Группы, в которых нормальные замыкания циклических подгрупп имеют ограниченные конечные ранги Хирша—Зайцева

Л. А. КУРДАЧЕНКО
Днепропетровский национальный университет, Украина
e-mail: lkurdachenko@i.ua

Н. Н. СЕМКО
Национальный университет государственной налоговой службы Украины, Украина
e-mail: n_semko@mail.ru

УДК 512.544

Ключевые слова: локально обобщённо радикальная группа, локально нильпотентная группа, специальный ранг, ранг Хирша—Зайцева, нормальное замыкание.

Аннотация

В статье изучаются обобщённо разрешимые группы с ограничениями на нормальные замыкания циклических подгрупп. Будем говорить, что группа G имеет конечный ранг Хирша—Зайцева, если G имеет восходящий ряд, факторы которого либо бесконечные циклические, либо периодические и число бесконечных циклических факторов конечно. Нетрудно заметить, что число бесконечных циклических факторов в каждом из таких рядов будет инвариантом группы. Этот инвариант называется рангом Хирша—Зайцева группы G и обозначается через $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(G)$. Изучаются группы, в которых нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий некоторого натурального числа $\mathbf{b}$ При наличии некоторых естественных ограничений найдена такая функция $\mathbf{k}_1(\mathbf{b})$, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}([G/\mathrm{Tor}(G), G/\mathrm{Tor}(G)]) \leqslant \mathbf{k}_1(\mathbf{b})$.

Abstract

L. A. Kurdachenko, N. N. Semko, Groups in which the normal closures of cyclic subgroups have bounded finite Hirsch–Zaitsev rank, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 6, pp. 207—228.

In this paper, we study generalized soluble groups with restriction on normal closures of cyclic subgroups. A group G is said to have finite Hirsch—Zaitsev rank if G has an ascending series whose factors are either infinite cyclic or periodic and if the number of infinite cyclic factors are finite. It is not hard to see that the number of infinite cyclic factors in each of such series is an invariant of a group G. This invariant is called the Hirsch—Zaitsev rank of G and will be denoted by $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(G)$. We study the groups in which the normal closure of every cyclic subgroup has the Hirsch—Zaitsev rank at most $\mathbf{b}$ ($\mathbf{b}$ is some positive integer). For some natural restrictions we find a function $\mathbf{k}_1(\mathbf{b})$ such that $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}([G/\mathrm{Tor}(G), G/\mathrm{Tor}(G)]) \leqslant \mathbf{k}_1(\mathbf{b})$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 6, с. 207—228.

Если G — группа и x — её элемент, то *класс сопряжённости элемента* x в G будем обозначать через x^G, т. е. $x^G = \{x^g \mid g \in G\}$. Группы с разнообразными ограничениями на классы сопряжённых элементов изучаются уже достаточно долго. Первое ограничение, которое здесь возникает, это ограничение на порядок класса сопряжённых элементов. Например, если $|x^G| = 1$ для каждого элемента $x \in G$, то группа G абелева. Это показывает, что группы, в которых порядки классов сопряжённых элементов конечные и ограниченные (т. е. существует такое натуральное число $\mathbf{b}$, что $|x^G| \leqslant \mathbf{b}$ для каждого $x \in G$), должны быть близки к абелевым. Группы с таким свойством называются *BFC-группами*. Б. Нейман доказал [15], что коммутатор всякой BFC-группы конечен. Более того, существует такая функция ν, что $|[G,G]| \leqslant \nu(\mathbf{b})$. Большая серия статей посвящена нахождению наилучшего значения для функции $\nu(\mathbf{b})$. Последней в этой серии была статья Р. Гуральника и А. Мароти [12], которые показали, что $\nu(\mathbf{b}) = (7 + \log_2 \mathbf{b})/2$.

Приведённый выше результат Б. Неймана стал исходной точкой для многих интересных обобщений. Если класс сопряжённости x^G конечен, то группа $\langle x \rangle^G$ либо конечна, либо включает в себя такую конечную нормальную подгруппу T_x, что $\langle x \rangle^G / T_x$ — конечно порождённая свободная абелева группа. В частности, $\langle x \rangle^G$ будет почти полициклической. Поэтому естественно возникает вопрос о структуре групп, в которых $\langle x \rangle^G$ будет почти полициклической. Если предположить, что $\langle x \rangle^G$ является бесконечной циклической для каждого элемента $x \in G$, то нетрудно показать, что G абелева. Если предположить, что $\langle x \rangle^G$ не циклическая, но свободная абелева, то коммутант может и не быть свободной абелевой подгруппы. В этом можно убедиться на следующем примере. Пусть $D_n = (\langle a_n \rangle \times \langle b_n \rangle) \leftthreetimes \langle c_n \rangle$, где a_n, b_n, c_n имеют бесконечный порядок и $c_n^{-1} b_n c_n = a_n b_n$, $n \in \mathbf{N}$. Положим $K = Dr_{n \in \mathbf{N}}$, $H = \langle a_n a_{n+1}^{-2} \mid n \in \mathbf{N} \rangle$ и $G = K/H$. Нетрудно убедиться в том, что $\langle x \rangle^G$ — свободная абелева подгруппа 0-ранга не выше 2, но $[G,G] \cong \mathbf{Q_2}$, в частности, коммутант не является свободной абелевой подгруппой.

Всякая почти полициклическая группа G имеет конечный субнормальный ряд

$$\langle 1 \rangle = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_{n-1} \lhd G_n = G,$$

факторы $G_j/G_{j-1}, 1 \leqslant j \leqslant n-1$, которого бесконечные циклические, а фактор G_n/G_{n-1} конечен. Число бесконечных циклических факторов этого ряда является инвариантом группы G и называется *числом Хирша* группы G.

А. И. Мальцев [8] ввёл в рассмотрение следующий класс групп. Напомним некоторые определения. Если G — группа, то через $\operatorname{Tor}(G)$ будем обозначать максимальную нормальную периодическую подгруппу G. Отметим, что если группа G локально нильпотентна, то $\operatorname{Tor}(G)$ — (характеристическая) подгруппа G, причём $G/\operatorname{Tor}(G)$ не имеет кручения.

Пусть G — абелева группа без кручения. Число элементов в максимальном независимом подмножестве G называется *0-рангом* G и обозначается через $\mathbf{r}_0(G)$. Если G — произвольная абелева группа, то положим $\mathbf{r}_0(G) = \mathbf{r}_0\big(G/\operatorname{Tor}(G)\big)$.

Будем говорить, что G — *разрешимая A_1-группа*, если G обладает конечным субнормальным рядом, факторы которого абелевы и имеют конечный 0-ранг. Нетрудно заметить, что если G — разрешимая A_1-группа, то G имеет конечный субнормальный ряд, факторы которого либо бесконечные циклические, либо периодические группы, причём число бесконечных циклических факторов будет инвариантом G. В случае полирациональной группы этот инвариант был назван рациональным рангом [1]. Это понятие было расширено на класс локально почти полициклических групп [2], а в [4] этот инвариант уже рассматривался для произвольных групп. Этот инвариант был назван *рангом без кручения*, или 0-*рангом*. Но термин «ранг без кручения» не совсем точный. Например, не каждая группа без кручения имеет ранг без кручения (конечный или бесконечный). Для неабелевых групп существует понятие секционного 0-ранга, который также обозначается через $\mathbf{r}_0(G)$. Поэтому было бы лучше использовать другой термин. Более того, рассмотрим следующее обобщение.

Будем говорить, что группа G имеет *конечный ранг Хирша—Зайцева*, если G имеет возрастающий ряд, факторы которого либо бесконечные циклические, либо периодические, и число бесконечных циклических факторов конечно. Нетрудно заметить, что число бесконечных циклических факторов в каждом таком ряду является инвариантом G. Этот инвариант называется *рангом Хирша—Зайцева* группы G и будет обозначаться через $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(G)$.

Напомним, следуя А. И. Мальцеву [7], что группа G имеет *конечный специальный ранг r*, если каждая конечно порождённая подгруппа G может быть порождена $\mathbf{r}$ элементами и $\mathbf{r}$ — наименьшее натуральное число с этим свойством.

Отметим сейчас связи между группами конечного ранга Хирша—Зайцева и группами конечного специального ранга.

Группа G называется *обобщённо радикальной*, если имеет возрастающий ряд, факторы которого локально нильпотентны или локально конечны. Обобщённо радикальная группа G имеет восходящую локально нильпотентную или восходящую локально конечную подгруппу. В первом случае её локально нильпотентный радикал $\operatorname{Lnr}(G)$ неединичен. Во втором случае, как нетрудно заметить, G включает в себя неединичную нормальную локально конечную подгруппу. Можно показать, что в каждой группе G подгруппа $\operatorname{Lfr}(G)$, порождённая всеми нормальными локально конечными подгруппами, будет наибольшей нормальной локально конечной подгруппой (*локально конечным радикалом*). Таким образом, всякая обобщённо радикальная группа имеет возрастающий ряд нормальных подгрупп с локально нильпотентными или локально конечными факторами. Отметим также, что периодическая обобщённо радикальная группа локально конечна, а потому и периодическая локально обобщённая радикальная группа также локально конечна.

Если G — группа конечного ранга Хирша—Зайцева, то $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}\big(\operatorname{Tor}(G)\big) = 0$ и $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(G) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}\big(G/\operatorname{Tor}(G)\big)$. Другими словами, мы можем говорить только о структуре фактор-группы $G/\operatorname{Tor}(G)$. Следующий результат описывает локально обобщённо радикальные группы конечного ранга Хирша—Зайцева.

Теорема HZ [10]. *Пусть G — локально обобщённо радикальная группа конечного ранга Хирша—Зайцева. Предположим, что $\operatorname{Tor}(G) = \langle 1\rangle$. Тогда G почти разрешима и имеет такие нормальные подгруппы $L \leqslant K \leqslant S \leqslant G$, что*

1) *L — нильпотентная подгруппа без кручения*;
2) *K/L — конечно порождённая абелева группа без кручения*;
3) *группа G/K конечна и S/K — разрешимый радикал G/K.*

Более того, если $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(G) = \mathbf{r}$, то существуют такие функции $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, что $|G/K| \leqslant \mathbf{f}_1(\mathbf{r})$ и $\operatorname{scl}(S/T) \leqslant \mathbf{f}_2(\mathbf{r})$.

Если G — разрешимая группа, то $\operatorname{scl}(G)$ будет обозначать её класс разрешимости. Если $n \in \mathbf{N}$, то положим

$$\mathbf{a}(\mathbf{n}) = \max\{|\operatorname{Aut}(G)| \mid G \text{ — конечная группа порядка не выше } \mathbf{n}\}.$$

Очевидно, что $\mathbf{a}(\mathbf{n}) \leqslant \mathbf{n}!$.

Пусть A — подгруппа $A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_j \cong \mathbf{Q}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и T — периодическая группа автоморфизмов A. Тогда T конечна (см., например, [19, теорема 9.33]). Более того, существует такая функция τ, что $|T| \leqslant \tau(n)$.

Отметим, что

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{r}) = \big((\mathbf{a}(\mathbf{r})\mathbf{r}^{2r+2})^r \cdot \mathbf{a}\big(\tau(\mathbf{r})\big)^r\big)!.$$

Согласно классической теореме Цассенхауза (см., например, [19, теорема 3.7]) существует такая функция ζ, что $\operatorname{scl}(G) \leqslant \zeta(\mathbf{r})$ для каждой разрешимой подгруппы G из $\mathrm{GL}_{\mathbf{r}}(F)$. Имеем $\mathbf{f}_2(\mathbf{r}) = \mathbf{r} + \zeta(\mathbf{r})$.

Мы можем убедиться, что структура G существенно определяется заданием числа $\mathbf{r}$.

Теорема HZ показывает, что если G — локально обобщённо радикальная группа конечного ранга Хирша—Зайцева и $\operatorname{Tor}(G) = \langle 1\rangle$, то G имеет конечный специальный ранг. Отметим также, что если G — локально обобщённо радикальная группа конечного специального ранга, то $G/\operatorname{Tor}(G)$ имеет конечный ранг Хирша—Зайцева.

В [14, 17] были рассмотрены группы, в которых нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет конечный специальный ранг, не превышающий $\mathbf{b}$. Было доказано, что коммутант таких групп имеет конечный специальный ранг. Пусть теперь G — локально обобщённо радикальная группа. Предположим, что существует такое натуральное число $\mathbf{b}$, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle x\rangle^G) \leqslant \mathbf{b}$ для каждого элемента $x \in G$. Используя приведённый выше результат и взаимосвязи между специальным рангом и рангом Хирша—Зайцева, можно получить, что коммутант $G/\operatorname{Tor}(G)$ имеет конечный ранг Хирша—Зайцева. Но Г. Смит не получил функцию, ограничивающую специальный ранг $[G,G]$. Поэтому цель данной работы — получить функцию от $\mathbf{b}$, которая ограничивает ранг Хирша—Зайцева $[G/\operatorname{Tor}(G), G/\operatorname{Tor}(G)]$. Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема A. *Пусть G — локально обобщённо радикальная группа, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет конечный ранг Хирша—Зайцева, не превышающий $\mathbf{b}$. Если $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$, то G включает в себя такую нормальную подгруппу K конечного ранга Хирша—Зайцева, что G/K — абелева группа без кручения. Более того, существует такая функция $\mathbf{k}_1$, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant \mathbf{k}_1(\mathbf{b})$.*

В данной работе получена более или менее оптимальная форма для функции $\mathbf{k}_1$.

1. Локально нильпотентные группы, в которых нормальные замыкания циклических подгрупп имеют конечные и ограниченные ранги Хирша—Зайцева

Важной частью данной работы является рассмотрение случая локально нильпотентных групп.

Пусть L — нормальная подгруппа локально нильпотентной группы G без кручения. Предположим, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(L) = \mathbf{k}$. Из результатов [9] получим, что гиперцентр группы G, имеющий номер не больше $\mathbf{k}$, включает L. Таким образом, получаем следующую лемму.

Лемма 1.1. *Пусть G — локально нильпотентная группа без кручения, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$. Тогда G нильпотентна и $\mathrm{ncl}(G) \leqslant \mathbf{b}$.*

Доказательство. В самом деле, гиперцентр G с номером $\mathbf{b}$ включает в себя нормальное замыкание любой циклической подгруппы. □

Пусть G — локально нильпотентная группа без кручения. Напомним, что её подгруппа называется *сервантной* (или *изолированной*), если из включения $x^k \in H$ вытекает, что $x \in H$ для любого натурального k. Отметим, что пересечение любого семейства сервантных подгрупп будет сервантной подгруппой. Поэтому для любой подгруппы K группы G можно определить *сервантную оболочку* (*изолятор*) как пересечение всех сервантных подгрупп, включающих в себя K. Если K нормальна в G, то её сервантная оболочка L может быть определена следующим образом: $L/K = \mathrm{Tor}(G/K)$, в частности, L также нормальна. Если $K \leqslant \zeta(G)$, то $L \leqslant \zeta(G)$, если K абелева, то и L абелева, если K нильпотентна, то и L нильпотентна и $\mathrm{ncl}(K) = \mathrm{ncl}(L)$ (см, например, [5, § 66, 67]). Также отметим, что централизатор любого подмножества G будет сервантной подгруппой [5, § 66, 67].

Лемма 1.2. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, и $\mathrm{ncl}(G) = 2$. Пусть d — элемент G, для которого*

$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle d\rangle^G) = \mathbf{k}$ *максимален. Обозначим через* D *сервантную оболочку* $\langle d\rangle^G$, *и пусть* $H = C_G(D)$. *Тогда* $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle x\rangle^H)D/D < \mathbf{k}$ *для каждого элемента* $x \in H$.

Доказательство. Отметим, что D — нормальная группа, а G/D не имеет кручения. Более того, $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(D) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle d\rangle^G) = \mathbf{k}$.

Если допустить, что $\mathbf{k} = 1$, то нормальное замыкание каждой циклической подгруппы G будет локально циклическим. Тогда, как отмечалось выше, $\zeta(G)$ включает в себя нормальное замыкание каждой циклической подгруппы, так что $G = \zeta(G)$, что противоречит условию. Это противоречие показывает, что $\mathbf{k} > 1$.

Предположим противное, пусть H содержит такой элемент h, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^H D/D) = \mathbf{k}$. Поскольку $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^G) \leqslant \mathbf{k}$, то $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^G D/D) \leqslant \mathbf{k}$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^G D/D) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^H D/D) \leqslant \mathbf{k}$, а потому сервантные оболочки $\langle h\rangle^G D/D$ и $\langle h\rangle^H D/D$ совпадают. Сервантность D влечёт тогда, что

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^G D) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^G) + \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(D) = 2\mathbf{k}.$$

С другой стороны,

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^G D) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^G) + \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(D) - \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^G \cap D).$$

Отсюда вытекает, что $\langle h\rangle^G \cap D = \langle 1\rangle$.

Пусть $x \in C_G(\langle h\rangle^G D/D)$. Тогда $[x, y] \in D$ для любого элемента $y \in \langle h\rangle^G$. Поскольку $[x, y] \in \langle h\rangle^G$, то $[x, y] \in \langle h\rangle^G \cap D = \langle 1\rangle$. Следовательно, $x \in C_G(\langle h\rangle^G)$, так что $C_G(\langle h\rangle^G D/D) \leqslant C_G(\langle h\rangle^G)$. Очевидное включение $C_G(\langle h\rangle^G) \leqslant C_G(\langle h\rangle^G D/D)$ доказывает теперь равенство $C_G(\langle h\rangle^G) = C_G(\langle h\rangle^G D/D)$.

Пусть $z \in C_G(hd)$. Тогда $hd = (hd)^z = h^z d^z$. Так как $d^z \in D$, то

$$hD = hdD = h^z d^z D = h^z D = (hD)^z.$$

Из доказанного выше получаем $z \in C_G(\langle h\rangle^G)$. В частности, $h^z = h$ и $d^z = (hd)\big((h)^z\big)^{-1} = hdh^{-1} = d$. Итак, $z \in C_G(d) \cap C_G(\langle h\rangle^G)$ или $C_G(hd) \leqslant C_G(d) \cap C_G(\langle h\rangle^G)$.

Обозначим через C сервантную оболочку $\langle h\rangle^H$. Положим $u = hd$, $U = \langle u\rangle^G$. Тогда

$$UC/C = \langle u\rangle^G C/C = \langle uC\rangle^{G/G} = \langle dC\rangle^{G/C} = \langle d\rangle^G C/C.$$

Равенство $\langle h\rangle^G \cap D = \langle 1\rangle$ влечёт за собой $C \cap D = \langle 1\rangle$. В частности, $\langle d\rangle^G \cap C = \langle 1\rangle$. Отсюда вытекает, что

$$UC/C = \langle d\rangle^G C/C \cong \langle d\rangle^G / C(C \cap \langle d\rangle^G) \cong \langle d\rangle^G.$$

В частности, $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle u\rangle^G C/C) = k$. Как и выше, отсюда вытекает, что $\langle u\rangle^G \cap C = \langle 1\rangle$. Используя приводимые ранее аргументы, получаем, что $C_G(\langle u\rangle^G) = C_G(\langle u\rangle^G C/C)$. Однако $uC = hdC = dhC = dC$. Снова обращаясь к равенству $D \cap C = \langle 1\rangle$, получаем

$$C_G(\langle d\rangle^G) = C_G(\langle d\rangle^G C/C) = C_G(\langle u\rangle^G C/C) = C_G(\langle u\rangle^G).$$

Поскольку централизатор каждого подмножества будет сервантной подгруппой, то $C_G(\langle d\rangle^G) = C_G(D) = H$. Тогда $H = C_G(\langle u\rangle^G) \leqslant C_G(u)$. Поэтому $u^\nu = u$ для любого элемента $\nu \in H$ и $\langle u\rangle^H = \langle u\rangle$. Но в этом случае

$$\langle hD\rangle = \langle uD\rangle = \langle u\rangle D/D = \langle u\rangle^H D/D = \langle uD\rangle^{H/D} = \langle hD\rangle^{H/C} = \langle h\rangle^H D/D.$$

В частности, $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle h\rangle^H D/D) = 1$. Достигнутым противоречием и доказывается данный результат. $\square$

Следствие 1.3. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, и $\mathrm{ncl}(G) = 2$. Тогда G включает в себя такую нормальную сервантную подгруппу K, имеющую конечный ранг Хирша—Зайцева, что G/K абелева. Более того, $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)/3$.*

Доказательство. Выберем такой элемент d_1, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle d_1\rangle^G) = \mathbf{k}$ будет максимальным из возможных. Очевидно, что $\mathbf{k} \leqslant \mathbf{b}$. Пусть D_1 — сервантная оболочка $\langle d_1\rangle^G$ и $H_1 = C_G(D_1)$. Как и выше, H_1 является сервантной и $H_1 = C_G(\langle d_1\rangle^G)$.

Пусть g — произвольный элемент G. Так как $G/\zeta(G)$ абелева, то отображение $\chi_g\colon x \to [x,g]$, $x \in G$, является эндоморфизмом G, кроме того, $\mathrm{Ker}\,\chi_g = C_G(g)$, $\mathrm{Im}\,\chi_g = [G,g]$ и имеем изоморфизм

$$[G,g] = \mathrm{Im}\,\mathbf{k}_g \cong G/\mathrm{Ker}\,\mathbf{k}_g = G/C_G(g).$$

Поскольку $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle g\rangle^G) \leqslant \mathbf{b}$, то $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}([G,g]) \leqslant \mathbf{b}$. Ввиду указанного изоморфизма $G/C_G(g)$ — абелева группа без кручения, 0-ранг которой не выше $\mathbf{b}$.

Положим $U = G/D_1$ и $L = H_1/D_1$. Тогда лемма 1.2 показывает, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle y\rangle^L) \leqslant \mathbf{k}-1$ для любого элемента $y \in L$.

Выберем в G/H_1 свободную абелеву подгруппу C_1/H_1 максимального 0-ранга. Тогда G/C_1 будет периодической. Изоморфизм $[G,d_1] \cong G/H_1(g)$ показывает, что $\mathbf{r}_0(C_1/H_1) \leqslant \mathbf{k}$. Тогда существует такая конечно порождённая подгруппа E_1, имеющая не более $\mathbf{k}$ образующих, что $C_1 = E_1H_1$. Ввиду наших условий E_1^G имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{kb} \leqslant \mathbf{b}^2$. Тогда $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(D_1E_1^G) \leqslant \mathbf{k}+\mathbf{b}^2 \leqslant \mathbf{b}+\mathbf{b}^2$.

Обозначим через K_1 сервантную оболочку $D_1E_1^G$. Тогда $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(D_1E_1^G) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K_1)$ и G/H_1K_1 периодическая. Отсюда вытекает, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle gK_1\rangle^{G/K}1) \leqslant \mathbf{k}-1$ для любого $g \in G$.

Теперь повторим для G/K_1 все предыдущие аргументы. После конечного числа шагов найдём такую нормальную сервантную подгруппу K, имеющую конечный ранг Хирша—Зайцева, что G/K абелева. Более того, доказанное выше показывает также, что

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant 1+\ldots+\mathbf{b}+1+2^2+\ldots+\mathbf{b}^2 = \\ = \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)}{2} + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(2\mathbf{b}+1)}{6} = \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)}{3}. \quad \square$$

Следствие 1.4. *Пусть G — нильпотентная группа без кручения, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, и $\mathrm{ncl}(G) = c$. Тогда G включает в себя такую нормальную сервантную подгруппу K конечного ранга Хирша—Зайцева, что G/K абелева. Кроме того,*

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{c-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)}.$$

Доказательство. Пусть

$$\langle 1\rangle = Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant \ldots \leqslant Z_c = G -$$

верхний центральный ряд G. Каждый его член является сервантной подгруппой (см., например, [5, § 66, 67]). Воспользуемся индукцией по c. Если $c = 2$, утверждение вытекает из следствия 1.3. Предположим теперь, что $c > 2$, и рассмотрим фактор—группу G/Z_1. Ввиду индуктивного допущения G/Z_1 включает в себя нормальную сервантную подгруппу K_1/Z_1, для которой $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K_1/Z_1)$ конечен и $(G/Z_1)(K_1/Z_1) \cong G/K_1$ абелева. Поскольку $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K_1/Z_1)$ конечен, K_1 имеет конечный субнормальный ряд

$$\langle 1\rangle = Z_0 \leqslant Z_1 = U_1 \lhd \ldots \lhd U_r = K_1,$$

факторы U_{j+1}/U_j которого локально циклические и без кручения, $1 \leqslant j \leqslant r-1$. Выберем в каждой из подгрупп U_{j+1} элемент $u_{j+1} \in U_{j+1} \setminus U_j$, $1 \leqslant j \leqslant r-1$, и обозначим через K_2 сервантную оболочку $\langle u_1\rangle^G \ldots \langle u_r\rangle^G$. Так как $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K_2) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(\langle u_1\rangle^G \ldots \langle u_r\rangle^G)$, то $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K_2) \leqslant r\mathbf{b}$. Группа G/K_2 не имеет кручения, а фактор $(K_1/K_2)(Z_1K_2/K_2)$ будет периодическим. Из включения $Z_1K_2/K_2 \leqslant \zeta(G/K_2)$ вытекает, что $\zeta(G/K2)$ включает в себя сервантную оболочку Z_1K_2/K_2. Тот факт, что G/K_1 не имеет кручения, показывает, что сервантная оболочка Z_1K_2/K_2 совпадает с K_1/K_2. Таким образом, $K_1/K_2 \leqslant \zeta(G/K_2)$ и $\mathrm{ncl}(G/K_2) = 2$. Теперь можно использовать следствие 1.3. Из данного доказательства и доказательства следствия 1.3 получим следующую границу для $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K)$:

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant d + d\mathbf{b} + d\mathbf{b}^2 + \ldots + d\mathbf{b}^{c-2}, \quad \text{где} \quad d = \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)}{3}.$$

Теперь имеем

$$d + d\mathbf{b} + d\mathbf{b}^2 + \ldots + d\mathbf{b}^{c-2} = d(1 + \mathbf{b} + \mathbf{b}^2 + \ldots + \mathbf{b}^{c-2}) = \frac{d(\mathbf{b}^{c-1}-1)}{\mathbf{b}-1}. \quad \square$$

Непосредственно из следствия 1.4 и леммы 1.1 получаем предложение 1.5.

Предложение 1.5. *Пусть G — локально нильпотентная группа без кручения, в которой нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$. Тогда G включает в себя такую нормальную сервантную подгруппу K конечного ранга Хирша—Зайцева, что*

G/K абелева. Кроме того,

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{b-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)}.$$

2. Свойства локально обобщённо радикальных групп, в которых нормальные замыкания циклических подгрупп имеют конечные ограниченные ранги Хирша—Зайцева

Из результатов статьи [16] вытекает, что если фактор-группа $G/\zeta(G)$ конечна, то её коммутант $[G,G]$ также конечен. В качестве следствия отсюда получается следующее небольшое обобщение: если фактор-группа $G/\zeta(G)$ локально конечна, то и коммутант $[G,G]$ локально конечен. Используя обычную индукцию, из последнего результата получаем следующее предложение.

Предложение 2.1. *Пусть G — группа. Предположим, что $G/\zeta_j(G)$ локально конечна. Тогда $\gamma_{j+1}(G)$ локально конечна.*

Далее мы будем использовать функцию τ, о которой уже говорилось во введении. Для τ можно указать следующую границу. По теореме Жордана (см., например, [19, теорема 9.2]) существует функция β, обладающая следующим свойством: если G — конечная подгруппа $\mathrm{GL}_n(F)$, где F — поле характеристики 0, то G включает в себя абелеву нормальную подгруппу, индекс которой конечен и не превосходит $\beta(n)$.

В [6, теорема 36.14] для β была получена следующая граница:

$$\beta(n) \leqslant \big((8n)^{1/2}+1\big)^u - \big((8n)^{1/2}-1\big)^u,$$

где $u = 2n^2$. Другая граница для β была получена в [18]:

$$\beta(n) \leqslant (n!)12^{n(\pi(n+1)+1)},$$

где $\pi(n+1)$ — число простых чисел, меньших $n+1$. Для разрешимой G в [11] было показано, что

$$\beta(n) \leqslant 2^{(4n-3)/3+1}3^{(10n-3)/9}.$$

Кроме того, если $n = 3\cdot 4^m$, то $\beta(n)$ достигает этого значения. Используя функцию β, можно получить следующее ограничение для $\tau(n)$:

$$\tau(n) \leqslant \beta(n)\mathbf{k}_n^n,$$

где $\mathbf{k}_n$ — произведение всех $\varphi(m)$, для которых $\varphi(m) \leqslant n$, $n \in \mathbf{N}$ (см., например, [19, теорема 9.33]). Однако функция, данная здесь, растёт очень быстро. В [10] был предложен метод нахождения значений функции τ на компьютере.

Предложение 2.2. *Пусть G — группа, K — её нормальная подгруппа, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *K нильпотентна и не имеет кручения*;
2) *ранг $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) = \mathbf{r}$ конечен*;
3) *группа G/K локально конечна.*

Если $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$, то G включает в себя такую нормальную нильпотентную подгруппу без кручения $L \geqslant K$, что $\mathrm{ncl}(L) = \mathrm{ncl}(K)$, $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(L) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K)$, G/L конечна и $|G/L| \leqslant \mathrm{ncl}(K)\tau(\mathbf{r})$.

Доказательство. Подгруппа K имеет конечный центральный ряд

$$\langle 1 \rangle = Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant \ldots \leqslant Z_n = K,$$

факторы которого не имеют кручения. Положим $C_{j+1} = C_G(Z_{j+1}/Z_j)$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Как было отмечено выше, группа R/C_{j+1} конечна и $|R/C_{j+1}| \leqslant \tau\big(\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(Z_{j+1}/Z_j)\big) \leqslant \tau(\mathbf{r})$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Пусть $L = \bigcap\limits_{0 \leqslant j \leqslant n-1} C_{j+1}$. Тогда по теореме Ремака, G/L вкладывается в прямое произведение $G/C_1 \times \ldots \times G/C_n$. Отсюда вытекает, что $|G/L| \leqslant n\tau(\mathbf{r})$. Далее, Z_n — гиперцентр подгруппы L с номером n и группа L/Z_n периодическая. Предложение 2.1 показывает, что $\gamma_{n+1}(C)$ локально конечна. Так как $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$, то $\gamma_{n+1}(L) = \langle 1 \rangle$, так что L нильпотентна и $\mathrm{ncl}(L) = \mathrm{ncl}(K)$. Наконец, из периодичности L/K получаем, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(L) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K)$. □

Лемма 2.3. *Пусть G — группа и L — её локально нильпотентный радикал. Предположим, что $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то G включает в себя нормальные подгруппы K, R, удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *K — нильпотентная подгруппа, имеющая конечный ранг Хирша—Зайцева*;
2) *$R \cap L = K$*;
3) *группа L/K абелева и не имеет кручения*;
4) *группа $R/K = \mathrm{Tor}(G/K)$ конечна*;
5) $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{c-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)$;
6) $|R/K| \leqslant \mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})$.

Доказательство. Равенство $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$ обеспечивает тот факт, что L — локально нильпотентная подгруппа без кручения. По предложению 1.5 L включает в себя такую нормальную сервантную подгруппу K конечного ранга Хирша—Зайцева, что группа L/K абелева. Из доказательства предыдущего результата видно, что K G-инвариантна. Положим $R/K = \mathrm{Tor}(G/K)$. Так как L/K не имеет кручения, то $L/K \cap R/K = \langle 1 \rangle$. Как отмечалось выше, K имеет верхний центральный ряд

$$\langle 1 \rangle = Z_0 \leqslant Z_1 \leqslant \ldots \leqslant Z_n = K,$$

факторы которого не имеют кручения, и $n \leqslant \mathbf{b}$. По предложению 2.2 R включает в себя такую нормальную подгруппу C, что C нильпотентна и не имеет кручения, более того $\mathrm{ncl}(C) = \mathrm{ncl}(K)$ и $|R/C| \leqslant n\tau(\mathbf{b}) \leqslant \mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})$. Из доказательства предложения 2.2 можно увидеть, что C нормальна в G. В частности,

$C \leqslant L$. Поскольку C/K периодическая, сервантная оболочка K в L включает в себя C. Но K — сервантная подгруппа L, а потому $K = C$. $\square$

Лемма 2.4. *Пусть G — группа и L — её локально нильпотентный радикал. Предположим, что* $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$, *и пусть* $T/L = \mathrm{Tor}(G/L)$. *Также предположим, что T/L локально конечна. Пусть $x \in T \setminus L$ и $X = \langle x \rangle^G$. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий* $\mathbf{b}$, *то группа XL/L конечна и* $|XL/L| \leqslant \mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})$.

Доказательство. Равенство $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$ обеспечивает тот факт, что L не имеет кручения. Лемма 1.1 показывает, что группа L нильпотентна и $\mathrm{ncl}(L) \leqslant \mathbf{b}$. Пусть $V = X \cap L$. Тогда X/V локально конечна. По предложению 2.2 X/V будет конечной, более того, $|X/V| \leqslant \mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})$. $\square$

Следствие 2.5. *Пусть G — группа и L — локально нильпотентный радикал G. Предположим, что* $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$, *и пусть* $T/L = \mathrm{Tor}(G/L)$. *Также предположим, что T/L локально конечна. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий* $\mathbf{b}$, *то подгруппа $[T/L, T/L]$ конечна и* $|[T/L, T/L]| \leqslant \nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big)$.

Доказательство. По лемме 2.4 нормальное замыкание $\langle xA \rangle^{G/A}$ каждого элемента $xA \in T/A$ имеет порядок, не превосходящий $\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})$. В частности, xA имеет не более $\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})$ сопряжённых в G/A. Поэтому можно применить результат Б. Неймана [15]. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть G — локально обобщённо радикальная группа, для которой* $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$. *Пусть A, L — такие нормальные подгруппы G, что A абелева, $A \leqslant L$ и L/A конечна и имеет порядок k. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий* $\mathbf{b}$, *то G включает в себя такие нормальные подгруппы K, D, что выполняются следующие условия*:

1) *K — нормальная абелева подгруппа без кручения*;
2) *ранг Хирша—Зайцева подгруппы K конечен и не превосходит* $k\mathbf{b}$;
3) *$K \leqslant D$ и D/K конечны, более того,* $|D/K| \leqslant \tau(k\mathbf{b})$;
4) $\mathrm{Tor}(G/D) = \langle 1 \rangle$;
5) *LD/D абелева и не имеет кручения.*

Доказательство. Для каждого элемента $g \in L$ отображение $k_g \colon a \to [a, g]$, $a \in A$, будет эндоморфизмом A, для которого $\mathrm{Ker}\, k_g = C_A(g)$ и $\mathrm{Im}\, k_g = [A, g]$. В частности, получим изоморфизм $[A, g] = \mathrm{Im}\, k_g = A/\mathrm{Ker}\, k_g = A/C_A(g)$. Из включений $[A, g] \leqslant [G, g] \leqslant \langle g \rangle^G$ вытекает, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}([A, g]) \leqslant \mathbf{b}$. Пусть $\{g_1, \ldots, g_k\}$ — полный набор представителей смежных классов L по A. Тогда $[A, L] = [A, g_1] \ldots [A, g_k]$, откуда вытекает соотношение $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}([A, L]) \leqslant k\mathbf{b}$. Так как L нормальна, то $[A, L]$ также нормальна. Из равенства $\langle 1 \rangle = \mathrm{Tor}(G)$ следует, что A не имеет кручения, а потому и $[A, L]$ не имеет кручения. Положим $D/[A, L] = \mathrm{Tor}(G/[A, L])$ и $K = C_D([A, L])$. Выше отмечалось, что D/K конечна и $|D/K| \leqslant \tau(k\mathbf{b})$. Подгруппа K будет центральным расширением $[A, L]$

с помощью локально конечной группы. Предложение 2.1 показывает тогда, что $[K, K]$ локально конечна. Равенство $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$ обеспечивает тот факт, что K абелева и не имеет кручения. Из выбора K получаем равенство $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}([A, L]) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K)$. Наконец, поскольку $[A, L] \leqslant D$, то $AD/D \leqslant \zeta(LD/D)$. Применение теоремы Шура доказывает конечность $[LD/D, LD/D]$. Однако $\mathrm{Tor}(G/D) = \langle 1 \rangle$, а потому $[LD/D, LD/D] = \langle 1 \rangle$, так что LD/D абелева и не имеет кручения. □

Следствие 2.7. *Пусть G — локально обобщённо радикальная группа и L — её локально нильпотентный радикал. Предположим, что $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$, и пусть T — нормальная подгруппа G, включающая в себя L, для которой T/L конечна и имеет порядок k. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то G имеет ряд нормальных подгрупп $C_1 \leqslant R_1 \leqslant C_2 \leqslant R_2$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $\mathrm{Tor}(G/R_2) = \langle 1 \rangle$;
2) $|R_2/C_2| \leqslant \tau(k\mathbf{b})$;
3) C_2/R_1 *абелева, не имеет кручения и* $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(C_2/R_1) \leqslant k\mathbf{b}$;
4) $|R_1/C_1| \leqslant \mathbf{b}\,\tau\big(\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)\big)$;
5) C_1 *нильпотентна, не имеет кручения и*
$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(C) \leqslant \mathbf{b}^2 + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)};$$
6) TR_2/R_2 *абелева и не имеет кручения.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$, то L не имеет кручения. Лемма 1.1 показывает, что L нильпотентна и $\mathrm{ncl}(A) \leqslant \mathbf{b}$. По предложению 1.5 L включает в себя такую нормальную подгруппу K, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant (\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)$, а L/K абелева и без кручения. Будучи сервантной оболочкой (в L) коммутанта L, K G-инвариантна. Пусть $R_1/K = \mathrm{Tor}(G/K)$. По предложению 2.2 R включает в себя такую нормальную подгруппу C_1, что $\mathrm{ncl}(C_1) = \mathrm{ncl}(K)$, $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(C_1) = \mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K)$, R_1/C_1 конечна и $|R_1/C_1| \leqslant \mathbf{b}\,\tau\big(\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)\big)$. Из доказательства предложения 2.2 видно, что подгруппа C_1 G-инвариантна.

Так как L/K не имеет кручения, $R_1 \cap A = K$. Тогда $AR_1/R_1 \cong A/(R_1 \cap A) = A/K$. Поэтому AR_1/R_1 не имеет кручения и абелева, так что можно применить лемму 2.6. По этой лемме G включает в себя такие нормальные подгруппы $R_2 \geqslant C_2 \geqslant R_1$, что $\mathrm{Tor}(G/R_2) = \langle 1 \rangle$, $|R_2/C_2| \leqslant \tau(k\mathbf{b})$, C_2/R_1 не имеет кручения и абелева и $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(C_2/R_1) \leqslant k\mathbf{b}$. TR_2/R_2 также не имеет кручения и абелева. □

Следствие 2.8. *Пусть G — локально обобщённо радикальная группа и L — её локально нильпотентный радикал. Предположим, что $\mathrm{Tor}(G) = \langle 1 \rangle$, и положим $T/L = \mathrm{Tor}(G/L)$. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то G имеет ряд нормальных подгрупп $C_1 \leqslant R_1 \leqslant C_2 \leqslant R_2 \leqslant D \leqslant T$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $\mathrm{Tor}(G/R_2) = \langle 1 \rangle$;

2) $|R_2/C_2| \leqslant \tau\Big(\mathbf{b}\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big)\Big)$;
3) C_2/R_1 *абелева, не имеет кручения и* $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(C_2/R_1) \leqslant \mathbf{b}\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big)$;
4) $|R_1/C_1| \leqslant \mathbf{b}\,\tau\big(\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)\big)$;
5) C_1 *нильпотентна, не имеет кручения и*

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(C) \leqslant \mathbf{b}^2 + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)};$$

6) DR_2/R_2 *абелева, не имеет кручения*;
7) T/D *абелева и периодическая.*

Доказательство. Так как G — локально обобщённо радикальная группа, то T/L локально конечна. Положим $D/L = [T/L, T/L]$. Тогда следствие 2.5 показывает, что D/L конечна и $|D/L| \leqslant \nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big)$. Теперь можно применить следствие 2.7. □

Пусть G — группа, R — кольцо и A — RG-модуль. Построим *верхний RG-центральный ряд*

$$\langle 0\rangle = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_\alpha \leqslant A_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant A_\gamma$$

следующим образом: $A_1 = \zeta_{RG}(A) = \{a \in A \mid a(g-1) = 0\}$, $A_{\alpha+1}/A_\alpha = \zeta_{RG}(A/A\alpha)$ для всех порядковых чисел $\alpha < \gamma$, $\zeta_{RG}(A/A_\gamma) = \langle 0\rangle$. Последний член A_γ этого ряда называется *верхним RG-гиперцентром* A, будем обозначать его через $\zeta^\infty_{RG}(A)$.

Если $A = A_\alpha$, то A называется *RG-гиперцентральным*; если γ ещё и конечно, то A называется *RG-нильпотентным*.

Пусть B, C — RG-подмодули A, причём $B \leqslant C$. Фактор C/B называется *G-эксцентральным*, если $C_G(C/B) \neq G$. RG-подмодуль C модуля A называется *RG-гиперэксцентральным*, если он имеет возрастающий ряд

$$\langle 0\rangle \leqslant C_0 \leqslant C_1 \leqslant \ldots \leqslant C_\alpha \leqslant C_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant C_\gamma = C$$

таких RG-подмодулей A, что каждый фактор $C_{\alpha+1}/C_\alpha$ — G-эксцентральный простой RG-модуль для любого $\alpha < \gamma$.

Следуя Д. И. Зайцеву [3], будем говорить, что RG-модуль A *имеет Z-разложение*, если

$$A = \zeta^\infty_{RG}(A) \oplus \mathbf{E}^\infty_{RG}(A),$$

где $\mathbf{E}^\infty_{RG}(A)$ — максимальный RG-гиперэксцентральный RG-подмодуль A. Отметим, что в этом случае $\mathbf{E}^\infty_{RG}(A)$ включает каждый RG-гиперэксцентральный RG-подмодуль, в частности, он единственен.

В самом деле, пусть B — RG-гиперэксцентральный RG-подмодуль A и положим $E = \mathbf{E}^\infty_{RG}(A)$. Если $(B+E)/E \neq \langle 0\rangle$, то он включает в себя ненулевой простой RG-подмодуль U/E. Так как $(B+E)/E \cong B/(B\cap E)$, то U/E изоморфен некоторому простому RG-фактору B, а это влечёт неравенство $G/C_G(U/E) \neq G$. С другой стороны, $(B+E)/E \leqslant A/E \cong \zeta^\infty_{RG}(A)$, так что

$G/C_G(U/E) = G$. Это противоречие показывает, что $B \leqslant E$. Следовательно, $\mathbf{E}^{\infty}_{RG}(A)$ включает в себя каждый RG-гиперэксцентральный RG-подмодуль, и потому $\mathbf{E}^{\infty}_{RG}(A)$ единственен.

Пусть G — группа и A — нормальная абелева подгруппа без кручения. Будем говорить, что A *рационально G-неприводима* (в G), если для каждой неединичной G-инвариантной подгруппы B из A соответствующая фактор-группа A/B будет периодической.

Лемма 2.9. *Пусть G — группа и A — нормальная абелева подгруппа без кручения, для которой группа G/A абелева. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий* $\mathbf{b}$, *то A имеет ряд сервантных G-инвариантных подгрупп*

$$\langle 1\rangle = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_\alpha \leqslant A_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant A_\gamma,$$

где факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ рационально G-неприводимы и не G-центральны, $0 \leqslant \alpha < \gamma$, а G/A_γ гиперцентральна.

Доказательство. Будем рассматривать A как $\mathbf{Z}L$-модуль, где $L = G/A$. Пусть D — делимая оболочка A. Можно расширить естественным образом действие L на A до действия L на D, тогда D становится $\mathbf{Z}L$-модулем. В свою очередь, так как D делима и не имеет кручения, можно продолжить действие $\mathbf{Z}L$ на A естественным образом до действия $\mathbf{Q}L$ на D, так что D становится $\mathbf{Q}L$-модулем. Пусть $d \in D$. Тогда $d^k = b \in A$ для некоторого $k \in N$. Положим $B = \langle b\rangle^G$, тогда B имеет конечный 0-ранг. Пусть U — сервантная оболочка B в D. Отметим, что U делима и $\mathbf{r}_0(U) = \mathbf{r}_0(B)$. Другими словами, размерность $\dim_{\mathbf{Q}}(U)$ конечна. Очевидно $d \in U$, так что $\mathbf{Q}L$-подмодуль D, порождённый d, будет конечномерным. В свою очередь отсюда вытекает, что каждый конечно порождённый $\mathbf{Q}L$-подмодуль V из D имеет конечную размерность над $\mathbf{Q}$. В частности, он артинов. Но тогда V имеет Z-разложение [13, следствие 10.22]:

$$V = \zeta^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(V) \oplus \mathbf{E}^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(V).$$

Пусть $\mathbf{L}$ — семейство всех конечно порождённых $\mathbf{Q}L$-подмодулей D. Пусть $V, W \in L$, $V \leqslant W$. Имеем

$$V = \zeta^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(V) \oplus \mathbf{E}^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(V), \quad W = \zeta^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(W) \oplus \mathbf{E}^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(W).$$

Очевидно, $\zeta^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(V) \leqslant \zeta^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(W)$. Ввиду приведённого выше замечания $\mathbf{E}^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(V) \leqslant \leqslant \mathbf{E}^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(W)$, так что

$$V \cap \zeta^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(W) = \zeta^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(V), \quad V \cap \mathbf{E}^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(W) = \mathbf{E}^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(V).$$

Поскольку $D = \bigcup\limits_{V \in L} V$, то

$$D = \Bigl(\bigcup_{V \in L} \zeta^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(V)\Bigr) \oplus \Bigl(\bigcup_{V \in L} \mathbf{E}^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(V)\Bigr) = \zeta^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(D) \oplus \mathbf{E}^{\infty}_{\mathbf{Q}L}(D).$$

Другими словами, D имеет Z-разложение. Пусть

$$\langle 0\rangle = D_0 \leqslant D_1 \leqslant \ldots \leqslant D_\alpha \leqslant D_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant D_\gamma \,-$$

возрастающий ряд $\mathbf{Q}L$-подмодулей D, факторы которого простые и G-эксцентральные. Положим $A_\alpha = A \cap D_\alpha$, $\alpha \leqslant \gamma$. Тогда A_α — G-инвариантная сервантная подгруппа A для всех $\alpha \leqslant \gamma$. Поскольку $D_{\alpha+1}/D_\alpha$ — простой $\mathbf{Q}L$-модуль, то $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ рационально G-неприводим. Более того,

$$A_{\alpha+1}/A_\alpha = A_{\alpha+1}/(D_\alpha \cap A) = A_{\alpha+1}/(D_\alpha \cap A_{\alpha+1}) \cong (A_{\alpha+1} + D\alpha)/D_\alpha \leqslant D_{\alpha+1}/D_\alpha.$$

Отметим, что $D_{\alpha+1}/D_\alpha$ — сервантная оболочка $(A_{\alpha+1} + D_\alpha)/D_\alpha$, а потому $C_L(D_{\alpha+1}/D_\alpha) = C_L((A_{\alpha+1} + D_\alpha)/D_\alpha)$, откуда вытекает, что $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ G-эксцентрален, $\alpha < \gamma$. Наконец, $A/A_{\gamma+1} = A/(D_\gamma \cap A) \cong (A + D_\gamma)/D_\gamma$, так что $A/A_{\gamma+1}$ G-гиперцентрален. □

Лемма 2.10. *Пусть G — группа и A — такая её нормальная абелева подгруппа без кручения, что G/A абелева. Предположим, что A имеет ряд сервантных G-инвариантных подгрупп*

$$\langle 1 \rangle = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_\alpha \leqslant A_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant A_\gamma = A,$$

где факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ рационально G-неприводимы и не являются G-центральными, $0 \leqslant \alpha < \gamma$. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то ранг $\mathbf{r}_0(A)$ конечен, более того, $\mathbf{r}_0(A) \leqslant \mathbf{b}^2$.

Доказательство. Поскольку G/A абелева, то отображение $\mathbf{k}_g \colon a \to [a, g]$, $a \in A$, является $\mathbf{Z}G$-эндоморфизмом A, причём $\operatorname{Ker} \mathbf{k}_g = C_A(g)$ и $\operatorname{Im} \mathbf{k}_g = [A, g]$, и имеет место изоморфизм $[A, g] = \operatorname{Im} \mathbf{k}_g = A/\operatorname{Ker} \mathbf{k}_g = A/CA(g)$. Из включений $[A, g] \leqslant [G, g] \leqslant \langle g \rangle^G$ вытекает, что $\mathbf{r}_0([A, g]) \leqslant \mathbf{b}$. Используя отмеченный выше изоморфизм, получаем, что $\mathbf{r}_0\big(A/C_A(g)\big) \leqslant \mathbf{b}$.

Из наших условий вытекает, что A включает в себя такую G-инвариантную подгруппу A_1, что A_1 рационально G-неприводима и $G \neq C_G(A_1)$. Тогда G имеет элемент g_1, а A_1 имеет элемент a_1, для которых $u_{11} = [a_1, g_1] \neq 1$.

Положим $C_1 = C_A(g_1)$. Тогда по доказанному выше $\mathbf{r}_0(A/C_1) \leqslant \mathbf{b}$. Так как G/A абелева, то $C_A(g_1)$ G-инвариантна. Если $C_1 = \langle 1 \rangle$, то $\mathbf{r}_0(A) \leqslant \mathbf{b}$, и всё доказано. Допустим, что $C_1 \neq \langle 1 \rangle$. Тогда C_1 включает такую G-инвариантную подгруппу D_2, что D_2 рационально G-неприводима и $G \neq C_G(D_2)$. Положим $D_1 = A_1$. Если допустить, что $D_1 \cap C_1 \neq \langle 1 \rangle$, то $D_1/(D_1 \cap C_1)$ периодическая. С другой стороны, C_1 — сервантная подгруппа A, так что A/C_1 не имеет кручения. Тогда и $D_1/(D_1 \cap C_1) \cong D_1C_1/C_1$ не имеет кручения. Отсюда вытекает, что $D_1 = D_1 \cap C_1$ или $D_1 \leqslant C_1$. Но в этом случае $[a_1, g_1] = 1$. Это противоречие показывает, что $D_1 \cap C_1 = \langle 1 \rangle$. Снова имеются такие элементы $g_2 \in G$ и $a_2 \in D_2$, что $[a_2, g_2] = u_{22} \neq 1$. Имеем $g_2^{-1} a_1 g_2 = a_1 u_{12}$, где $u_{12} = [a_1, g_2]$. Заметим, что $u_{12} \in D_1$. Рассмотрим элемент $a_1 a_2$. Имеем

$$g_1^{-1}(a_1a_2)g_1 = (g_1^{-1}a_1g_1)(g_1^{-1}a_2g_1) = a_1a_2u_{11},$$
$$g_2^{-1}(a_1a_2)g_2 = (g_2^{-1}a_1g_2)(g_2^{-1}a_2g_2) = a_1a_2u_{12}u_{22}.$$

Если допустить, что u_{11} и $u_{12}u_{22}$ не будут $\mathbf{Z}$-независимыми, то существуют $k_1, k_2 \in \mathbf{N}$, для которых $u_{11}^{k_1} = (u_{12}u_{22})k^2$. Отсюда следует, что $u_{11}^{k_1} u_{12}^{-k_2} = u_{22}^{k_2}$.

Напомним, что $u_{11}, u_{12}D_1, u_{22}D_2$ и $D_1 \cap D_2 = \langle 1\rangle$. Из последнего равенства вытекает, что $u_{22}^{k_2} = 1$, т. е. $k_2 = 0$. Тогда $u_{11}^{k_1} = 1$, так что $k_1 = 0$. Это доказывает, что элементы u_{11} и $u_{12}u_{22}$ будут $\mathbf{Z}$-независимыми, а потому $\mathbf{r}_0(\langle a_1a_2\rangle^G) \geqslant 2$.

Положим $C_2 = C_1 \cap C_A(g_2)$. Тогда C_2 — такая G-инвариантная подгруппа A, что $\mathbf{r}_0(A/C_2) \leqslant 2\mathbf{b}$. Если $C_2 = \langle 1\rangle$, то $\mathbf{r}_0(A) \leqslant 2\mathbf{b}$, и всё доказано. Предположим, что $C_2 \neq \langle 1\rangle$. Тогда C_2 включает в себя такую G-инвариантную подгруппу D_3, что D_3 рационально G-неприводима и $G \neq C_G(D_3)$. Как и выше, $D_1D_2 \cap C_2 = \langle 1\rangle$. Снова найдутся элементы $g_3 \in G$ и $a_3 \in D_3$, для которых $[a_3, g_3] = u_{33} \neq 1$.

Допустим, что уже выбраны элементы $\{g_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$ и $\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$ и семейства G-инвариантных подгрупп $\{C_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$ и $\{D_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$ из A, удовлетворяющие следующим условиям:

группа D_j рационально G-неприводима и $G \neq C_G(D_j)$;

$D_1 \dots D_n = D_1 \times \dots \times D_n$;

$a_j \in D_j$;

$[a_j, g_k] = u_{jk}$ и $u_{jj} \neq 1$;

$a_j \in C_A(g_1, \dots, g_{j-1}) = C_{j-1}$;

$\mathbf{r}_0(A/C_j) \leqslant j\,\mathbf{b}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n$.

Рассмотрим элементы $g_j^{-1}(a_1 \dots a_n)g_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Имеем

$$\begin{aligned} &g_j^{-1}(a_1 \dots a_n)g_j = \\ &\quad = (g_j^{-1}a_1g_j)\dots(g_j^{-1}a_{j-1}g_j)(g_j^{-1}a_jg_j)(g_j^{-1}a_{j+1}g_j)\dots(g_j^{-1}a_ng_j) = \\ &\quad = a_1 \dots a_nu_{1j}\dots u_{j-1j}u_{jj}, \ 1 \leqslant j \leqslant n. \end{aligned}$$

Покажем, что элементы

$$u_{11},\ u_{12}u_{22},\ u_{13}u_{23}u_{33}, \dots,\ u_{1n}\dots u_{n-1}nu_{nn}$$

$\mathbf{Z}$-независимы. Используем для этого индукцию по n. Уже было доказано, что u_{11}, $u_{12}u_{22}$ $\mathbf{Z}$-независимы. Предположим, что

$$u_{11},\ u_{12}u_{22},\ u_{13}u_{23}u_{33}, \dots,\ u_{1n-1}\dots u_{n-2n-1}u_{n-1n-1}$$

также $\mathbf{Z}$-независимы, и рассмотрим линейные комбинации

$$u_{11}^{t1}(u_{12}u_{22})_2^t\dots(u_{1n-1}\dots u_{n-2n-1}u_{n-1n-1})_{n-1}^t(u_{1n-1}\dots u_{n-1n}u_{nn})_n^t = 1,$$

где $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{Z}$. Имеем

$$u_{11}^{t1}(u_{12}u_{22})_2^t\dots(u_{1n-1}\dots u_{n-2n-1}u_{n-1n-1})_{n-1}^t = (u_{1n-1}\dots u_{n-1n}u_{nn})_n^t.$$

Так как $D_1 \dots D_{n-1} \cap D_n = \langle 1\rangle$, то $(u_{1n-1}\dots u_{n-1n}u_{nn})_n^{-t} = 1$ и $t_n = 0$. Таким образом, приходим к равенству

$$u_{11}^{t_1}(u_{12}u_{22})_2^t\dots(u_{1n-1}\dots u_{n-2n-1}u_{n-1n-1})_{n-1}^t = 1.$$

Ввиду индуктивного допущения $t_1 = t_2 = \ldots = t_{n-1} = 0$, что доказывает $\mathbf{Z}$-независимость

$$u_{11},\ u_{12}u_{22},\ u_{13}u_{23}u_{33}, \dots,\ u_{1n}\dots u_{n-1n}u_{nn}.$$

В свою очередь отсюда вытекает, что $\mathbf{r}_0(\langle a_1 \dots a_n\rangle^G) \geqslant n$. Это означает, что $n \leqslant \mathbf{b}$. Другими словами, процесс выбора элементов $\{g_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$, $\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$ и подгрупп $\{C_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$, $\{D_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n\}$ должен остановиться после $\mathbf{b}$ шагов. Но процесс останавливает на j-м шаге в случае, если $C_j = \langle 1\rangle$. Таким образом, $C_b = \langle 1\rangle$ и $\mathbf{r}_0(A) \leqslant \mathbf{b}^2$. □

Лемма 2.11. *Пусть G — локально обобщённо радикальная группа и A — её нормальная абелева подгруппа без кручения. Предположим, что $\operatorname{Tor}(G) = \langle 1\rangle$, и пусть T — такая нормальная подгруппа G, что $T \geqslant A$ и T/A периодическая и абелева. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то G включает в себя нормальные подгруппы $U \leqslant C$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $\operatorname{Tor}(G/U) = \langle 1\rangle$;
2) $|U/C| \leqslant \tau(\mathbf{b}^2)$;
3) *C абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_0(C) \leqslant \mathbf{b}^2$;*
4) *TU/U абелева и не имеет кручения.*

Доказательство. По лемме 2.9 A имеет ряд сервантных T-инвариантных подгрупп
$$\langle 1\rangle = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_\alpha \leqslant A_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant A_\gamma,$$
где факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ рационально T-неприводимы и не T-центральны, $0 \leqslant \alpha < \gamma$, а T/A_γ гиперцентральна. Положим $B = A_\gamma$. По лемме 2.10 $\mathbf{r}_0(B) \leqslant \mathbf{b}^2$. Так как T/B гиперцентральна, то совокупность R/B всех элементов T/B, имеющих конечный порядок, будет характеристической подгруппой T/B. Гиперцентральная группа без кручения T/R является расширением абелевой подгруппы AR/R с помощью периодической группы. Отсюда вытекает, что T/R абелева. Положим $U/B = \operatorname{Tor}(G/B)$. Тогда $R/B \leqslant U/B$ и $T/B \cap U/B = R/B$. Будучи периодической и локально обобщённо радикальной, U/B локально конечна. Предложение 2.2 показывает, что U включает в себя такую нормальную абелеву подгруппу без кручения $C \geqslant B$, что $\mathbf{r}_0(C) = \mathbf{r}_0(B)$ и $|U/C| \leqslant \tau(\mathbf{b}^2)$. Из доказательства предложения 2.2 можно усмотреть, что C нормальна в G. Имеем
$$\begin{aligned} TU/U \cong (TU/B)/(U/B) = (T/B)(U/B)/(U/B) \cong \\ \cong (T/B)/(T/B \cap U/B) = (T/B)/(R/B) \cong T/R, \end{aligned}$$
а это показывает, что TU/U абелева и без кручения. □

Следствие 2.12. *Пусть G — локально обобщённо радикальная группа и L — локально нильпотентный радикал G. Предположим, что $\operatorname{Tor}(G) = \langle 1\rangle$, и пусть $T/L = \operatorname{Tor}(G/L)$. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то G имеет ряд нормальных подгрупп $C_1 \leqslant R_1 \leqslant C_2 \leqslant R_2 \leqslant C_3 \leqslant R_3$, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $\operatorname{Tor}(G/R_3) = \langle 1\rangle$;

2) $|R_3/C_3| \leqslant \tau(\mathbf{b}^2)$;
3) C_3/R_2 *абелева, не имеет кручения и* $\mathbf{r}_0(C_3/R_2) \leqslant \mathbf{b}^2$;
4) $|R_2/C_2| \leqslant \tau\Big(\mathbf{b}\,\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big)\Big)$;
5) C_2/R_1 *абелева, не имеет кручения и* $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(C_2/R_1) \leqslant \mathbf{b}\,\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big)$;
6) $|R_1/C_1| \leqslant \mathbf{b}\,\tau\big(\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)\big)$;
7) C_1 *нильпотентна, не имеет кручения и*

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(C) \leqslant \mathbf{b}^2 + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)};$$

8) TR_3/R_3 *абелева и не имеет кручения.*

Доказательство. Утверждение вытекает из леммы 2.11 и следствия 2.8. □

Лемма 2.13. *Пусть G — группа и L — её нормальная подгруппа. Предположим, что L включает в себя такую нормальную абелеву подгруппу без кручения A, что L/A не имеет кручения и локально циклическая. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то A включает в себя такую G-инвариантную подгруппу K, что $\mathbf{r}_0(K) \leqslant \mathbf{b}$, а L/K абелева и не имеет кручения.*

Доказательство. Из включения $[A, g] \leqslant [G, g] \leqslant \langle g\rangle^G$ следует, что $\mathbf{r}_0([A, g]) \leqslant \mathbf{b}$.

Так как L/A локально циклическая, то L имеет возрастающий ряд

$$A = \langle g_0, A\rangle \leqslant \langle g_1, A\rangle \leqslant \ldots \leqslant \langle g_n, A\rangle \leqslant \ldots \leqslant \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \langle g_n, A\rangle = L.$$

Из включения $\langle g_n, A\rangle \leqslant \langle g_{n+1}, A\rangle$ вытекает, что

$$[A, g_n] = [A, \langle g_n\rangle] \leqslant [A, \langle g_{n+1}\rangle] = [A, \langle g_{n+1}\rangle]$$

для всех $n \in \mathbf{N}$. Отсюда следует равенство $[A, L] = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} [A, g_n]$. Так как $\mathbf{r}_0([A, g_n]) \leqslant \mathbf{b}$ для всех $n \in \mathbf{N}$, то $\mathbf{r}_0([A, L]) \leqslant \mathbf{b}$. Положим $K/[A, L] = \mathrm{Tor}(A/[A, L])$. Тогда K L-инвариантна и $\mathbf{r}_0(K) = \mathbf{r}_0([A, L]) \leqslant \mathbf{b}$.

Кроме того, из $A/K \leqslant \zeta(L/K)$ вытекает, что L/K абелева, поскольку L/A локально циклическая. Отметим, что $[L, L] \leqslant A$, так что K — сервантная оболочка подгруппы $[L, L]$ в A. Отсюда вытекает, что K G-инвариантна. □

Следствие 2.14. *Пусть G — группа и L, A — её нормальные подгруппы. Предположим, что $L \geqslant A$ и L/A — абелева группа без кручения 0-ранга $\mathbf{r}$. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то A включает в себя такую G-инвариантную подгруппу K, что $\mathbf{r}_0(K) \leqslant \mathbf{rb}$ и L/K абелева и без кручения.*

Доказательство. Так как $\mathbf{r}_0(L/A) = \mathbf{r}$, то L имеет ряд

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_r = L,$$

факторы которого A_{j+1}/A_j локально циклические и без кручения, $0 \leqslant j \leqslant \mathbf{r}-1$. По лемме 2.13 A_1 включает в себя такую A_2-инвариантную подгруппу K_1, что A_1/K_1 не имеет кручения и абелева, а $\mathbf{r}_0(K_1) \leqslant \mathbf{b}$. Теперь можно применить те же аргументы к A_2/K_1 и т. д. После конечного числа шагов придём к такой нормальной в L подгруппе K, что L/K абелева и не имеет кручения, а $\mathbf{r}_0(K) \leqslant \mathbf{rb}$. Заметим, что $[L, L] \leqslant A$, так что K будет сервантной оболочкой в A коммутанта $[L, L]$. Отсюда следует, что K G-инвариантна. □

Следствие 2.15. *Пусть G — группа и L, A — её нормальные подгруппы. Предположим, что $L \geqslant A$ и L/A — абелева группа без кручения 0-ранга $\mathbf{r}$. Если $\operatorname{Tor}(G) = \langle 1\rangle$ и нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то G имеет нормальные подгруппы K, R, для которых $\mathbf{r}_0(K) \leqslant \mathbf{rb}$, $K \leqslant L$, L/K абелева и без кручения, $|R/K| \leqslant \tau(\mathbf{rb})$ и $\operatorname{Tor}(G/R) = \langle 1\rangle$.*

Доказательство. Это утверждение вытекает из следствия 2.14 и предложения 2.2. □

Следствие 2.16. *Пусть G — группа, L, A — её нормальные подгруппы. Предположим, что $L \geqslant A$ и L/A имеет конечный ряд G-инвариантных подгрупп*

$$A = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_k = L,$$

факторы которого абелевы и не имеют кручения. Предположим также, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(L/A) = \mathbf{r}$. Если $\operatorname{Tor}(G) = \langle 1\rangle$ и нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то G имеет такую нормальную подгруппу R, что $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(R) \leqslant k\mathbf{rb}$, LR/R абелева, без кручения и $\operatorname{Tor}(G/R) = \langle 1\rangle$.

Лемма 2.17. *Пусть G — группа и A — такая её нормальная подгруппа, что A и G/A абелевы и не имеют кручения. Если нормальное замыкание каждой циклической подгруппы имеет ранг Хирша—Зайцева, не превосходящий $\mathbf{b}$, то A включает в себя такую G-инвариантную подгруппу K, что G/K абелева, без кручения и $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant \mathbf{b}^2 + \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)$.*

Доказательство. По лемме 2.9 L имеет ряд сервантных G-инвариантных подгрупп

$$\langle 1\rangle = A_0 \leqslant A_1 \leqslant \ldots \leqslant A_\alpha \leqslant A_{\alpha+1} \leqslant \ldots \leqslant A_\gamma,$$

где факторы $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ рационально G-неприводимы и не G-центральны, $0 \leqslant \alpha < \gamma$, а G/A_γ гиперцентральна. Положим $B = A_\gamma$. По лемме 2.10 $\mathbf{r}_0(A_\gamma) \leqslant \mathbf{b}^2$. Фактор-группа G/B гиперцентральна и без кручения. Используя предложение 1.5, получаем, что G/B включает в себя такую нормальную подгруппу K/B конечного ранга Хирша—Зайцева, что G/K абелева и не имеет кручения. Более того, $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K/B) \leqslant \mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{b-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)$. Тогда

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) \leqslant \mathbf{b}^2 + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)}. \qquad \square$$

3. Доказательство теоремы A

Так как $\operatorname{Tor}(G) = \langle 1\rangle$, то G содержит такой элемент x, что xT имеет бесконечный порядок. Положим $X = \langle x\rangle^G$. Из теоремы HZ получаем, что $\operatorname{Ln}(X) \neq \langle 1\rangle$. Пусть L — локально нильпотентный радикал G. Ввиду отмеченного выше $L \neq \langle 1\rangle$. Поскольку $\operatorname{Tor}(G) = \langle 1\rangle$, то L не имеет кручения. По лемме 1.1 получаем, что группа L нильпотентна и $\operatorname{ncl}(L) \leqslant \mathbf{b}$. По теореме HZ получаем также, что $X/(X\cap L) \cong XL/L$ включает в себя нормальную конечно порождённую абелеву подгруппу без кручения, индекс которой не превосходит $\mathbf{f}_1(\mathbf{b})$. Пусть L_1/L — локально нильпотентный радикал G/L. Мы уже видели, что группа G/L_1 периодическая. Положим $T/L = \operatorname{Tor}(G/L)$. Имеем $T/L \cap L_1/L = \operatorname{Tor}(L_1/L)$, так что

$$\begin{aligned} L_1T/T &\cong (L_1T/L)/(T/L) = (L_1/L)(T/L)/(T/L) \cong \\ &\cong (L_1/L)(T/L\cap L_1/L) \cong (L_1/L)/\operatorname{Tor}(L_1/L). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что L_1T/T локально нильпотентна и не имеет кручения. Заметим, что группа G/L_1T периодическая.

По следствию 2.12 G имеет такую нормальную подгруппу R_0, что $\operatorname{Tor}(G/R_0) = \langle 1\rangle$, TR_0/R_0 абелева, не имеет кручения и

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(R_0) \leqslant \mathbf{b}\,\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big) + 2\mathbf{b}^2 + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)}.$$

Следующий шаг состоит в рассмотрении фактор-группы G/R_0. Чтобы не усложнять обозначения, положим $R_0 = \langle 1\rangle$. Другими словами, будем предполагать, что $\operatorname{Tor}(G) = \langle 1\rangle$ и T — нормальная в G абелева подгруппа без кручения.

Используя следствие 2.12 для фактор-группы G/T, получаем, что G имеет ряд нормальных подгрупп

$$T \leqslant C_1 \leqslant R_1 \leqslant C_2 \leqslant R_2 \leqslant C_3 \leqslant R_3,$$

где C_1/T нильпотентна, не имеет кручения и

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(C_1/T) \leqslant \mathbf{b}^2 + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)},$$

R_1/C_1 конечна и её порядок не выше $\mathbf{b}\,\tau\big(\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)/3(\mathbf{b}-1)\big)$, C_2/R_1 абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(C_2/R_1) \leqslant \mathbf{b}\,\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big)$, $|R_2/C_2| \leqslant \tau\Big(\mathbf{b}\,\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big)\Big)$, C_3/R_2 абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_0(C_3/R_2) \leqslant \mathbf{b}^2$, $|R_3/C_3| \leqslant \tau(\mathbf{b}^2)$, G/R_3 абелева и не имеет кручения. По лемме 1.1 $\operatorname{ncl}(C_1/T) \leqslant \mathbf{b}$.

По следствию 2.16 G имеет такую нормальную подгруппу R_4, что $\operatorname{Tor}(G/R_4) = \langle 1\rangle$, C_1R_4/R_4 абелева, не имеет кручения и

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(R_4) \leqslant \mathbf{b}^2\left(\mathbf{b}^2 + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)}\right).$$

К нормальной подгруппе R_1 можно применить лемму 2.6. По этой лемме G имеет такую нормальную подгруппу R_5, что $\mathrm{Tor}(G/R_5) = \langle 1\rangle$, R_1R_5/R_5 абелева, не имеет кручения и

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(R_5/R_4) \leqslant \mathbf{b}^2\tau\left(\frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)}\right).$$

Следующий шаг состоит в применении следствия 2.15 к нормальной подгруппе C_2. По этому следствию G имеет такую нормальную подгруппу R_6, что $\mathrm{Tor}(G/R_6) = \langle 1\rangle$, C_2R_6/R_6 абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(R_6/R_5) \leqslant \mathbf{b}^2\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big)$.

Используя снова лемму 2.6, получаем, что G имеет такую нормальную подгруппу R_7, что $\mathrm{Tor}(G/R_7) = \langle 1\rangle$, R_2R_7/R_7 абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(R_7/R_6) \leqslant \mathbf{b}\tau\Big(\mathbf{b}\big(\mathbf{b}(\mathbf{b})\big)\Big)$.

Применение следствия 2.15 обеспечивает существование такой нормальной подгруппы R_8, что $\mathrm{Tor}(G/R_8) = \langle 1\rangle$, C_3R_8/R_8 абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(R_8/R_7) \leqslant \mathbf{b}^3$.

Применение леммы 2.6 обеспечивает существование такой нормальной подгруппы R_9, что $\mathrm{Tor}(G/R_9) = \langle 1\rangle$, R_3R_9/R_9 абелева, не имеет кручения и $\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(R_9/R_8) \leqslant \mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b}^2)$.

Наконец, к G/R_9 можно применить лемму 2.17 и получить существование такой нормальной подгруппы $K \geqslant R_9$, что G/K абелева, не имеет кручения и

$$\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K/R_9) \leqslant \mathbf{b}^2 + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{\mathrm{hz}}(K) &\leqslant \mathbf{k}_1(\mathbf{b}) = \\
&= 3\mathbf{b}^2 + \frac{2\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)} + \mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b}^2) + \mathbf{b}^3 + \mathbf{b}\,\tau\Big(\mathbf{b}\,\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big)\Big) + \\
&+ \mathbf{b}^2\,\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big) + \mathbf{b}^2\tau\left(\frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)}\right) + \\
&+ \mathbf{b}^2\left(\mathbf{b}^2 + \frac{\mathbf{b}(\mathbf{b}+1)(\mathbf{b}+2)(\mathbf{b}^{\mathbf{b}-1}-1)}{3(\mathbf{b}-1)}\right) + \mathbf{b}\,\nu\big(\mathbf{b}\,\tau(\mathbf{b})\big).
\end{aligned}$$

Литература

[1] Зайцев Д. И. О разрешимых группах конечного ранга // Группы с ограничениями для подгрупп. — Киев: Наукова думка, 1971. — С. 115—130.

[2] Зайцев Д. И. Группы с дополняемыми нормальными подгруппами // Некоторые проблемы теории групп. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1975. — С. 30—74.

[3] Зайцев Д. И. Гиперциклические расширения абелевых групп // Группы, определяемые свойствами подгрупп. — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. — С. 16—37.

[4] Зайцев Д. И. Произведения абелевых групп // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, № 2. — С. 94—106.

[5] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[6] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.

[7] Мальцев А. И. О группах конечного ранга // Матем. сб. — 1948. — Т. 22, № 2. — С. 351—352.

[8] Мальцев А. И. О некоторых классах бесконечных разрешимых групп // Матем. сб. — 1951. — Т. 28, № 3. — С. 567—588.

[9] Чарин В. С. О группах, обладающих возрастающими инвариантными рядами // Матем. сб. — 1957. — Т. 41, № 3. — С. 297—316.

[10] Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Polyakov N. V. On some ranks of infinite groups // Ricerche Mat. — 2007. — Vol. 56, no. 1. — P. 43—59.

[11] Dornhoff L. Jordan's theorem for solvable groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 24, no. 3. — P. 533—537.

[12] Guralnick R. M., Maroti A. Average dimension of fixed point spaces with applications // Adv. Math. — 2001. — Vol. 226. — P. 298—308.

[13] Kurdachenko L., Otal J., Subbotin I. Artinian Modules over Group Rings. — Basel: Birkhäuser, 2007.

[14] Longobardi P., Maj M., Smith H. Groups in which normal closures of elements have boundedly finite rank // Glasgow Math. J. — 2009. — Vol. 51. — P. 341—345.

[15] Neumann B. H. Groups covered by permutable subsets // J. London Math. Soc. — 1954. — Vol. 29, no. 114. — P. 236—248.

[16] Schur I. Über die Darstellungen der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen // J. Reine Angew. Math. — 1904. — Bd. 127. — S. 20—50.

[17] Smith H. A finiteness condition on normal closures of cyclic subgroups // Math. Proc. Royal Irish Acad. — 1999. — Vol. 99A. — P. 179—183.

[18] Speiser A. Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. — Berlin: Dover, 1937.

[19] Wehrfritz B. A. F. Infinite Linear Groups. — Berlin: Springer, 1973.