированные правые идеалы s^nA, $n \geqslant 0$, образуют прямую сумму. Действительно, пусть $a_0 + sa_1 + \ldots + s^na_n = 0$, где все a_i принадлежат A. Тогда $a_0 \in A \cap sR = 0$ и по 3) $a_1 + a_2s + \ldots + s^{n-1}a_n = 0$. Аналогично получаем, что $a_1 = \ldots = a_n = 0$. Это противоречит gr-конечномерности справа кольца R. Значит, $A = 0$ и sR — gr-существенный правый идеал в R. □

В следующих подразделах раздела 3 для gr-полупервичного правого градуированного кольца Голди R исследуем вопросы существования и строения градуированных колец частных $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ и $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$, которые, в отличие от неградуированного случая, могут не совпадать.

3.2. Строение полного градуированного кольца частных

Начнём с нахождения полного градуированного кольца частных $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ кольца R из следующего примера.

Пример 3.2.1 [29; 36, пример 9.2.2; 38, пример 8.4.7]. Пусть k — поле, кольцо $R = k[X,Y]/(XY)$ градуировано группой $\mathbb{Z}$ (обозначим $x = X + (XY)$ и $y = Y + (XY)$):

$$R_n = \begin{cases} kx^n, & n > 0, \\ k, & n = 0, \\ ky^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что кольцо $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = R$ не является gr-артиновым (и тем более вполне gr-приводимым) и что (x,y) — gr-существенный идеал, все однородные элементы которого — делители нуля.

Найдём кольцо Q^{gr}. Каждый gr-плотный идеал кольца R имеет вид (x^m, y^n), где $m,n \geqslant 1$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ при достаточно больших m, n ($m,n > |k|$) всякий однородный степени k гомоморфизм R-модулей $f\colon (x^m, y^n) \to R$ задаётся правилом

$$f(x^m) = ax^{m+k}, \quad f(y^n) = by^{n-k}, \quad \text{где} \quad a,b \in k,$$

и обратно: при всех $a,b \in k$ это правило задаёт такой гомоморфизм (проверяется непосредственно с учётом соотношения $xy = 0$). Поэтому по определению градуированного полного кольца частных имеем

$$Q^{\mathrm{gr}}_n(R) = kx^n \oplus ky^{-n} \ (= k \oplus k \ \text{ при } \ n = 0), \quad n \in \mathbb{Z},$$
$$Q^{\mathrm{gr}}(R) = k[x, x^{-1}] \oplus k[y, y^{-1}].$$

Таким образом, кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ не совпадает с кольцом $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = R$ и вполне gr-приводимо, поскольку является прямым произведением двух градуированных полей. Заметим, что

$$Q^{\mathrm{gr}}_0(R) \cong k \oplus k \ncong k \cong R_0 = Q(R_0),$$

но имеет место вложение колец

$$Q(R_0) \hookrightarrow Q^{\mathrm{gr}}_0(R), \quad k \ni a \mapsto (a,a) \in k \oplus k.$$

Из следующей теоремы вытекает, что полное правое градуированное кольцо частных любого gr-полупервичного правого градуированного кольца Голди вполне gr-приводимо.

Теорема 3.2.2. *Рассмотрим следующие условия на градуированное кольцо R:*

1) *R — gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди*;
2) *кольцо R gr-полупервично, gr-несингулярно справа и gr-конечномерно справа*;
3) *кольцо R gr-несингулярно справа и gr-конечномерно справа*;
4) *кольцо Q^{gr} gr-несингулярно справа и gr-конечномерно справа*;
5) *кольцо Q^{gr} вполне gr-приводимо.*

Между условиями 1)—5) *имеются следующие логические связи*:

$$1) \Longleftrightarrow 2) \Longrightarrow 3) \Longleftrightarrow 4) \Longleftrightarrow 5).$$

Отметим, что импликация 2) $\Longleftarrow$ 3) неверна, например, в неградуированном случае для кольца верхнетреугольных (2×2)-матриц над полем.

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) следует из правостороннего варианта леммы 8.4.1 из [38], согласно которому в градуированном кольце с условием максимальности для правых градуированных аннуляторов правый грауированный сингулярный идеал нильпотентен. Если кольцо к тому же gr-полупервично, то он нулевой.

Импликации 2) $\Longrightarrow$ 3) и 5) $\Longrightarrow$ 4) очевидны.

Эквивалентность 3) $\Longleftrightarrow$ 4) следует из предложений 2.1.3 и 2.1.14, а также того, что расширение $R_R \subseteq Q^{\mathrm{gr}}_R$ gr-существенно.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 5). По предложению 2.2.10 кольцо Q^{gr} gr-регулярно. Поскольку кольцо Q^{gr} к тому же gr-конечномерно справа, оно gr-нётерово справа. Действительно, если это не так, то найдётся такое счётное множество элементов $x_1, x_2, \ldots \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, что $(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \ldots$ — строго возрастающая цепь градуированных правых идеалов в Q^{gr}. Каждый из них конечно порождён, а значит, порождается однородным идемпотентом ввиду gr-регулярности кольца Q^{gr} (предложение 1.3.5). Пусть $(x_1, \ldots, x_n) = u_n Q^{\mathrm{gr}}$, где $u_n = u_n^2 \in Q^{\mathrm{gr}}_e$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $u_1 < u_2 < \ldots$ ($u < v \Longleftrightarrow uv = u$ и $u \neq v$) и сумма градуированных правых идеалов

$$u_1 Q^{\mathrm{gr}} + u_2(1 - u_1)Q^{\mathrm{gr}} + \ldots + u_n(1 - u_{n-1})Q^{\mathrm{gr}} + \ldots$$

прямая, что противоречит gr-конечномерности справа кольца Q^{gr}. Итак, кольцо Q^{gr} gr-нётерово справа, поэтому в нём каждый правый градуированный идеал конечно порождён, а значит, выделяется прямым слагаемым в силу gr-регулярности кольца Q^{gr}. Таким образом, кольцо Q^{gr} вполне gr-приводимо. □

3.3. Существование и строение классического градуированного кольца частных

Для кольца R из примера 3.2.1 не выполнено ни условие полной gr-приводимости кольца $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}$, ни условие существования однородного регулярного элемента в каждом gr-существенном правом идеале. Это не случайно. Предложение 3.3.1 показывает, что эти условия равносильны.

Предложение 3.3.1. *Рассмотрим следующие условия на градуированное кольцо* R:

1) R — *gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди*;
2) *правый градуированный идеал в* R *gr-существен в точности тогда, когда он содержит хотя бы один однородный регулярный элемент*;
3) *кольцо* R *обладает классическим правым градуированным кольцом частных* $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$, *которое является вполне gr-приводимым кольцом.*

Между условиями 1)—3) *имеются следующие логические связи*:

$$1) \Longleftarrow 2) \Longleftrightarrow 3).$$

При выполнении условия 3) *кольцо* $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ *gr-просто в точности тогда, когда кольцо* R *gr-первично.*

Отметим, что в неградуированном случае согласно теореме Голди справедлива также импликация 1) $\Longrightarrow$ 2), а в градуированном случае её опровергает пример 3.2.1.

Доказательство. Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Докажем, что кольцо R gr-полупервично. Пусть I — такой градуированный идеал в R, что $I^2 = 0$. Тогда существует такой правый градуированный идеал J в R, что $I \oplus J$ — gr-существенный правый идеал в R (в качестве J можно и следует взять максимальный из таких правых градуированных идеалов в R, которые пересекаются с I по 0). По условию существует регулярный элемент вида $a + b$, где $a \in I$, $b \in J$. Так как $aI = 0$ и $bI \subseteq I \cap J = 0$, то $(a+b)I = 0$, следовательно, $I = 0$.

Докажем, что кольцо R gr-конечномерно справа. Если это не так, то найдётся gr-существенный правый идеал вида

$$I = \bigoplus_{k=1}^{\infty} I_k,$$

где все I_k — ненулевые правые градуированные идеалы в R. По условию существует регулярный элемент

$$\sum_{i=1}^{n} s_{k_i} \in I,$$

где $s_{k_i} \in I_{k_i} \setminus 0$ при $i = 1, \ldots, n$. Но тогда правый идеал

$$J = \sum_{i=1}^{n} I_{k_i}$$

gr-существен по условию, что противоречит равенству $J \cap I_m = 0$ при любом $m \notin \{k_1, \ldots, k_n\}$.

Ввиду теоремы 3.2.2 остаётся доказать, что кольцо R gr-несингулярно справа. Пусть $a \in h\bigl(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R)\bigr)$, т. е. правый аннулятор $r(a)$ gr-существен в R. По условию существует регулярный элемент $b \in r(a)$. Тогда $ab = 0$ и $a = 0$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Проверим выполнение условия (1′) Оре для однородных элементов из предложения 2.3.1. Пусть $r \in h(R)$, $s \in S$. По лемме 3.1.3 правый градуированный идеал $(sR : r) = \{x \in R \mid rx \in sR\}$ gr-существен, поэтому содержит однородный регулярный элемент s'. Значит, $rs' = sr'$ для некоторого элемента $r \in h(R)$, т. е. условие Оре выполнено, следовательно, существует кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}} = RS^{-1} := Q$.

Докажем, что кольцо Q вполне gr-приводимо. Пусть I — правый градуированный идеал в Q и J — такой правый градуированный идеал в R, что $(I \cap R) \oplus J$ — gr-существенный правый идеал в R. По условию он содержит однородный регулярный элемент, поэтому $\big((I \cap R) \oplus J\big)Q = Q$. С другой стороны, $(I \cap R)Q = I$ и $\big((I \cap R) \oplus J\big)Q = I \oplus JQ$ (сумма прямая по предложению 2.1.3). Таким образом, каждый правый градуированный идеал в Q выделяется прямым слагаемым, т. е. кольцо Q вполне gr-приводимо.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Докажем, что кольцо R gr-полупервично. Пусть N — ненулевой градуированный идеал в R, такой что $N^2 = 0$. Тогда градуированный идеал QNQ в Q ненулевой и $QNQ = uQ$, где $0 \neq u = u^2 \in Z(Q)_e$. Пусть

$$u = \sum_{i=1}^{n} p_i n_i q_i,$$

$n_i \in h(N)$, $p_i, q_i \in h(Q)$, $q_i = r_i s^{-1}$, $r_i \in h(R)$, $s \in S$ (знаменатель можно считать общим по лемме 2.3.2). Тогда

$$u = \sum_{i=1}^{n} p_i n_i r_i s^{-1}.$$

Так как $us = su$, то

$$suN = usN = \sum_{i=1}^{n} p_i n_i r_i N = 0,$$

поскольку $n_i r_i \in N$ для всех $i = 1, \ldots, n$ и $N^2 = 0$. Так как $s \in S$, то $uN = 0$. Но $uN = N$, поскольку u — единица кольца $uQ = QNQ$. Получили противоречие.

Докажем, что R — правое градуированное кольцо Голди. Так как кольцо Q вполне gr-приводимо, то оно gr-нётерово и тем более удовлетворяет условию максимальности для правых градуированных аннуляторов. Последнее свойство переносится на его градуированное подкольцо R. Кольцо Q gr-конечномерно справа, поэтому по предложению 2.1.3 кольцо R также gr-конечномерно справа. □

Перейдём к вопросу о существовании однородных регулярных элементов в gr-существенных правых идеалах.

Лемма 3.3.2 [29; 38, лемма 8.4.3]. *Пусть R — gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди. Тогда если $0 \neq a \in h(R)$ — gr-униформный элемент, то правый аннулятор $r_R(a)$ максимальный среди правых аннуляторов ненулевых однородных элементов из R.*

Теорема 3.3.3. *Пусть R — правое градуированное кольцо Голди, e-точное справа, и кольцо R_e полупервично. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *всякий ненулевой правый градуированный идеал I кольца R содержит ненильпотентный gr-униформный элемент степени e;*
2) *$I_e \cap S \neq \varnothing$ для всякого правого gr-существенного идеала I кольца R;*
3) *кольцо $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = RS^{-1}$ существует, вполне gr-приводимо и совпадает с кольцом $Q^{\mathrm{gr}}(R)$;*
4) *кольцо R gr-полупервично, причём gr-первично в точности тогда, когда кольцо $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$ gr-просто;*
5) *множество $S(R_e)$ регулярных элементов кольца R_e совпадает с множеством $S_e := S \cap R_e$;*
6) *$RS^{-1} = RS_e^{-1}$;*
7) *R_e — правое кольцо Голди и $Q_{\mathrm{cl}}(R_e) = R_e S_e^{-1} = \big(Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)\big)_e$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Так как кольцо R gr-конечномерно справа, то найдётся gr-униформный элемент $a \in h(I) \setminus 0$ (возьмём произвольный элемент $a_1 \in h(I) \setminus 0$; если модуль $a_1 R$ не gr-униформный, то найдутся $a_2, a_3 \in h(a_1 R) \setminus 0$, для которых $a_2 R \oplus a_3 R \subseteq a_1 R$, и т. д. — этот процесс не может продолжаться бесконечно). Поскольку кольцо R e-точно справа, то можно считать, что $a \in I_e$ (если $a \in h(I) \setminus 0$, то $aa' \in I_e \setminus 0$ для некоторого $a' \in h(R)$, причём элемент $aa'R \subseteq aR$ gr-униформен с a).

Ввиду полупервичности кольца R_e $aba \neq 0$ для некоторого $b \in R_e$. Элемент ba ненильпотентен, поскольку иначе $(ba)^n = 0 \neq (ba)^{n-1}$ для некоторого $n \geqslant 2$, и так как $r(a) \subseteq r\big((ba)^{n-1}\big)$, то по лемме 3.3.2 $r(a) = r\big((ba)^{n-1}\big) \ni ba$, откуда следует, что $aba = 0$, что неверно. Следовательно, элемент $ab \in I_e$ ненильпотентный и gr-униформный.

Докажем утверждение 2). Найдём по пункту 1) gr-униформный ненильпотентный элемент $a_1 \in I_e$. Пусть уже найдены gr-униформные ненильпотентные элементы $a_1, \ldots, a_m \in I_e$, такие что

$$a_i \in \bigcap_{j=1}^{i-1} r(a_j), \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

и

$$\bigcap_{j=1}^{m} r(a_j) \neq 0.$$

Так как правый идеал I gr-существен, то

$$I \cap \bigcap_{j=1}^{m} r(a_j) \neq 0$$

и по пункту 1) существует ненильпотентный gr-униформный элемент

$$a_{m+1} \in I_e \cap \bigcap_{j=1}^{m} r(a_j).$$

По построению и ввиду gr-униформности элементов a_i имеем, что $a_i \in r(a_j) = r(a_j^2)$, $i > j$, откуда следует, что сумма

$$\sum_{i \geqslant 1} a_i R$$

прямая и, значит, конечная, поэтому существует $n \in \mathbb{N}$, такое что

$$\bigcap_{i=1}^{n} r(a_i) = 0.$$

Тогда

$$r(a) = \bigcap_{i=1}^{n} r(a_i) = 0,$$

и элемент $a = a_1 + \ldots + a_n \in I_e$ регулярный по лемме 3.1.3.

Утверждения 3) и 4) следуют из предложения 3.3.1 и замечания 2.2.1.

Докажем утверждение 5). Надо показать, что $S(R_e) \subseteq S$. Пусть $s \in S(R_e)$. Если $st = 0$, где $t \in h(R) \backslash 0$, то ввиду e-точности справа кольца R $tt' \in R_e \backslash 0$ для некоторого $t' \in R$. Поэтому равенство $stt' = 0$ противоречит условию $s \in S(R_e)$. Аналогичное противоречие получается из предположения $ts = 0$, где $t \in h(R) \backslash 0$, если доказать, что кольцо R также e-точно слева. Обозначим $\tau = \deg t$ и покажем, что $R_{\tau^{-1}} t \neq 0$. Так как кольцо R e-точно справа, то $0 \neq t R_{\tau^{-1}} \subseteq R_e$, поэтому правый идеал $t R_{\tau^{-1}} R_e$ кольца R_e ненулевой, а значит, ввиду полупервичности кольца R_e ненулевой и его квадрат $(t R_{\tau^{-1}} R_e)(t R_{\tau^{-1}} R_e)$. В частности, $0 \neq R_{\tau^{-1}} R_e t \subseteq R_{\tau^{-1}} t$.

Докажем утверждение 6). Пусть $s \in S$. По лемме 3.1.3 правый идеал sR gr-существен, поэтому по пункту 2) $(sR)_e \cap S \neq \varnothing$. Пусть $sa = t \in S_e$. Тогда $a = s^{-1} t \in S$, $s^{-1} = a t^{-1}$ и $t^{-1} \in S_e^{-1}$. Значит, $S \subseteq R S_e^{-1}$ и $R S^{-1} = R S_e^{-1}$.

Докажем утверждение 7). Так как кольцо R e-точно справа и gr-конечномерно справа, то кольцо R_e конечномерно справа (следствие 1.3.20). Так как кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых градуированных аннуляторов, то кольцо R_e удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов (поскольку $r_{R_e}(T) = r_R(T) \cap R_e$ для всякого $T \subseteq R_e$). Значит, R_e — правое кольцо Голди. Равенства $Q_{\mathrm{cl}}(R_e) = R_e S_e^{-1} = \left(Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)\right)_e$ следуют из пунктов 5) и 6). $\square$

В следующей теореме о gr-полупервичных правых градуированных кольцах Голди из дополнительного ограничения на группу следуют все утверждения теоремы 3.3.3.

Теорема 3.3.4. *Пусть R — gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди, группа G периодична. Тогда кольцо R e-точно, R_e — полупервичное правое кольцо Голди, и поэтому выполнены все утверждения теоремы* 3.3.3.

Доказательство. 1. Докажем, что выполнен пункт 1) теоремы 3.3.3. Пусть I — ненулевой правый градуированный идеал кольца R. Найдём gr-униформный элемент $a \in I$. Пусть $a \in I_g$, $g \in G$. Так как кольцо R gr-полупервично, то найдутся такие $h \in G$ и $b \in R_h$, что $aba \neq 0$. Тогда элемент $ba \in R_{hg} \setminus 0$ (а с ним и ab) ненильпотентен, поскольку иначе $(ba)^n = 0$, $(ba)^{n-1} \neq 0$ для некоторого $n \geqslant 2$, и поскольку $r_R(a) \subseteq r_R\big((ba)^{n-1}\big)$, то по лемме 3.3.2 $r_R(a) = r_R\big((ba)^{n-1}\big) \ni ba$, откуда следует, что $aba = 0$, что неверно. Так как группа G периодична, элемент gh имеет конечный порядок $O(gh)$, и поэтому $(ab)^{O(gh)} \in I_e$ — ненильпотентный gr-униформный элемент.

2. Так же, как при доказательстве пункта 2) теоремы 3.3.3, доказывается, что всякий gr-существенный правый идеал содержит однородный регулярный элемент.

3. Пусть $x \in h(R) \setminus 0$. Тогда по пункту 1 правый градуированный идеал xR содержит ненильпотентный gr-униформный элемент $xy \in (xR)_e \setminus 0$. Отсюда следует, что кольцо R e-точно справа, а также слева, поскольку $yx \neq 0$ (иначе $(xy)^2 = 0$).

4. Покажем, что R_e — полупервичное правое кольцо Голди. Согласно теореме Голди достаточно показать, что для всех правых идеалов J кольца R_e справедлива равносильность

$$J \text{ существен} \iff J \text{ содержит регулярный (в } R_e) \text{ элемент.}$$

Докажем импликацию $\Longrightarrow$. Если правый идеал J существен в R_e, то с учётом доказанной e-точности справа кольца R получаем, что правый идеал JR gr-существен в R (следствие 2.1.5), значит, по пункту 2 $\varnothing \neq (JR)_e \cap S = J \cap S$.

Докажем импликацию $\Longleftarrow$. Пусть элемент $s \in J$ регулярен в R_e. Тогда $r_R(s) = 0$, так как кольцо R e-точное справа, и $s \in S$ по лемме 3.1.3, поэтому правый идеал sR (а с ним и $JR \supseteq sR$) gr-существен в R. Отсюда получаем, что правый идеал $J = (JR)_e$ существен в R_e (следствие 2.1.5).

Значит, для кольца R выполнены все условия теоремы 3.3.3. □

Теперь мы можем доказать аналог теоремы Голди в форме критерия для градуированных колец с конечным носителем.

Теорема 3.3.5. *Для градуированного кольца R с конечным носителем следующие условия равносильны*:

1) *R — gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди*;
2) *правый градуированный идеал в R gr-существен в точности тогда, когда он содержит хотя бы один регулярный элемент*;
3) *кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ существует и вполне gr-приводимо.*

При выполнении этих условий выполнены все утверждения теоремы 3.3.3.

Доказательство. Докажем импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) и 1) $\Longrightarrow$ 3). Так как R — gr-полупервичное кольцо с конечным носителем, то по теореме 1.3.14 кольцо R e-точно и кольцо R_e полупервично, так что для кольца R выполнены все условия теоремы 3.3.3. Поэтому каждый gr-существенный правый идеал в R содержит однородный регулярный элемент и кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ существует и вполне gr-приводимо, а всякий градуированный правый идеал, содержащий однородный регулярный элемент s, является gr-существенным, поскольку содержит правый идеал sR, gr-существенный по лемме 3.1.3.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из предложения 3.3.1.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Так как кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ вполне gr-приводимо, то кольцо R gr-полупервично, и утверждение следует из предложения 3.3.1. $\square$

3.4. Случай главных правых градуированных идеалов

Предложение 3.4.1. *Для gr-полупервичного gr-pri-кольца R верны следующие утверждения:*

1) *всякий gr-существенный правый идеал в R порождается одним элементом из S;*
2) *кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ существует, вполне gr-приводимо и совпадает с кольцом Q^{gr}.*

Доказательство. Всякий gr-существенный правый идеал в R имеет вид sR, причём $s \in S$ по лемме 3.1.3. В частности, каждый gr-существенный правый идеал в R содержит однородный регулярный элемент, и по предложению 3.3.1 кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ существует и вполне gr-приводимо, а по замечанию 2.2.1 оно совпадает с кольцом Q^{gr}. $\square$

Теорема 3.4.2. *Для градуированного кольца R равносильны следующие условия:*

1) *R — gr-полупервичное gr-pri-кольцо;*
2) *$R \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n} R_i$, где $n \in \mathbb{N}$ и каждое кольцо R_i — gr-первичное gr-pri-кольцо, причём существует такой элемент $g \in G$, что каждый правый градуированный идеал в каждом кольце R_i содержит порождающий элемент степени g.*

При выполнении этих условий кольца $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существуют, вполне gr-приводимы и

$$Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q^{\mathrm{gr}}(R_i).$$

Доказательство. Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Кольцо R gr-полупервично как прямая сумма gr-первичных колец. Кольцо R является gr-pri-кольцом: пусть I — правый градуированный идеал в R и при каждом $i = 1, \ldots, n$ правый градуированный идеал $I \cap R_i$ в R_i содержит порождающий a_i степени g. Тогда элемент $a_1 + \ldots + a_n \in I_g$ порождает I.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По предложению 3.4.1 существует вполне gr-приводимое кольцо $Q := Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$. Оно содержит n центральных ортогональных неразложимых однородных идемпотентов $u_1, \ldots, u_n$, таких что $u_1 + \ldots + u_n = 1$. Обозначим

$T := Ru_1 \oplus \ldots \oplus Ru_n$ — градуированное подкольцо в Q,

$I := \{r \in R \mid ru_i \in R,\ i = 1, \ldots, n\}$ — градуированный идеал в R.

По лемме 2.3.2 существует $c \in S$, для которого $u_i c \in R$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $cT \subseteq R$, и значит, cT — правый gr-существенный идеал в R, следовательно, $cT = aR$ для некоторого $a \in S$. Отсюда следует, что $a = cb$ для некоторого регулярного $b \in T$ и $T = bR$. В частности, $b^2 = bd$ для некоторого $d \in h(R)$. Сокращая на регулярный элемент $b \in S$, получаем, что $b = d \in h(R)$, т. е. $T = R$. Теперь ясно, что $R_i := Ru_i$ — градуированный правый порядок в gr-простом gr-артиновом кольце Qu_i, поэтому R_i — gr-первичное правое кольцо Голди. Так как R_i — прямое слагаемое в gr-pri-кольце R, то R_i — gr-pri-кольцо.

Для каждого $i = 1, \ldots, n$ обозначим через G_i множество степеней однородных порождающих правых градуированных идеалов в R_i, т. е.

$$G_i = \{g \in G \mid \text{найдутся } K \in \mathcal{I}d^{\mathrm{gr}}(R_i) \text{ и } a_i \in K, \text{ такие что } K = a_i R_i,\ \deg a_i = g\}.$$

Докажем, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i \neq \varnothing$. Если это не так, то найдутся правые градуированные идеалы K_i в R_i, $i = 1, \ldots, n$, такие что множества их однородных порождающих не пересекаются (в совокупности). Но тогда правый градуированный идеал $K = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} K_i$ в R не имеет однородного порождающего: если $K = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\Big)R$, где $a_i \in K_i$ при $i = 1, \ldots, n$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \in h(R)$, то $K_i = a_i R_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Значит, существует элемент $g \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$.

Вторая часть теоремы следует из предложений 3.4.1 и 2.2.6. $\square$

Теорема 3.4.3. *Для gr-pri-кольца R равносильны следующие условия*:

1) *R — gr-первичное кольцо*;
2) *$R = {}^{h}D_n(\bar{g})^{h^{-1}}$, где D — некоторая правая градуированная область Оре, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, $h \in G$.*

При выполнении этих условий

$$Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = T_n(\bar{g}),$$

где T — градуированное тело. Если к тому же группа G абелева, то $R = D_n(\bar{g})$ и $Q^{\mathrm{gr}}(D) = T$.

Доказательство. Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). При структурном изоморфизме

$$\mathcal{I}d(A) \ni I \mapsto I_n \in \mathcal{I}d\big(A_n(\bar{g})\big)$$

между идеалами градуированного кольца A и идеалами матричного кольца $A_n(\bar{g})$, $\bar{g} \in G^n$ ($(IJ)_n = I_n J_n$), градуированные идеалы переходят в градуированные, поэтому кольцо A gr-первично в точности тогда, когда кольцо $A_n(\bar{g})$ gr-первично. В условии 2) D — градуированная область, поэтому кольца $D_n(\bar{g})$ и $R = {}^{h}D_n(\bar{g})^{h^{-1}}$ gr-первичны.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По предложению 3.4.1 существует вполне gr-приводимое кольцо $Q := Q^{\mathrm{gr}}(R) = RS^{-1}$, которое по теореме 1.3.9 имеет вид $Q = T_n(\bar{g})$, где T — градуированное тело, $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. Пусть N —

полная система $(e_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ матричных единиц в Q, $e_{ij}\in Q_{g_ig_j^{-1}}$. По лемме 2.3.2 $Na\subseteq R$ для некоторого $a\in S$, поэтому $M:=a^{-1}Na$ — такая полная система матричных единиц в Q, что $aM\subseteq R$. Так как R — gr-pri-кольцо, то $aMR=bR$ для некоторого $b\in S$, $h:=\deg b$. Значит, $b=ac$ для некоторого $c\in h(MR)$. При этом элемент $c=a^{-1}b$ обратим в Q, $MR=cR$ и

$$(R:M):=\{r\in R\mid rM\subseteq R\}=\{r\in R\mid rc\subseteq R\}=Rc^{-1}.$$

Поэтому $(Rc^{-1})M\subseteq Rc^{-1}$ и $c^{-1}Mc\subseteq R$. Итак, $b^{-1}e_{ij}b\in R_{h^{-1}g_i(h^{-1}g_j)^{-1}}$ — полная система матричных единиц в R. По предложению 1.2.3

$$R=D_n(h^{-1}\bar g)={}^hD_n(\bar g)^{h^{-1}}$$

для некоторого градуированного кольца D, и по предложению 2.4.1

$$T_n(\bar g)=Q^{\mathrm{gr}}(R)=Q^{\mathrm{gr}}(D)_n(h^{-1}\bar g).$$

Имеем, что $h\big(Q^{\mathrm{gr}}(D)\big)=h(T)$, поэтому D — градуированная область. Так как кольцо R gr-конечномерно справа, то и кольцо D gr-конечномерно справа. Значит, D — правая градуированная область Оре.

Если группа G абелева, то $R={}^hD_n(\bar g)^{h^{-1}}=D_n(\bar g)$ и

$$T_n(\bar g)=Q^{\mathrm{gr}}(R)=Q^{\mathrm{gr}}\big(D_n(\bar g)\big)=Q^{\mathrm{gr}}(D)_n(\bar g),$$

поэтому $T=Q^{\mathrm{gr}}(D)$. $\square$

В разделе 4.4 мы получим ещё один градуированный вариант теорем Голди с помощью ортогонального градуированного пополнения.

4. Ортогональное градуированное пополнение

Соберём в таблице основные объекты теории ортогональной полноты и их градуированные аналоги, которые будем исследовать в этом разделе.

Неградуированный случай	Градуированный случай
A — полупервичное кольцо	R — gr-полупервичное кольцо
$Q(A)$ — полное правое кольцо частных кольца A	$Q^{\mathrm{gr}}=Q^{\mathrm{gr}}(R)$ — полное правое градуированное кольцо частных кольца R
$C(A)$ — центр кольца $Q(A)$, т. е. расширенный центроид кольца A	1) $C^{\mathrm{gr}}=C^{\mathrm{gr}}(R)$ — максимальное градуированное подкольцо центра кольца Q^{gr} (градуированный расширенный центроид кольца R); 2) $C_e=C_e^{\mathrm{gr}}(R)$
$B(A)=\{u\in C(A)\mid u^2=u\}$	$B=B(R)=\{u\in h(C^{\mathrm{gr}})\mid u^2=u\}$
$O(A)$ — ортогональное пополнение кольца A	$O^{\mathrm{gr}}=O^{\mathrm{gr}}(R)$ — ортогональное градуированное пополнение кольца R

Кольцо $O^{\mathrm{gr}}(R)$ построено в разделе 3.

Булево кольцо $B = B(R)$ однородных идемпотентов кольца C^{gr} рассматривается со сложением (3) и порядком (4), как и в неградуированном случае. Так как однородные идемпотенты имеют степень e, то $B \subseteq C_e$. Отметим, что при сложении (3) это свойство сохраняется. Строение булева кольца B опишем в разделе 4.1.

4.1. Основное булево кольцо

Пусть T — градуированное подмножество gr-полупервичного кольца R. Тогда идеал $I = RTR$, порождённый множеством T, является градуированным. По [4, лемма 2] $l(I) = r(I)$ $(:=I^*)$, $I \cap I^* = 0$ и $I \oplus I^*$ — gr-плотный правый идеал в R. Поэтому отображение

$$E[T]\colon I \oplus I^* \to R, \quad a + b \mapsto a, \quad a \in I, \quad b \in I^*,$$

корректно задаёт однородный степени e гомоморфизм градуированных R-модулей и тем самым определяет некоторый элемент кольца Q_e^{gr}, который мы обозначаем так же $E[T]$. Для $a \in h(R)$ вместо $E[\{a\}]$ пишем $E[a]$.

Градуированный идеал I вида J^*, где J — некоторый градуированный идеал в R, назовём аннуляторным градуированным идеалом. Легко проверить, что $I \subseteq I^{**}$, $I^* = I^{***}$, а также что аннуляторными являются в точности те градуированные идеалы, для которых $I^{**} = I$.

Для любого градуированного подмножества $T \subseteq R$ наименьшим градуированным аннуляторным идеалом, содержащим T, является $(RTR)^{**}$. Если $I = RTR$, то отображения $E[T] = E[I]$ и $E[I^{**}]$ совпадают на gr-плотном правом идеале $I \oplus I^{**}$, так что $E[T] = E[I^{**}]$ и $E[T] + E[(RTR)^*] = 1$.

Лемма 4.1.1. *Для любого gr-полупервичного кольца R и любых его градуированных подмножеств T, T_1, T_2 верны следующие утверждения*:

1) $E[T] \in B$;
2) $E[T_1] \leqslant E[T_2]$, *если и только если* $(RT_1R)^{**} \subseteq (RT_2R)^{**}$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Обозначим $u = E[T]$, $I = RTR$. Так как $u^2 = u \in Q_e^{\mathrm{gr}}$, то достаточно показать, что $u \in C^{\mathrm{gr}}$, т. е. что $uq = qu$ для всех $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$. Поскольку $E[T] = E[I] = E[I^{**}]$, то можно считать, что $T = I = I^{**}$. Пусть $[f]_\theta = q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, $f \in h\big(\mathrm{HOM}_R(D, R)\big)$, D — gr-плотный правый идеал в R. Тогда

$$K := D \cap f^{-1}(I \oplus I^*) \cap (I \oplus I^*) \cap u^{-1}(D) —$$

gr-плотный правый идеал в R. Пусть $x \in I$, $y \in I^*$, $x + y \in K$. Тогда $D \ni u(x + y) = x$, поэтому $x, y \in D$. Так как $y \in I^*$, то $f(y)i = f(yi) = f(0) = 0$ для всех $i \in I$, так что $f(y) \in I^*$; аналогично $f(x) \in I$ $(= I^{**})$. Значит,

$$(qu - uq)(x + y) = f(x) - uf(x) - uf(y) = 0$$

и $u \in C^{\mathrm{gr}}$.

Докажем утверждение 2). Можно считать, что $T_1 = I$, $T_2 = J$ — аннуляторные градуированные идеалы в R. Если $I \subseteq J$, то $E[J]E[I] = E[I]$, т. е. $E[I] \leqslant E[J]$. Обратно, если $E[J]E[I] = E[I]$, то $E[J]x = x$ для всех $x \in I$, поэтому $I \subseteq J$. □

Определение. Система градуированных идеалов $(I_\gamma)_\gamma$ gr-полупервичного кольца R называется

— *ортогональной*, если $I_\gamma I_\delta = 0$ при всех $\gamma \neq \delta$;

— *плотной*, если идеал $\sum\limits_\gamma I_\gamma$ gr-плотный в R.

Замечание 4.1.2. В gr-полупервичном кольце равенство $I_\gamma I_\delta = 0$ равносильно равенству $I_\gamma \cap I_\delta = 0$ для любых градуированных идеалов I_γ и I_δ.

Теорема 4.1.3. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. Тогда в принятых выше обозначениях верны следующие утверждения.*

1. *$B = \{E[T] \mid T$ — градуированное подмножество в $R\}$.*
2. *Для каждого градуированного подмножества T в R существует единственный элемент $u \in B$, такой что*
$$\mathrm{Ann}_{C^{\mathrm{gr}}}(T) = (1-u)C^{\mathrm{gr}},$$
и этим элементом u является элемент $E[T]$. При этом
$$\mathrm{Ann}_{C_e}(T) = (1-E[T])C_e.$$
3. *Булева алгебра $(B;\ \leqslant, 0, 1, \wedge, ')$, где $u \wedge v = uv$, $u' = 1 - u$, изоморфна булевой алгебре $(\mathfrak{Ann}^{\mathrm{gr}}(R);\ \subseteq, 0, R, \cap, ^*)$ аннуляторных градуированных идеалов кольца R, причём изоморфизм доставляют взаимно-обратные отображения*
$$B \to \mathfrak{Ann}(R), \quad u \mapsto uR \cap R = \{r \in R \mid r = ur\}$$
и
$$\mathfrak{Ann}(R) \to B, \quad I \mapsto E[I].$$
4. *Для любого семейства градуированных аннуляторных идеалов $\{I_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ кольца R верны следующие утверждения:*
   а) *$I_\gamma I_\delta = 0$ тогда и только тогда, когда $E[I_\gamma]E[I_\delta] = 0$;*
   б) *система $\{I_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ плотна в $\mathfrak{Ann}^{\mathrm{gr}}(R)$ тогда и только тогда, когда система $\{E[I_\gamma] \mid \gamma \in \Gamma\}$ плотна в B.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Включение $\supseteq$ доказано в пункте 1) леммы 4.1.1. Обратно, пусть $u \in B$. Положим
$$I := \{x \in R \mid ux = x\}.$$
Тогда I — градуированный идеал в R, для которого
$$I^* = \{y \in R \mid uy = 0\}, \quad I \oplus I^* = \{z \in R \mid uz \in R\}.$$
Поэтому $E[I] = u$.

Докажем утверждение 2. Поскольку $(1-u)C^{\mathrm{gr}}$ — кольцо с единицей $1-u$ для любого $u \in B$, то может существовать не более одного заявленного элемента u. Докажем, что при $u = E[T]$ указанное равенство верно. Пусть $I = Q^{\mathrm{gr}}TQ^{\mathrm{gr}}$ — градуированный идеал в Q^{gr}, порождённый множеством T. Ясно, что $\mathrm{Ann}_{C^{\mathrm{gr}}}(T) = \mathrm{Ann}_{C^{\mathrm{gr}}}(I)$. Если $x \in \mathrm{Ann}_{C^{\mathrm{gr}}}(T)$, то $x(1-u)(a+b) = xb = x(a+b)$ для всех $a \in I$, $b \in I^*$, так что $x(1-u) = x$ и $C^{\mathrm{gr}}(1-u) \supseteq \mathrm{Ann}_{C^{\mathrm{gr}}}(T)$. Обратное включение очевидно. Второе равенство следует из первого и того, что $1 - E[T] \in C_e$.

Докажем утверждение 3. Указанные отображения взаимно-обратны, поскольку для всех $u \in B$, $r \in h(R)$ и $I \in \mathcal{A}nn^{\mathrm{gr}}(R)$ $E[uR \cap R](r) = ur$, откуда следует, что $E[uR \cap R] = u$, и справедливы равносильности

$$r \in E[I]R \cap R \iff r = E[I]r \iff r \in I^{**} = I.$$

Эти отображения являются гомоморфизмами булевых алгебр, поскольку для всех $u, v \in B$ справедливы равносильности

$$u \leqslant v \iff uv = u \iff uR \cap R = uvR \cap R\ (\subseteq vR) \iff uR \cap R \subseteq vR \cap R,$$

$0^* = R$ и $R^* = 0$, $uvR = uR \cap vR$ (если $ur = vs$, то $vur = v^2 s = vs \in uvR$), $\big((1-u)R \cap R\big)^* = uR \cap R$.

Пункт а) утверждение 4 следует из пункта 1 и замечания 4.1.2. Пункт б) следует из равносильности

$$\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma R \cap R\right)^* = 0 \iff \mathrm{Ann}_B\{u_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} = 0,$$

применённой к $u_\gamma = E[I_\gamma]$, $\gamma \in \Gamma$. □

Предложение 4.1.4. *Кольцо B ортогонально полно.*

Доказательство. По пункту 2 теоремы 4.1.3 с учётом регулярности кольца C_e (пункт 3) предложения 2.2.11) для каждого подмножества $S \subseteq B$ имеем

$$\mathrm{Ann}_B(S) = B \cap \mathrm{Ann}_{C_e}(S) = B \cap (1 - E[S])C^{\mathrm{gr}} = (1 - E[S])B. \qquad \square$$

Замечание 4.1.5. Булево кольцо B идемпотентов любого коммутативного регулярного самоинъективного кольца C ортогонально полно. Действительно, полное кольцо частных $Q(C)$ совпадает с C, так что C совпадает со своим расширенным центроидом. Тогда кольцо B ортогонально полно по [8, следствие 8.5].

Лемма 4.1.6. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. Тогда для любых элементов $a, b \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ следующие условия равносильны:*

1) $E[a]E[b] = 0$;
2) $aQ^{\mathrm{gr}}b = 0$;
3) $aRb = 0$.

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из того, что $aE[a] = a$, $bE[b] = b$ и $E[a], E[b] \in C^{\mathrm{gr}}$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $aQ^{\mathrm{gr}}b = 0$. Тогда $a \in (Q^{\mathrm{gr}}bQ^{\mathrm{gr}})^*$, поэтому $aE[b] = 0$, $E[b] \in \mathrm{Ann}_{C^{\mathrm{gr}}}(a) = (1 - E[a])C^{\mathrm{gr}}$, $E[b] = (1 - E[a])E[b]$, $E[a]E[b] = 0$.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Если $aRb = 0$, то $(bQ^{\mathrm{gr}}aR)^2 = 0$ и $(bQ^{\mathrm{gr}}aR) \cap R = 0$ ввиду gr-полупервичности кольца R. Но тогда $bQ^{\mathrm{gr}}aR = 0$, $bQ^{\mathrm{gr}}a = 0$, $E[b]E[a] = 0$ и $aQ^{\mathrm{gr}}b = 0$, так как условие 1) равносильно условию 2). $\square$

Следствие 4.1.7. *Пусть S — градуированное правое кольцо частных gr-полупервичного кольца R. Тогда кольцо S gr-первично в точности тогда, когда кольцо R gr-первично.*

Доказательство. Ясно, что gr-первичность кольца R влечёт gr-первичность кольца S. Пусть кольцо S gr-первично и $aRb = 0$, где $a, b \in h(R)$. Тогда кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(S) = Q^{\mathrm{gr}}(R)$ gr-первично, и по лемме 4.1.6 $aQ^{\mathrm{gr}}b = 0$, значит, $a = 0$ или $b = 0$. $\square$

4.2. Критерий ортогональной полноты кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$

Перейдём к вопросам ортогональной полноты градуированных колец и модулей. Начиная с этого момента, если не оговорено противное, ортогональная полнота понимается относительно булева кольца B, ортогонально полного по предложению 4.1.4.

Известно, что в случае $G = \{e\}$ кольцо Q^{gr} является несингулярным и ортогонально полным C_e-модулем [7]. В общем случае кольцо Q^{gr} может оказаться не ортогонально полным.

Пример 4.2.1. Пусть A — такое полупервичное кольцо, что булево кольцо B идемпотентов его расширенного центроида бесконечно, а значит, по лемме 1.4.2 содержит бесконечную ортогональную систему идемпотентов e_n, $n \in \mathbb{N}$, например, $A = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}_2$. Пусть G — бесконечная группа, $g_i \in G$, $i \in \mathbb{N}$, $R = AG$ — групповое кольцо с канонической G-градуировкой. Тогда кольцо R gr-полупервично в силу полупервичности кольца A, $Q^{\mathrm{gr}} := Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q(A)G$ (пример 2.2.9), и для системы $\{(e_i, g_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ не определена ортогональная сумма в R, поскольку для всякого $t \in R$ множество $\{te_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ имеет конечный носитель, в то время как множество $\{g_ie_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ имеет бесконечный носитель $\{g_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Значит, в этом случае кольцо Q^{gr} не является ортогонально полным.

В связи с этим введём понятие ортогональной gr-полноты.

Определение. Пусть X_g — несингулярные C_e-модули при всех $g \in G$. C_e-модуль $X = \bigoplus\limits_{g\in G} X_g$ назовём ортогонально *gr-полным*, если все модули X_g ортогонально полны.

Заметим, что прямые суммы несингулярных модулей несингулярны.

Предложение 4.2.2. *Для произвольного* gr*-полупервичного кольца* R *модуль* $Q^{\mathrm{gr}}_{C_e}$ *несингулярен и ортогонально* gr*-полон.*

Доказательство. Покажем, что Q^{gr}_g — несингулярный C_e-модуль при всех $g \in G$. Пусть $x \in \mathrm{Sing}_{C_e}(Q^{\mathrm{gr}}_g)$. Тогда $\mathrm{Ann}_{C_e}(x) = (1 - E[x])C_e$ (пункт 2 теоремы 4.1.3) — gr-существенный идеал в C_e, и поскольку $(1-E[x])C_e \cap E[x]C_e = 0$, то $E[x] = 0$, откуда следует, что $x = 0$.

Пусть $g \in G$, $\{u_\gamma\}_\gamma \subseteq B$ — плотное ортогональное подмножество, $\{t_\gamma\}_\gamma \subseteq Q^{\mathrm{gr}}_g$. Тогда градуированный идеал $\sum\limits_\gamma u_\gamma Q^{\mathrm{gr}}$ gr-плотный, а отображение

$$f\colon \sum_\gamma u_\gamma Q^{\mathrm{gr}} \to Q^{\mathrm{gr}}, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{\gamma_i} u_{\gamma_i} \mapsto \sum_{i=1}^{n} t_{\gamma_i} a_{\gamma_i} u_{\gamma_i},$$

корректно и задаёт однородный степени g гомоморфизм правых Q^{gr}-модулей, который определяет элемент $t = [f]_\theta \in Q^{\mathrm{gr}}(Q^{\mathrm{gr}}) = Q^{\mathrm{gr}}$. Поскольку $f(u_\gamma) = t_\gamma u_\gamma$, то $t_\gamma u_\gamma = t u_\gamma$. □

Замечание 4.2.3. Если кольцо Q^{gr} ортогонально полно, то всякое его градуированное ортогонально gr-полное подмножество ортогонально полно.

Выясним, при каких условиях кольцо Q^{gr} ортогонально полно (здесь и далее как C_e-модуль). Для этого найдём критерий ортогональной полноты прямой суммы несингулярных модулей.

Теорема 4.2.4. *Пусть* C — *коммутативное регулярное самоинъективное кольцо,* B — *булево кольцо его идемпотентов* (*ортогонально полное по замечанию* 4.1.5), $(X_i)_{i\in I}$ — *семейство несингулярных* C*-модулей,* $X = \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$. *Тогда следующие условия равносильны*:

1) X — *ортогонально полный* C*-модуль* (*относительно* B);
2) *все модули* X_i *ортогонально полны и для любой бесконечной ортогональной системы* $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ *в* B *существуют такие конечные подмножества* $I_0 \subseteq I$ *и* $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, *что* $u_\gamma X_i = 0$ *для всех пар* $(i,\gamma) \in (I \setminus I_0) \times (\Gamma \setminus \Gamma_0)$.

Доказательство. Образ элемента $t \in X$ при канонической проекции $X \to X_m$ обозначим через $t^{(m)}$, а носитель элемента $t \in X$ через

$$\mathrm{Supp}(t) := \{i \in I \mid t^{(i)} \neq 0\}.$$

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $i \in I$, $\{u_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — плотная ортогональная система в B, $x_\gamma \in X_i$, $\gamma \in \Gamma$. Тогда в силу ортогональной полноты модуля X существует такой элемент $x \in X$, что $xu_\gamma = x_\gamma u_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Поскольку $x_\gamma u_\gamma \in X_i$, то элемент x в последнем равенстве можно заменить на его компоненту $x^{(i)}$. Но из несингулярности модуля X следует, что элемент x определяется однозначно. Значит, $x = x^{(i)}$. Таким образом, если $x_\gamma \in X_i$, то $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma \in X_i$. Поэтому все модули X_i, $i \in I$, ортогонально полны.

Если кольцо B конечно или множество I конечно, то утверждение 2) верно. Иначе по лемме 1.4.2 в B найдётся бесконечная ортогональная система $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Если для неё утверждение неверно, то найдутся такие счётные множества $\{\gamma_k \in \Gamma \mid k \in \mathbb{N}\}$ и $\{i_k \in I \mid k \in \mathbb{N}\}$, что $u_{\gamma_k} X_{i_k} \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим в X систему элементов

$$x_\gamma = \begin{cases} x_{i_k}, & \gamma = \gamma_k, \\ 0, & \gamma \notin \{\gamma_k \mid k \in \mathbb{N}\}, \end{cases}$$

где $x_{i_k} \in X_{i_k}$ такие, что $u_{\gamma_k} x_{i_k} \neq 0$. По 1) для систем $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в X существует такой элемент $x \in X$, что $u_\gamma x = u_\gamma x_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma$. В частности, $u_{\gamma_k} x = u_{\gamma_k} x_{i_k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Так как множество $\{i_k \in I \mid k \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, то существует элемент $i_m \in I \setminus \mathrm{Supp}(x)$. Тогда

$$0 = (u_{\gamma_m} x)^{(m)} = (u_{\gamma_m} x_{i_m})^{(m)} = u_{\gamma_m} x_{i_m} \neq 0.$$

Получено противоречие.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Возьмём произвольную плотную ортогональную систему $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B и произвольную систему $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в X. По 2) для каждого $i \in I$ существует однозначно определённый элемент $x^{(i)} := \sum\limits_\gamma^\perp u_\gamma x_\gamma^{(i)} \in X_i$ а требуется найти такой элемент $x \in X$, что $u_\gamma x_\gamma = u_\gamma x$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Если множество Γ конечно, то все $x^{(i)}$, кроме конечного числа, равны 0, поэтому подойдёт элемент $x = \sum\limits_{i\in I} x^{(i)}$. Если множество Γ бесконечно, то по условию найдутся такие конечные множества $I_0 \subseteq I$ и $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, что $u_\gamma X_i = 0$ для всех пар $(i,\gamma) \in (I \setminus I_0) \times (\Gamma \setminus \Gamma_0)$. Множество $J := \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma_0} \mathrm{Supp}(x_\gamma) \cup I_0$ конечно (так как множества I_0, Γ_0 и $\mathrm{Supp}(x_\gamma)$ при всех $\gamma \in \Gamma$ конечны) и обладает свойством, что $u_\gamma x_\gamma^{(i)} = 0$ для всех пар $(i,\gamma) \in (I \setminus J) \times \Gamma$. Поэтому в качестве x подходит элемент $\sum\limits_{j\in J} x^{(j)}$. $\square$

Следствие 4.2.5. *В обозначениях теоремы* 4.2.4 *предположим, что булево кольцо B конечно или множество I конечно. Тогда модуль X ортогонально полон в точности тогда, когда все модули X_i, $i \in I$, ортогонально полны.*

Из теоремы 4.2.4 и предложения 4.2.2 вытекает критерий ортогональной полноты полного правого градуированного кольца частных gr-полупервичного кольца.

Следствие 4.2.6. *Для gr-полупервичного кольца R следующие условия равносильны*:

1) *кольцо Q^{gr} ортогонально полно*;
2) *для любой бесконечной ортогональной системы идемпотентов $(u_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ в B существуют такие конечные подмножества $G_0 \subseteq G$ и $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, что $u_\gamma Q_g^{\mathrm{gr}} = 0$ для всех пар $(g,\gamma) \in (G \setminus G_0) \times (\Gamma \setminus \Gamma_0)$.*

Следствие 4.2.7. *Если кольцо R имеет конечный носитель (например, если группа G конечна) или кольцо B конечно, то кольцо Q^{gr} ортогонально полно.*

Выполнение хотя бы одного из двух очевидно достаточных условий ортогональной полноты кольца Q^{gr}, указанных в следствии 4.2.7, оказывается необходимым в случае точной градуировки кольца R.

Теорема 4.2.8. *Если gr-полупервичное кольцо R точно во всех компонентах слева или справа, то кольцо Q^{gr} ортогонально полно в точности тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий: группа G конечна или кольцо B конечно.*

Доказательство. Согласно следствию 4.2.6 нужно доказать необходимость одного из условий конечности. Из условия следует, что равенство $uR_g = 0$ (и тем более равенство $uQ_g^{\mathrm{gr}} = 0$), где $u \in B$, влечёт равенство $u = 0$. Действительно, если $uR_g = 0$ и $u \neq 0$, то $0 \neq ur \in h(R)$ для некоторого $r \in h(R)$ (так как $R_R \subseteq Q_R^{\mathrm{gr}}$ — gr-существенное расширение) и $urR_g = ruR_g = 0 = R_g ur$, что противоречит точности кольца R справа или слева в компоненте $(\deg r)g$. Значит, если кольцо B бесконечно, то из условия 2) следствия 4.2.6 получаем, что $G \setminus G_0 = \varnothing$ для некоторого конечного подмножества $G_0 \subseteq G$, т. е. группа G конечна. □

В [24, предложение 3.1.6] установлена связь между ортогональной полнотой и инъективностью модулей.

Предложение 4.2.9 [24, предложение 3.1.6]. *Пусть C — коммутативное регулярное самоинъективное кольцо, B — булево кольцо его идемпотентов. Тогда всякий несингулярный C-модуль ортогонально полон относительно B в точности тогда, когда он инъективен.*

Установим аналогичную связь в градуированном случае.

Предложение 4.2.10. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. Снабдим кольцо C_e тривиальной G-градуировкой: $(C_e)_e = C_e$, $(C_e)_g = 0$ при $g \neq e$. Тогда верны следующие утверждения:*

1) *C_e-модуль Q^{gr} gr-инъективен;*
2) *C_e-модуль Q^{gr} инъективен в точности тогда, когда он ортогонально полон.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Из критерия Бэра gr-инъективности (теорема 1.3.21) следует, что gr-инъективность C_e-модуля Q^{gr} равносильна инъективности всех C_e-модулей Q_g^{gr}, $g \in G$. По предложению 4.2.2 все модули Q_g^{gr} ортогонально полны. Тогда по предложению 4.2.9 они инъективны (следует учесть, что по пункту 3) предложения 2.2.11 кольцо C_e регулярно и самоинъективно).

Пункт 2) непосредственно следует из предложения 4.2.9. □

4.3. Построение ортогонального градуированного пополнения

Перейдём к построению ортогонального градуированного пополнения градуированного подмножества в Q^{gr}. В [7, 8] ортогональное пополнение $O(T)$

подмножества T несингулярного C-модуля X (C — расширенный центроид данного полупервичного кольца) определяется как пересечение всех ортогонально полных множеств в $Q(A)$, содержащих T. При таком подходе в градуированном случае не все gr-полупервичные кольца будут иметь ортогональные пополнения (ввиду условий конечности из следствия 4.2.6), поэтому мы возьмём за основу понятие ортогональной gr-полноты. Поскольку всякое градуированное подмножество в Q^{gr} содержится в ортогонально gr-полном C_e-модуле Q^{gr} и пересечение ортогонально gr-полных подмножеств в Q^{gr} ортогонально gr-полно, то для каждого градуированного подмножества $T \subseteq Q^{\mathrm{gr}}$ существует наименьшее ортогонально gr-полное подмножество в Q^{gr}, его содержащее.

Определение. Пусть R — gr-полупервичное кольцо, T — градуированное подмножество в Q^{gr}. *Ортогональным градуированным пополнением* множества T назовём пересечение всех ортогонально gr-полных подмножеств в Q^{gr}, содержащих T. Ортогональное градуированное пополнение множества T обозначим через $O^{\mathrm{gr}}(T)$.

Таким образом, если $T = \bigoplus\limits_{g\in G} T_g$, то $O^{\mathrm{gr}}(T) = \bigoplus\limits_{g\in G} O^{\mathrm{gr}}(T)_g$ и при каждом $g \in G$ множество $O^{\mathrm{gr}}(T)_g$ есть наименьшее ортогонально полное подмножество в Q^{gr}_g, содержащее T_g, т. е. $O^{\mathrm{gr}}(T)_g = O^{\mathrm{gr}}(T_g)$.

Опишем множество $O^{\mathrm{gr}}(T)$ поэлементно аналогично неградуированному случаю [7, лемма 1].

Предложение 4.3.1. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, T — градуированное подмножество в Q^{gr}. Тогда множество $O^{\mathrm{gr}}(T)$ градуированное, ортогонально gr-полное и для всех $g \in G$*

$$O^{\mathrm{gr}}(T)_g = \Big\{ \sum_\gamma{}^{\perp} t_\gamma v_\gamma \;\Big|\; \{t_\gamma\}_\gamma \subseteq T_g,\ \{u_\gamma\}_\gamma \text{ — плотная ортогональная система в } B \Big\} \tag{5}$$

Если к тому же кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ ортогонально полно, то

$$O^{\mathrm{gr}}(T) = \Big\{ \sum_\gamma{}^{\perp} t_\gamma u_\gamma \;\Big|\; \{t_\gamma\}_\gamma \subseteq T,\ \{u_\gamma\}_\gamma \text{ — плотная ортогональная система в } B \Big\}.$$

Доказательство. Множество $Q^{\mathrm{gr}}_g(R)$ ортогонально полно при каждом $g \in G$, поэтому

$$O^{\mathrm{gr}}_g(T) = O^{\mathrm{gr}}(T_g) \subseteq Q^{\mathrm{gr}}_g(R)$$

и множество $O^{\mathrm{gr}}(T) = \bigoplus\limits_{g\in G} O^{\mathrm{gr}}(T_g)$ градуированное.

Включение $\supseteq$ в (5) очевидно. Покажем, что множество в правой части (5) ортогонально полно, откуда будет следовать обратное включение. Пусть $\{u_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ — плотная ортогональная система в B и $x_\gamma = \sum\limits_{\omega(\gamma)\in\Omega(\gamma)}^{\perp} t_{\omega(\gamma)} v_{\omega(\gamma)}$,

$t_{\omega(\gamma)} \in T_g$, $\{v_{\omega(\gamma)}\}_{\omega(\gamma)\in\Omega(\gamma)}$ — плотная ортогональная система в B при каждом $\gamma \in \Gamma$. Обозначим $x := \sum\limits_{\gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma \in O^{\mathrm{gr}}(T_g)$. Поскольку система

$$\Delta = \bigl\{\delta = \bigl(\gamma, \omega(\gamma)\bigr) \bigm| \gamma \in \Gamma,\ \omega(\gamma) \in \Omega(\gamma)\bigr\}$$

является плотной и ортогональной в B, то, обозначив $w_\delta := u_\gamma v_{\omega(\gamma)}$ и $y_\delta := x_{\omega(\gamma)}$, получим

$$x w_\delta = x_\gamma u_\gamma v_{\omega(\gamma)} = x_\gamma v_{\omega(\gamma)} u_\gamma = x_{\omega(\gamma)} v_{\omega(\gamma)} u_\gamma = y_\delta w_\delta.$$

Значит, $x = \sum\limits_{\delta\in\Delta}^{\perp} y_\delta w_\delta$, и (5) доказано.

Второе утверждение доказывается так же, как первое, с заменой T_g на T. □

Предложение 4.3.2. *Для всякого* gr*-полупервичного кольца R градуированное множество $O^{\mathrm{gr}} = O^{\mathrm{gr}}(R)$ является кольцом, а значит, градуированным правым кольцом частных для R. В частности, кольцо O^{gr}* gr*-полупервично.*

Доказательство. По предложению 4.3.1 произвольные элементы $x \in O^{\mathrm{gr}}_g$ и $y \in O^{\mathrm{gr}}_h$ $(g, h \in G)$ имеют вид $x = \sum\limits_{\gamma}^{\perp} x_\gamma u_\gamma$ и $y = \sum\limits_{\delta}^{\perp} y_\delta v_\delta$, где $\{u_\gamma\}_\gamma$ и $\{v_\delta\}_\delta$ — плотные ортогональные системы в B. Тогда такова же система $\{u_\gamma v_\delta\}_{(\gamma,\delta)}$ и

$$xy = \sum_{(\gamma,\delta)}^{\perp} (x_\gamma y_\delta) u_\gamma v_\delta \in R_{gh}.$$

Если $g = h$, то

$$x + y = \sum_{(\gamma,\delta)}^{\perp} (x_\gamma + y_\delta) u_\gamma v_\delta \in R_g.$$

Таким образом, каждая однородная компонента O^{gr}_g является абелевой группой по сложению, а их объединение мультипликативно замкнуто, поэтому множество O^{gr} образует градуированное кольцо. Так как $R \subseteq O^{\mathrm{gr}} \subseteq Q^{\mathrm{gr}}$, то O^{gr} — градуированное правое кольцо частных кольца R, gr-полупервичное вместе с R. □

Следствие 4.3.3. *Для* gr*-полупервичного кольца R*

$$O^{\mathrm{gr}}\bigl(O^{\mathrm{gr}}(R)\bigr) = O^{\mathrm{gr}}(R), \quad Q^{\mathrm{gr}}\bigl(O^{\mathrm{gr}}(R)\bigr) = O^{\mathrm{gr}}\bigl(Q^{\mathrm{gr}}(R)\bigr) = Q^{\mathrm{gr}}(R).$$

Замечание 4.3.4.

1. Если кольцо R gr-первично, то C_e — поле (предложение 2.2.11), поэтому $B \cong \mathbb{Z}_2$ и $R = O^{\mathrm{gr}}$.
2. Если кольцо R — прямая сумма n gr-первичных колец R_i, то $Q^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} Q^{\mathrm{gr}}(R_i)$ и C_e — прямая сумма n полей, поэтому $B \cong \mathbb{Z}_2^n$ и $R = O^{\mathrm{gr}}$.

Докажем критерий ортогональной gr-полноты gr-полупервичного кольца в терминах его внутренней структуры.

Теорема 4.3.5 (критерий ортогональной gr-полноты gr-полупервичного кольца). *Для gr-полупервичного кольца R следующие условия равносильны*:

1) $R = O^{\mathrm{gr}}(R)$;
2) *для любой плотной ортогональной системы градуированных идеалов $\{I_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ кольца R, любого $g \in G$ и любой системы $\{r_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\} \subseteq R_g$ существует такой элемент $r \in R_g$, что $(r - r_\gamma)I_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\{I_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — плотная ортогональная система градуированных идеалов в R, $g \in G$, $r_\gamma \in R_g$. Положим $u_\gamma := E[I_\gamma]$ и $r := \sum\limits_\gamma^\perp u_\gamma r_\gamma \in O_g^{\mathrm{gr}} = R_g$. Тогда

$$(r - r_\gamma)I_\gamma = (r - r_\gamma)u_\gamma I_\gamma = 0.$$

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\{u_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — плотная ортогональная система в B, $r_\gamma \in R_g$, где $g \in G$. Надо показать, что $r := \sum\limits_\gamma^\perp u_\gamma r_\gamma \in R_g$. Положим $I_\gamma := u_\gamma R \cap R = u_\gamma (R : u_\gamma)_R$, $I = \sum\limits_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$. По теореме 4.1.3 $u_\gamma = E[I_\gamma]$, $\gamma \in \Gamma$, I — gr-плотный идеал в R. По условию существует такой элемент $t \in R_g$, что $(t - r_\gamma)I_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Поэтому

$$(t - r)I_\gamma = (t - r_\gamma + r_\gamma - r)I_\gamma = (r_\gamma - r)I_\gamma = (r_\gamma - r)u_\gamma I_\gamma = 0.$$

Значит, $(t - r)I = 0$ и $r = t \in R_g$. □

В заключение этого раздела установим связь между кольцами C_e, B, O_e^{gr}, построенными по gr-полупервичному кольцу R, и кольцами $C(R_e)$, $B(R_e)$, $O(R_e)$, построенными по кольцу R_e, в случае полупервичности последнего.

Предложение 4.3.6. *Сохранив условия теоремы* 2.2.8 *и обозначения из её доказательства, предположим, что кольцо R gr-полупервично и кольцо R_e полупервично. Тогда $\bar{C}_e \subseteq C(R_e)$, $\bar{B} \subseteq B(R_e)$ и $\overline{O_e^{\mathrm{gr}}} \subseteq O(R_e)$.*

Отметим, что по теореме 1.3.14 условия предложения выполняются, если R — gr-полупервичное кольцо с конечным носителем.

Доказательство. По пункту 1) предложения 2.2.11

$$C_e = \{c \in Q_e^{\mathrm{gr}} \mid cr = rc \text{ для всех } r \in R\},$$

следовательно, $\bar{c}r = r\bar{c}$ для всех $c \in C_e$ и $r \in R_e$ (так как $\bar{R}_e = R_e$), поэтому $\bar{c} \in C(R_e)$ для всех $c \in C_e$.

Первое включение доказано, второе следует из первого, а третье — из второго и поэлементного описания колец $O(R_e)$, O^{gr} ([7, лемма 1], предложение 4.3.1). □

Отметим, что включение $\bar{C}_e \supseteq C(R_e)$, вообще говоря, не имеет места, поскольку элементы кольца $C(R_e)$ могут не коммутировать со всеми элементами кольца R.

Пример 4.3.7. Пусть A — полупервичное кольцо, $\sigma\colon G \to \operatorname{Aut} A$ — гомоморфизм групп, ${}^g a := \sigma(g)(a)$, $R = A^\sigma[G]$ — скрещённое произведение. Тогда кольцо R gr-полупервично и точно справа и слева, поэтому по теореме 2.2.8 существует изоморфизм колец $Q(R_e) \cong Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$, тождественный на $R_e = A$. Пусть $c \in C(A) = Z\big(Q(A)\big)$, $d = \tilde{c} \in C_e(A) = Z\big(Q^{\mathrm{gr}}(R)\big) \cap Q^{\mathrm{gr}}_e$. Тогда справедливы следующие равносильности:

$$\begin{aligned} &d \in C_e(R) \iff rd = dr \text{ для всех } r \in h(R) \iff \\ &\quad\iff (ag)d = d(ag) \text{ для всех } a \in A \text{ и } g \in G \iff \\ &\quad\iff a^g d = da \ (= ad) \text{ для всех } a \in A \text{ и } g \in G \iff {}^g d = d \text{ для всех } g \in G, \end{aligned}$$

что неверно, например, при $A = \mathbb{C}$, $G = \operatorname{Aut}_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{Z}_2$, $g(z) = \bar{z}$ $(z \in \mathbb{C})$, $d \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Отметим, что в случае коммутативных e-точных градуированных колец включения в предложении 4.3.6 обращаются в равенства.

Замечание 4.3.8. Если gr-полупервичное кольцо R коммутативное, то оно gr-несингулярное (и gr-редуцированное). Если оно к тому же e-точное, то из теоремы 2.2.8 следует, что

$$Q^{\mathrm{gr}}_e = C_e \cong Q(R_e) = C(R_e), \quad B \cong B(R_e), \quad O^{\mathrm{gr}}_e \cong O(R_e).$$

4.4. Случай градуированных колец Голди

В этом разделе мы применим конструкцию ортогонального градуированного пополнения к исследованию градуированных колец Голди.

Замечание 4.4.1. По теореме 3.4.2 gr-полупервичное правое gr-pri-кольцо изоморфно конечной прямой сумме gr-первичных gr-pri-колец и поэтому ортогонально полно (замечание 4.3.4). В обозначениях доказательства теоремы 3.4.2

$$B \cong \prod_{i=1}^{n} \mathbb{Z}_2^{(i)}, \quad \mathbb{Z}_2^{(i)} = \{0, u_i\}, \quad O^{\mathrm{gr}}(R) = T = R.$$

Отметим, что не все gr-полупервичные градуированные кольца Голди ортогонально полны. Вернёмся к примеру 3.2.1 и найдём ортогональное градуированное пополнение кольца из этого примера.

Пример 4.4.2. Для кольца R из примера 3.2.1 имеем

$$B \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad O^{\mathrm{gr}} = k[x] \oplus k[y], \quad O^{\mathrm{gr}}_n = \begin{cases} kx^n \oplus 0, & n > 0, \\ k \oplus k, & n = 0, \\ 0 \oplus ky^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

Итак, в данном примере кольцо O^{gr} является прямой суммой двух коммутативных областей (и тем более gr-первичных градуированных колец Голди). Следующая теорема обобщает это наблюдение.

Теорема 4.4.3. *Пусть R — gr-полупервичное правое градуированное кольцо Голди. Тогда кольцо $O^{\mathrm{gr}} = O^{\mathrm{gr}}(R)$ является конечной прямой суммой gr-первичных правых градуированных колец Голди.*

Доказательство. По теореме 3.2.2 кольцо Q^{gr} вполне gr-приводимо, а значит, по теореме 1.3.9 является конечной прямой суммой матричных колец $Q_1, \ldots, Q_n$ над градуированными телами. Обозначим через u_i единицу кольца Q_i. Тогда

$$O^{\mathrm{gr}} = \bigoplus_{i=1}^{n} u_i R.$$

Покажем, что каждое кольцо $u_i R$ является gr-первичным правым градуированным кольцом Голди. Так как кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(u_i R) = Q_i$ вполне gr-приводимо, то по теореме 3.2.2 кольцо $u_i R$ gr-несингулярно справа и gr-конечномерно справа. Так как кольцо Q_i gr-первично, то кольцо $u_i R$ gr-первично по следствию 4.1.7. По теореме 3.2.2 R — gr-первичное правое градуированное кольцо Голди. $\square$

Теорема 4.4.4 [29; 38, теорема 8.4.4]. *Если группа G абелева и G-градуированное кольцо R gr-первично, то кольцо $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$ существует и вполне gr-приводимо.*

Из теорем 4.4.3 и 4.4.4 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.4.5. *Пусть R — gr-полупервичное правое G-градуированное кольцо Голди, группа G абелева. Тогда существуют такие gr-первичные правые градуированные кольца Голди $R_1, \ldots, R_n$, что*

$$O^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} R_i, \quad Q^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R_i).$$

4.5. Локализации

Предложение 4.5.1. *Для gr-полупервичного кольца R верны следующие утверждения.*

1. *Между идеалами кольца B и идеалами кольца C_e существует взаимно-однозначное соответствие*

$$\begin{cases} \mathcal{I}d(B) \ni M \mapsto MC_e \in \mathcal{I}d(C_e), \\ \mathcal{I}d(C_e) \ni P \mapsto P \cap B \in \mathcal{I}d(B), \end{cases}$$

   сохраняющее включения, в частности, максимальным идеалам в B соответствуют максимальные идеалы в C_e.

2. *Между идеалами кольца C_e и градуированными идеалами кольца C^{gr} существует взаимно-однозначное соответствие*

$$\begin{cases} \mathcal{I}d(C_e) \ni P \mapsto PC^{\mathrm{gr}} \in \mathcal{I}d^{\mathrm{gr}}(C^{\mathrm{gr}}), \\ \mathcal{I}d^{\mathrm{gr}}(C^{\mathrm{gr}}) \ni K \mapsto K_e \in \mathcal{I}d(C_e), \end{cases}$$

   сохраняющее включения, в частности, максимальным идеалам в C_e соответствуют максимальные градуированные идеалы в C^{gr}.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Включение $M \subseteq MC_e \cap B$ очевидно, а обратное включение следует из регулярности кольца C_e (предложение 2.2.11) и того, что в регулярном кольце каждый конечно порождённый идеал порождается идемпотентом: если $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i c_i = b \in B$, где $m_i \in M$, $c_i \in C_e$, и $m \in M$ — такой элемент, что $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i C_e = mC_e$, то то $b = mc$ для некоторого $c \in C_e$, откуда следует, что $b = mc = m^2c = mb \in MB = M$. Сохранение включений очевидно.

Утверждение 2 доказано в предложении 1.3.7. □

С каждым ультрафильтром $\mathcal{F}$ булева кольца B свяжем отношение эквивалентности на кольце O^{gr}, положив для $a, b \in O^{\mathrm{gr}}$

$$a \equiv_{\mathcal{F}} b \iff ua = ub \text{ для некоторого } u \in \mathcal{F}.$$

(Рефлексивность и симметричность отношения $\equiv_{\mathcal{F}}$ очевидны, а транзитивность следует из мультипликативной замкнутости ультрафильтра.)

Предложение 4.5.2. *Отношение $\equiv_{\mathcal{F}}$ является конгруэнцией на градуированном кольце O^{gr}.*

Доказательство. Если $ua = ub$ и $vc = vd$, где $u, v \in \mathcal{F}$, $a, b, c, d \in O^{\mathrm{gr}}$, то $uv \in \mathcal{F}$ и $uv(a + c) = uv(b + d)$, $uvac = uvbd$.

Для любых $a, b \in O^{\mathrm{gr}}$ $a \equiv_{\mathcal{F}} b$ тогда и только тогда, когда $a_g \equiv_{\mathcal{F}} b_g$ для каждого $g \in G$. Действительно, импликация $\Longrightarrow$ очевидна. Обратно, пусть $\mathrm{Supp}(a) \cup \mathrm{Supp}(b) = \{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq G$. Тогда если $u_{g_i}(a_{g_i} - b_{g_i}) = 0$, где все $u_{g_i} \in \mathcal{F}$, то $u(a - b) = 0$ для $u = u_{g_1} \ldots u_{g_n} \in \mathcal{F}$. □

Для каждого максимального идеала M кольца B и соответствующего ему ультрафильтра $\mathcal{F} = B \setminus M$ определим отображение

$$\varphi_M \colon O^{\mathrm{gr}} \to O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F}, \quad a \mapsto [a]_{\equiv_{\mathcal{F}}},$$

а для каждого максимального идеала P кольца C_e определим отображение локализации

$$\psi_P \colon Q^{\mathrm{gr}}(R) \to Q^{\mathrm{gr}}(R)_P, \quad a \mapsto [(a, 1)]_{\sim},$$

где $Q^{\mathrm{gr}}_P = Q^{\mathrm{gr}}(C_e \setminus P)^{-1}$ — локализация кольца Q^{gr} по мультипликативной системе $C_e \setminus P$ (все элементы которой имеют степень e)

Известно, что отображение ψ_P является гомоморфизмом колец. Так как $P \subseteq C_e$, то этот гомоморфизм однороден. Из предложения 4.5.2 следует, что отображение φ_M также является гомоморфизмом градуированных колец.

Свойства локализаций в неградуированном случае подробно исследованы в [7, лемма 2, теорема 1] и [24, гл. 3]. При их перенесении на градуированный случай могут возникнуть трудности, если кольцо Q^{gr} не является ортогонально полным. Однако некоторые свойства сохраняют свою силу и в этой ситуации, когда достаточно ортогональной gr-полноты кольца Q^{gr} (имеющей место всегда). Эти общие свойства мы выделим отдельно в предложении 4.5.3.

Предложение 4.5.3. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, M — максимальный идеал в B, $P = MC_e$, $\mathcal{F} = B \setminus M$, $\varphi = \varphi_M$, $\psi = \psi_P$, K — подкольцо в O^{gr}, T — подмножество в O^{gr}, такие что $uK \subseteq K$, $uT \subseteq T$ для всех $u \in B$, H — градуированное подкольцо в Q^{gr}, содержащее O^{gr}, $a \in O^{\mathrm{gr}}$. Тогда верны следующие утверждения:*

1) $MK = \{k \in K \mid uk = 0$ *для некоторого* $u \in \mathcal{F}\}$;
2) $O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F} \cong O^{\mathrm{gr}}/MO^{\mathrm{gr}}$;
3) $Q^{\mathrm{gr}}_P \cong Q^{\mathrm{gr}}/MQ^{\mathrm{gr}}$;
4) $MQ^{\mathrm{gr}} \cap H = MH$, $\psi(H) \cong H/MH$, *в частности,* $\psi(O^{\mathrm{gr}}) \cong \varphi(O^{\mathrm{gr}})$;
5) $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi \cap O^{\mathrm{gr}} = \{a \in O^{\mathrm{gr}} \mid E[a_g] \in M$ *для всех* $g \in G\}$;
6) $\varphi(a) \in \varphi(T)$ *тогда и только тогда, когда* $au \in T$ *для некоторого* $u \in \mathcal{F}$;
7) $\varphi\big((T : a)_K\big) = \big(\varphi(T) : \varphi(a)\big)_{\varphi(K)}$, *в частности,* $\varphi\big(r_{O^{\mathrm{gr}}}(a)\big) = r_{\varphi(O^{\mathrm{gr}})}\big(\varphi(a)\big)$.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение 1), сначала докажем включение $\subseteq$. Для $k = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i k_i \in MK$, где $m_i \in M$, $k_i \in K$, возьмём $u = \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - m_i) \in \mathcal{F}$. Тогда $uk = 0$.

Теперь докажем включение $\supseteq$. Если $uk = 0$, $u \in \mathcal{F}$, $k \in K$, то $1 - u \in M$ и $k = (1-u)k \in MK$.

Докажем утверждение 2). Ядро эпиморфизма φ совпадает с MO^{gr} по пункту 1).

Докажем утверждение 3). Ядро гомоморфизма ψ равно $PQ^{\mathrm{gr}} = MC_eQ^{\mathrm{gr}} = MQ^{\mathrm{gr}}$. Докажем сюръективность ψ. Пусть $ab^{-1} \in Q^{\mathrm{gr}}_P$, $a \in Q^{\mathrm{gr}}$, $b \in C_e \setminus P$. Найдём, пользуясь регулярностью кольца C_e, такой элемент $x \in C_e$, что $b = bxb$. Тогда $(bx)^2 = bx \in B$, причём $bx \notin P$, иначе $b = bxb \in P$. Значит, $bx(a - (ax)b) = 0$, поэтому $(ax, 1) \sim (a, b)$ и $\psi(ax) = ab^{-1}$.

Докажем утверждение 4). Пусть $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i q_i = x \in H$, $m_i \in M$, $q_i \in Q^{\mathrm{gr}}$. Идеал $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i C_e$ регулярного кольца C_e порождается идемпотентом, скажем, $m \in B$. Тогда при всех $i = 1, \ldots, n$ имеем, что $m_i = mt_i$ для некоторых $t_i \in C_e$, $m_i = m^2 t_i = mm_i$. Поэтому $x = mx \in MH$. Итак, $MQ^{\mathrm{gr}} \cap H \subseteq MH$. Обратное включение очевидно с учётом включения $MH \subseteq H$ (так как $M \subseteq B \subseteq O^{\mathrm{gr}} \subseteq H$). Изоморфизм $\psi(H) \cong H/MH$ следует из доказанного равенства и первой теоремы об изоморфизме (для колец).

Докажем утверждение 5). Первое равенство следует из пунктов 2)—4):

$$\operatorname{Ker}\varphi = MO^{\mathrm{gr}} = MQ^{\mathrm{gr}} \cap O^{\mathrm{gr}} = PQ^{\mathrm{gr}} \cap O^{\mathrm{gr}} = \operatorname{Ker}\psi \cap O^{\mathrm{gr}}.$$

Докажем второе равенство. Сначала докажем включение $\subseteq$. Если $\varphi(a) = 0$, то $\varphi(a_g) = 0$ для всех $g \in G$, так как гомоморфизм φ имеет степень e. Значит, для каждого $g \in G$ найдётся такой элемент $u_g \in \mathcal{F}$, что $u_g a = 0$. Тогда $1 - u_g \in M$, $a_g = (1 - u_g)a_g$, следовательно, $E[a_g] = (1 - u_g)E[a_g] \in M$.

Докажем включение $\supseteq$. При каждом $g \in G$ последовательно получаем: если $E[a_g] \in M$, то $a_g = E[a_g]a_g \in MO^{\mathrm{gr}} = \operatorname{Ker}\varphi$, следовательно, $\varphi(a_g) = 0$. Значит, $\varphi(a) = 0$.

Докажем утверждение 6). Имеем цепочку равносильностей:

$$\begin{aligned} \varphi(a) \in \varphi(T) &\iff \varphi(a) = \varphi(t) \text{ для некоторого } t \in T \iff \\ &\iff au = tu \text{ для некоторых } t \in T,\ u \in \mathcal{F} \iff \\ &\iff au \in T \text{ для некоторого } u \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

так как по условию $Tu \subseteq T$, а если $au = t \in T$, то $au = au^2 = tu$.

Докажем утверждение 7). Включение $\subseteq$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $\varphi(a)\varphi(k) = \varphi(t)$, где $k \in K$, $t \in T$. Тогда $aku = tu$ для некоторого $u \in \mathcal{F}$. Так как $ku \in K$ и $tu \in T$, то $ku \in (T : a)_K$, поэтому $\varphi(k) = \varphi(ku) \in \in \varphi\big((T : a)_K\big)$. □

Свойства локализаций, которые требуют ортогональную полноту кольца Q^{gr}, вытекают из следующей леммы.

Лемма 4.5.4. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, кольцо Q^{gr} ортогонально полно. Тогда верны следующие утверждения.*

1. *Если L — ортогонально полное подмножество несингулярного C_e-модуля N, то $\operatorname{Ann}_{C_e}(L) = \operatorname{Ann}_{C_e}(x)$ для некоторого $x \in L$.*
2. *Пусть M — максимальный идеал булева кольца B, $T \subseteq MQ^{\mathrm{gr}}$ — ортогонально полное подмножество. Тогда $uT = 0$ для некоторого $u \in B \setminus M$.*

Доказательство. Применяя [7, пункт 2 леммы 1], получим утверждение пункта 1.

Покажем, как пункт 2 следует из пункта 1. Пусть $\operatorname{Ann}_{C_e}(T) = \operatorname{Ann}_{C_e}(x)$, где $x \in T$. Тогда так как $T \subseteq MQ^{\mathrm{gr}}$, то по пункту 1) предложения 4.5.3 $ux = 0$ для некоторого $u \in B \setminus M$. Значит, $uT = 0$. □

В доказательстве каждого пункта следующей теоремы пункт 2 леммы 4.5.4 используется без ссылок.

Теорема 4.5.5. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, кольцо Q^{gr} ортогонально полно, H — градуированное подкольцо в Q^{gr}, содержащее O^{gr}. Тогда в предположениях и обозначениях предложения* 4.5.3 *верны следующие утверждения*:

1) *если L — gr-существенный ортогонально полный правый идеал кольца O^{gr}, то $\varphi(L)$ — gr-существенный правый идеал кольца $\varphi(O^{\mathrm{gr}})$;*
2) *если L — gr-плотный ортогонально полный правый идеал кольца O^{gr}, то $\varphi(L)$ — gr-плотный правый идеал кольца $\varphi(O^{\mathrm{gr}})$;*
3) *$\psi(Q^{\mathrm{gr}})$ — градуированное правое кольцо частных кольца $\psi(H)$;*
4) *кольца $\psi(O^{\mathrm{gr}})$, $\psi(H)$, $\psi(Q^{\mathrm{gr}})$ gr-первичны.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $\varphi(a)\varphi(O^{\mathrm{gr}}) \cap \varphi(L) = 0$, где $a \in h(O^{\mathrm{gr}})$. Тогда $\varphi(aO^{\mathrm{gr}} \cap L) \subseteq \varphi(a)\varphi(O^{\mathrm{gr}}) \cap \varphi(L) = 0$, поэтому $aO^{\mathrm{gr}} \cap L \subseteq \subseteq MO^{\mathrm{gr}}$ и $u(aO^{\mathrm{gr}} \cap L) = 0$ для некоторого $u \in \mathcal{F}$ (так как $aO^{\mathrm{gr}} \cap L$ — ортогонально полное подмножество Q^{gr}). Поскольку $uaO^{\mathrm{gr}} \subseteq O^{\mathrm{gr}}$, то $(uaO^{\mathrm{gr}}) \cap L = = u(aO^{\mathrm{gr}} \cap L) = 0$, и $ua = 0$, так как правый идеал L gr-существенный. Значит, $\varphi(a) = 0$.

Докажем утверждение 2). Возьмём любые $a, d \in h(O^{\mathrm{gr}})$, такие что $\varphi(d)\big(\varphi(L) : \varphi(a)\big)_{O^{\mathrm{gr}}} = 0$, и докажем, что $\varphi(d) = 0$. Так как $\varphi\big((L : a)_{O^{\mathrm{gr}}}\big) \subseteq \subseteq \big(\varphi(L) : \varphi(a)\big)_{O^{\mathrm{gr}}}$, то $\varphi\big((L : a)_{O^{\mathrm{gr}}}\big) = 0$, т. е. $d(L : a)_{O^{\mathrm{gr}}} \subseteq MO^{\mathrm{gr}}$, поэтому $ud(L : a) = 0$ для некоторого $u \in \mathcal{F}$. Тогда $ud = 0$ (ввиду gr-плотности правого идеала L), откуда следует, что $\varphi(d) = \varphi(ud) = 0$.

Докажем утверждение 3). Достаточно доказать, что $\psi(Q^{\mathrm{gr}})$ — градуированное правое кольцо частных кольца $\psi(O^{\mathrm{gr}})$. Так как ψ — однородный эпиморфизм, то надо доказать, что для любого такого $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, что $\psi(q) \neq 0$, градуированный правый идеал $\big(\psi(O^{\mathrm{gr}}) : \psi(q)\big)_{\psi(O^{\mathrm{gr}})}$ является gr-плотным и $\psi(q)\big(\psi(O^{\mathrm{gr}}) : \psi(q)\big)_{\psi(O^{\mathrm{gr}})} \neq 0$. Первое следует из того, что $\big(\psi(O^{\mathrm{gr}}) : \psi(q)\big)_{\psi(O^{\mathrm{gr}})} \supseteq \psi\big((O^{\mathrm{gr}} : q)_{O^{\mathrm{gr}}}\big)$ — gr-плотный правый идеал кольца $\psi(O^{\mathrm{gr}})$. Второе следует из того, что $\psi(q)\psi(L) \neq 0$, где $L := (O^{\mathrm{gr}} : q)_{O^{\mathrm{gr}}}$ (иначе $uqL = 0$ для некоторого $u \in \mathcal{F}$, $uq = 0$ и $\psi(q) = \psi(uq) = 0$ — противоречие).

Докажем утверждение 4). Возьмём элементы $a, b \in h(O^{\mathrm{gr}})$, такие что $aO^{\mathrm{gr}}\mathcal{F}b = 0\mathcal{F}$, т. е. $\varphi(aO^{\mathrm{gr}}b) = 0$. Тогда $uaO^{\mathrm{gr}}b = 0$ для некоторого $u \in \mathcal{F}$. По лемме 4.1.6 $E[ua]E[b] = 0$, откуда следует, что $ua \in M$ или $b \in M$. Соответственно $\varphi(ua) = \varphi(a) = 0$ или $\varphi(b) = 0$, т. е. $a\mathcal{F} = 0$ или $b\mathcal{F} = 0$. Значит, кольцо $\psi(O^{\mathrm{gr}})$ (изоморфное кольцу $\varphi(O^{\mathrm{gr}})$ по пункту 4) предложения 4.5.3) gr-первично. Теперь из включений $\psi(O^{\mathrm{gr}}) \subseteq \psi(H) \subseteq \psi(Q^{\mathrm{gr}})$ с учётом пункта 3) следует gr-первичность колец $\psi(H)$ и $\psi(Q^{\mathrm{gr}})$. □

4.6. Кольца с однородным дифференцированием

Дифференцированием на кольце A называется всякое отображение $d\colon A \to A$, которое удовлетворяет двум тождествам:

1) $d(x + y) = d(x) + d(y)$ (аддитивность);
2) $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ (тождество Лейбница).

Следующая теорема И. Херстейна о первичных кольцах с дифференцированием обобщена К. И. Бейдаром и А. В. Михалёвым на полупервичные кольца с помощью метода ортогональной полноты.

Теорема 4.6.1 [24, теорема 3.2.19; 30]. *Пусть A — первичное кольцо, $d\colon A \to A$ — такое дифференцирование на A, что $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ для всех $x, y \in A$. Тогда или кольцо A коммутативно, или $d^2 = 0$ (т. е. есть $d\big(d(x)\big) = 0$ для всех $x \in A$).*

Предложение 4.6.2 [24, предложение 2.5.1; 39]. *Любое дифференцирование кольца однозначно продолжается до дифференцирования его полного правого кольца частных.*

В дальнейшем это единственное продолжение будем обозначать той же буквой.

Теорема 4.6.3 [24, следствие 3.2.20]. *Пусть A — полупервичное кольцо, $d\colon A \to A$ — дифференцирование на A, удовлетворяющее тождеству $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ для всех $x, y \in A$. Тогда ортогональное пополнение кольца A раскладывается в прямую сумму двух колец, одно из которых коммутативно, а на втором d индуцирует дифференцирование с нулевым квадратом.*

Мы докажем аналоги обеих теорем для градуированных колец. Полученные теоремы могут быть применены для gr-первичных (gr-полупервичных) колец, не являющихся первичными (полупервичными), при условии, что заданные на них дифференцирования согласованы с градуировкой в смысле следующего определения.

Определение. Пусть R — градуированное кольцо. Дифференцирование $d\colon R \to R$ назовём *однородным*, если $d(r) \in h(R)$ для всех $r \in h(R)$.

Лемма 4.6.4. *Пусть R — градуированное кольцо с однородным дифференцированием d. Обозначим*

$$G_d := \{g \in G \mid d(R_g) \neq 0\}.$$

Верны следующие утверждения.

1. *Существует и единственна функция $\delta = \delta_{d,R}\colon G_d \to G$, такая что $d(R_g) \subseteq R_{\delta(g)}$ для всех $g \in G_d$.*
2. *Каждое из равенств*
$$\delta(gh) = \delta(g)h, \quad \delta(gh) = g\delta(h), \quad \delta(g)h = g\delta(h)$$
выполняется, как только определены обе части равенства.
3. *Пусть $h \in G_d$. Функция*
$$\tilde{\delta}(g) = \begin{cases} \delta(g), & \text{если } g \in G_d, \\ g\delta(h)h^{-1}, & \text{если } g \notin G_d, \end{cases}$$
продолжающая δ, не зависит от $h \in G_d$. Кроме того, $\tilde{\delta}(g) = \delta(gh)h^{-1}$ для всех таких $g, h \in G$, что $gh \in G_d$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Если $g \in G_d$, то $d(x) \neq 0$ для некоторого $x \in R_g$, причём если $x_1, x_2 \in R_g$, $d(x_1) \neq 0 \neq d(x_2)$, то $\deg d(x_1) = \deg d(x_2)$, поскольку $d(x_1) + d(x_2) = d(x_1 + x_2) \in h(R)$ ($x_1 + x_2 \in h(R)$ и d однородно). Поэтому корректно (не зависит от x) определение $\delta(g) := \deg d(x)$, где $x \in R_g$ и $d(x) \neq 0$.

Утверждение 2 следует из тождества Лейбница, согласно которому для всех $x, y \in h(R)$ три элемента $d(xy)$, $d(x)y$, $xd(y)$ однородны и отличные от нуля из них имеют одинаковую степень.

Докажем утверждение 3. При всех $h_1, h_2 \in G_d$ равенство $g\delta(h_1)h_1^{-1} = g\delta(h_2)h_2^{-1}$ равносильно равенству $\delta(h_1) = \delta(h_2)h_2^{-1}h_1$, справедливому по пункту 2. Второе утверждение также следует из пункта 2. $\square$

Таким образом, с каждым однородным дифференцированием d на G-градуированном кольце R связывается функция $\delta_{d,R}$, частично определённая на группе G, переводящая степени однородных элементов в степени их производных.

Пример 4.6.5. Пусть k — поле, $R = k[x]$ — кольцо многочленов со стандартной $\mathbb{Z}$-градуировкой и обычным дифференцированием $d = d/dx$. Тогда функция δ определена на $\mathbb{N}$ и $\delta(n) = n - 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Докажем градуированный аналог теоремы Херстейна.

Теорема 4.6.6. *Пусть R — gr-первичное кольцо с однородным дифференцированием d, удовлетворяющим условию $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ для всех $x, y \in R$. Тогда или кольцо R коммутативно, или $d^2 = 0$.*

Доказательство. Обозначим через R^d подкольцо в R, порождённое элементами $d(r)$, $r \in R$. Предположим, что $d^2 \neq 0$. Тогда $d^2(a) \neq 0$ для некоторого $a \in h(R)$. Обозначим $b = d(a)$.

Сначала докажем, что $R^d \subseteq Z(R)$. Для этого достаточно показать, что $[d(x), y] = 0$ для всех $x, y \in R$. Так как

$$td(b) = d(tb) - d(t)d(a) \in R^d,$$

то $[d(x), td(b)] = 0$ для всех $t \in R$. Поэтому для любого $z \in R$

$$[d(x), y]zd(b) = [d(x), yzd(b)] = 0,$$

т. е. $[d(x), y]Rd(b) = 0$. Так как кольцо R gr-первично и $0 \neq d(b) \in h(R)$, то все однородные компоненты элемента $[d(x), y]$ равны 0, значит, $[d(x), y] = 0$ и $R^d \subseteq Z(R)$.

Теперь с помощью того же приёма докажем, что кольцо R коммутативно. Для любых $x, y, z \in R$ справедливы следующие импликации:

$$zd(b) \in R_d \subseteq Z(R) \Longrightarrow xzd(b) = zd(b)x \Longrightarrow [x, y]zd(b) = [x, yzd(b)] = 0,$$

следовательно, $[x, y]Rd(b) = 0$ и $[x, y] = 0$. $\square$

По предложению 4.6.2 всякое дифференцирование d кольца R однозначно продолжается до дифференцирования его полного правого кольца частных $Q(R)$. Покажем, что если кольцо R градуированное, а дифференцирование d однородное, то это продолжение индуцирует однородное дифференцирование на кольце $Q^{\mathrm{gr}}(R)$.

Теорема 4.6.7. *Пусть R — градуированное кольцо с однородным дифференцированием d. Тогда продолжение d на $Q(R)$ индуцирует однородное дифференцирование на $Q^{\mathrm{gr}}(R)$. При этом если $d(R_g) = 0$, то либо $d(Q_g^{\mathrm{gr}}) = 0$, либо $\deg d(Q_g^{\mathrm{gr}}) = \tilde{\delta}(g)$ в обозначениях леммы 4.6.4.*

Доказательство. Для градуированного правого идеала K кольца R положим

$$K_d := \sum_{x \in h(K)} x\bigl(K : d(x)\bigr).$$

Ясно, что K_d — градуированный правый идеал в R, $K_d \subseteq K$, а из тождества Лейбница следует, что $d(K_d) \subseteq K$. Покажем, что из плотности K следует плотность K_d. Пусть $x, y \in h(R)$, $x \neq 0$. Если K плотный, то $xr \neq 0$ и $yr \in K$ для некоторого $r \in h(R)$. Градуированный правый идеал $(K : yr)_R$ плотный вместе с K, так что $xrr' \neq 0$ для некоторого $r' \in h\bigl((K : yr)_R\bigr)$, т. е. такого r', что $yrr' \in K$.

Пусть $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, K — такой gr-плотный правый идеал в R, что $qK \subseteq R$, f — такой гомоморфизм из $\mathrm{Hom}_R(K, R)$, что $d(q) = [f]_\theta$. Покажем, что $d(q) \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, т. е. что $f \in h\bigl(\mathrm{HOM}_R(K, R)\bigr)$. По тождеству Лейбница

$$f(x) = d(q)x = d(qx) - qd(x) \quad \text{для всех} \quad x \in K_d. \tag{6}$$

Пусть $d(q) \neq 0$. Тогда $f(x) \neq 0$ для некоторого $x \in h(K_d)$. Пусть $\deg q = g$, $\deg x = h$. Хотя бы одно из двух слагаемых в правой части (6), $d(qx)$ или $qd(x)$, отлично от нуля, причём если отличны от нуля оба, то по лемме 4.6.4 имеют одинаковую степень $\delta(gh) = g\delta(h)$. Поэтому в любом случае $f(x) \in h(R) \setminus 0$. Если $\delta(g)$ определено, то $\deg f(x) = \delta(g)h$ и $\deg f = \delta(g)$.

Рассмотрим случай, когда $\delta(g)$ не определено. Если и $\delta(h)$ не определено, то $d(R_g) = 0 = d(R_h)$, а тогда $d(R_{gh}) \subseteq d(R_g R_h) = 0$ и $\delta(gh)$ не определено. Отсюда следует, что $d(qx) = 0$, $qd(x) = 0$ и $f(x) = 0$. Получили противоречие.

Значит, $\delta(h)$ определено, поэтому $\deg f(x) = g\delta(h)$. Но по лемме 4.6.4 элемент $\tilde{\delta}(g) = g\delta(h)h^{-1}$ зависит только от g, но не от $h \in G_d$. Значит, $\deg f = \tilde{\delta}(g)$. □

Пример 4.6.8. Для кольца R из примера 4.6.5 $Q^{\mathrm{gr}} = k[x, x^{-1}]$, функция $\delta_{d,R}$ продолжается до функции $\tilde{\delta}_{d,Q^{\mathrm{gr}}}$, определённой на $\mathbb{Z} \setminus 0$ той же формулой: $\tilde{\delta}(n) = n - 1$ при $n \neq 0$.

Теперь мы готовы обобщить теорему 4.6.6 на gr-полупервичные кольца аналогично неградуированному случаю [8, теорема 8.13; 24, следствие 3.2.20].

Теорема 4.6.9 [8, теорема 5.24]. *Пусть A — ортогонально полная алгебраическая система сигнатуры Ω над ортогонально полным булевым кольцом B, $\neg\Phi$, Ψ_γ, $\gamma \in \Gamma$, — хорновские формулы сигнатуры Ω, Φ — наследственная формула в A. Предположим, что для каждого ультрафильтра $\mathcal{F}$ булева кольца B найдётся такой индекс $\gamma \in \Gamma$, что*

$$A\mathcal{F} \vDash (\Phi \Rightarrow \Psi_\gamma).$$

Тогда существует такое конечное множество попарно ортогональных идемпотентов $u_{\gamma_1}, \ldots, u_{\gamma_k} \in B$, что $u_{\gamma_1} + \ldots + u_{\gamma_k} = 1$ и

$$u_{\gamma_i} A \vDash (\Phi \Rightarrow \Psi_{\gamma_i}), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Замечание 4.6.10. Если R — gr-полупервичное кольцо с однородным дифференированием d и кольцо Q^{gr} ортогонально полно, то операция $d\colon Q^{\mathrm{gr}} \to Q^{\mathrm{gr}}$ B-допустима в смысле [8], $d(O^{\mathrm{gr}}) \subseteq O^{\mathrm{gr}}$, и поэтому $(O^{\mathrm{gr}}; +, 0, \cdot, d)$ — ортогонально полная над B алгебраическая система.

Действительно, для всех $u \in B$ имеем $d(u) = d(u^2) = 2ud(u)$, поэтому

$$0 = (2u-1)d(u) = (2u-1)^2 d(u) = (4u^2 - 4u + 1)d(u) = d(u).$$

Значит, $d(ux) = ud(x)$ для всех $x \in Q^{\mathrm{gr}}$ и $u \in B$, поэтому операция d является B-допустимой. Значит,

$$d\Big(\sum_{\gamma}^{\perp} a_\gamma u_\gamma\Big) = \sum_{\gamma}^{\perp} d(a_\gamma) u_\gamma$$

для любой плотной ортогональной системы $(u_\gamma)_\gamma$ в B и любой системы $(a_\gamma)_\gamma$ в R.

Теорема 4.6.11. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо с однородным дифференцированием d, таким что $d(x)d(y) = d(y)d(x)$ для всех $x, y \in R$. Предположим, что кольцо Q^{gr} ортогонально полно. Тогда существует такой элемент $u \in B$, что кольцо uO^{gr} коммутативно и ограничение d на $(1-u)O^{\mathrm{gr}}$ — дифференцирование с нулевым квадратом.*

Доказательство. Рассмотрим формулы

$$\begin{aligned}
&\Phi = (\forall\, x)(\forall\, y)\ \big(d(x)d(y) = d(y)d(x)\big),\\
&\Psi_1 = (\forall\, x)(\forall\, y)\ (xy = yx),\\
&\Psi_2 = (\forall x)\ (d^2(x) = 0).
\end{aligned}$$

Ясно, что $\neg\Phi$, Ψ_1, Ψ_2 — хорновские формулы сигнатуры $(+, 0, -, \cdot, d)$, формула Φ наследственная в O^{gr}. Из условия следует, что $O^{\mathrm{gr}} \vDash \Phi$. Кроме того, для каждого ультрафильтра $\mathcal{F}$ в B кольцо $O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F}$ gr-первично по пункту 4) теоремы 4.5.5, а тогда из теоремы 4.6.6 следует, что либо $O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F} \vDash \Psi_1$, либо $O^{\mathrm{gr}}\mathcal{F} \vDash \Psi_2$. Теперь по теореме 4.6.9 получаем, что существует такой элемент $u \in B$, что $uO^{\mathrm{gr}} \vDash \Psi_1$, $(1-u)O^{\mathrm{gr}} \vDash \Psi_2$. □

Литература

[1] Авраамова О. Д. Обобщённые теоремы плотности: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 1989.

[2] Балаба И. Н. Кольца частных полупервичных градуированных колец // Тр. междунар. сем. «Универсальная алгебра и приложения». — Волгоград, 2000. — С. 21—28.

[3] Балаба И. Н. Градуированные кольца и модули: Дис.. . . докт. физ.-мат. наук. — М., 2012.

[4] Балаба И. Н., Ефремов В. А. Градуированные кольца частных полупервичных градуированных колец // Чебышёвский сб. — 2010. — Т. 11, № 1 (33). — С. 20—30.

[5] Балаба И. Н., Канунников А. Л., Михалёв А. В. Градуированные кольца частных ассоциативных колец. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 2. — С. 3—74.

[6] Бейдар К. И. Кольца с обобщёнными тождествами. I // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1977. — № 2. — С. 19—36.

[7] Бейдар К. И. Кольца частных полупервичных колец // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1978. — № 5. — С. 36—43.

[8] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // УМН. — 1985. — Т. 40, № 6. — С. 79—115.

[9] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Функтор ортогонального пополнения // Абелевы группы и модули. — 1986. — Вып. 4. — С. 3—19.

[10] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[11] Залесский А. Е., Михалёв А. В. Групповые кольца // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. — 1973. — Т. 2. — С. 5—118.

[12] Захаров В. К. Ортопополнение модулей, колец и булевых алгебр // Упорядоченные множества и решётки. — 1976. — № 4. — С. 54—65.

[13] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 3. — С. 46—50.

[14] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди. II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2013. — № 3. — С. 47—51.

[15] Канунников А. Л. Об одном применении метода ортогональной полноты в теории градуированных колец // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, № 2. — С. 145—154.

[16] Канунников А. Л. Ортогональное градуированное пополнение градуированно полупервичных колец // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 117—150.

[17] Канунников А. Л. Порядки в градуированных матричных кольцах // Вестн. МГАДА. — 2013. — № 1 (20). — С. 52—56.

[18] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Факториал Пресс, 2005.

[19] Михалёв А. В. Ортогонально полные многосортные системы // ДАН СССР. — 1986. — Т. 289, № 6. — С. 1304—1308.

[20] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.

[21] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. I. — М.: Мир, 1977.

[22] Харченко В. К. Некоммутативная теория Галуа. — Новосибирск: Научная книга, 1996.

[23] Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972.

[24] Beidar K. I., Martindale W. S., Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. — New York: Marcel Dekker, 1995.

[25] Chen-Lian Chuang. Boolean valued models and semiprime rings // Rings and Near-rings. Proc. Int. Conf. Algebra in Memory of Kostia Beidar. — Berlin: Walter de Gruyter, 2005. — P. 23—53.

[26] Goldie A. W. The structure of prime rings under ascending chain conditions // Proc. London Math. Soc. — 1958. — Vol. 8. — P. 589—608.

[27] Goldie A. W. Semi-prime rings with maximal conditions // Proc. London Math. Soc. — 1960. — Vol. 10. — P. 201—220.

[28] Goldie A. W. Non-commutative principal ideal rings // Arch. Math. — 1962. — Vol. 13. — P. 213—221.

[29] Goodearl K., Stafford T. The graded version of Goldie's theorem // Algebra and Its Applications. Int. Conf. Algebra and Its Aplications, March 25—28, 1999, Ohio Univ., Athens. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000. — (Contemp. Math.; Vol. 259). — P. 237—240.

[30] Herstein I. N. A note on derivations // Canad. Math. Bull. — 1978. — Vol. 21. — P. 369—370.

[31] Jatengaonkar A. V. Left Principal Ideal Rings. — (Lect. Notes Math.; Vol. 123). — Berlin: Springer, 1970.

[32] Jespers E., Wauters P. A general notion of noncommutative Krull rings // J. Algebra. — 1988. — Vol. 112. — P. 388—415.

[33] Liu S., Beattie M., Fang H., Graded division rings and the Jacobson density theorem // J. Boijing Norm. Univ. (Nat. Sci.). — 1991. — Vol. 27, no. 2. — P. 129—134.

[34] Năstăsescu C. Some construction over graded rings. Application // J. Algebra. — 1989. — Vol. 120. — P. 119—138.

[35] Năstăsescu C., Nauwelaerts E., van Oystaeyen F. Arithmetically graded rings revisited // Commun. Algebra. — 1986. — Vol. 14, no. 10. — P. 1191—2017.

[36] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded and Filtered Rings and Modules. — (Lect. Notes Math.; Vol. 758). — Berlin: Springer, 1979.

[37] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1982.

[38] Năstăsescu C., van Oystayen F. Methods of Graded Rings. — Amsterdam: North-Holland, 2004.

[39] Tewari K. Complexes over a complete algebra of quotients // Canad. J. Math. — 1967. — Vol. 19. — P. 40—57.

[40] Utumi Y. On quotient rings // Osaka J. Math. — 1956. — Vol. 8. — P. 1—18.

[41] Yahya H. A note on graded regular rings // Commun. Algebra. — 1997. — Vol. 25, no. 1. — P. 223—228.