Однородные отображения конечно представимых модулей над кольцом полиадических чисел

Д. С. ЧИСТЯКОВ
Московский педагогический
государственный университет
e-mail: chistyakovds@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: UA-кольцо, кольцо полиадических чисел, однородное отображение, эндоморфный модуль.

Аннотация

Полугруппа $(R, \cdot)$ называется UA-кольцом, если существует единственная бинарная операция $+$, превращающая $(R, \cdot, +)$ в кольцо. В работе исследуются конечно представимые $\hat{Z}$-модули с UA-кольцом эндоморфизмов.

Abstract

D. S. Chistyakov, On homogeneous mappings of finitely presented modules over the ring of polyadic numbers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 20 (2015), no. 6, pp. 229—235.

A semigroup $(R, \cdot)$ is said to be a UA-ring if there exists a unique binary operation $+$ making $(R, \cdot, +)$ into a ring. We study finitely presented $\hat{Z}$-modules with UA-rings of endomorphisms.

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей и A, B — унитарные левые R-модули. Отображение $f\colon A \to B$, такое что $f(ra) = rf(a)$, $r \in R$, $a \in A$, называется R-однородным. Через $\mathcal{M}_R(A, B)$ обозначим множество всех R-однородных отображений из A в B. В случае когда $A = B$, будем писать $\mathcal{M}_R(A, A) = \mathcal{M}_R(A)$. Множество $\mathcal{M}_R(A)$ является почтикольцом относительно операций сложения и композиции отображений. В общей ситуации $\mathrm{Hom}_R(A, B) \subseteq \mathcal{M}_R(A, B)$.

Определение 1 [3, 5, 9]. R-модуль A называется модулем с однозначным сложением (UA-модулем), если каждая биекция $f \in \mathcal{M}_R(A, B)$ является изоморфизмом для всех R-модулей B.

Если существует неаддитивное биективное отображение $f \in \mathcal{M}_R(A, B)$ для некоторого R-модуля B, то новое сложение $\boxplus$ на A можно определить по правилу

$$a \boxplus a' = f^{-1}\big(f(a) + f(a')\big)$$

для всех $a, a' \in A$. В связи с этим сформулируем эквивалентное определение.

Фундаментальная и прикладная математика, 2015, том 20, № 6, с. 229—235.

Определение 2 [3,5,9]. R-модуль A называется UA-модулем, если на аддитивной группе A нельзя задать новое сложение, не изменяя при этом действия кольца R на A.

Понятие UA-модуля является обобщением понятия UA-кольца.

Определение 3 [1,2,4]. Кольцо R называется кольцом с однозначным сложением (UA-кольцом), если любой мультипликативный изоморфизм $\alpha\colon R \to S$ является аддитивным для любого кольца S.

Если найдётся мультипликативный изоморфизм α, не сохраняющий сложение, то новое сложение на мультипликативной полугруппе $(R, \cdot)$ можно задать по правилу

$$r \boxplus r' = \alpha^{-1}\big(\alpha(r) + \alpha(r')\big)$$

для всех $r, r' \in R$.

Определение 4 [1,2,4]. Полугруппа $(R, \cdot)$ называется UA-кольцом, если существует единственная бинарная операция $+$, превращающая $(R, \cdot, +)$ в кольцо.

Пусть $+$ и $\boxplus$ — различные сложения на R и $f \in \mathcal{M}_{(R,\cdot,+)}\big((R,+) \oplus (R,+)\big)$ такое, что $f(r, r') = (r, r \boxplus r')$. Поскольку f — биекция и

$$f \notin \mathrm{Hom}_{(R,\cdot,+)}\big((R,+) \oplus (R,+)\big),$$

то $(R,+) \oplus (R,+)$ не является UA-модулем.

Определение 5. R-модуль A называется n-эндоморфным (эндоморфным), если $\mathcal{M}_R(A^n) = \mathrm{End}_R(A^n)$ (равенство $\mathcal{M}_R(A^n) = \mathrm{End}_R(A^n)$ справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$).

Легко проверить (например, как это было сделано выше), что эндоморфные модули обладают свойством однозначности сложения.

1-эндоморфные модули изучались в [6—8]. Каждый циклический модуль является 1-эндоморфным. Действительно, если $x, y \in Rz$, то $x = rz$, $y = sz$ для некоторых $r, s \in R$ и для любого $f \in \mathcal{M}_R(Rz)$ справедливо равенство

$$f(x+y) = f(rz+sz) = f\big((r+s)z\big) = (r+s)f(z) = rf(z) + sf(z) = f(x) + f(y).$$

В данной статье мы исследуем эндоморфные модули над кольцом полиадических чисел

$$\hat{Z} = \prod_p \hat{Z}_p.$$

Кроме того, мы опишем конечно представимые $\hat{Z}$-модули с UA-кольцом эндоморфизмов.

Заметим, что само кольцо $\hat{Z}$ не является UA-кольцом. Это следует из того, что кольцо $\hat{Z}_p$ не обладает свойством однозначности сложения. Действительно, каждое p-адическое число x представимо в виде $x = p^k y \in \hat{Z}_p$, где y — обратимый элемент в кольце $\hat{Z}_p$. Отображение

$$\alpha\colon \hat{Z}_p \to \hat{Z}_p, \quad x = p^k y \mapsto p^k (1+p)^k y,$$

является мультипликативным, но не аддитивным автоморфизмом кольца $\hat{Z}_p$.

Для последовательности $\chi = (m_p) = (m_2, m_3, \ldots, m_p, \ldots)$ целых неотрицательных чисел и символов ∞ полагаем $K_p = \mathbb{Z}(p^{m_p})$, если $m_p < \infty$, и $K_p = \hat{Z}_p$, если $m_p = \infty$. Каждой последовательности χ поставим в соответствие кольцо

$$Z(\chi) \cong \prod_p K_p.$$

Нетрудно проверить, что каждый конечно представимый $\hat{Z}$-модуль M имеет вид

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{l} Z(\chi_i).$$

Данное разложение не является единственным. Но дополнительное условие $\chi_1 \leqslant \ldots \leqslant \chi_l$ обеспечивает единственность такого разложения. Введём обозначение

$$Z(\chi_i) = \prod_p K_p^{(i)}.$$

Теорема 6. *Конечно представимый $\hat{Z}$-модуль*

$$M = \bigoplus_{i=1}^{l} Z(\chi_i)$$

является 1-эндоморфным тогда и только тогда, когда $l = 1$, т. е. $\hat{Z}$-модуль M циклический.

Доказательство. Каждый циклический модуль 1-эндоморфен. Докажем обратное утверждение. Пусть ε_p — идемпотент кольца $\hat{Z}$, такой что $\varepsilon_p \hat{Z} = \hat{Z}_p$ и

$$\varepsilon_p M = \bigoplus_{i=1}^{l} K_p^{(i)}.$$

Для каждого $f \in \mathcal{M}_{\hat{Z}}(M)$ имеем $f(\varepsilon_p M) \subseteq \varepsilon_p f(M) \subseteq \varepsilon_p M$.

Определим почтикольцевой гомоморфизм

$$\Phi_p \colon \mathcal{M}_{\hat{Z}}(M) \to \mathcal{M}_{\hat{Z}_p}(\varepsilon_p M) \oplus \mathcal{M}_{(1-\varepsilon_p)\hat{Z}}\big((1-\varepsilon_p)M\big)$$

по правилу $\Phi_p(f) = (f|_{\varepsilon_p M}, f|_{(1-\varepsilon_p)M})$. Если $f \in \ker \Phi_p$, то для каждого $g \in M$ получаем

$$f(g) = \varepsilon_p f(g) + (1-\varepsilon_p) f(g) = f(\varepsilon_p g) + f\big((1-\varepsilon_p)g\big) = 0.$$

Отсюда следует, что $f = 0$, и следовательно, Φ_p — вложение.

Равенство $f(x+y) = f(x) + f(y)$ справедливо для всех $f \in \mathcal{M}_{\hat{Z}}(M)$ и $x \in \varepsilon_p M$, $y \in (1-\varepsilon_p)M$. Действительно,

$$\varepsilon_p\big(f(x+y) - f(x) - f(y)\big) = f(\varepsilon_p x + \varepsilon_p y) - f(\varepsilon_p x) - f(\varepsilon_p y) = f(x) - f(x) = 0$$

и $(1-\varepsilon_p)\big(f(x+y) - f(x) - f(y)\big) = 0$.

Для каждой пары $(g,h) \in \mathcal{M}_{\hat{Z}_p}(\varepsilon_p M) \oplus \mathcal{M}_{(1-\varepsilon_p)\hat{Z}}\big((1-\varepsilon_p)M\big)$ определим $\hat{Z}$-однородное отображение f, такое что $f|_{\varepsilon_p M} = g$ и $f|_{(1-\varepsilon_p)M} = h$. Таким образом, Φ_p — биекция и Φ_p — изоморфизм почтиколец. Мы получили систему почтикольцевых изоморфизмов Φ_p, $p \in \mathbb{P}$, и прямых разложений

$$\mathcal{M}_{\hat{Z}}(M) \cong \mathcal{M}_{\hat{Z}_p}(\varepsilon_p M) \oplus \mathcal{M}_{(1-\varepsilon_p)\hat{Z}}\big((1-\varepsilon_p)M\big).$$

Поэтому 1-эндоморфность $\hat{Z}$-модуля M влечёт 1-эндоморфность $\hat{Z}_p$-модуля $\varepsilon_p M$ для всех p. Известно, что модуль над областью главных идеалов является 1-эндоморфным тогда и только тогда, когда он локально циклический [8, предложение 5.1]. Если $l > 1$, то для некоторого простого p модуль $\varepsilon_p M$ не является локально циклическим. Противоречие. □

Следствие 7. *Никакой конечно представимый $\hat{Z}$-модуль не является n-эндоморфным для всех $n > 1$.*

Доказательство. Если $M \neq 0$ — конечно представимый $\hat{Z}$-модуль, то модуль M^n не является 1-эндоморфным, как это следует из предыдущего утверждения. □

Лемма 8. *Пусть M — модуль над коммутативным кольцом R, такой что $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_l$ и слагаемые M_i — циклические R-модули, $i = 1, \ldots, l$. Тогда M — 1-эндоморфный модуль над своим кольцом эндоморфизмов.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_l$ — система идемпотентов, соответствующая прямому разложению $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_l$. Если $f \colon M \to M$ — $\mathrm{End}_R(M)$-однородное отображение, то $f(M_i) = f\big(e_i(M)\big) = e_i f(M) \subseteq M_i$ для всех $i = 1, \ldots, l$. Поскольку кольцо R коммутативно, то отображение левого умножения на элементы кольца является эндоморфизмом. Так как модули M_i циклические, то ограничения $f|_{M_i}$ сохраняют сложение, $i = 1, \ldots, l$. Отсюда следует, что модуль M 1-эндоморфный. □

Предложение 9. *Каждый конечно представимый $\hat{Z}$-модуль является 1-эндоморфным над своим кольцом эндоморфизмов.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 8, поскольку каждый конечно представимый модуль над кольцом полиадических чисел является прямой суммой циклических модулей. □

Теорема 10. *Пусть*

$$M = \bigoplus_{i=1}^{l} Z(\chi_i)$$

и $m_2^{(i)} \neq 1$, $m_3^{(i)} \neq 1$ для каждой последовательности $\chi_i = \big(m_p^{(i)}\big)$. Следующие условия эквивалентны:

1) $\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)$ — *UA-кольцо*;
2) $l > 1$ *и* $\chi_{l-1} = \chi_l$;
3) M — *эндоморфный модуль над кольцом* $\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Сразу заметим, что $l > 1$, поскольку
$$\mathrm{End}_{\hat{Z}}\big(Z(\chi)\big) \cong Z(\chi)$$
и кольцо $Z(\chi)$ не является UA-кольцом. Предположим, что $\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)$ — UA-кольцо и $\chi_{l-1} < \chi_l$. В этом случае $m_p^{(l-1)} < m_p^{(l)}$ для некоторого p, и мы имеем прямое разложение
$$M \cong N \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} K_p^{(i)},$$
где N — группа с условием $pN = N$. Тогда
$$\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M) \cong \mathrm{End}_{(1-\varepsilon_p)\hat{Z}}(N) \times \mathrm{End}_{\hat{Z}_p}\Bigg(\bigoplus_{i=1}^{l} K_p^{(i)}\Bigg),$$
где $\varepsilon_p = (0, \ldots, 1_p, 0, \ldots)$ — идемпотент кольца $\hat{Z}$, соответствующий указанному разложению. Справедлив изоморфизм
$$\mathrm{End}_{\hat{Z}_p}\Bigg(\bigoplus_{i=1}^{l} K_p^{(i)}\Bigg) \cong \mathrm{End}\Bigg(\bigoplus_{i=1}^{l} K_p^{(i)}\Bigg).$$
Если $m_p^{(l)} < \infty$, то кольцо
$$\mathrm{End}\Bigg(\bigoplus_{i=1}^{l} K_p^{(i)}\Bigg)$$
не является UA-кольцом [2, теорема 3].

Предположим, что $0 < m_p^{(l-1)} < m_p^{(l)} = \infty$ и
$$\bigoplus_{i=1}^{l} K_p^{(i)} \cong H \oplus \hat{Z}_p,$$
где H — ограниченная группа, $\exp(H) = p^k$. В этой ситуации
$$\mathrm{End}(H \oplus \hat{Z}_p) \cong \begin{bmatrix} \mathrm{End}(H) & \mathrm{Hom}(\hat{Z}_p, H) \\ 0 & \mathrm{End}(\hat{Z}_p) \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \mathrm{End}(H) & H \\ 0 & \hat{Z}_p \end{bmatrix}.$$
Пусть $\varphi\colon \hat{Z}_p \to \hat{Z}_p$ — мультипликативный автоморфизм кольца $\hat{Z}_p$, определённый по правилу $\varphi(x) = p^m(1 + p^{k-1})^m y$, где $x = p^m y$, y — обратимый элемент.

Рассмотрим биекцию
$$\psi\colon\ \mathrm{End}(H \oplus \hat{Z}_p) \to \mathrm{End}(H \oplus \hat{Z}_p), \quad \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \varphi(\gamma) \end{bmatrix}.$$
Покажем, что данное отображение сохраняет умножение. Действительно,

$$\psi\left(\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ 0 & \gamma_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ 0 & \gamma_2\end{bmatrix}\right) - \psi\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ 0 & \gamma_1\end{bmatrix}\psi\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ 0 & \gamma_2\end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\beta_2+\beta_1\gamma_2\\ 0 & \varphi(\gamma_1\gamma_2)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\beta_2+\beta_1\varphi(\gamma_2)\\ 0 & \varphi(\gamma_1)\varphi(\gamma_2)\end{bmatrix} = 0,$$

поскольку $\gamma - \varphi(\gamma) \equiv 0 \pmod{p^k}$ и $p^k\beta = 0$ для всех $\gamma \in \hat{Z}_p$ и $\beta \in H$. Однако отображение ψ не аддитивно, поскольку φ не аддитивно.

Для доказательства импликации 2) $\Longrightarrow$ 1) мы используем следующую лемму [1].

Лемма 11. *Предположим, что кольцо K обладает такой системой идемпотентов $F = \{e_i \mid i \in I\}$, что*

1) *для любого $0 \neq k \in K$ найдётся идемпотент $e_i \in F$, для которого $ke_i \neq 0$;*
2) *для всякого идемпотента $e_i \in F$ существует ортогональный ему идемпотент $e_j \in F$, такой что для $x \in K$ из $e_ixe_iKe_j = 0 = e_jKe_ixe_i$ следует, что $e_ixe_i = 0$.*

Тогда K — UA-кольцо.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть F — множество всех примитивных идемпотентов кольца $\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)$. Для любого $0 \neq f \in \mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)$ выполнено условие 1) леммы 11. Если $e \in F$, то $e(M)$ — циклический $\hat{Z}_p$-модуль. Имеется прямое разложение $M \cong e(M) \oplus M'$. Слагаемое M', в свою очередь, содержит циклический Z_p-модуль $e'(M)$ большего порядка. Отсюда следует, что $e\,\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)e$-модуль $e\,\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)e'$ точный. Таким образом, условие 2) леммы 11 выполнено.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). В [7, теорема 27] доказано следующее утверждение. Пусть A — p-локальная алгебраически компактная абелева группа. Тогда группа A не является обобщённо эндопримальной (группа A не является эндоморфным модулем над своим кольцом эндоморфизмов, используя терминологию данной статьи) в следующих случаях:

1) $A = \hat{Z}_p$;
2) $A = \hat{Z}_p \oplus B$, где B — конечная группа;
3) $A = Z(p^k) \oplus B$, где k — положительное целое число или ∞ и $p^tB = 0$ для $t < k$.

Применительно к нашему случаю это означает, что модуль ε_pM является эндоморфным $\hat{Z}_p$-модулем для всех $\varepsilon_p = (0, \ldots, 1_p, 0, \ldots)$.

Если $f \in \mathcal{M}_{\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)}(M^n, M)$, то

$$\varepsilon_p\bigl(f(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n) - f(x_1, \ldots, x_n) - f(y_1, \ldots, y_n)\bigr) = 0$$

для всех p и $x_i, y_i \in M$, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, отображение f аддитивно. Эндоморфность $\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)$-модуля M следует из изоморфизма

$$\mathcal{M}_{\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)}(M^n) \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{M}_{\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)}(M^n, M_i),$$

где $f \mapsto (\pi_1 f, \ldots, \pi_n f)$ и $\pi_i \colon M^n \to M_i$, $M_i \cong M$, — соответствующие проекции, $i = 1, \ldots, n$.

Если $\mathrm{End}_{\hat{Z}}(M)$-модуль M эндоморфен, то $\mathrm{End}_{\hat{Z}_p}(\varepsilon_p M)$-модуль $\varepsilon_p M$ также эндоморфен для всех p. Таким образом, импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) следует из [7, теорема 27]. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке совместной программы «Михаил Ломоносов. III» Министерства образования Российской Федерации и Немецкой службы академических обменов.

Литература

[1] Любимцев О. В. Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1419—1422.

[2] Любимцев О. В. Периодические абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, № 5. — С. 736—741.

[3] Любимцев О. В., Чистяков Д. С. Абелевы группы как UA-модули над кольцом $\mathbb{Z}$ // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 3. — С. 412—416.

[4] Михалёв А. В. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Матем. сб. — 1988. — Т. 135, № 177. — С. 210—224.

[5] Чистяков Д. С. Абелевы группы как UA-модули над своим кольцом эндоморфизмов // Матем. заметки. — 2012. — Т. 91, № 6. — С. 934—941.

[6] Чистяков Д. С. Однородные отображения абелевых групп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2014. — Т. 58, № 2. — С. 61—68.

[7] Albrecht U., Breaz S., Wickless W. Generalized endoprimal Abelian groups // J. Algebra Its Appl. — 2006. — Vol. 5, no. 1. — P. 1—17.

[8] Hausen J., Johnson J. A. Centralizer near-rings that are rings // J. Austral. Math. Soc. — 1995. — Vol. 59, no. 2. — P. 173—183.

[9] Van der Merwe A. B. Unique addition modules // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27, no. 9. — P. 4103—4115.