

# Формальные матрицы и кольца, близкие к регулярным\*

**А. Н. АБЫЗОВ**

Казанский государственный  
(федеральный) университет  
e-mail: Adel.Abyzov@ksu.ru

**А. А. ТУГАНБАЕВ**

Национальный исследовательский  
университет «МЭИ»,  
Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова  
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.552

**Ключевые слова:** кольцо формальных матриц, регулярное кольцо, полуартиново кольцо, V-кольцо, чистое кольцо.

## Аннотация

Работа содержит как новые, так и известные результаты о кольцах формальных матриц, близких к регулярным. Основные результаты приведены с доказательствами.

## Abstract

*A. N. Abyzov, A. A. Tuganbaev, Formal matrices and rings close to regular, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 5–21.*

This paper contains new and known results on formal matrix rings close to regular. The main results are given with proofs.

## 1. Предварительные сведения

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными. Пусть  $R_1, R_2, \dots, R_n$  — кольца,  $M_{ij}$  —  $(R_i, R_j)$ -бимодули для всех  $1 \leq i, j \leq n$ , причём  $M_{ii} = R_i$ . Пусть также  $\varphi_{ijk}: M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \rightarrow M_{ik}$  — такие  $(R_i, R_k)$ -бимодульные гомоморфизмы, что  $\varphi_{iij}$  и  $\varphi_{ijj}$  — канонические изоморфизмы для всех  $1 \leq i, j \leq n$ . Обозначим  $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b)$  для  $a \in M_{ij}$ ,  $b \in M_{jk}$ . Через  $K$  обозначим множество всех  $(n \times n)$ -матриц  $(m_{ij})$  с элементами  $m_{ij} \in M_{ij}$  для всех  $1 \leq i, j \leq n$ . Простая проверка показывает, что относительно обычных операций сложения и умножения  $K$  будет кольцом в точности тогда, когда  $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$  для всех  $a \in M_{ik}$ ,  $b \in M_{kl}$ ,  $c \in M_{lj}$ ,  $1 \leq i, k, l, j \leq n$ .

\*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10013).

Полученное кольцо  $K$  называется *кольцом формальных матриц* порядка  $n$  и обозначается  $K(\{M_{ij}\}: \{\varphi_{ikj}\})$ . Если

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц второго порядка, то упорядоченный набор  $(R, S, M, N, \varphi, \psi)$  называется *контекстом Мориты* или *ситуацией предэквивалентности*.

Кольцо формальных матриц  $K(\{M_{ij}\}: \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$ , в котором  $M_{ij} = R$  для всех  $1 \leq i, j \leq n$ , называется *кольцом формальных матриц над  $R$  порядка  $n$*  и обозначается  $K_n(R)$  или  $K_n(R: \{\varphi_{ikj}\})$ . Для кольца формальных матриц над  $R$  порядка  $n$   $K_n(R: \{\varphi_{ikj}\})$  положим  $\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(1 \otimes 1)$  для всех  $1 \leq i, j, k \leq n$ . Тогда  $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$  для всех  $a, b \in R$ . Для любого  $a \in R$  имеем  $a\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(a \otimes 1) = \varphi_{ijk}(1 \otimes a) = \eta_{ijk}a$ . Таким образом,  $\eta_{ijk} \in C(R)$  и выполняются следующие соотношения:

- 1)  $\eta_{iij} = \eta_{ijj} = 1, 1 \leq i, j \leq n$ ,
- 2)  $\eta_{ijk}\eta_{ikl} = \eta_{ijl}\eta_{jkl}, 1 \leq i, j, k, l \leq n$ .

Первое соотношение выполняется, поскольку  $\varphi_{iij}$  и  $\varphi_{ijj}$  — канонические изоморфизмы. В силу ассоциативности операции  $\circ$  имеем  $\eta_{ijk}\eta_{ikl}abc = \eta_{ijl}\eta_{jkl}abc$  для всех  $a, b, c \in R$ . Положив  $a = b = c = 1$ , получаем второе соотношение. Для любого набора  $\{\eta_{ijk} \mid 1 \leq i, j, k \leq n\}$  центральных элементов  $R$ , удовлетворяющих первому и второму соотношениям, можно положить  $\varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$  для всех  $a, b \in R$ . Непосредственная проверка показывает, что  $K_n(R: \{\varphi_{ikj}\})$  — кольцо формальных матриц над  $R$  порядка  $n$ . Таким образом, кольцо формальных матриц  $K_n(R: \{\varphi_{ikj}\})$  однозначно определяется набором центральных элементов  $\{\eta_{ijk} \mid 1 \leq i, j, k \leq n\}$ . В этом случае кольцо формальных матриц  $K_n(R: \{\varphi_{ikj}\})$  мы будем обозначать через  $K_n(R: \{\eta_{ijk}\})$ .

Пусть  $R$  — кольцо,  $\beta_1, \dots, \beta_n \in C(R)$ ,  $n \geq 2$ . Определим  $\eta_{ijk}$  для всех  $1 \leq i, j, k \leq n$  по формуле

$$\eta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = k, \\ \beta_j, & \text{если } i, j, k \text{ различны,} \\ \beta_i\beta_j, & \text{если } i = k \neq j. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что набор  $\{\eta_{ijk} \mid 1 \leq i, j, k \leq n\}$  обладает свойствами 1) и 2) и, следовательно, определяет кольцо формальных матриц над  $R$  порядка  $n$ . Кольцо формальных матриц  $K_n(R: \{\varphi_{ikj}\})$ , определяемое множеством  $\{\eta_{ijk}\}$  обозначается через  $\mathbb{M}_{\beta_1, \dots, \beta_n}(R)$ . Таким образом,  $\mathbb{M}_{\beta_1, \dots, \beta_n}(R)$  — это множество всех матриц порядка  $n$  над  $R$  с обычной операцией сложения и операцией умножения, определённой следующим образом: для двух матриц  $(a_{ij})$  и  $(b_{ij})$  порядка  $n$  над  $R$

$$(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij}), \quad \text{где } c_{ij} = \sum_{k=1}^n \beta_i^{\delta_{ij} - \delta_{ik}} \beta_k^{1 - \delta_{jk}} a_{ik} b_{kj}.$$

В последнее время кольца формальных матриц и модули над ними активно изучаются. Модули над кольцом формальных матриц рассматривались в [7, 15–18]. Группы Гротендика и Уайтхеда колец формальных матриц изучаются в [9]. Различные кольцевые свойства колец формальных матриц изучались в [17, 20, 21]. Проблеме изоморфизма для колец формальных матриц посвящены работы [6, 21]. Решётка идеалов в таких кольцах изучалась в [5].

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

$X$  — правый  $R$ -модуль,  $Y$  — правый  $S$ -модуль и определены  $R$ -модульный гомоморфизм  $f: Y \otimes_S N \rightarrow X$  и  $S$ -модульный гомоморфизм  $g: X \otimes_R M \rightarrow Y$ . Положим  $yn := f(y \otimes n)$ ,  $xm := g(x \otimes m)$  и потребуем выполнение равенств  $(yn)t = y(nt)$  и  $(xm)n = x(mn)$  для всех  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$ . В этом случае группа вектор-строк  $(X, Y)$  естественным образом наделяется структурой правого  $K$ -модуля. Несложно показать что любой правый  $K$ -модуль можно представить в виде модуля вектор-строк. Гомоморфизмы  $K$ -модулей можно представить в виде пары, состоящей из  $R$ -гомоморфизма и  $S$ -гомоморфизма. А именно, если  $\Gamma: (X, Y) \rightarrow (X', Y')$  — гомоморфизм, то найдутся  $R$ -гомоморфизм  $\alpha: X \rightarrow X'$  и  $S$ -гомоморфизм  $\beta: Y \rightarrow Y'$ , такие что  $\Gamma(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$ . При этом выполняются соотношения  $\alpha(yn) = \beta(y)n$  и  $\beta(xm) = \alpha(x)m$  для всех  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $m \in M$ ,  $n \in N$ .

Напомним некоторые конструкции из [7]. Пусть  $A$  — ненулевой правый  $R$ -модуль. Через  $H(A)$  будем обозначать правый  $K$ -модуль  $(A, \text{Hom}_R(N, A))$ , у которого гомоморфизмами модульного умножения являются отображение

$$A \otimes M \rightarrow \text{Hom}_R(N, A), \quad a \otimes m \mapsto (n \mapsto a(mn)),$$

и отображение

$$\text{Hom}_R(N, A) \otimes N \rightarrow A, \quad f \otimes n \mapsto f(n).$$

Через  $T(A)$  будем обозначать правый  $K$ -модуль  $(A, A \otimes M)$ , у которого гомоморфизмами модульного умножения являются тождественный автоморфизм  $A \otimes M \rightarrow A \otimes M$  и отображение

$$(A \otimes M) \otimes N \rightarrow A, \quad (a \otimes m)n = amn.$$

Радикал Джекобсона и наибольший регулярный идеал кольца  $R$  обозначаются через  $J(R)$  и  $\text{Reg}(R)$  соответственно. Радикал Джекобсона правого  $R$ -модуля  $M$  обозначается через  $J(M)$ .

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Бимодуль  $M$  называется  $N$ -регулярным ( $N$ -вполне идемпотентным справа), если для каждого  $m \in M$  выполнено условие  $m \in mNm$  (соответственно  $m \in mNmS$ ). Аналогично определяются понятия  $M$ -регулярности и  $M$ -вполне идемпотентности справа бимодуля  $N$ .

## 2. Кольца формальных матриц, близкие к регулярным

Для кольца формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}: \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$  и для каждых  $1 \leq i, j \leq n$  через  $\text{Reg}(M_{ij})$  обозначим множество вида  $\{m \in M_{ij} \mid m \in mM_{ji}m\}$ .

**Теорема 2.1 [25].** Для кольца формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}: \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$  имеет место равенство

$$\text{Reg}(K) = \{r \in K \mid M_{ii}r_{ij}M_{js} \subset \text{Reg}(M_{ts})\}.$$

**Следствие 2.2.** Для кольца формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}: \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$  следующие условия равносильны:

- 1)  $K$  — регулярное кольцо;
- 2) для каждой пары индексов  $1 \leq i, j \leq n$  и каждого элемента  $m \in M_{ij}$  выполнено условие  $m \in mM_{ji}m$ .

Кольцо  $R$  называется  $I_0$ -кольцом, если для каждого элемента  $r \in R \setminus J(R)$  существует элемент  $s \in R \setminus \{0\}$ , такой что  $s = srs$ .

**Теорема 2.3 [25].** Для кольца формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}: \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$  следующие условия равносильны:

- 1)  $K$  —  $I_0$ -кольцо;
- 2) для каждого  $1 \leq i \leq n$  кольцо  $R_i$  является  $I_0$ -кольцом.

Кольцо  $R$  называется *вполне идемпотентным справа (слева)*, если  $I^2 = I$  для каждого правого (левого) идеала  $I$  кольца  $R$ . Если в кольце  $R$  равенство  $I^2 = I$  выполняется для каждого идеала  $I$  кольца  $R$ , то кольцо  $R$  называется *вполне идемпотентным*. Элемент  $r$  кольца  $R$  называется *вполне идемпотентным справа*, если  $rR = rRr$ . Идеал  $I$  кольца  $R$  называется *вполне идемпотентным справа*, если каждый его элемент вполне идемпотентен справа. Согласно [10, 12.17] каждое кольцо  $R$  обладает наибольшим вполне идемпотентным справа идеалом, который обозначается через  $I(R)$ .

Для кольца формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}: \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$  и для каждых  $1 \leq i, j \leq n$  через  $I(M_{ij})$  обозначим множество вида  $\{m \in M_{ij} \mid m \in mM_{ji}mR_j\}$ . Элемент кольца формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}: \{\varphi_{ikj}\})$ , у которого компонента, находящаяся на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца равна  $r$ , а остальные компоненты равны нулю, будем обозначать через  $re_{ij}$ .

**Теорема 2.4.** Для произвольного кольца формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}: \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$  имеет место равенство

$$I(K) = \{r \in K \mid M_{ii}r_{ij}M_{js} \subset I(M_{ts})\}.$$

**Доказательство.** Обозначим множество  $\{r \in K \mid M_{ii}r_{ij}M_{js} \subset I(M_{ts})\}$  через  $I'$ . Из доказательства теоремы 5.3 из [4] следует, что  $I'$  — идеал кольца  $K$ . Покажем, что  $I(K) \subset I'$ . Так как  $e_{ii}Ke_{kj}I(K)e_{ss}Ke_{tt} \subset I(K)$ , то достаточно

показать, что у каждого элемента идеала  $I(K)$  все компоненты вполне идемпотентны справа. Пусть  $a \in I(K)$ . Тогда для каждой пары индексов  $i, j$  имеют место равенства

$$\begin{aligned} e_{ii}ae_{jj} &= e_{ii}ae_{jj} \left( \sum_{k=1}^m b_k e_{ii} a e_{jj} c_k \right) = e_{ii}ae_{jj} \left( \sum_{k=1}^m b_k e_{ii} a e_{jj} c_k e_{jj} \right), \\ a_{ij} &= a_{ij} \left( \sum_{k=1}^m (b_k)_{ji} a_{ij} (c_k)_{jj} \right). \end{aligned}$$

Покажем, что  $I' \subset I(K)$ . Предположим, что идеал  $I'$  содержит элемент, который не является вполне идемпотентным справа. Выберем в  $I'$  не вполне идемпотентный элемент  $r$ , у которого строка  $r_{11}, \dots, r_{1n}, \dots, r_{n1}, \dots, r_{nn}$  имеет наибольшее количество первых нулей. Пусть  $r_{i_0 j_0}$  — первый ненулевой элемент в этой строке. Имеет место равенство

$$r_{i_0 j_0} = r_{i_0 j_0} \sum_k a_k r_{i_0 j_0} b_k,$$

где  $a_k \in M_{j_0 i_0}$ ,  $b_k \in R_{j_0 j_0}$  для каждого  $k$ . Тогда

$$\begin{aligned} r - r \sum_k a_k e_{j_0 i_0} r b_k e_{j_0 j_0} &= \\ &= \sum_{i,j} r_{ij} e_{ij} - \left( \sum_{i,j} r_{ij} e_{ij} \right) \left( \sum_k a_k e_{j_0 i_0} \left( \sum_{i,j} r_{ij} e_{ij} \right) b_k e_{j_0 j_0} \right) = \sum_{i,j} g_{ij} e_{ij}, \end{aligned}$$

где  $g_{ij} = r_{ij}$ , если  $j \neq j_0$ , и

$$g_{i j_0} = r_{i j_0} - \sum_k r_{i j_0} a_k r_{i_0 j_0} b_k.$$

Ясно, что  $g_{ij} = 0$ , если либо  $i < i_0$ , либо  $i = i_0, j < j_0$ , либо  $i = i_0, j = j_0$ . Следовательно, в силу выбора элемента  $r$  элемент

$$r - r \sum_k a_k e_{j_0 i_0} r b_k e_{j_0 j_0}$$

является вполне идемпотентным справа. Тогда из [4, лемма 5.2] следует вполне идемпотентность элемента  $r$ , что противоречит нашим исходным предположениям.  $\square$

**Следствие 2.5.** Для кольца формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}; \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$  следующие условия равносильны:

- 1)  $K$  — вполне идемпотентное справа кольцо;
- 2) для каждой пары индексов  $1 \leq i, j \leq n$  и каждого элемента  $m \in M_{ij}$  выполнено условие  $m \in m M_{ji} m R_j$ .

Следующее утверждение вытекает из следствий 2.2 и 2.5.

**Следствие 2.6.** Для кольца формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}: \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$ , у которого для каждого  $1 \leq i \leq n$  кольцо  $R_i$  коммутативно, следующие условия равносильны:

- 1)  $K$  — вполне идемпотентное справа кольцо;
- 2)  $K$  — вполне идемпотентное слева кольцо;
- 3)  $K$  — регулярное кольцо.

**Следствие 2.7.** Пусть  $K = K_n(R: \{\eta_{ikj}\})$  — кольцо формальных матриц над  $R$  порядка  $n$ .

1. Если никакой элемент из множества  $\{\eta_{ikj}\}$  не является делителем нуля, то имеют место следующие равенства:

$$\text{а) } I(K) = \begin{pmatrix} I(R) & I(R) & \dots & I(R) \\ I(R) & I(R) & \dots & I(R) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ I(R) & I(R) & \dots & I(R) \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } \text{Reg}(K) = \begin{pmatrix} \text{Reg}(R) & \text{Reg}(R) & \dots & \text{Reg}(R) \\ \text{Reg}(R) & \text{Reg}(R) & \dots & \text{Reg}(R) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Reg}(R) & \text{Reg}(R) & \dots & \text{Reg}(R) \end{pmatrix}.$$

2.  $K$  вполне идемпотентно справа, если и только если  $R$  вполне идемпотентно справа и  $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$ .
3.  $K$  регулярно, если и только если  $R$  регулярно и  $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$ .

**Доказательство.** Для произвольных элементов  $r_1, r_2 \in R$  через  $r_1 *_{ijk} r_2$  будем обозначать выражение  $\phi_{ijk}(r_1 \otimes r_2)$ .

Докажем утверждение 1. Покажем, что выполняется равенство из пункта а). Обозначим правую часть пункта а) через  $I'$ . Включение  $I(K) \subset I'$  непосредственно следует из теоремы 2.4. Покажем, что имеет место обратное включение. Пусть  $r \in I'$ . Тогда для произвольных  $1 \leq i, j, s, t \leq n$  и  $a, b \in R$  имеют место равенства

$$ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst} = ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst} \sum_{1 \leq l \leq k} c_l ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst}d_l,$$

$$ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij} = ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij} \sum_{1 \leq l \leq k} c_l ar_{ij}b\eta_{sjt}\eta_{sij}\eta_{tst}d_l,$$

$$(a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b = ((a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b) \sum_{1 \leq l \leq k} (c_l *_{tst} ((a *_{sij} r_{ij}) *_{sjt} b))d_l.$$

Тогда согласно теореме 2.4  $r \in I(K)$ . Равенство из пункта б) доказывается аналогично.

Перейдём к доказательству утверждения 2. Докажем импликацию  $\implies$ . Из следствия 2.5 для произвольных  $1 \leq i, j \leq n$  следует равенство

$$1 = \sum_{1 \leq t \leq k} r_t *_{iji} s_t = \eta_{iji} \sum_{1 \leq t \leq k} r_t s_t.$$

Таким образом, элементы вида  $\eta_{iji}$  обратимы в  $R$ . Поскольку для каждого  $1 \leq k \leq n$  имеет место равенство  $\eta_{iji} = \eta_{ijk}\eta_{jik}$ , то  $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$ .

Импликация  $\Leftarrow$  непосредственно следует из первого пункта исходной теоремы.

Доказательство утверждения 3 аналогично доказательству утверждения 2.  $\square$

### 3. Полуартиновы и тах-кольца формальных матриц

Кольцо  $R$  называется *полуартиновым справа*, если каждый ненулевой правый  $R$ -модуль содержит простой подмодуль. Если над кольцом  $R$  каждый ненулевой правый модуль содержит максимальный подмодуль, то кольцо  $R$  называется *правым тах-кольцом*.

**Теорема 3.1 [2, теорема 4.2].** Для кольца формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

следующие условия равносильны:

- 1)  $K$  — полуартиново справа кольцо;
- 2)  $R$  и  $S$  — полуартиновы справа кольца.

**Доказательство.** Докажем импликацию 1)  $\implies$  2). Пусть  $A$  — ненулевой правый  $R$ -модуль. По условию правый  $K$ -модуль  $H(A) = (A, \text{Hom}_R(N, A))$  содержит простой подмодуль  $(X, Y)$ . Если  $X = 0$ , то для каждого  $f \in Y$  имеем  $f(N) = fN = 0$ . Следовательно,  $Y = 0$ , что невозможно. Таким образом,  $X \neq 0$ , и из простоты модуля  $(X, Y)$  следует, что  $X$  — простой подмодуль  $R$ -модуля  $A$ . Из приведённых выше рассуждений следует, что каждый ненулевой правый  $R$ -модуль содержит простой подмодуль, и следовательно,  $R$  — полуартиново справа кольцо. Аналогичными рассуждениями можно показать, что  $S$  — полуартиново справа кольцо.

Докажем импликацию 2)  $\implies$  1). Пусть  $(A, B)$  — правый  $K$ -модуль и  $(A_0, B_0)$  — его ненулевой подмодуль. Без ограничения общности можно считать, что  $A_0 \neq 0$ . Так как  $R$  и  $S$  — полуартиновы справа кольца, то  $\text{Soc}(A)$  существен в  $A$  и  $\text{Soc}(B)$  существен в  $B$ . Тогда модуль  $A_0$  содержит простой подмодуль  $aR$ , где  $a \in A_0$ .

Если  $aRM = aM = 0$ , то  $(aR, 0)$  — простой подмодуль  $K$ -модуля  $(A_0, B_0)$ . Если  $aM \neq 0$ , то из существенности подмодуля  $\text{Soc}(B)$  в модуле  $B$  следует, что  $S$ -модуль  $aM$  содержит простой подмодуль  $bS$ , где  $b \in B_0$ . Ясно, что элемент  $b$  имеет вид  $b = am$ , где  $m \in M$ . Если  $bN = 0$ , то  $(0, bS)$  — простой подмодуль  $K$ -модуля  $(A_0, B_0)$ . Если  $bN \neq 0$ , то  $bN = amN \subset aMN$  — ненулевой подмодуль простого модуля  $aR$ . Следовательно,  $bN = aR$ . Из равенства  $aRM = bNM$

и простоты модуля  $bS$  следует, что  $aRM = bS$ . Так как  $aR$  — простой  $R$ -модуль,  $bS$  — простой  $S$ -модуль и  $aRM = bS$ ,  $bSN = aR$ , то  $(aR, bS)$  — простой подмодуль  $K$ -модуля  $(A_0, B_0)$ .  $\square$

**Теорема 3.2 [2, теорема 4.3].** Для кольца формальных матриц

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix},$$

следующие условия равносильны:

- 1)  $K$  — правое тах-кольцо;
- 2)  $R$  и  $S$  — правые тах-кольца.

**Доказательство.** Докажем импликацию 1)  $\implies$  2). Пусть  $A$  — ненулевой правый  $R$ -модуль. По условию правый  $K$ -модуль  $T(A) = (A, A \otimes M)$  содержит максимальный подмодуль  $(X, Y)$ . Если  $X = A$ , то  $Y = A \otimes M$ , что невозможно. Таким образом,  $X \neq A$ , и из максимальной подмодуля  $(X, Y)$  следует, что  $X$  — максимальный подмодуль  $R$ -модуля  $A$ . Из приведённых выше рассуждений следует, что каждый ненулевой правый  $R$ -модуль содержит максимальный подмодуль, и следовательно,  $R$  — правое тах-кольцо. Аналогичными рассуждениями можно показать,  $S$  — правое тах-кольцо.

Докажем импликацию 2)  $\implies$  1). Пусть  $(A, B)$  — ненулевой правый  $K$ -модуль и  $(X, Y)$  — собственный подмодуль модуля  $(A, B)$ . Так как  $R, S$  — правые тах-кольца, то ненулевые фактор-модули модулей  $A, B$  содержат максимальные подмодули. Если  $(A/X)M \neq B/Y$ , то  $B$  обладает максимальным подмодулем  $Y'$ , таким что  $(A/X)M \subset Y'/Y$ . В этом случае несложно заметить, что модуль  $(A/X, Y'/Y)$  является максимальным подмодулем модуля  $(A/X, B/Y)$ . Если  $(B/Y)M \neq A/X$ , то аналогичными рассуждениями можно показать, что модуль  $(A/X, B/Y)$  содержит максимальный подмодуль. Предположим, что  $(A/X)M = B/Y$  и  $(B/Y)N = A/X$ . Модуль  $A$  обладает максимальным подмодулем  $A_0$ , таким что  $X \subset A_0$ . В модуле  $B$  рассмотрим подмодуль  $B_0$ , для которого выполнено равенство

$$B_0/Y = \{\bar{b} \in B/Y \mid \bar{b}N \subset A_0/X\}.$$

Ясно, что  $B_0/Y \neq B/Y$  и  $(A_0/X)M \subset B_0/Y$ . Покажем, что  $B_0$  — максимальный подмодуль  $S$ -модуля  $B$ . Пусть  $\bar{b} \notin B_0/Y$ . Тогда  $\bar{b}N \not\subset A_0/X$ , и следовательно,

$$\bar{b}N + A_0/X = A/X, \quad \bar{b}NM + (A_0/X)M = (A/X)M = B/Y.$$

Таким образом, равенство  $\bar{b}S + B_0/Y = B/Y$  выполнено для любого элемента  $\bar{b} \in (B/Y) \setminus (B_0/Y)$ , и следовательно,  $(B/Y)/(B_0/Y)$  — простой  $S$ -модуль. Поскольку

$$(A_0/X)M \subset B_0/Y, \quad (B_0/Y)N \subset A_0/X,$$

то  $(A_0/X, B_0/Y)$  — подмодуль  $T$ -модуля  $(A/X, B/Y)$ . Несложно заметить, что правый  $K$ -модуль  $((A/X)/(A_0/X), (B/Y)/(B_0/Y))$  имеет длину не больше двух. Следовательно, подмодуль  $(X, Y)$  содержится в максимальном подмодуле модуля  $(A, B)$ .  $\square$



Описание совершенных справа колец формальных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$$

было получено в [7] в случае, когда  $MN = 0$ ,  $NM = 0$ , и в [20] в случае, когда правые модули  $M_S$ ,  $N_R$  являются конечно порождёнными.

**Следствие 3.3.** *Имеют место следующие утверждения.*

1. Кольцо формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}; \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$  является полуартиновым справа (правым тах-кольцом) в точности тогда, когда  $R_i$  является полуартиновым справа кольцом (правым тах-кольцом) для каждого  $1 \leq i \leq n$ .
2. Кольцо формальных матриц  $K = K(\{M_{ij}\}; \{\varphi_{ikj}\})$  порядка  $n$  является совершенным справа в точности тогда, когда  $R_i$  является совершенным справа кольцом для каждого  $1 \leq i \leq n$ .

**Доказательство.** Утверждение 1 непосредственно следует из теорем 3.1 и 3.2. Утверждение 2 следует из [10, 6.48] и теоремы 3.1.  $\square$

#### 4. V-кольца и SV-кольца формальных матриц

Кольцо, над которым каждый простой правый модуль является инъективным, называется *правым V-кольцом*. Полуартиново справа правое V-кольцо называется *правым SV-кольцом*.

**Лемма 4.1.** *Пусть*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц, модуль  $M$   $N$ -вполне идемпотентен справа и модуль  $N$   $M$ -вполне идемпотентен справа.

1. Если  $(A_0, B_0)$  — подмодуль  $K$ -модуля  $(A, B)$ , то следующие условия равносильны:
  - а)  $(A_0, B_0)$  — существенный подмодуль  $K$ -модуля  $(A, B)$ ;
  - б) подмодуль  $A_0$  существует в  $R$ -модуле  $A$  и подмодуль  $B_0$  существует в  $S$ -модуле  $B$ .
2. Если  $A$  — простой правый  $R$ -модуль, то правый  $K$ -модуль  $T(A)$  также является простым.
3. Если  $A$  — простой правый  $R$ -модуль и  $T(A)$  — инъективный правый  $K$ -модуль, то модуль  $A$  инъективен.

**Доказательство.** Докажем утверждение 1. Докажем импликацию а)  $\implies$  б). Пусть  $a$  — ненулевой элемент модуля  $A$ . Так как  $(A_0, B_0)$  — существенный подмодуль  $K$ -модуля  $(A, B)$ , то для некоторого элемента

$$\begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix}$$

из  $K$  имеем

$$(a, 0) \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \in (A_0, B_0) \setminus \{(0, 0)\}.$$

Тогда  $ar \in A_0$ ,  $am \in B_0$ . Если  $ar \neq 0$ , то  $aR \cap A_0 \neq 0$ . Предположим, что  $ar = 0$ . Тогда  $am \neq 0$ . Так как по условию  $m \in mNmS$ , то  $amN \neq 0$ . Поскольку  $B_0N \subset A_0$ , то  $amN \subset A_0 \cap aR$ . Из приведённых выше рассуждений следует, что  $aR \cap A_0 \neq 0$ . Таким образом, подмодуль  $A_0$  существует в модуле  $A$ . Аналогично показывается существование подмодуля  $B_0$  в модуле  $B$ .

Импликация б)  $\implies$  а) проверяется непосредственно.

Докажем утверждение 2. Пусть  $A = aR$ . Покажем, что  $T(aR)$  — простой правый  $K$ -модуль. Если  $aR \otimes M = 0$ , то простота модуля  $T(aR)$  очевидна. Предположим, что  $aR \otimes M \neq 0$ . Покажем, что  $aR \otimes M = a \otimes M$  — простой правый  $S$ -модуль. Пусть  $a \otimes m$  — произвольный ненулевой элемент из  $a \otimes M$ . Если  $(a \otimes m)N = 0$ , то  $amN = 0$ . Так как  $M$   $N$ -вполне идемпотентен справа, то имеет место равенство вида

$$m = m \sum_{i=1}^k n_i m s_i,$$

где  $s_i \in S$ ,  $n_i \in N$  для каждого  $1 \leq i \leq k$ . Тогда

$$a \otimes m = a \otimes \left( m \sum_{i=1}^k n_i m s_i \right) = \sum_{i=1}^k (am n_i \otimes m s_i) = 0,$$

что противоречит выбору элемента  $a \otimes m$ . Таким образом,  $(a \otimes m)N \neq 0$ , и в силу простоты модуля  $aR$  имеем

$$aR = (a \otimes m)N = amN, \quad aR \otimes M = amN \otimes M = a \otimes mNM \subset a \otimes mS.$$

Тогда для произвольного ненулевого элемента  $a \otimes m$  из правого  $S$ -модуля  $a \otimes M$  имеет место равенство  $a \otimes M = a \otimes mS$ , следовательно, модуль  $a \otimes M$  прост. Так как  $(a \otimes M)N = aR$ ,  $(aR)M = aR \otimes M$ , то  $T(aR)$  — простой правый  $K$ -модуль.

Докажем утверждение 3. Пусть  $B$  — правый  $R$ -модуль, являющийся существенным расширением модуля  $A$ . Вложение  $\varepsilon: A \rightarrow B$  модуля  $A$  в модуль  $B$  индуцирует гомоморфизм  $K$ -модулей  $T(\varepsilon): T(A) \rightarrow T(B)$ . Так как согласно утверждению 2  $T(A)$  — простой модуль и  $T(\varepsilon) \neq 0$ , то  $T(\varepsilon)$  — мономорфизм. Поскольку по условию  $T(A)$  — инъективный правый  $K$ -модуль, то  $T(A)$  — прямое слагаемое модуля  $T(B)$ . Тогда  $A$  — прямое слагаемое модуля  $B$ , и следовательно,  $A = B$ . Таким образом,  $A$  — инъективный модуль.  $\square$

**Теорема 4.2.** Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Тогда следующие условия равносильны:

- 1)  $K$  — правое  $V$ -кольцо;

- 2)  $R$  и  $S$  — правые  $V$ -кольца, модуль  $M$   $N$ -вполне идемпотентен справа и модуль  $N$   $M$ -вполне идемпотентен справа.

**Доказательство.** Докажем импликацию 1)  $\implies$  2). Тот факт, что модуль  $M$   $N$ -вполне идемпотентен справа и модуль  $N$   $M$ -вполне идемпотентен справа следует из [4, следствия 6.9, 7.8].

Пусть  $A$  — простой правый  $R$ -модуль. Из леммы 4.1 следует, что правый  $K$ -модуль  $T(A)$  является простым. Так как  $K$  — правое  $V$ -кольцо, то  $T(A)$  — инъективный модуль. Тогда из леммы 4.1 следует инъективность  $R$ -модуля  $A$ . Таким образом  $R$  —  $V$ -кольцо.

Аналогично показывается, что  $S$  —  $V$ -кольцо.

Докажем импликацию 2)  $\implies$  1). Пусть  $(B_1, B_2)$  —  $K$ -модуль и  $(A_1, A_2)$  — его простой существенный подмодуль. Тогда из леммы 4.1 следует, что  $A_i$  — существенный подмодуль модуля  $B_i$  и  $A_i$  — либо простой, либо нулевой модуль для каждого  $1 \leq i \leq 2$ . Тогда из условия следуют равенства  $A_1 = B_1$ ,  $A_2 = B_2$ . Таким образом,  $K$  — правое  $V$ -кольцо.  $\square$

**Следствие 4.3.** Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Если  $R, S$  — коммутативные кольца, то следующие условия равносильны:

- 1)  $K$  — правое  $V$ -кольцо;
- 2)  $K$  — регулярное кольцо.

**Доказательство.** Докажем импликацию 1)  $\implies$  2). Из теоремы 4.2 и [23, 22.4] следует, что  $R, S$  — регулярные кольца, модуль  $M$   $N$ -вполне идемпотентен справа и модуль  $N$   $M$ -вполне идемпотентен справа. Тогда для произвольного элемента  $m \in M$  имеют место равенства

$$m = m \sum_{i=1}^k n_i m s_i = m \sum_{i=1}^k s_i n_i m = m \left( \sum_{i=1}^k s_i n_i \right) m,$$

где  $s_i \in S$ ,  $n_i \in N$  для каждого  $1 \leq i \leq k$ . Таким образом, модуль  $M$   $N$ -регулярен. Аналогично можно показать, что модуль  $N$   $M$ -регулярен. Тогда из следствия 2.2 следует, что  $K$  — регулярное кольцо.

Импликация 2)  $\implies$  1) следует из теоремы 4.2 и [23, 22.4].  $\square$

**Теорема 4.4.** Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Тогда следующие условия равносильны:

- 1)  $K$  — правое  $SV$ -кольцо;
- 2)  $R$  и  $S$  — правые  $SV$ -кольца, модуль  $M$   $N$ -регулярен и модуль  $N$   $M$ -регулярен;

- 3)  $R$  и  $S$  — правые  $SV$ -кольца, модуль  $M$   $N$ -вполне идемпотентен справа и модуль  $N$   $M$ -вполне идемпотентен справа.

**Доказательство.** Докажем импликацию 1)  $\implies$  2). Из теорем 3.1 и 4.2 следует, что  $R$  и  $S$  — правые  $SV$ -кольца. Согласно [11, теорема 2.7]  $K$  — регулярное кольцо. Следовательно, модуль  $M$   $N$ -регулярен и модуль  $N$   $M$ -регулярен.

Импликация 2)  $\implies$  3) проверяется непосредственно.

Импликация 3)  $\implies$  1) следует из теорем 3.1 и 4.2.  $\square$

**Замечание.** Теоремы 4.2 и 4.4 впервые были опубликованы в [1].

**Следствие 4.5.** Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Если  $K$  — регулярное кольцо, то следующие условия равносильны:

- 1)  $K$  — правое  $SV$ -кольцо;
- 2)  $R$  и  $S$  — правые  $SV$ -кольца.

**Следствие 4.6.** Пусть  $P$  — конечно порождённый проективный правый  $R$ -модуль и  $S = \text{End}_R(P)$ . Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Если  $R$  — правое  $V$ -кольцо, то  $S$  — правое  $V$ -кольцо.
2. Если  $R$  — правое  $\text{max}$ -кольцо, то  $S$  — правое  $\text{max}$ -кольцо.
3. Если  $R$  — правое  $SV$ -кольцо, то  $S$  — правое  $SV$ -кольцо.
4. Если  $R$  — правое полуартиново кольцо, то  $S$  — правое полуартиново кольцо.

**Доказательство.** Докажем первое утверждение. Существует проективный правый  $R$ -модуль  $P'$ , такой что для некоторого натурального числа  $n$  имеет место изоморфизм  $R^n \cong P \oplus P'$ . Тогда для некоторого идемпотента  $e \in M_n(R)$  имеет место изоморфизм колец  $eM_n(R)e \cong S$ . Так как свойство быть правым  $V$ -кольцом инвариантно в смысле Мориты, то  $M_n(R)$  — правое  $V$ -кольцо. Тогда из теоремы 4.2 следует, что  $S$  — правое  $V$ -кольцо.

Утверждения пунктов 2), 3), 4) доказываются аналогично с помощью теорем 3.2, 4.4 и 3.1 соответственно.  $\square$

**Следствие 4.7.** Пусть  $K = K_n(R; \{\eta_{ikj}\})$  — кольцо формальных матриц над  $R$  порядка  $n$ .

1.  $K$  — правое  $V$ -кольцо тогда и только тогда, когда  $R$  — правое  $V$ -кольцо и  $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$ .
2.  $K$  — полуартиново справа кольцо тогда и только тогда, когда  $R$  — полуартиново справа кольцо.
3.  $K$  — правое  $\text{max}$ -кольцо тогда и только тогда, когда  $R$  — правое  $\text{max}$ -кольцо.

4.  $K$  — правое  $SV$ -кольцо тогда и только тогда, когда  $R$  — правое  $SV$ -кольцо и  $\{\eta_{ikj}\} \subset U(R)$ .

Если  $M$  — правый  $R$ -модуль, то через

$$\begin{pmatrix} R & \text{Hom}_R(M, R) \\ M & \text{End}_R(M) \end{pmatrix}$$

мы будем обозначать кольцо формальных матриц, у которого бимодульные гомоморфизмы

$$\varphi: \text{Hom}_R(M, R) \otimes_{\text{End}_R(M)} M \rightarrow R, \quad \psi: M \otimes_R \text{Hom}_R(M, R) \rightarrow \text{End}_R(M)$$

задаются соответственно согласно следующим правилам:

$$m \otimes f \mapsto (m' \mapsto mf(m')), \quad f \otimes m \mapsto f(m).$$

**Следствие 4.8.** Пусть  $R$  — правое  $SV$ -кольцо и  $M$  — конечно порождённый правый модуль над ним. Тогда следующие условия равносильны:

- 1)  $K = \begin{pmatrix} R & \text{Hom}_R(M, R) \\ M & \text{End}_R(M) \end{pmatrix}$  — правое  $SV$ -кольцо;
- 2)  $M$  — проективный правый  $R$ -модуль.

**Доказательство.** Докажем импликацию 1)  $\implies$  2). Из теоремы 4.4 следует, что модуль  $M$  является  $\text{Hom}_R(M, R)$ -регулярным. Тогда из [24, следствие 1.7] следует, что  $M$  — проективный модуль.

Докажем импликацию 2)  $\implies$  1). Согласно [11, теорема 2.7]  $R$  — регулярное кольцо. Из конечной порождённости модуля  $M$  и условия пункта 2) следует, что  $\text{Hom}_R(M, R)$  — проективный левый  $R$ -модуль. Следовательно, согласно [24, теорема 2.8] правый  $R$ -модуль  $M$  и левый  $R$ -модуль  $\text{Hom}_R(M, R)$  являются регулярными. Из канонического изоморфизма правых  $R$ -модулей  $M \cong \text{Hom}_R(\text{Hom}_R(M, R), R)$  следует, что модуль  $M$   $\text{Hom}_R(M, R)$ -регулярен и модуль  $\text{Hom}_R(M, R)$   $M$ -регулярен. Тогда из следствия 4.6 и теоремы 4.4 следует, что  $K$  — правое  $SV$ -кольцо.  $\square$

## 5. Чистые кольца и проблема изоморфизма для колец формальных матриц

Кольцо называется *чистым*, если любой его элемент является суммой обратимого элемента и идемпотента. Кольцо  $R$  называется *строго чистым* (однозначно *строго чистым*), если каждый его элемент  $r$  представим (соответственно однозначно представим) в виде  $r = e + u$ , где  $e = e^2$ ,  $u \in U(R)$ ,  $eu = ue$ . Кольцо  $R$  называется *строго ниль-чистым*, если каждый его элемент  $r$  представим в виде  $r = e + n$ , где  $e = e^2$ ,  $n$  — нильпотентный элемент и  $en = ne$ . Из [14, предложения 2.5, 2.6, следствия 3.11, 3.26] следует, что всякое строго ниль-чистое кольцо является однозначно строго чистым.

**Теорема 5.1.** Пусть  $F$  — поле. Тогда кольцо формальных матриц  $K = K_n(F: \{\eta_{ikj}\})$  является ниль-чистым в точности тогда, когда  $F \cong F_2$ .

**Доказательство.** Несложно показать, что  $K/J(K) \cong M_{n_1}(F) \times \dots \times M_{n_k}(F)$ , где  $n_1 + \dots + n_k = n$ . Тогда утверждение исходной теоремы следует из [12, теорема 3; 14, теорема 3.15].  $\square$

**Теорема 5.2.** Пусть  $R$  — произвольное кольцо. Тогда кольцо формальных матриц  $K = K_n(R: \{\eta_{ikj}\})$  является строго ниль-чистым в точности тогда, когда  $R$  — строго ниль-чистое кольцо и каждый элемент из множества  $\{\eta_{iji} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$  является нильпотентным.

**Доказательство.** Докажем импликацию  $\implies$ . Так как всякое строго ниль-чистое кольцо является однозначно строго чистым кольцом, то из [13, следствие 18] следует, что  $K/J(K)$  — булево кольцо, и следовательно,  $\{\eta_{iji} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} \subset J(R)$ . Согласно [14, следствие 3.26]  $R$  — строго ниль-чистое кольцо, и из [14, следствие 3.17] следует, что  $J(R)$  — ниль-идеал.

Докажем импликацию  $\impliedby$ . Ясно, что

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & R & \dots & R \\ R & J(R) & \dots & R \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R & R & \dots & J(R) \end{pmatrix}.$$

Так как согласно [14, следствие 3.17]  $J(R)$  — ниль-идеал и каждый элемент из множества  $\{\eta_{iji} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$  является нильпотентным, то несложно заметить, что всякая матрица из  $J(K)$  является нильпотентной. Так как

$$K/J(K) \cong R/J(R) \times \dots \times R/J(R),$$

то  $K/J(K)$  — строго ниль-чистое кольца, и из [14, следствие 3.22] следует, что  $K$  — строго ниль-чистое кольцо.  $\square$

Следующая гипотеза при  $n = 2$  была доказана в [22].

**Гипотеза.** Пусть  $R$  — коммутативное локальное кольцо. Если каждый элемент из множества  $\{\eta_{iji} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}$  нильпотентный, то кольцо формальных матриц  $K = K_n(R: \{\eta_{ikj}\})$  строго чистое.

В последнее время активно изучается проблема изоморфизма для колец формальных матриц, которая имеет следующую формулировку: для двух данных наборов  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ ,  $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$  элементов коммутативного кольца  $R$  определить условия, при которых имеет место изоморфизм

$$\mathbb{M}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}(R).$$

Изучение проблемы изоморфизма была инициировано в [6].

**Теорема 5.3 [6].** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо,  $s$  и  $t$  — некоторые его элементы, причём хотя бы один из них не является делителем нуля. Кольца  $K_s$  и  $K_t$  изоморфны в точности тогда, когда существуют обратимый элемент  $v \in R$  и автоморфизм  $\alpha$  кольца  $R$ , такие что  $t = v\alpha(s)$ .

Проблема изоморфизма изучалась в [2, 3, 8, 20–22]. Ниже приведены результаты для колец формальных матриц вида  $\mathbb{M}_{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n}(R)$ , полученные в [2].

**Теорема 5.4.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо,  $n \geq 3$ ,  $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in R$  и  $\text{ann}_R(\beta) \subseteq J(R)$ . Тогда

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, 0, \dots, 0}_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}(R),$$

если и только если  $\gamma_i = \alpha(\beta)v_i a_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ , где  $\alpha \in \text{Aut}(R)$ ,  $v_i \in U(R)$  и  $1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  — разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов  $a_i$ .

**Следствие 5.5.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо,  $n \geq 3$ ,  $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in R$  и

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, 0, \dots, 0}_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}(R).$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Если  $\beta$  не является делителем нуля в кольце  $R$ , то найдутся  $\alpha \in \text{Aut}(R)$ ,  $v_1, \dots, v_n \in U(R)$  и разложение единицы  $1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , такие что  $\gamma_i = \alpha(\beta)v_i a_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .
2. Если  $R$  — область, то найдутся  $\alpha \in \text{Aut}(R)$ ,  $v \in U(R)$ , такие что для некоторого  $1 \leq i \leq n$  выполнены условия  $\gamma_i = \alpha(\beta)v$  и  $\gamma_j = 0$ , если  $i \neq j$ .

**Теорема 5.6.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо,  $n \geq 3$ ,  $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in R$  и  $\text{ann}_R(\beta^2) \subseteq J(R)$ . Тогда

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}(R),$$

если и только если  $\gamma_i = \alpha(\beta)v_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ , где  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  и  $v_i \in U(R)$ .

**Теорема 5.7.** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо, такое что  $Z(R) \subseteq J(R)$ ,  $n \geq 3$  и  $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in R$ . Тогда

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}(R),$$

если и только если  $\gamma_i = \alpha(\beta)v_i$  для всех  $i = \overline{1, n}$ , где  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  и  $v_i \in U(R)$ .

**Следствие 5.8 [21, теорема 18].** Пусть  $R$  — коммутативное кольцо, такое что  $Z(R) \subseteq J(R)$  и  $n \geq 3$ . Тогда

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, \dots, \beta}_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma, \gamma, \dots, \gamma}(R),$$

если и только если  $\gamma = \alpha(\beta)v$ , где  $\alpha \in \text{Aut}(R)$  и  $v \in U(R)$ .

**Гипотеза.** Пусть  $R$  — тело и  $K = K_n(R: \{\eta_{ikj}\})$  — произвольное кольцо формальных матриц над  $R$ . Тогда имеет место изоморфизм  $K \cong K_n(R: \{\theta_{ikj}\})$ , где  $\{\theta_{ikj}\} \subset \{0, 1\}$ .

## Литература

- [1] Абызов А. Н. Кольца формальных матриц, близкие к регулярным // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2015. — Вып. 10. — С. 57–60.
- [2] Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. Кольца формальных матриц и их изоморфизмы // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 6. — С. 1199–1214.
- [3] Абызов А. Н., Тапкин Д. Т. О некоторых классах колец формальных матриц // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2015. — Вып. 3. — С. 3–14.
- [4] Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 7. — С. 3–38.
- [5] Буданов А. В. Об идеалах колец обобщённых матриц // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, № 1. — С. 3–10.
- [6] Крылов П. А. Об изоморфизме колец обобщённых матриц // Алгебра и логика. — 2008. — Т. 47, № 4. — С. 456–463.
- [7] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над кольцами формальных матриц // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 8. — С. 145–211
- [8] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Формальные матрицы и их определители // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 1. — С. 65–119
- [9] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Группы Гротендика и Уайтхеда колец формальных матриц // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 1. — С. 169–198
- [10] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.
- [11] Baccella G. Semi-Artinian V-rings and semi-Artinian Von Neumann regular rings // J. Algebra. — 1995. — Vol. 173. — P. 587–612.
- [12] Breaz S., Calugareanu G., Danchev P., Micu T. Nil-clean matrix rings // Linear Algebra Appl. — 2013. — Vol. 439. — P. 3115–3119.
- [13] Chen J., Wang Z., Zhou Y. Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit that commute // J. Pure Appl. Algebra. — 2009. — Vol. 213, no. 2. — P. 215–223.
- [14] Diesl A. J. Nil-clean rings // J. Algebra. — 2013. — Vol. 383. — P. 197–211.
- [15] Haghany A. Injectivity conditions over a formal triangular matrix ring // Arch. Math. — 2002. — Vol. 78. — P. 268–274.
- [16] Haghany A., Mazrooei M., Vedadi M. R. Pure projectivity and pure injectivity over formal triangular matrix rings // J. Algebra Its Appl. — 2012. — Vol. 11, no. 6. — P. 1250107.
- [17] Haghany A., Varadarajan K. Study of formal triangular matrix rings // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27, no. 11. — P. 5507–5525.
- [18] Haghany A., Varadarajan K. Study of modules over formal triangular matrix rings // J. Pure Appl. Algebra. — 2000. — Vol. 147, no. 1. — P. 41–58.
- [19] Keskin-Tütüncü D., Kalebogaz B. A study on semi-projective covers, semi-projective modules and formal triangular matrix rings // Palestine J. Math. — 2014. — Vol. 3 (Spec. 1). — P. 374–382.
- [20] Tang G., Li C., Zhou Y. Study of Morita contexts // Commun. Algebra. — 2014. — Vol. 42. — P. 1668–1681.



- [21] Tang G., Zhou Y. A class of formal matrix rings // *Linear Algebra Appl.* — 2013. — Vol. 438. — P. 4672—4688.
- [22] Tang G., Zhou Y. Strong cleanness of generalized matrix rings over a local ring // *Linear Algebra Its Appl.* — 2012. — Vol. 437. — P. 2546—2559.
- [23] Tuganbaev A. A. *Rings Close to Regular.* — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.
- [24] Zelmanowitz J. Regular modules // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1972. — Vol. 163. — P. 341—355.
- [25] Zhou Y. On (semi)regularity and the total of rings and modules // *J. Algebra.* — 2009. — Vol. 322. — P. 562—578.

