

О независимых семействах нормальных подгрупп свободных групп

О. В. КУЛИКОВА

Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: olga.kulikova@mail.ru

УДК 512.543.1

Ключевые слова: копредставления, подкопредставления, асферичность, независимые семейства нормальных подгрупп, пересечение нормальных подгрупп, взаимный коммутант нормальных подгрупп, сферические картинки, единичные последовательности.

Аннотация

Рассмотрим копредставление $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \bigcup_{i=1}^n \mathbf{r}_i \rangle$. Пусть $\mathbf{R}_i$ — нормальное замыкание множества $\mathbf{r}_i$ в свободной группе $\mathbf{F}$ с базисом $\mathbf{x}$, $\mathcal{P}_i = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r}_i \rangle$, $\mathbf{N}_i = \prod_{j \neq i} \mathbf{R}_j$. В данной работе с использованием геометрической техники картинок определяются порождающие для $\frac{\mathbf{R}_i \cap \mathbf{N}_i}{[\mathbf{R}_i, \mathbf{N}_i]}$, $i = 1, \dots, n$, по множеству порождающих над $\{\mathcal{P}_i \mid i = 1, \dots, n\}$ для $\pi_2(\mathcal{P})$. В качестве следствия получено достаточное условие независимости семейства множеств $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n\}$.

Abstract

O. V. Kulikova, On independent families of normal subgroups in free groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 6, pp. 189–206.

Consider a presentation $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \bigcup_{i=1}^n \mathbf{r}_i \rangle$. Let $\mathbf{R}_i$ be the normal closure of the set $\mathbf{r}_i$ in the free group $\mathbf{F}$ with basis $\mathbf{x}$, $\mathcal{P}_i = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r}_i \rangle$, $\mathbf{N}_i = \prod_{j \neq i} \mathbf{R}_j$. In this paper, using geometric techniques of pictures, generators for $\frac{\mathbf{R}_i \cap \mathbf{N}_i}{[\mathbf{R}_i, \mathbf{N}_i]}$, $i = 1, \dots, n$, are obtained from a set of generators over $\{\mathcal{P}_i \mid i = 1, \dots, n\}$ for $\pi_2(\mathcal{P})$. As a corollary, we get a sufficient condition for the family $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n\}$ to be independent.

Введение

Рассмотрим копредставление $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$, где $\mathbf{r} = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{r}_i$. Для каждого $i = 1, \dots, n$ пусть $\mathbf{R}_i$ — нормальное замыкание множества $\mathbf{r}_i$ в свободной группе $\mathbf{F}$ с базисом $\mathbf{x}$, $\mathcal{P}_i = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r}_i \rangle$, $\mathbf{N}_i = \prod_{j \neq i} \mathbf{R}_j$. Положим $\mathbf{R} = \prod_{i=1}^n \mathbf{R}_i$, $\mathbf{G} = \mathbf{F}/\mathbf{R}$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 6, с. 189–206.
© 2015 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

и $\mathbf{G}_i = \mathbf{F}/\mathbf{R}_i$. В данной работе изучаются фактор-группы $\frac{\mathbf{R}_i \cap \mathbf{N}_i}{[\mathbf{R}_i, \mathbf{N}_i]}$, $i = 1, \dots, n$, которые являются естественными мерами зависимости между $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$.

Геометрическая техника сферических картинок [3, 13] используется для доказательства основной теоремы данной работы, где определяются порождающие для $\frac{\mathbf{R}_i \cap \mathbf{N}_i}{[\mathbf{R}_i, \mathbf{N}_i]}$, $i = 1, \dots, n$, при условии, что известно множество сферических картинок над $\mathcal{P}$, которое порождает $\pi_2(\mathcal{P})$ над $\{\mathcal{P}_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Возможность применения этой техники для определения порождающих отмечалась в [2] при обсуждении некоторых примеров.

Семейство $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n\}$ называется *независимым*, если $\mathbf{R}_i \cap \mathbf{N}_i = [\mathbf{R}_i, \mathbf{N}_i]$ для $i = 1, \dots, n$. Независимость гарантирует, что пересечения подгрупп настолько малы, а взаимные коммутанты подгрупп настолько велики, насколько это возможно. Понятие независимости и близкие к нему изучались в [1, 5–8, 11]. Например, в [5] показано, что семейство $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n\}$ является независимым тогда и только тогда, когда включение $\mathbf{R}_i \rightarrow \mathbf{R}$ индуцирует изоморфизм $\bigoplus_{i=1}^n (\mathbb{Z}\mathbf{G} \otimes_{\mathbb{Z}\mathbf{G}_i} H_1 \mathbf{R}_i) \rightarrow H_1 \mathbf{R}$ модулей соотношений. Известно также [5, 7, 8], что если семейство $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n\}$ является независимым, то $\pi_2(\mathcal{P})$ порождается над $\{\mathcal{P}_i \mid i \in I\}$ пустым множеством. В [7] доказано обратное утверждение для $n = 2$. В данной работе получено обратное утверждение для произвольного n как следствие из основной теоремы.

В первой части данной работы кратко перечислены факты из [3, 13], которые потребуются для формулировки и доказательства основных результатов данной статьи. Сами основные результаты сформулированы во второй части и доказаны в третьей части. Читатель, знакомый с [3, 13], может опустить первую часть и сразу перейти к следующим.

1. Основные определения

Напомним определения, обозначения и факты из [3, 13], которые потребуются во второй и третьей частях данной статьи.

Пусть $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ — копредставление некоторой группы $\mathbf{G}$, где $\mathbf{x}$ — множество («порождающих»), а $\mathbf{r}$ — множество циклически приведённых слов в алфавите $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$ («определяющих соотношений»). Будем предполагать, что никакое определяющее соотношение из $\mathbf{r}$ не является тривиальным и не сопряжено ни с каким другим определяющим соотношением или обратным к нему (так называемое условие RH).

Через $\mathbf{w}$ обозначим множество всех (не обязательно приведённых) слов в алфавите $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$. Будем говорить, что два слова u и v из $\mathbf{w}$ являются *тождественно равными*, если они представляют один и тот же элемент в свободной полугруппе на $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$. Слова u и v являются *свободно равными*, если одно может быть получено из другого с помощью конечного числа вставок или удалений подслов $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$, где $x \in \mathbf{x}$, $\varepsilon = \pm 1$. Класс эквивалентности слов, свободно равных слову $W \in \mathbf{w}$, будем обозначать через $[W]$. Множество всех таких

классов эквивалентности образует свободную группу $\mathbf{F}$ с базисом $\mathbf{x}$ относительно операции $[W][U] = [WU]$. Через $\mathbf{N}$ обозначим нормальное замыкание в $\mathbf{F}$ множества $\{[R] \mid R \in \mathbf{r}\}$. Таким образом, $\mathbf{G} = \mathbf{F}/\mathbf{N}$.

Для произвольного подмножества $\mathbf{s}$ множества $\mathbf{r}$ через $\mathbf{s}^w$ обозначим множество всех слов вида $WS^\varepsilon W^{-1}$, где $W \in \mathbf{w}$, $S \in \mathbf{s}$, $\varepsilon = \pm 1$.

Последовательности

Рассмотрим конечные последовательности элементов из $\mathbf{r}^w$.

Пусть $\sigma = (c_1, \dots, c_m)$, где $c_i \in \mathbf{r}^w$ ($i = 1, \dots, m$). Последовательность $\sigma^{-1} = (c_m^{-1}, \dots, c_1^{-1})$ назовём *обратной* к σ . Последовательность $W\sigma W^{-1} = (Wc_1W^{-1}, \dots, Wc_mW^{-1})$ назовём *последовательностью, сопряжённой к σ словом $W \in \mathbf{w}$* .

На последовательностях вводятся следующие операции. Пусть $\sigma = (c_1, \dots, c_m)$, где $c_i = W_i R_i^{\varepsilon_i} W_i^{-1}$, $W_i \in \mathbf{w}$, $R_i \in \mathbf{r}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \dots, m$.

(SUB) *Подстановка*. Замена каждого W_i на слово, свободно равное ему.

(DEL) *Удаление*. Удаление двух последовательных членов последовательности, если один из этих членов тождественно равен обратному к другому.

(INS) *Вставка*. Операция, обратная к удалению.

(EX) *Обмен*. Замена двух последовательных членов c_i , c_{i+1} либо на c_{i+1} , $c_i^{-1}c_i c_{i+1}$, либо на $c_i c_{i+1} c_i^{-1}$, c_i .

Две последовательности σ , σ' будем называть *эквивалентными (по Пайфферу)* (и писать $\sigma \sim \sigma'$), если одна из них может быть получена из другой с помощью конечного числа применений операций (SUB), (DEL), (INS), (EX). Класс эквивалентности, содержащий σ , будет обозначаться через $\langle \sigma \rangle$.

На множестве Σ всех классов эквивалентности вводится бинарная операция $+$ по правилу

$$\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle = \langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle.$$

(Здесь запись $\sigma_1 \sigma_2$ означает объединение двух последовательностей σ_1 , σ_2 в одну.) Относительно этой операции Σ является группой. Единицей (нулевым элементом) этой группы является класс эквивалентности пустой последовательности, а обратным элементом $-\langle \sigma \rangle$ к $\langle \sigma \rangle$ является $\langle \sigma^{-1} \rangle$.

Через $\Pi\sigma$ обозначим произведение $c_1 c_2 \dots c_m$. Будем говорить, что σ является *единичной последовательностью*, если $\Pi\sigma$ свободно равно 1. Через π_2 обозначим (абелеву) подгруппу в Σ , состоящую из всех элементов $\langle \sigma \rangle$, таких что σ — это единичная последовательность. (Иногда, когда надо будет обратить особое внимание на копредставление $\mathcal{P}$, будем писать $\pi_2(\mathcal{P})$).

Свободная группа $\mathbf{F}$ действует на Σ по правилу $[W] \cdot \langle \sigma \rangle = \langle W\sigma W^{-1} \rangle$, где $[W] \in \mathbf{F}$, $\langle \sigma \rangle \in \Sigma$. Отображение $\partial: \Sigma \rightarrow \mathbf{F}$, где $\partial: \langle \sigma \rangle \mapsto [\Pi\sigma]$, является гомоморфизмом групп, причём $\text{Im } \partial = \mathbf{N}$, $\text{Ker } \partial = \pi_2$. Тройка $(\Sigma, \mathbf{F}, \partial)$ является примером (свободного) скрещённого модуля. $\mathbf{N}$ действует тривиально на π_2 . Следовательно, π_2 является левым $\mathbf{G}$ -модулем с $\mathbf{G}$ -действием, заданным по правилу $[W]\mathbf{N} \cdot \langle \sigma \rangle = [W] \cdot \langle \sigma \rangle$, где $[W] \in \mathbf{F}$, $\langle \sigma \rangle \in \pi_2$.

Пусть $R \in \mathbf{r}$. Тогда $R = R_o^{p(R)}$, где R_o не является собственной степенью и $p(R)$ — положительное целое (R_o — *корень* элемента R , а $p(R)$ — *период*). Единичные последовательности

$$\zeta_R = (R, R_o R^{-1} R_o^{-1}) \quad (R \in \mathbf{r})$$

будут называться *тривиальными последовательностями*, а элементы $\langle \zeta_R \rangle$ модуля π_2 будут называться *тривиальными элементами*. Подмодуль в π_2 , порождённый тривиальными элементами, будем обозначать через $\mathbf{T}$.

Копредставление $\mathcal{P}$ назовём *асферическим* (комбинаторно асферическим), если $\pi_2 = 0$ (соответственно $\pi_2 = \mathbf{T}$). Как показано в [4], $\mathcal{P}$ является асферическим тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}$ комбинаторно асферическое и никакой элемент из $\mathbf{r}$ не является собственной степенью.

1.1. Подкопредставления

Пусть $\mathcal{P}_0 = \langle \mathbf{x}_0 \mid \mathbf{r}_0 \rangle$ — подкопредставление копредставления $\mathcal{P}$, $(\Sigma_0, \mathbf{F}_0, \partial_0)$ — ассоциированный скрещённый модуль. Есть естественное отображение скрещённых модулей

$$(\varphi, \psi): (\Sigma_0, \mathbf{F}_0, \partial_0) \rightarrow (\Sigma, \mathbf{F}, \partial),$$

для которого

$$\varphi(\langle \sigma \rangle_0) = \langle \sigma \rangle \quad (\langle \sigma \rangle_0 \in \Sigma_0), \quad \psi([W]_0) = [W] \quad ([W]_0 \in \mathbf{F}_0).$$

Ограничение φ даёт гомоморфизм

$$j: \pi_2(\mathcal{P}_0) \rightarrow \pi_2(\mathcal{P}),$$

причём в общем случае j не является инъективным. На данный момент неизвестно, будет ли j инъективным для любого подкопредставления $\mathcal{P}_0$ асферического копредставления $\mathcal{P}$ (проблема Уайтхеда).

Рассмотрим копредставление $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ и предположим, что $\mathbf{r}$ представляется в виде объединения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \cup \mathbf{r}_2$. Для $\lambda = 1, 2$ пусть $\mathcal{P}_\lambda = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r}_\lambda \rangle$ и $j_\lambda: \pi_2(\mathcal{P}_\lambda) \rightarrow \pi_2(\mathcal{P})$ — гомоморфизм как выше. Отметим, что $\text{Im } j_\lambda$ — подмодуль модуля $\pi_2(\mathcal{P})$.

Пусть $\mathbf{N}_\lambda$, где $\lambda = 1, 2$, — нормальное замыкание множества $\{[R] \mid R \in \mathbf{r}_\lambda\}$ в свободной группе $\mathbf{F}$. Тогда $\mathbf{F}$ действует на $\frac{\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2}{[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]}$ сопряжением:

$$[W] \cdot [U] [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] = [W U W^{-1}] [\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2] \quad ([W] \in \mathbf{F}, [U] \in \mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2).$$

Нетрудно показать, что $\mathbf{N}(= \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_2)$ действует тривиально. Поэтому мы имеем индуцированное действие группы $\mathbf{G} = \mathbf{F}/\mathbf{N}$ на $\frac{\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2}{[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]}$ и можем определить $\mathbf{G}$ -гомоморфизм

$$\eta: \pi_2(\mathcal{P}) \rightarrow \frac{\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2}{[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]}$$

по следующему правилу. Пусть $\langle \sigma \rangle \in \pi_2(\mathcal{P})$ и V — это произведение (взятых в порядке следования) элементов последовательности σ , принадлежащих $\mathbf{r}_1^w$.

Тогда $\eta(\langle\sigma\rangle) = [V][\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$. Нетрудно показать, что гомоморфизм η корректно определён.

Верна следующая теорема, доказанная в [7].

Теорема 1. Пусть $\xi: \text{Im } j_1 \oplus \text{Im } j_2 \rightarrow \pi_2(\mathcal{P})$ индуцируется включениями $\text{Im } j_1, \text{Im } j_2 \rightarrow \pi_2(\mathcal{P})$. Тогда последовательность

$$\text{Im } j_1 \oplus \text{Im } j_2 \xrightarrow{\xi} \pi_2(\mathcal{P}) \xrightarrow{\eta} \frac{\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2}{[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]} \longrightarrow 0$$

является точной. Если же $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ не пересекаются, то ξ является инъективным, и это короткая точная последовательность.

Картинки

Для изучения последовательностей часто используются геометрические объекты, называемые картинками. Картинки были введены в [9, 14]. Этот объект является удобным инструментом при решении различных задач комбинаторной теории групп (см., например, [3, 13] и ссылки, данные в этих работах).

Напомним определение картинок (по [3]).

Картинка $\mathbf{P}$ — это конечный набор взаимно не пересекающихся замкнутых дисков $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ внутри замкнутого диска D^2 вместе с конечным набором взаимно не пересекающихся дуг $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, вложенных в $D^2 - \bigcup_{i=1}^m \text{int } \Delta_i$ (здесь int обозначает «внутренность»). Допуская вольность речи, всюду ниже диски $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ будем называть *вершинами* картинки $\mathbf{P}$. Дуга может быть либо простой замкнутой кривой, не пересекающейся с $\partial D^2 \cup \partial \Delta_1 \cup \dots \cup \partial \Delta_m$, либо простой незамкнутой кривой, начальная и конечная точки которой являются различными точками на $\partial D^2 \cup \partial \Delta_1 \cup \dots \cup \partial \Delta_m$. *Граница* картинки $\mathbf{P}$ — это цикл ∂D^2 , который будем обозначать через $\partial \mathbf{P}$. *Углы* вершины Δ картинки $\mathbf{P}$ — это замыкания связных компонент в $\partial \Delta - \bigcup_j \alpha_j$. *Регионы* картинки $\mathbf{P}$ — это замыкания связных компонент в $D^2 - \left(\bigcup_i \Delta_i \cup \bigcup_j \alpha_j \right)$. *Компоненты* картинки $\mathbf{P}$ — это связные компоненты в $\bigcup_i \Delta_i \cup \bigcup_j \alpha_j$. Картинка $\mathbf{P}$ *связна*, если она состоит максимум из одной компоненты. Картинка $\mathbf{P}$ является *сферической*, если она содержит хотя бы одну вершину и никакая дуга картинки $\mathbf{P}$ не пересекает $\partial \mathbf{P}$. Пусть дано некоторое копредставление $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ и некоторая картинка $\mathbf{P}$. Зафиксируем ориентацию на диске D^2 , определяя тем самым понятие положительного поворота (например, по часовой стрелке). Предположим, что вершины и дуги картинки $\mathbf{P}$ размечены элементами из $\mathcal{P}$ следующим образом.

- (i) Каждая дуга картинки $\mathbf{P}$ снабжена нормальной ориентацией, которая указывается маленькой стрелкой, пересекающей дугу трансверсально, и помечена элементом из $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$.

- (ii) Каждая вершина Δ из $\mathbf{P}$ снабжена знаком $\varepsilon(\Delta) = \pm 1$ и помечена соотношением $R(\Delta) \in \mathbf{r}$.

Для каждого угла c вершины Δ из $\mathbf{P}$ через $W(c)$ обозначим слово в алфавите $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$, полученное при чтении (ориентированных) меток всех дуг, встречающихся при движении вокруг $\partial\Delta$ в положительном направлении, если начать и кончить во внутренней точке угла c (при соглашении, что если мы пересекаем дугу, помеченную, скажем, y , по направлению её нормальной ориентации, то читаем y , иначе читаем y^{-1}). Ориентированная и размеченная картинка $\mathbf{P}$ называется *картинкой над копредставлением $\mathcal{P}$* , если для каждого угла c каждой вершины Δ из $\mathbf{P}$ слово $W(c)$ будет тождественно равняться некоторой циклической перестановке элемента $R(\Delta)^{\varepsilon(\Delta)}$.

Угол c будем называть *базовым углом* вершины Δ из $\mathbf{P}$, если $W(c)$ тождественно равно $R(\Delta)^{\varepsilon(\Delta)}$. При этом слово $W(c)$ называется *меткой* вершины Δ и обозначается через $W(\Delta)$. Вершина Δ имеет ровно p базовых углов, где $p \geq 1$ — период слова $R(\Delta)$.

Для произвольного подмножества $\mathbf{s}$ множества $\mathbf{r}$ *вершинами с $\mathbf{s}$ -метками* будем называть вершины из $\mathbf{P}$, помеченные соотношениями из $\mathbf{s}$ и имеющие произвольный знак.

Картинку $\mathbf{P}$ над копредставлением $\mathcal{P}$ назовём *базированной картинкой над $\mathcal{P}$* , если она оснащена базовыми точками следующим образом.

- Каждая вершина Δ имеет одну *базовую точку*, выбранную внутри какого-нибудь базового угла вершины Δ .
- Картинка $\mathbf{P}$ имеет одну *глобальную базовую точку*, выбранную на $\partial\mathbf{P}$ так, чтобы она не лежала ни на какой дуге из $\mathbf{P}$.

Граничной меткой $W(\mathbf{P})$ базированной картинки $\mathbf{P}$ над $\mathcal{P}$ называется слово, полученное при чтении (ориентированных) меток дуг картинки $\mathbf{P}$, которые встречаются при движении вокруг $\partial\mathbf{P}$ в положительном направлении, если начать и закончить в глобальной базовой точке. Изменение глобальной базовой точки или ориентации диска D^2 не изменит граничную метку картинки $\mathbf{P}$ с точностью до её циклической перестановки и обращения.

Верна следующая версия «леммы ван Кампена» для картинок (её можно получить из теоремы 1.1 и леммы 1.2 главы V в [12] и двойственности).

Лемма 1. Слово U в алфавите $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$ представляет единицу в группе $\mathbf{G}$, заданной копредставлением $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$, тогда и только тогда, когда существует базированная картинка $\mathbf{P}$ над копредставлением $\mathcal{P}$ с граничной меткой, тождественно равной U .

Картинка, являющаяся зеркальным образом картинки $\mathbf{P}$, будет обозначаться $-\mathbf{P}$. Сумма $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ двух картинок $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ определяется очевидным образом (рис. 1).

Трансверсальный путь γ в картинке $\mathbf{P}$ над копредставлением $\mathcal{P}$ — это путь, лежащий в замыкании $D^2 - \bigcup_i \Delta_i$, который пересекает дуги картинки $\mathbf{P}$ конечное число раз (более того, если путь пересекает какую-нибудь дугу, то он

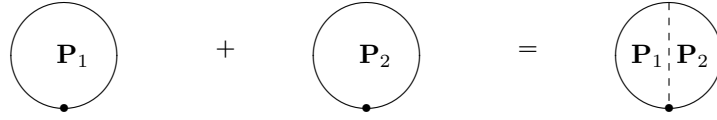


Рис. 1

действительно пересекает её, а не только касается), причём начальная и конечная точки пути γ не принадлежат никакой дуге и если γ пересекает $\partial\mathcal{P}$ или некоторую $\partial\Delta_i$, то только в своих концевых точках. Так как в данной работе мы будем рассматривать только трансверсальные пути, прилагательное «трансверсальный» в дальнейшем будем опускать.

Если мы двигаемся вдоль некоторого пути γ от его начальной к его конечной точке, мы встречаем различные дуги. Читая их (ориентированные) метки, мы получаем слово $W(\gamma)$, называемое *меткой* пути γ .

Пусть простой замкнутый путь γ в картинке $\mathbf{P}$ окружает *подкартинку* $\mathbf{B}$ картинки $\mathbf{P}$. Эта подкартинка состоит из вершин и (частей) дуг, которые отделены от $\partial\mathbf{P}$ путём γ . Если картинка $\mathbf{P}$ сферическая, *дополнение* к $\mathbf{B}$ в картинке $\mathbf{P}$ определяется следующим образом. Удаляем внутренность подкартинки $\mathbf{B}$ и получаем ориентированное кольцо. отождествляя $\partial\mathbf{P}$ с точкой, получаем ориентированный диск с границей γ , содержащий новую картинку над $\mathcal{P}$. Дополнение к $\mathbf{B}$ в $\mathbf{P}$ есть зеркальное отражение этой новой картинки. Дополнение имеет такую же граничную метку, что и $\mathbf{B}$, и те же вершины, что и $\mathbf{P} - \mathbf{B}$, только с противоположными знаками.

Подкартинку $\mathbf{B}$ будем называть *сферической подкартинкой*, если окружающий её путь γ не пересекает дуги. Сферическую подкартинку будем называть *пустой*, если она не содержит вершин и (частей) дуг.

Связь между последовательностями и картинками

Спреем для базированной картинки $\mathbf{P}$ с n вершинами $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ называется последовательность $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ простых путей, удовлетворяющих следующим условиям:

- для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ путь γ_i начинается в глобальной базовой точке и кончается в базовой точке вершины $\Delta_{\vartheta(i)}$, где ϑ — подстановка на $\{1, 2, \dots, n\}$ (зависящая только от $\underline{\gamma}$);
- для любых $1 \leq i < j \leq n$ пути γ_i и γ_j пересекаются только в глобальной базовой точке;
- двигаясь вокруг глобальной базовой точки в положительном направлении, мы встречаем пути в порядке $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Последовательностью $\sigma(\underline{\gamma})$, ассоциированной с $\underline{\gamma}$, называется последовательность

$$(W(\gamma_1)W(\Delta_{\vartheta(1)})W(\gamma_1)^{-1}, \dots, W(\gamma_n)W(\Delta_{\vartheta(n)})W(\gamma_n)^{-1}).$$

Будем говорить, что базированная картинка *представляет* последовательность σ , если существует спрей для этой картинки, ассоциированной последовательностью для которого является σ . Заметим, что если $\mathbf{P}$ представляет σ , то $-\mathbf{P}$ представляет σ^{-1} ; если $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ представляют σ_1 и σ_2 , то $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ представляет $\sigma_1 \sigma_2$. Можно доказать (см., например, [13]), что каждая последовательность может быть представлена некоторой картинкой, а каждая единичная последовательность может быть представлена сферической картинкой; наоборот, если $\mathbf{P}$ — произвольная картинка, $\underline{\gamma}$ — произвольный спрей для $\mathbf{P}$, то

$$\partial(\langle \sigma(\underline{\gamma}) \rangle) = [W(\mathbf{P})],$$

а если $\mathbf{P}$ — произвольная сферическая картинка, $\underline{\gamma}$ — произвольный спрей для $\mathbf{P}$, то $\sigma(\underline{\gamma})$ — единичная последовательность. Если $\underline{\gamma}$ и $\underline{\gamma}'$ — два спрея для одной и той же картинки $\mathbf{P}$, то $\langle \sigma(\underline{\gamma}) \rangle - \langle \sigma(\underline{\gamma}') \rangle \in \mathbf{T}$ [13, теоремы 1.4, 2.4].

Рассмотрим набор $\mathbf{X} = \{\mathbf{P}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ базированных сферических картинок над $\mathcal{P}$. Для каждого λ пусть σ_λ — единичная последовательность, соответствующая некоторому спрею картинки $\mathbf{P}_\lambda$. Пусть $J(\mathbf{X})$ — подмодуль в π_2 , порождённый элементами $\langle \sigma_\lambda \rangle$ ($\lambda \in \Lambda$). Будем говорить, что $\mathbf{X}$ порождает π_2 , если $\pi_2 = J(\mathbf{X}) + \mathbf{T}$.

Из теоремы 1 следует, что если $\pi_2 = \mathbf{T}$, т. е. копредставление комбинаторно асферическое, то $\frac{\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2}{[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]} = 0$, так как $\eta(\mathbf{T}) = 0$. Если $\pi_2 = J(\mathbf{X}) + \mathbf{T}$, то $\frac{\mathbf{N}_1 \cap \mathbf{N}_2}{[\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]}$ нормально порождается образами элементов $\langle \sigma_\lambda \rangle$, соответствующих спреям всех картинок $\mathbf{P}_\lambda \in \mathbf{X}$, причём, как отмечено в [2], образ элемента $\langle \sigma_\lambda \rangle$ при гомоморфизме η есть $[V_\lambda][\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2]$, где V_λ — метка произвольного простого замкнутого пути в базированной сферической картинке $\mathbf{P}_\lambda$, разделяющего вершины с $\mathbf{r}_1$ -метками и вершины с $\mathbf{r}_2$ -метками и ориентированного как $\partial \mathbf{P}_\lambda$.

Операции над картинками

Как правило, ниже мы не будем различать изотопные картинки.

Следующие операции («деформации») могут быть применены к базированной картинке $\mathbf{P}$ над $\mathcal{P}$ [3].

BRIDGE. См. рис. 2.

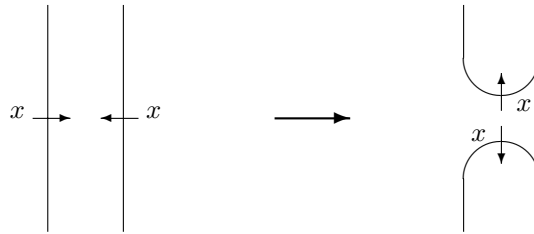


Рис. 2

FLOAT. Удаление замкнутой дуги, которая разделяет D^2 на две части, одна из которых содержит глобальную базовую точку и все остальные дуги и вершины картинки $\mathbf{P}$ (такую замкнутую дугу будем называть *плавающей замкнутой дугой*).

FLOAT⁻¹. Вставка плавающей замкнутой дуги. Операция, обратная к FLOAT.

Зеркальной парой вершин назовём сферическую подкартинку, содержащую в точности две вершины, причём

- эти две вершины помечены одним и тем же определяющим соотношением, но имеют разные знаки;
- базовые точки этих вершин лежат в одном и том же регионе;
- каждая дуга в этой подкартинке имеет начальную точку в одной вершине, а конечную в другой.

FOLD. Удаление зеркальной пары вершин. Если простой замкнутый путь β в D^2 окружает часть картинки $\mathbf{P}$, являющуюся зеркальной парой вершин, то удаляем эту часть картинки $\mathbf{P}$, окружённую β .

FOLD⁻¹. Вставка зеркальной пары вершин. Операция, обратная к FOLD.

Пусть $\mathbf{X} = \{\mathbf{P}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — набор базированных сферических картинок над $\mathcal{P}$. Любую картинку $\mathbf{P}_\lambda$ из $\mathbf{X}$ или её зеркальное отражение $-\mathbf{P}_\lambda$ будем называть *$\mathbf{X}$ -картинкой*.

REPLACE($\mathbf{X}$). Замена подкартинки картинки $\mathbf{P}$ дополнением этой подкартинки в некоторой $\mathbf{X}$ -картинке.

Две базированные сферические картинки называются *$\mathbf{X}$ -эквивалентными*, если одна из них может быть преобразована (с точностью до плоской изотопии) в другую с помощью конечного числа операций BRIDGE, FLOAT^{±1}, FOLD^{±1}, REPLACE($\mathbf{X}$).

Введём ещё две операции над картинками.

DELETE($\mathbf{X}$). Удаление $\mathbf{X}$ -картинки. Если простой замкнутый путь β в D^2 окружает часть картинки $\mathbf{P}$, которая является копией некоторой $\mathbf{X}$ -картинки, то удаляем эту часть картинки $\mathbf{P}$, окружённую β .

DELETE($\mathbf{X}$)⁻¹. Вставка $\mathbf{X}$ -картинки. Операция, обратная к DELETE($\mathbf{X}$).

Отметим, что операция DELETE($\mathbf{X}$)^{±1} является частным случаем операции REPLACE($\mathbf{X}$). С другой стороны, результат применения операции REPLACE($\mathbf{X}$) можно получить путём применения конечного числа операций DELETE($\mathbf{X}$)^{±1}, BRIDGE, FLOAT^{±1}, FOLD^{±1}. Таким образом, в определении $\mathbf{X}$ -эквивалентных картинок REPLACE($\mathbf{X}$) можно заменить на DELETE($\mathbf{X}$)^{±1}.

Диполь в картинке над $\mathcal{P}$ образован дугой, которая соединяет два угла c_1 и c_2 в различных вершинах так, что

- эти две вершины помечены одним и тем же определяющим соотношением, но имеют противоположные знаки;
- c_1 и c_2 лежат в одном и том же регионе картинки;
- $W(c_1) = W(c_2)^{-1}$.

Назовём *полным диполем* над $\mathcal{P}$ связную базированную сферическую картинку над $\mathcal{P}$, содержащую только две вершины, причём каждая дуга этой картинки образует диполь. Отметим, что полный диполь — это почти то же, что и зеркальная пара вершин, с той особенностью, что в полном диполе базовые точки вершин не обязаны лежать в одном и том же регионе. Если же период определяющего соотношения, которым помечены вершины полного диполя, равен единице, то полный диполь — это в точности зеркальная пара вершин. Полный диполь назовём *примитивным*, если определяющее соотношение, которым помечены его вершины, имеет корень Q и период $p > 1$ и существует путь, соединяющий базовые точки вершин полного диполя, с меткой Q^f , где $\text{НОД}(f, p) = 1$. Из [3, лемма 2.1] следует, что по модулю примитивных диполей нет необходимости заботиться о выборе базовых точек вершин.

Следующая теорема (см. [3, теорема 1.6 (2); 13, следствие 1 теоремы 2.6]) будет играть важную роль в доказательстве основной теоремы данной статьи.

Теорема 2. Пусть $\mathbf{X}_0$ — набор базированных сферических картинок. Тогда $\mathbf{X}_0$ порождает $\pi_2(\mathcal{P})$ тогда и только тогда, когда каждая сферическая картинка над копредставлением $\mathcal{P}$ $\mathbf{X}$ -эквивалентна пустой картинке, где $\mathbf{X}$ есть объединение $\mathbf{X}_0$ и набора примитивных диполей для всех определяющих соотношений из $\mathcal{P}$, являющихся собственными степенями.

Из теоремы 2 (см. [13, следствие 2 теоремы 2.6]) следует, что копредставление $\mathcal{P}$ комбинаторно асферическое (т. е. $\pi_2 = \mathbf{T}$) тогда и только тогда, когда каждая сферическая картинка над копредставлением $\mathcal{P}$ $\mathbf{X}$ -эквивалентна пустой картинке, где $\mathbf{X}$ — набор примитивных диполей для всех определяющих соотношений из $\mathcal{P}$, являющихся собственными степенями.

Независимые множества

Пусть $\{\mathcal{P}_i \mid i \in I\}$ — набор подкопредставлений копредставления $\mathcal{P}$, а $\mathbf{X}_i$ — набор всех базированных сферических картинок над $\mathcal{P}_i$, $i \in I$. Будем говорить, что множество $\mathbf{Y}$ базированных сферических картинок над $\mathcal{P}$ порождает $\pi_2(\mathcal{P})$ над $\{\mathcal{P}_i \mid i \in I\}$, если $\mathbf{G}$ -модуль $\pi_2(\mathcal{P})$ порождается гомотопическими классами $[f_{\mathbf{P}}]$ ($\mathbf{P} \in \mathbf{Y} \cup \bigcup_{i \in I} \mathbf{X}_i$) [3]. По аналогу теоремы 2 (см. [3, теорема 1.6 (2)]) множество $\mathbf{Y}$ базированных сферических картинок над $\mathcal{P}$ порождает $\pi_2(\mathcal{P})$ над $\{\mathcal{P}_i \mid i \in I\}$ тогда и только тогда, когда каждая сферическая картинка над копредставлением $\mathcal{P}$ $\mathbf{X}$ -эквивалентна пустой картинке, где $\mathbf{X} = \mathbf{Y} \cup \bigcup_{i \in I} \mathbf{X}_i$.

Это понятие особенно полезно в тех случаях, когда в копредставлении есть какие-то подкопредставления, о которых мало что известно или которые могут быть некоторым образом произвольными. Такие подкопредставления часто можно «изолировать», определив «хорошую» систему порождающих для $\pi_2(\mathcal{P})$ относительно этих подкопредставлений. Примеры систем порождающих над подкопредставлениями для $\pi_2(\mathcal{P})$ можно найти в [3].

Будем говорить, что копредставление $\mathcal{P}$ комбинаторно асферическое над $\{\mathcal{P}_i \mid i \in I\}$, если $\pi_2(\mathcal{P})$ порождается над $\{\mathcal{P}_i \mid i \in I\}$ примитивными диполями; $\mathcal{P}$ обладает свойством (A) над $\{\mathcal{P}_i \mid i \in I\}$, если $\pi_2(\mathcal{P})$ порождается над $\{\mathcal{P}_i \mid i \in I\}$ пустым множеством.

Рассмотрим копредставление $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$, где $\mathbf{r} = \bigcup_{i=1}^n r_i$. Для каждого $i = 1, \dots, n$, пусть $\mathbf{R}_i$ — нормальное замыкание множества $\mathbf{r}_i$ в свободной группе $\mathbf{F}$ с базисом $\mathbf{x}$, $\mathcal{P}_i = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r}_i \rangle$, $\mathbf{N}_i = \prod_{j \neq i} \mathbf{R}_j$. Положим $\mathbf{R} = \prod_{i=1}^n \mathbf{R}_i$, $\mathbf{G} = \mathbf{F}/\mathbf{R}$ и $\mathbf{G}_i = \mathbf{F}/\mathbf{R}_i$. Семейство $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n\}$ называется *независимым*, если $\mathbf{R}_i \cap \mathbf{N}_i = [\mathbf{R}_i, \mathbf{N}_i]$ для $i = 1, \dots, n$. Это понятие и близкие к нему изучались в [1, 5–8]. Отметим, что любой примитивный диполь над $\mathcal{P}$ содержится в некотором наборе $\mathbf{X}_i$ всех базированных сферических картинок над $\mathcal{P}_i$ ($i = 1, \dots, n$), так как $\mathbf{r} = \bigcup_{i=1}^n r_i$. Поэтому $\mathcal{P}$ обладает свойством (A) над $\{\mathcal{P}_i \mid i = 1, \dots, n\}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}$ комбинаторно асферическое над $\{\mathcal{P}_i \mid i = 1, \dots, n\}$.

2. Основные утверждения

Теорема 3. Пусть $\mathbf{F}$ — свободная группа с базисом $\mathbf{x}$, $\mathbf{r} = \bigcup_{i=1}^n r_i$ — множество циклически приведённых слов в алфавите $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$ и $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ — копредставление, удовлетворяющее условию RH. Для каждого $i = 1, \dots, n$ пусть $\mathbf{R}_i$ — нормальное замыкание множества $\mathbf{r}_i$ в свободной группе $\mathbf{F}$, $\mathcal{P}_i = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r}_i \rangle$, $\mathbf{N}_i = \prod_{j \neq i} \mathbf{R}_j$, $\hat{\mathbf{r}}_i = \bigcup_{j \neq i} r_j$, $\mathbf{R} = \prod_{i=1}^n \mathbf{R}_i$. Тогда если $\pi_2(\mathcal{P})$ порождается над $\{\mathcal{P}_i \mid i = 1, \dots, n\}$ множеством $\mathbf{Y}$ базированных сферических картинок над $\mathcal{P}$, то для каждого $i = 1, \dots, n$ группа $\frac{\mathbf{R}_i \cap \mathbf{N}_i}{[\mathbf{R}_i, \mathbf{N}_i]}$ порождается множеством

$$\begin{aligned} & \{[WRW^{-1}][\mathbf{R}_i, \mathbf{N}_i] \mid R \in \mathbf{r}_i \cap \hat{\mathbf{r}}_i, [W] \in \mathbf{W}\} \cup \\ & \cup \{[WV_YW^{-1}][\mathbf{R}_i, \mathbf{N}_i] \mid Y \in \mathbf{Y}, [W] \in \mathbf{W}\}, \end{aligned}$$

где V_Y — метка произвольного простого замкнутого пути в базированной сферической картинке Y , разделяющего вершины с $\mathbf{r}_i$ -метками и вершины с $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ -метками, а $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{F}$ — множество представителей смежных классов $\mathbf{F}$ по $\mathbf{R}$.

Известно [5, 7, 8], что если семейство $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n\}$ является независимым, то $\mathcal{P}$ обладает свойством (A) над $\{\mathcal{P}_i \mid i = 1, \dots, n\}$. В [7] доказано обратное утверждение для $n = 2$. Из теоремы 3 получаем следующее обобщение (если в качестве множества $\mathbf{Y}$ взять пустое множество).

Следствие 1. Пусть $\mathbf{F}$ — свободная группа с базисом $\mathbf{x}$, $\mathbf{r} = \bigcup_{i=1}^n r_i$ — множество циклически приведённых слов в алфавите $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$, где $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$ — взаимно

не пересекающиеся множества, и $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ — копредставление, удовлетворяющее условию RH . Для каждого $i = 1, \dots, n$ пусть $\mathbf{R}_i$ — нормальное замыкание множества $\mathbf{r}_i$ в свободной группе $\mathbf{F}$, $\mathcal{P}_i = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r}_i \rangle$. Тогда если копредставление $\mathcal{P}$ обладает свойством (A) над $\{\mathcal{P}_i \mid i = 1, \dots, n\}$, то семейство $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n\}$ является независимым.

Таким образом, для $\mathbf{r} = \bigsqcup_{i=1}^n \mathbf{r}_i$ семейство $\{\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n\}$ является независимым тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}$ обладает свойством (A) над $\{\mathcal{P}_i \mid i = 1, \dots, n\}$.

3. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим случай $i = 1$ (для $i = 2, \dots, n$ доказательство проводится аналогично).

Обозначим через $\mathfrak{N}$ нормальное замыкание множества

$$\{[R] \mid R \in \mathbf{r}_1 \cap \hat{\mathbf{r}}_1\} \cup \{[V_Y] \mid Y \in \mathbf{Y}\}$$

в $\mathbf{F}$. Требуется доказать, что если $\pi_2(\mathcal{P})$ порождается над $\{\mathcal{P}_j \mid j = 1, \dots, n\}$ множеством $\mathbf{Y}$, то по модулю $\mathfrak{N}[\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_1]$ произвольный элемент $[U] \in \mathbf{R}_1 \cap \mathbf{N}_1$ равен единице. Отсюда будет следовать, что $\frac{\mathbf{R}_1 \cap \mathbf{N}_1}{[\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_1]}$ порождается множеством

$$\begin{aligned} & \{[WRW^{-1}] [\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_1] \mid R \in \mathbf{r}_1 \cap \hat{\mathbf{r}}_1, [W] \in \mathbf{W}\} \cup \\ & \cup \{[WV_YW^{-1}] [\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_1] \mid Y \in \mathbf{Y}, [W] \in \mathbf{W}\}, \end{aligned}$$

так как $[V_Y] \in \mathbf{R}_1 \cap \mathbf{N}_1$, $\mathbf{r}_1 \cap \hat{\mathbf{r}}_1 \subset \mathbf{R}_1 \cap \mathbf{N}_1$ и $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \mathbf{N}_1$.

Так как $[U]$ принадлежит как $\mathbf{R}_1$, так и $\mathbf{N}_1$, то по лемме 1 существует картинка $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_1}$ над копредставлением $\mathcal{P}_1 = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r}_1 \rangle$ с граничной меткой, тождественно равной U , и картинка $\mathbf{P}_{\mathbf{N}_1}$ над копредставлением $\mathcal{P}_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)} = \langle \mathbf{x} \mid (\mathbf{r}-\mathbf{r}_1) \rangle$ с граничной меткой, тождественно равной U^{-1} . Пусть U тождественно равно слову $x_1 x_2 \dots x_m$, где $x_j \in \mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$. Тогда на границу $\partial \mathbf{P}_{\mathbf{R}_1}$ выходят дуги $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ с метками соответственно $x_1, \dots, x_m$, а на границу $\partial \mathbf{P}_{\mathbf{N}_1}$ выходят дуги $\beta_1, \dots, \beta_m$ с метками соответственно $x_m, \dots, x_1$. Склеим картинки $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_1}$ и $\mathbf{P}_{\mathbf{N}_1}$ по их границам так, чтобы для каждого $j = 1, \dots, m$ дуга α_j продолжала дугу $\beta_{m-(j-1)}$, а глобальная базовая точка $O_{\mathbf{R}_1}$ картинки $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_1}$ совпала с глобальной базовой точкой $O_{\mathbf{N}_1}$ картинки $\mathbf{P}_{\mathbf{N}_1}$. Если теперь в получившейся сфере выбрать маленький замкнутый диск D , целиком принадлежащий внутренности одного из регионов картинки $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_1}$, и выкинуть $D - \partial D$, то получим сферическую картинку $\mathbf{P}$ над копредставлением $\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r} \rangle$ на диске D^2 с границей $\partial \mathbf{P} (= \partial D^2) = \partial D$.

Склеенные границы $\partial \mathbf{P}_{\mathbf{R}_1}$ и $\partial \mathbf{P}_{\mathbf{N}_1}$ образуют путь Equ на D^2 . Будем называть его *экватором*. Склеенные точки $O_{\mathbf{R}_1}$ и $O_{\mathbf{N}_1}$ образуют точку $p \in \text{Equ}$. Фиксируем на Equ ориентацию так, чтобы метка пути $\text{Equ} - \{p\}$ тождественно равнялась U . Всюду ниже метку пути $\text{Equ} - \{p\}$, получаемую при данной

ориентации, будем называть *экваториальной меткой*. Часть картинке $\mathbf{P}$, соответствующую картинке $\mathbf{P}_{\mathbf{R}_1}$ ($\mathbf{P}_{\mathbf{N}_1}$), будем называть $\mathbf{r}_1$ -*полушарием* (соответственно $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ -*полушарием*).

Ниже будем преобразовывать картинку $\mathbf{P}$ с помощью плоской изотопии, BRIDGE , $\text{FLOAT}^{\pm 1}$, $\text{FOLD}^{\pm 1}$, $\text{DELETE}(\mathbf{X})^{\pm 1}$ так, чтобы выполнялись следующие условия: экваториальная метка не изменяется по модулю $\mathfrak{N}[\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_1]$, все вершины картинке $\mathbf{P}$ с $\mathbf{r}_1$ -метками остаются только в $\mathbf{r}_1$ -полушарии, а все вершины с $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ -метками — только в $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ -полушарии. Преобразования (операции), удовлетворяющие этим условиям, будем называть *допустимыми*, а картинку, в которой экватор делит вершины по этому правилу, — *картинкой с экватором*. Цель этих преобразований будет состоять в том, чтобы картинку $\mathbf{P}$ с экватором свести к картинке с экватором с экваториальной меткой, равной единице в свободной группе. Это будет означать, что изначальная метка экватора, т. е. $[U]$, принадлежала $\mathfrak{N}[\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_1]$. Для доказательства существования искомых преобразований нам понадобятся два вспомогательных утверждения: леммы 2 и 3. В этих леммах используются обозначения теоремы 3; через $\mathbf{X}$ обозначено объединение $\mathbf{Y} \cup \bigcup_{i=1}^n \mathbf{X}_i$, где $\mathbf{X}_i$ — набор всех базированных сферических картинок над $\mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, n$; $\mathbf{Z}^W$ -*картинкой* называется сферическая картинка, содержащая только одну $\mathbf{Z}$ -картинку и, возможно, замкнутые дуги, окружающие эту $\mathbf{Z}$ -картинку, где $\mathbf{Z}$ — некое заданное множество сферических картинок.

Лемма 2. Если $\pi_2(\mathcal{P})$ порождается над $\{\mathcal{P}_j \mid j = 1, \dots, n\}$ множеством $\mathbf{Y}$, то с помощью конечного числа допустимых преобразований картинку $\mathbf{P}$ с экватором Equ можно свести к картинке $\tilde{\mathbf{P}}$ с экватором, являющейся конечной суммой $\mathbf{X}^W$ -картинок и, возможно, также содержащей несколько замкнутых дуг вокруг точки p .

Доказательство. Так как $\pi_2(\mathcal{P})$ порождается над $\{\mathcal{P}_j \mid j = 1, \dots, n\}$ множеством $\mathbf{Y}$, то по теореме 2 базированная сферическая картинка $\mathbf{P}$ над копредставлением $\mathcal{P}$ $\mathbf{X}$ -эквивалентна пустой картинке, т. е. существует конечная последовательность базированных сферических картинок $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_s$ и конечная последовательность $f_1, \dots, f_s$ операций BRIDGE , $\text{FLOAT}^{\pm 1}$, $\text{FOLD}^{\pm 1}$, $\text{DELETE}(\mathbf{X})^{\pm 1}$, которая (с точностью до плоской изотопии) преобразует $\mathbf{P}$ в пустую картинку так, что $f_j: \mathbf{P}_{j-1} \mapsto \mathbf{P}_j$, $j = 1, \dots, s$, $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$, $\mathbf{P}_s$ — пустая картинка.

Отметим, что любая зеркальная пара вершин являются сферической картинкой над некоторым $\mathcal{P}_i$, $i = 1, \dots, n$, и поэтому принадлежит $\mathbf{X}_i$. В этом случае операция $\text{FOLD}^{\pm 1}$ является частным случаем операции $\text{DELETE}(\mathbf{X})^{\pm 1}$ и поэтому отдельно рассматриваться не будет.

Так как $f_1, \dots, f_s$ не обязательно являются допустимыми преобразованиями, по последовательностям $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_s$ и $f_1, \dots, f_s$ построим две новые последовательности $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1, \dots, \mathfrak{Z}_s$ и $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_s, \mathfrak{g}_{s+1}$, где $\mathfrak{Z}_i$ — это множество непересекающихся сферических подкартинок картинке $\mathbf{P}_i$, не содержащих целиком

экватор, а $\mathbf{g}_i$ — это допустимая операция, $i = 1, \dots, s$. При этом последовательность $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s, \mathbf{g}_{s+1}$ будет преобразовывать $\mathbf{P}$ как картинку с экватором в $\tilde{\mathbf{P}}$ так, что $\mathbf{g}_j: \mathbf{P}_{j-1} \mapsto \mathbf{P}_j$, где $\tilde{\mathbf{P}}_0 = \mathbf{P}$, $\tilde{\mathbf{P}}_j = \mathbf{P}_j \cup \mathfrak{Z}_j$, $\tilde{\mathbf{P}}_{s+1} = \tilde{\mathbf{P}}$ — картинки с экватором, $j = 1, \dots, s$. Это и докажет лемму 2. $\square$

Через $\mathfrak{Z}_j^0$, $j = 1, \dots, s$, обозначим конечное множество непересекающихся дисков внутри диска D^2 , содержащих пустые сферических подкартинки, получающиеся из подкартинок множества $\mathfrak{Z}_j$, если из них удалить все дуги и вершины.

Если над картинкой совершается плоская изотопия, то можно считать, что эта изотопия заменяет картинку $\mathbf{P}_{j-1}$ на картинку $\mathbf{P}_j = F_1(\mathbf{P}_{j-1})$, где $F_t: D^2 \times [0, 1] \rightarrow D^2 \times [0, 1]$ — некоторая непрерывная изотопия диска D^2 , так, что

- 1) F_t оставляет неподвижными все вершины, т. е. для каждого $t \in [0, 1]$ и каждой вершины Δ выполняется $F_t(\Delta) = \Delta$;
- 2) для каждого $t \in [0, 1]$ и каждой дуги α пересечение дуги $F_t(\alpha)$ с экватором Equ состоит из конечного числа точек, более того, если Equ пересекает $F_1(\alpha)$, то он действительно пересекает, а не просто касается его;
- 3) ни для какой дуги α дуга $F_1(\alpha)$ не пересекает диски из $\mathfrak{Z}_{j-1}^0$.

Если ни для какого $t \in (0, 1)$ и ни для какой дуги α дуга $F_t(\alpha)$ не пересекает диски из $\mathfrak{Z}_{j-1}^0$, то такую изотопию будем называть *допустимой*, иначе изотопию будем называть *недопустимой*. Допустимая изотопия не меняет экваториальную метку как элемент свободной группы. Так как допустимая изотопия является допустимой операцией, ниже будем считать равными операции, отличающиеся на допустимую изотопию. Включим в список преобразований $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s$ операции недопустимой изотопии.

Операции $\mathbf{g}_j$, $j = 1, \dots, s$, будем строить так, чтобы $\mathbf{g}_j$ преобразовывала $(\mathbf{P}_{j-1} - \mathfrak{Z}_j)$ в $(\mathbf{P}_j - \mathfrak{Z}_j)$ так же (с точностью до допустимой изотопии $(\mathbf{P}_j - \mathfrak{Z}_j)$), как и $\mathbf{f}_j$ преобразовывает $(\mathbf{P}_{j-1} - \mathfrak{Z}_{j-1}^0)$ в $(\mathbf{P}_j - \mathfrak{Z}_j^0)$. При этом всегда можно считать, что дуги картинки $\tilde{\mathbf{P}}_j$ и границы подкартинок из $\mathfrak{Z}_j^0$ пересекают экватор не более конечного числа раз.

В качестве $\mathfrak{Z}_0$ возьмём множество, состоящее только из пустой сферической подкартинки картинки $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$, содержащей точку $p \in \text{Equ}$ и связную часть экватора.

Множество $\mathfrak{Z}_j$ и операцию $\mathbf{g}_j$, $j = 1, \dots, s$, определим индукцией по j .

Пусть $\mathfrak{Z}_0, \mathfrak{Z}_1, \dots, \mathfrak{Z}_{j-1}$ и $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{j-1}$ уже определены. Построим $\mathfrak{Z}_j$ и $\mathbf{g}_j$ по $\mathbf{f}_j: \mathbf{P}_{j-1} \mapsto \mathbf{P}_j$ следующим образом. Операция $\mathbf{f}_j$ — это одна из следующих операций: недопустимая изотопия, BRIDGE , $\text{FLOAT}^{\pm 1}$, $\text{DELETE}(\mathbf{X})^{\pm 1}$.

Случай 1. Недопустимая изотопия. Найдётся дуга α (с меткой $x \in \mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$) в $\mathbf{P}_{j-1}$ и $t \in (0, 1)$, для которых $F_t(\alpha)$ пересекает некоторую пустую сферическую подкартинку $\mathbf{P}_\xi^0$ из $\mathfrak{Z}_{j-1}^0$. Обозначим через $\mathbf{P}_\xi$ сферическую подкартинку из $\mathfrak{Z}_{j-1}$, по которой получена подкартинка $\mathbf{P}_\xi^0$. Для получения множества $\mathfrak{Z}_j$ по множеству $\mathfrak{Z}_{j-1}$ (для каждой такой дуги α и каждой такой подкартинки $\mathbf{P}_\xi^0$ при

каждом прохождении дуги $F_t(\alpha)$ через $\mathbf{P}_\xi^0$ в $\mathbf{P}_\xi$ добавляется замкнутая дуга с меткой x , окружающая все объекты, уже присутствующие в $\mathbf{P}_\xi$ (это, возможно, дуги, вершины, точка p). Действие $\mathfrak{g}_j$ на $(\mathbf{P}_{j-1} - \mathfrak{Z}_j)$ совпадает с действием $\mathfrak{f}_j$ на $(\mathbf{P}_{j-1} - \mathfrak{Z}_j^0)$, а на $\mathfrak{Z}_j$ операция $\mathfrak{g}_j$ соответствует операции BRIDGE, произведённой над дугой α внутри диска картинке $\mathbf{P}_\xi$. Значит, операция $\mathfrak{g}_j$ не изменяет экваториальную метку как элемент свободной группы (рис. 3).

Случай 2. FLOAT, DELETE($\mathbf{X}$). В картинке $\mathbf{P}_{j-1}$ есть некая сферическая подкартинка $\mathbf{P}_\eta$, содержащая только плавающую замкнутую дугу (соответственно только $\mathbf{X}$ -картинку). Операция $\mathfrak{f}_j$ удаляет $\mathbf{P}_\eta$ из $\mathbf{P}_{j-1}$.

При необходимости подкорректировав $\partial\mathbf{P}_\eta$ и $\mathfrak{f}_j$ за счёт допустимой изотопии, можно добиться того, чтобы подкартинка $\mathbf{P}_\eta$ не содержала целиком экватор, а $\partial\mathbf{P}_\eta$ не пересекала диски из $\mathfrak{Z}_{j-1}^0$. Отметим, что рёбра и вершины подкартинки $\mathbf{P}_\eta$ также не пересекаются с $\mathfrak{Z}_{j-1}^0$.

Пусть $\mathbf{P}_{\xi_1}^0, \dots, \mathbf{P}_{\xi_m}^0$ — это все сферические подкартинки из $\mathfrak{Z}_{j-1}^0$, содержащиеся внутри диска подкартинки $\mathbf{P}_\eta$, а $\mathbf{P}_{\xi_1}, \dots, \mathbf{P}_{\xi_m}$ — соответствующие им подкартинки из $\mathfrak{Z}_{j-1}$. Множество $\mathfrak{Z}_j$ получается из множества $\mathfrak{Z}_{j-1}$ удалением $\mathbf{P}_{\xi_1}, \dots, \mathbf{P}_{\xi_m}$ и добавлением сферической подкартинки из $\tilde{\mathbf{P}}_{j-1}$, окружённой путём $\partial\mathbf{P}_\eta$ (эта подкартинка содержит несвязное объединение $\mathbf{P}_\eta$ и $\mathbf{P}_{\xi_1}, \dots, \mathbf{P}_{\xi_m}$). Операция $\mathfrak{g}_j$ действует тождественно (с точностью до допустимой изотопии).

Случай 3. FLOAT $^{-1}$, DELETE($\mathbf{X}$) $^{-1}$. Пусть $\mathfrak{f}_j$ — операция FLOAT $^{-1}$ (DELETE($\mathbf{X}$) $^{-1}$). Операция $\mathfrak{f}_j$ вставляет в $(\mathbf{P}_{j-1} - \mathfrak{Z}_{j-1}^0)$ сферическую подкартинку $\mathbf{P}_\eta$, которая содержит только плавающую замкнутую дугу (соответственно только $\mathbf{X}$ -картинку).

Благодаря допустимой изотопии можно добиться следующего. Если $\mathfrak{f}_j$ — операция FLOAT $^{-1}$, подкартинка $\mathbf{P}_\eta$ не пересекает экватор. Если $\mathfrak{f}_j$ — опера-

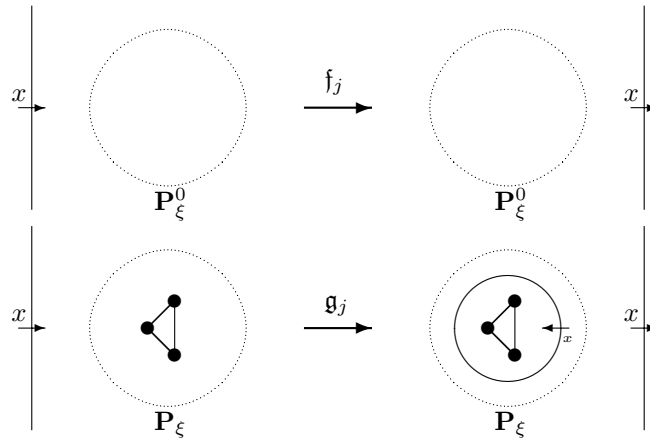


Рис. 3

ция $\text{DELETE}(\mathbf{X})^{-1}$ и в $\mathbf{P}_\eta$ есть вершины только с $\mathbf{r}_1$ -метками или только с $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ -метками, то подкартинка $\mathbf{P}_\eta$ целиком располагается в том полушарии, каковы метки вершин этой подкартинки. Если f_j — операция $\text{DELETE}(\mathbf{X})^{-1}$ и в $\mathbf{P}_\eta$ есть вершины как с $\mathbf{r}_1$ -метками, так и с $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ -метками (можно считать, что $\mathbf{P}_\eta \in \mathbf{Y}$), то подкартинка $\mathbf{P}_\eta$ располагается так, чтобы $\widehat{\text{Equ}} = \mathbf{P}_\eta \cap \text{Equ}$ было связным и экватор делил вершины из подкартинки $\mathbf{P}_\eta$ на две части: вершины с $\mathbf{r}_1$ -метками (в $\mathbf{r}_1$ -полушарии) и вершины с $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ -метками (в $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ -полушарии), при этом метка U_η пути $\widehat{\text{Equ}}$ такова, что $[U_\eta] \in \mathfrak{N}$.

Полагаем $\mathfrak{Z}_j = \mathfrak{Z}_{j-1}$. Действие $\mathfrak{g}_j$ на $\mathbf{P}_{j-1} - \mathfrak{Z}_j$ совпадает с действием f_j на $\mathbf{P}_{j-1} - \mathfrak{Z}_j^0$, а действие $\mathfrak{g}_j$ на $\mathfrak{Z}_j$ является тождественным. Операция $\mathfrak{g}_j$ не изменяет экваториальную метку по модулю $\mathfrak{N}[\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_1]$.

Случай 4. BRIDGE. Можно считать, что операция f_j производится над $\mathbf{P}_{j-1} - \mathfrak{Z}_{j-1}^0$.

Полагаем $\mathfrak{Z}_j = \mathfrak{Z}_{j-1}$. Действие $\mathfrak{g}_j$ на $\mathbf{P}_{j-1} - \mathfrak{Z}_j$ совпадает с действием f_j на $\mathbf{P}_{j-1} - \mathfrak{Z}_j^0$, а действие $\mathfrak{g}_j$ на $\mathfrak{Z}_j$ является тождественным. Построенная операция $\mathfrak{g}_j$ не изменяет экваториальную метку как элемент свободной группы.

Для завершения доказательства леммы 2 осталось определить $\mathfrak{g}_{s+1}: \tilde{\mathbf{P}}_s \mapsto \mathbf{P}_{s+1}$, где $\tilde{\mathbf{P}}_s = \mathbf{P}_s \cup \mathfrak{Z}_s$, $\tilde{\mathbf{P}}_{s+1} = \tilde{\mathbf{P}}$. Так как $\mathbf{P}_s$ — пустая картинка, все дуги и вершины картинки $\tilde{\mathbf{P}}_s$ принадлежат сферическим подкартинкам из $\mathfrak{Z}_s$. Над каждой сферической подкартинкой $\mathbf{P}_\mu$ из $\mathfrak{Z}_s$ операция $\mathfrak{g}_{s+1}$ производит следующее преобразование.

В силу построения $\mathfrak{Z}_s$ подкартинка $\mathbf{P}_\mu$ является объединением вложенных друг в друга сферических подкартинок, каждая из которых либо является $\mathbf{X}^W$ -картинкой, либо содержит только замкнутые дуги и, возможно, точку p . Операция $\mathfrak{g}_{s+1}$ раскладывает $\mathbf{P}_\mu$ в виде суммы $\mathbf{X}^W$ -картинок и сферических подкартинок, содержащих только замкнутые дуги и, возможно, точку p , используя допустимую изотопию и операцию BRIDGE (см. пример на рис. 4) так, чтобы вершины остались в своих полушариях и ни одно слагаемое не содержало экватор целиком, а граница каждого слагаемого пересекала экватор не более конечного числа раз. После этого $\mathfrak{g}_{s+1}$ удаляет все плавающие дуги, не окру-

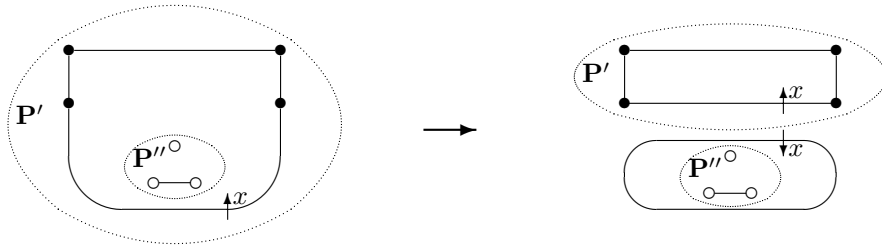


Рис. 4. Разделение подкартинок $\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}''$ (чтобы не усложнять рисунок, ориентация и метка указаны только у дуги, над которой производится операция BRIDGE)

жающие точку p , при помощи операции FLOAT. Операция $\mathfrak{g}_{s+1}$ не изменяет экваториальную метку как элемент свободной группы.

Лемма 3. Если базированная сферическая картинка $\tilde{\mathbf{P}}$ с экватором Equ является конечной суммой $\mathbf{X}^W$ -картинок и, возможно, также содержит несколько замкнутых дуг вокруг точки p , то с помощью конечного числа допустимых преобразований картинку $\tilde{\mathbf{P}}$ можно свести к картинке с экватором с экваториальной меткой, равной единице в свободной группе.

Доказательство. Ниже мы будем использовать операцию COMMUTE, изображённую на рис. 5. Эта операция изменяет экваториальную метку на элемент из $[\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_1]$ (подробности см. в [10]). Она может быть осуществлена с помощью плоской изотопии и конечного числа операций $\text{DELETE}(\mathbf{X})^{\pm 1}$, BRIDGE , $\text{FLOAT}^{\pm 1}$.

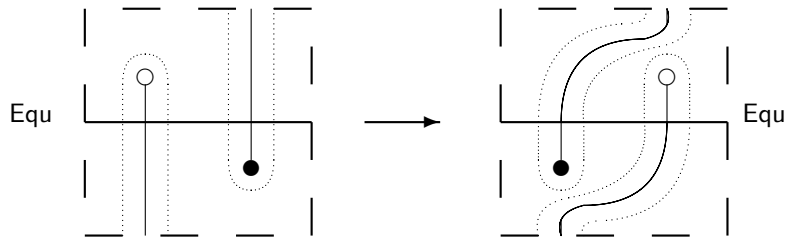


Рис. 5

Сначала, применяя операции FLOAT и $\text{DELETE}(\mathbf{X})$ к $\tilde{\mathbf{P}}$, удаляем все $\mathbf{X}^W$ -картинки, не пересекающие Equ, что не изменяет экваториальной метки. Далее с помощью плоской изотопии и COMMUTE добиваемся того, что для любой $\mathbf{X}^W$ -картинки $\mathbf{P}_\eta$ пересечение $\text{Equ} \cap \mathbf{P}_\eta$ становится связным, т. е. Equ разделяет $\mathbf{P}_\eta$ на две части: подкартинку над копредставлением $\mathcal{P}_1 = \langle \mathbf{x} \mid \mathbf{r}_1 \rangle$ в $\mathbf{r}_1$ -полушарии и подкартинку над копредставлением $\mathcal{P}_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)} = \langle \mathbf{x} \mid (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \rangle$ в $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ -полушарии. Если хотя бы одна из этих частей не содержит вершин, то метка пути $\text{Equ} \cap \mathbf{P}_\eta$ равна единице в свободной группе. Иначе $\mathbf{P}_\eta$ либо является $\mathbf{Y}^W$ -картинкой, либо содержит вершины с метками из $\mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_1^*$. В первом случае метка пути $\text{Equ} \cap \mathbf{P}_\eta$ равна $[WV_YW^{-1}]$ в свободной группе, где V_Y — метка некоторого простого замкнутого пути в некоторой базированной сферической картинке $Y \in \mathbf{Y}$, разделяющего вершины с $\mathbf{r}_1$ -метками и вершины с $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$ -метками. Во втором случае метка пути $\text{Equ} \cap \mathbf{P}_\eta$ равна произведению элементов вида $[WR^{\pm 1}W^{-1}]$, где $R \in \mathbf{r}_1 \cap \mathbf{r}_1^*$. В каждом из этих случаев метка пути $\text{Equ} \cap \mathbf{P}_\eta$ принадлежит $\mathfrak{N}[\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_1]$. Удаляем из $\tilde{\mathbf{P}}$ все $\mathbf{X}^W$ -картинки. Из рассуждений выше следует, что это преобразование является допустимым. После такого преобразования в $\tilde{\mathbf{P}}$ могут остаться только несколько замкнутых дуг, окружающих точку p . Следовательно, экваториальная метка равна единице в свободной группе. Это завершает доказательство леммы 3. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 3. По лемме 2 с помощью конечного числа допустимых преобразований картинку $\mathbf{P}$ с экватором можно свести к картинке $\tilde{\mathbf{P}}$ с экватором, являющейся конечной суммой $\mathbf{X}^W$ -картинок и, возможно, также содержащей несколько замкнутых дуг вокруг точки p . По лемме 3 с помощью конечного числа допустимых преобразований $\tilde{\mathbf{P}}$ можно свести к картинке с экватором с экваториальной меткой, равной единице в свободной группе. Следовательно, по модулю $\mathfrak{N}[\mathbf{R}_1, \mathbf{N}_1]$ экваториальная метка $[U]$ изначальной картинки $\mathbf{P}$ равна единице.

Литература

- [1] Bogley W. A. An embedding for π_2 of a subcomplex of a finite contractible two-complex // *Glasgow Math. J.* — 1991. — Vol. 33. — P. 365–371.
- [2] Bogley W. A., Gutiérrez M. A. Mayer–Vietoris sequences in homotopy of 2-complexes and in homology of groups // *J. Pure Appl. Algebra.* — 1992. — Vol. 77. — P. 39–65.
- [3] Bogley W. A., Pride S. J. Calculating generators of π_2 // *Two-Dimensional Homotopy Theory and Combinatorial Group Theory* / C. Hog-Angeloni, W. Metzler, A. J. Sieradski, eds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. — (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; Vol. 197). — P. 157–188.
- [4] Chiswell I. M., Collins D. J., Huebschmann J. Aspherical group presentations // *Math. Z.* — 1981. — Vol. 178. — P. 1–36.
- [5] Duncan A. J., Ellis G. J., Gilbert N. D. A Mayer–Vietoris sequence in group homology and the decomposition of relation modules // *Glasgow Math. J.* — 1995. — Vol. 37. — P. 159–171.
- [6] Gilbert N. D. Identities between sets of relations // *J. Pure Appl. Algebra.* — 1993. — Vol. 83. — P. 263–276.
- [7] Gutiérrez M. A., Ratcliffe J. G. On the second homotopy group // *Quart. J. Math. Oxford (2).* — 1981. — Vol. 32. — P. 45–55.
- [8] Huebschmann J. Aspherical 2-complexes and an unsettled problem of J. H. C. Whitehead // *Math. Ann.* — 1981. — Vol. 258. — P. 17–37.
- [9] Igusa K. The Generalized Grassmann Invariant: preprint. — Waltham: Brandeis Univ., 1979.
- [10] Kulikova O. V. On intersections of normal subgroups in free groups // *Algebra Discrete Math.* — 2003. — No. 1. — P. 36–67.
- [11] Lyndon R. S. Dependence and independence in free groups // *J. Reine Angew. Math.* — 1962. — Vol. 210. — P. 148–174.
- [12] Lyndon R. S., Schupp P. E. *Combinatorial Group Theory.* — Berlin: Springer, 1977.
- [13] Pride S. J. Identities among relations of group presentations // *Proc. of the Workshop on Group Theory from a Geometrical Viewpoint* / E. Ghys et al., eds. — Singapore: World Scientific, 1991. — P. 687–717.
- [14] Rourke C. P. Presentations and the trivial group // *Topology of Low Dimensional Manifolds* / R. Fenn, ed. — Berlin: Springer, 1979. — (Lect. Notes Math.; Vol. 722). — P. 134–143.