О глубине функций k-значной логики над произвольными базисами

А. В. КОЧЕРГИН
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша
Российской академии наук
e-mail: alexeykoch@mail.ru

УДК 519.7

Ключевые слова: k-значная логика, глубина схем, глубина формул, функция Шеннона глубины, конечный базис, бесконечный базис.

Аннотация

Изучается поведение функции Шеннона глубины функций k-значной логики при реализации схемами из функциональных элементов (или формулами) над произвольным полным базисом. При всех k, $k \geqslant 3$, для произвольного базиса функций k-значной логики установлено существование асимптотики функции Шеннона глубины: для конечных базисов асимптотика является линейной, для бесконечных — константной или логарифмической. Тем самым получена полная картина асимптотического поведения функции Шеннона глубины при всех k, $k \geqslant 2$.

Abstract

A. V. Kochergin, On the depth of k-valued logic functions over arbitrary bases, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 6, pp. 155—158.

The behavior of the Shannon function of the depth of k-valued logic functions realized by circuits over an arbitrary complete basis is examined. For all k, $k \geqslant 3$, for an arbitrary basis of k-valued logic functions, the existence of the asymptotic behavior of the Shannon function of the depth is established. The asymptotic behavior is linear for finite bases and it is constant or logarithmic for infinite bases. Thus, the complete picture of asymptotic behavior of the Shannon function of the depth is obtained for all k, $k \geqslant 2$.

Рассматривается реализация функций k-значной логики при $k \geqslant 2$ схемами из функциональных элементов над произвольным базисом. Под *базисом* понимается произвольное множество функций k-значной логики, такое что суперпозициями функций этого множества можно реализовать любую функцию k-значной логики. Базис называется *бесконечным*, если для любого натурального числа m существует функция из этого базиса, существенно зависящая более чем от m переменных. В противном случае базис называется *конечным*. Вообще говоря, при этом формально число функций в конечном базисе может быть бесконечным. Однако, по существу, конечный базис с точностью до введения и изъятия несущественных переменных содержит лишь конечное число

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 6, с. 155—158.

различных функций. Будем считать, что конечный базис задаётся как конечное множество функций k-значной логики.

Исследуется одна из наиболее важных мер сложности схем — её глубина. Под *глубиной схемы* понимается максимальное число элементов в ориентированных цепях, ведущих от какого-либо входа схемы к её выходу. Глубина схемы над базисом B обозначается через $D_B(S)$. *Глубиной функции* k-значной логики f над базисом B называется минимальная глубина схем, реализующих функцию f над базисом B. Отметим, что поскольку формулу можно трактовать как схему из функциональных элементов без ветвления выходов элементов, то глубина функции при реализации формулами совпадает с глубиной функции при реализации схемами из функциональных элементов.

Для произвольного базиса B исследуется поведение *функции Шеннона глубины* $D_B(n)$, характеризующей максимальную глубину функций от n переменных и определяемой равенством

$$D_B(n) = \max D_B(f),$$

где максимум берётся по всем функциям k-значной логики f, зависящим от n переменных. Подробнее эти и другие определения рассмотрены, например, в [9—11].

В 1970 г. О. Б. Лупановым [9] было установлено, что в случае двузначной логики ($k = 2$) для любого конечного базиса B выполняется соотношение

$$D_B(n) \sim \beta n,$$

где $\beta = (\log_2 m)^{-1}$, m — максимальное число существенных переменных у функций из базиса B.

В случае классического базиса B_0 двузначной логики, состоящего из конъюнкции двух переменных, дизъюнкции двух переменных и отрицания, эта оценка для функции Шеннона глубины $D_{B_0}(n)$ уточнялась в работах различных авторов. Наиболее точные оценки были получены в [1, 7]. В [7] в 1983 г. была установлена справедливость следующего равенства:

$$D_{B_0}(n) = \lceil n - \log_2 \log_2 n + b(n) \rceil,$$

где $b(n) = o(1)$ при $n \to \infty$.

В 1996 г. С. А. Ложкиным [8] было показано, что для произвольного конечного базиса B функций двузначной логики справедливо равенство

$$D_B(n) = \beta(n - \log_2 \log_2 n) + c(n), \quad \text{где} \quad c(n) = O(1).$$

В 2007 г. О. М. Касим-Заде [2] доказал, что для любого бесконечного базиса B функций двузначной логики порядок роста функции Шеннона глубины $D_B(n)$ при $n \to \infty$ равен либо 1, либо $\log_2 n$. Позднее (2007 г., 2012 г.) О. М. Касим-Заде [3, 4] этот результат усилил, установив, что для любого бесконечного базиса B функций двузначной логики либо существует константа a, $1 \leqslant a \leqslant 6$, такая что $D_B(n) = a$ при всех достаточно больших n, либо существует целочисленная константа $b \geqslant 2$, такая что $\lceil \log_b n \rceil \leqslant D_B(n) \leqslant \lceil \log_b n \rceil + 5$ при всех n.

Автором в случае $k \geqslant 3$ получены следующие результаты.

Теорема 1 [5]. *При любом натуральном k, $k \geqslant 3$, для произвольного конечного базиса B функций k-значной логики существует такая положительная константа α_B, что при $n \to \infty$ выполняется соотношение*

$$D_B(n) \sim \alpha_B n.$$

Теорема 2 [5]. *При любом натуральном k, $k \geqslant 3$, для произвольного конечного базиса B константа α_B из соотношения $D_B(n) \sim \alpha_B n$ имеет вид $\alpha_B = (\log_k \tau_B)^{-1}$, где τ_B является алгебраическим числом.*

Теорема 3 [5]. *При любом натуральном k, $k \geqslant 3$, существует алгоритм нахождения по произвольному конечному базису B функций k-значной логики многочлена с целыми коэффициентами, максимальным действительным корнем которого является число τ_B.*

Теорема 4 [6]. *При любом фиксированном k, $k \geqslant 3$, для любого бесконечного базиса B функций k-значной логики либо существует константа $\gamma_B \geqslant 1$, такая что $D_B(n) = \gamma_B$ при всех достаточно больших n, либо существует константа $\beta_B > 0$, такая что при $n \to \infty$ имеет место соотношение $D_B(n) \sim \beta_B \log_2 n$.*

Таким образом, теоремы 1 и 4 вместе с результатами О. Б. Лупанова и О. М. Касим-Заде дают полную качественную картину асимптотического поведения функции Шеннона глубины над произвольным базисом функций k-значной логики при всех k, $k \geqslant 2$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Литература

[1] Гашков С. Б. О глубине булевых функций // Пробл. кибернет. — 1978. — Вып. 34. — С. 265—268.

[2] Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным базисом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2007. — № 1. — С. 18—21.

[3] Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций над произвольным бесконечным базисом // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. — 2007. — Т. 14, № 1. — С. 45—69.

[4] Касим-Заде О. М. О глубине булевых функций при реализации схемами над произвольным бесконечным базисом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2012. — № 6. — С. 55—57.

[5] Кочергин А. В. О глубине функций k-значной логики в конечных базисах // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2013. — № 1. — С. 56—59.

[6] Кочергин А. В. О глубине функций многозначной логики при реализации схемами над произвольным бесконечным базисом // Материалы IX молодёжной научной школы по дискретной математике и её приложениям (Москва, 16—21 сентября 2013 г.). — М.: Изд-во ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013, — С. 61—66.

[7] Ложкин С. А. О глубине функций алгебры логики в некоторых базисах // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sec. Comput. — 1983. — Vol. 4. — P. 113—125.

[8] Ложкин С. А. О глубине функций алгебры логики в произвольном полном базисе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1996. — № 2. — С. 80—82.

[9] Лупанов О. Б. О схемах из функциональных элементов с задержками // Пробл. кибернет. — 1970. — Вып. 23. — С. 43—81.

[10] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.

[11] Сэвидж Дж. Э. Сложность вычислений. — М.: Факториал, 1998.